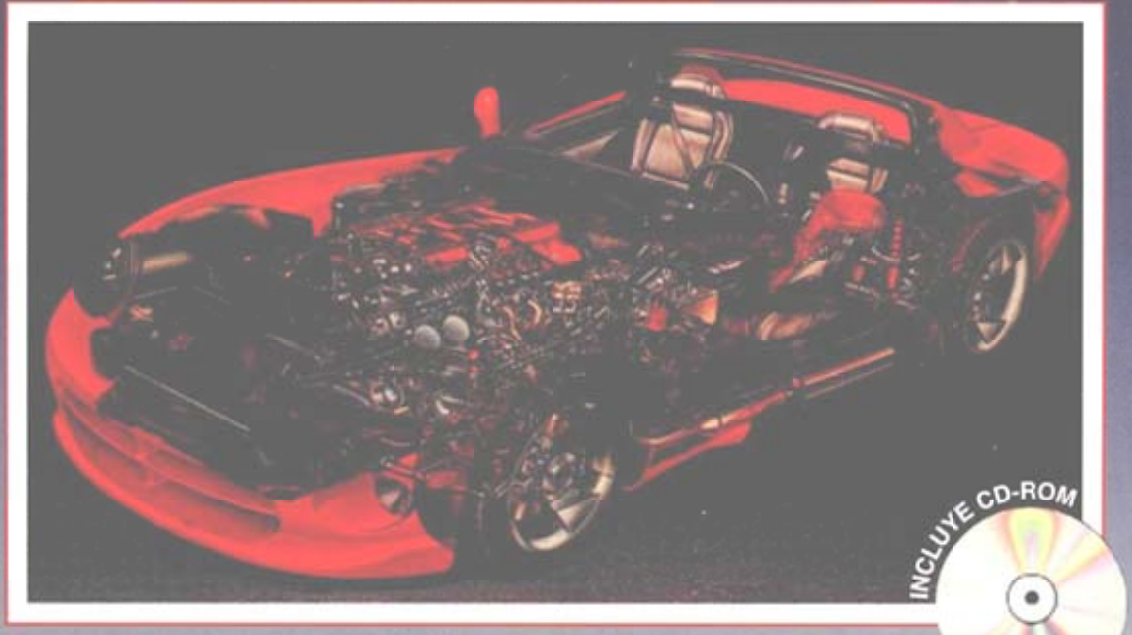
Diseño de Maquinaria

Robert L. Norton

Segunda edición



Mc Graw Hill

FACTORES DE CONVERSIÓN

De unidades usuales en Estados Unidos a unidades métricas

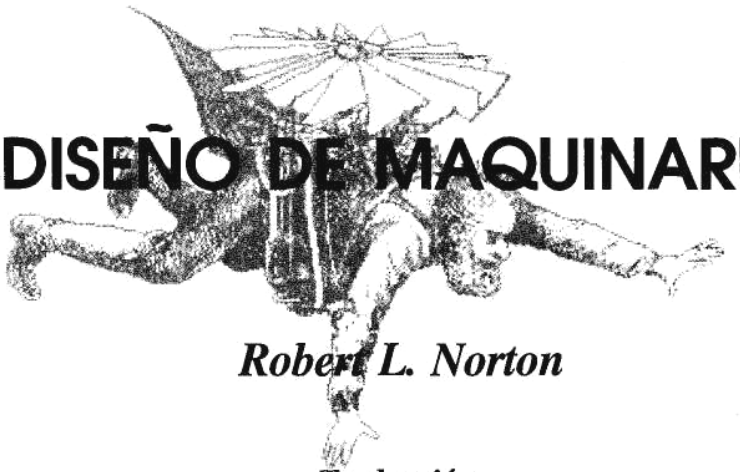
1 Blob (bl)	=	175.127	Kilogramos (kg)
1 Pulgada cúbica (pulg^3)	=	16.387	Centímetros cúbicos (cc)
1 Pie (pie)	=	0.3048	Metros (m)
1 Caballo de fuerza (hp)	=	745.699	Watts (W)
1 Pulgada (pulg)	=	0.0254	Metros (m)
1 Milla terrestre estadunidense (mi)	=	1 609.344	Metros (m)
1 Libra fuerza (lb)	=	4.4482	Newtons (N)
	=	444 822.2	Dinas
1 Libra masa (lbm)	=	0.4536	Kilogramos (kg)
1 Libra-pie (lb-pie)	=	1.3558	Newton-metros (N-m)
	=	1.3558	Joules (J)
1 Libra-pie/segundo (lb-pie/s)	=	1.3558	Watts (W)
1 Libra-pulgada (lb-pulg)	=	0.1128	Newtons-metro (N-m)
	=	0.1128	Joules (J)
1 Libra-pulg/segundo (lb-pulg/s)	=	0.1128	Watts (W)
1 Libra/pie^2 (lb/pie^2)	=	47.8803	Pascales (Pa)
1 Libra/pulgada^2 (lb/pulg^2), (psi)	=	6 894.757	Pascales (Pa)
1 Revolución/minuto (rpm)	=	0.1047	Radianes/segundo (rad/s)
1 Slug (sl)		14.5939	Kilogramos (kg)
1 Tonelada corta (2 000 lbm)		907.1847	Kilogramos (kg)

Entre unidades en Estados L

1 Blob (bl)	12	Slugs (sl)
1 Pie (pie)	12	Pulgadas (pulg)
1 Caballo de fuerza (hp)	550	Libras-pie/segundo (lb-pie/s)
1 Nudo	1.1515	Millas/hora (mph)
1 Milla terrestre estadunidense (mi)	5 280	Pies (pie)
1 Milla/hora	1.4667	Pies/s (pie/s)
1 Libra fuerza (lb)	16	Onzas (oz)
1 Libra masa (lbm)	0.0311	Slugs (sl)
1 Libra-pie (lb-pie)	12	Libras-pulgada (lb-pulg)
1 Libra-pie/segundo (lb-pie/s)	0.001818	Caballos de fuerza (hp)
1 Libra-pulgada (lb-pulg)	0.0833	Libra-pie (lb-pie)
1 Libra-pulgada/segundo (lb-pulg/s)	0.0218	Caballos de fuerza (hp)
1 Libra/pulgada^2 (lb/pulg^2), (psi)	144	Libras/pie^2 (lb/pie^2)
1 Radián/segundo (rad/s)	9.549	Revoluciones/minuto (rpm)
1 Slug (sl)	32.174	Libras masa (lbm)
1 Tonelada corta	2 000	Libras masa (lbm)

TIPO TRAMITE :REGISTRO DE OBRA
PRESENTACION: VARIOS
No. REGISTRO: 03-2001-051110492500-01
TITULO : DISE%O DE MAQUINARIA 2A. EDICION

DISEÑO DE MAQUINARIA



DISEÑO DE MAQUINARIA

Robert L. Norton

Traducción:

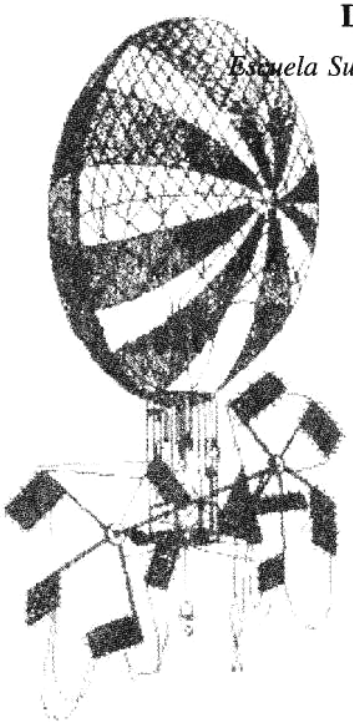
Dra. Ana Elizabeth García Hernández

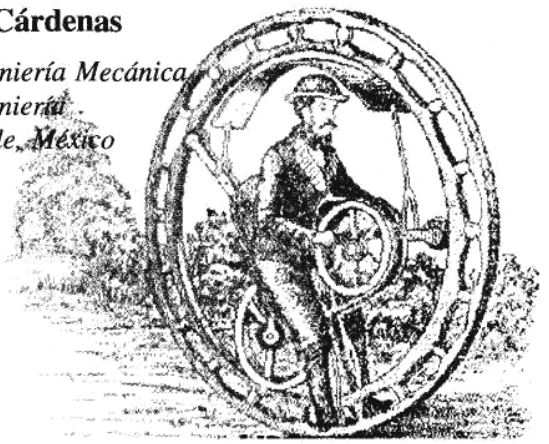
Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas
Instituto Politécnico Nacional

Revisión técnica:

Ing. Javier León Cárdenas

Jefe de la Carrera de Ingeniería Mecánica
Escuela de Ingeniería
Universidad La Salle, México





McGRAW-HILL

MÉXICO • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MADRID
NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTAFÉ DE BOGOTÁ • SANTIAGO • SAO PAULO
AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO
SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Gerente de producto: Sergio Cervantes González
Supervisor de edición: Felipe Hernández Carrasco
Supervisor de producción: Zeferino García García

DISEÑO DE MAQUINARIA

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin autorización escrita del editor.

DERECHOS RESERVADOS © 2000, respecto a la primera edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V. *A Subsidiary of*
*The **McGraw-Hill** Companies, Inc.*
Cedro Núm. 512, Col. Atlampa
Delegación Cuauhtémoc
06450 México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN 970-10-2655-1

Translated of the second edition in English of
DESIGN OF MACHINERY, AN INTRODUCTION TO THE SYNTHESIS AND ANALYSIS
OF MECHANISMS AND MACHINES,
ROBERT L. NORTON
Copyright © MCMXCIX, by The McGraw-Hill Companies, Inc.
All rights reserved
ISBN 0-07-048395-7
ISBN 0-07-913272-3 (set)
ISBN 0-04-847978-9 (CD-ROM)

1234567890 09876543210

Impreso en México Printed in México

Esta obra se terminó de
imprimir en Agosto del 2000 en
Programas Educativos S.A. de C.V.
Calz Chabacano No. 6S-A
Col. Asturias Delg. Cuauhtémoc
C.P. 06850 México. D.F.
Empresa certificada por el Instituto Mexicano
de Normalización y Certificación A.C. bajo la
Norma ISO-9002 1994/NMX-CC-004 1995 con
El núm. de registro RSC-048

Se tiraron 8,000 ejemplares

ACERCA DEL AUTOR

Robert L. Norton se graduó en ingeniería mecánica y en tecnología industrial en Northeastern University, y obtuvo una maestría en diseño en ingeniería en Tufts University. También es ingeniero profesional con registro en Massachusetts y New Hampshire. Tiene una amplia experiencia industrial en ingeniería de diseño y manufactura. Así mismo, cuenta con muchos años de experiencia en la enseñanza de ingeniería mecánica, diseño en ingeniería, computación y materias relacionadas, en Northeastern University, Tufts University y Worcester Polytechnic Institute. Durante diez años diseñó en Polaroid Corporation cámaras fotográficas y mecanismos relacionados, además de maquinaria automatizada de alta velocidad. Trabajó tres años en la empresa Jet Spray Cooler Inc., de Waltham, Mass., en el diseño de maquinaria y productos para el manejo de alimentos. Durante cinco años ayudó a desarrollar dispositivos de corazón artificial y del tipo de no invasivos auxiliados por la circulación (contrapulsación) en el Tufts New England Medical Center y en el Boston City Hospital. Desde que se retiró de la industria para dedicarse a la docencia, ha continuado laborando independientemente como ingeniero consultor en proyectos de ingeniería, que van desde productos médicos desechables hasta maquinaria de producción de alta velocidad. Es el titular de 13 patentes de invención en Estados Unidos.

Norton ha sido docente del Worcester Polytechnic Institute desde 1981 y actualmente es catedrático de ingeniería mecánica y jefe del grupo de diseño de este departamento. Imparte cursos de licenciatura y posgrado en ingeniería mecánica, con especialidad en diseño, cinemática y dinámica de maquinaria. Es autor de numerosos ensayos y artículos técnicos para diversas publicaciones, referentes a cinemática, dinámica de maquinaria, diseño y manufactura de levas, aplicación educativa de las computadoras y educación en ingeniería, y del texto *Machine Design: An integrated Approach.* Pertenece a la American Society of Mechanical Engineers y es miembro de la Society of Automotive Engineers.

Puede decirse que los rumores acerca del trasplante de un microprocesador Pentium en su cerebro definitivamente no son ciertos (aunque él podría usar alguna RAM adicional). Con respecto al anillo de inobtenio,* esto forma parte de otra historia.

* Véase el índice.

Este libro está dedicado a la memoria de mi padre,

Harry J. Norton, Sr.

quien encendió en un joven el interés por la ingeniería;

a la memoria de mi madre,

Kathryn W. Norton

quien hizo posible esto;

a mi esposa,

Nancy Norton

quien proporcionó una inquebrantable paciencia y apoyo;

a mis hijos,

Robert, Mary y Thomas,

quienes hicieron que todo esto valiera la pena.

CONTENIDO

Prefacio a la segunda edición xxi

Prefacio a la primera edición xxiii

PARTE I CINEMÁTICA DE MECANISMOS 1

Capítulo 1 Introducción 3

1.0 Objetivo 3
1.1 Cinemática y cinética 3
1.2 Mecanismos y máquinas 4
1.3 Breve historia de la cinemática 5
1.4 Aplicaciones de la cinemática 6
1.5 El proceso de diseño 8
Diseño, Invención, creatividad 8
Identificación de la necesidad 9
Investigación preliminar 9
Planteamiento de la meta 9
Especificaciones de funcionamiento 10
Ideación e invención 10
Análisis 12
Selección 12
Diseño detallado 13
Prototipos y pruebas 13
Producción 14
1.6 Otros enfoques del diseño 15
Diseño axiomático 15
1.7 Soluciones múltiples 16
1.8 Factores humanos en la ingeniería 16
1.9 El reporte en ingeniería 17
1.10 Unidades 17
1.11 Lo que viene 19
1.12 Referencias 20
1.13 Bibliografía 21

Capítulo 2 Fundamentos de cinemática 24

2.0 Introducción 24
2.1 Grados de libertad (GDL) 24
2.2 Tipos de movimiento 25
2.3 Eslabones, juntas y cadenas cinemáticas 26
2.4 Determinación del grado de libertad 30
Grados de libertad en mecanismos en un plano 37
Grados de libertad en mecanismos espaciales 33
2.5 Mecanismos y estructuras 33
2.6 Síntesis numérica 36
2.7 Paradojas 39
2.8 Isómeros 40

2.9 Transformación de eslabonamientos ... 43
2.10 Movimiento intermitente ... 46
2.11 Inversión ... 48
2.12 La condición de Grashof ... 49
Clasificación del eslabonamiento de cuatro barras ... 54
2.13 Eslabonamientos de más de cuatro barras ... 56
Eslabonamientos con engranaje de cinco barras ... 56
Eslabonamientos de seis barras ... 57
Criterio de rotabilidad de tipo Grashof para eslabonamientos de orden superior ... 58
2.14 Los resortes como eslabones ... 59
2.15 Consideraciones prácticas ... 60
Juntas de pasador versus *correderas y semijuntas ... 60*
¿Viga en voladizo o viga en doble voladizo? ... 63
Eslabones cortos ... 63
Relación de apoyo ... 63
Eslabonamientos versus *levas ... 65*
2.16 Motores e impulsores ... 65
Motores eléctricos ... 65
Motores neumáticos e hidráulicos ... 71
Cilindros neumáticos e hidráulicos ... 71
Solenoides ... 71
2.17 Referencias ... 72
2.18 Problemas ... 73

Capítulo 3 Síntesis gráfica de eslabonamientos ... 83

3.0 Introducción ... 83
3.1 Síntesis ... 83
3.2 Generación de función, trayectoria y movimiento ... 86
3.3 Condiciones límite ... 87
3.4 Síntesis dimensional ... 90
Síntesis de dos posiciones ... 91
Síntesis de tres posiciones con pivotes móviles especificados ... 97
Síntesis de tres posiciones con pivotes móviles alternos ... 98
Síntesis de tres posiciones con pivotes fijos especificados ... 107
Síntesis posicional para más de tres posiciones ... 105
3.5 Mecanismos de retorno rápido ... 106
Mecanismo de retorno rápido de cuatro barras ... 106
Mecanismo de retorno rápido de seis barras ... 108
3.6 Curvas de acoplador ... 112
3.7 Cognados ... 122
Movimiento paralelo ... 127
Cognados de cinco barras con engranaje de un eslabonamiento de cuatro barras ... 129
3.8 Mecanismos para movimiento rectilíneo ... 130
Diseño óptimo para eslabonamientos de cuatro barras en línea recta ... 132
3.9 Mecanismos con detenimiento ... 137
Eslabonamientos con un solo detenimiento ... 137
Eslabonamientos con doble detenimiento ... 140

3.10 Referencias 142
3.11 Bibliografía 143
3.12 Problemas 144
3.13 Proyectos 153

Capitulo 4 Análisis de posición 158

4.0 Introducción 158
4.1 Sistemas de coordenadas 160
4.2 Posición y desplazamiento 160
Posición 160
Desplazamiento 161
4.3 Traslación, rotación y movimiento complejo 163
Traslación 163
Rotación 163
Movimiento complejo 164
Teoremas 165
4.4 Análisis gráfico de posición de eslabonamientos 165
4.5 Análisis algebraico de posición de eslabonamientos 167
Representación del lazo vectorial de eslabonamientos 168
Los números complejos como vectores 169
La ecuación de lazo vectorial para un eslabonamiento de cuatro barras 170
4.6 La solución de posición en el eslabonamiento de la manivela-corredera de cuatro barras 174
4.7 Solución de posición con manivela-corredera invertida 176
4.8 Eslabonamientos con más de cuatro barras 179
El eslabonamiento de cinco barras con engranaje 179
Eslabonamientos de seis barras 182
4.9 Posición de un punto cualquiera en un eslabonamiento 183
4.10 Ángulos de transmisión 184
Valores extremos del ángulo de transmisión 165
4.11 Posiciones de agarrotamiento 187
4.12 Circuitos y ramas en eslabonamientos 188
4.13 Método de solución de Newton-Raphson 189
Determinación unidimensional de raíces (método deNewton) 190
Determinación multidimensional de raíces (método de Newton-Raphson) 192
Solución de Newton-Raphson para un eslabonamiento de cuatro barras 193
Resolvedores de ecuaciones 194
4.14 Referencias 194
4.15 Problemas 194

Capítulo 5 Síntesis analítica de eslabonamientos 205

5.0 Introducción 205
5.1 Tipos de síntesis cinemática 205

5.2 Puntos de precisión ... 206
5.3 Generación de movimiento de dos posiciones por síntesis analítica ... 206
5.4 Comparación de síntesis de dos posiciones analítica y gráfica ... 213
5.5 Solución por ecuaciones simultáneas ... 216
5.6 Generación de movimiento de tres posiciones por síntesis analítica ... 218
5.7 Comparación de síntesis analítica y gráfica para tres posiciones ... 224
5.8 Síntesis para una localización específica de pivote fijo ... 228
5.9 Círculos de punto central y de punto circunferencial ... 235
5.10 Síntesis analítica de cuatro y cinco posiciones ... 237
5.11 Síntesis analítica de un generador de trayectoria con temporización prescrita ... 238
5.12 Síntesis analítica de un generador de función para un eslabonamiento de cuatro barras ... 239
5.13 Otros métodos de síntesis de eslabonamientos ... 242
Métodos de punto de precisión ... 244
Métodos de ecuaciones de curva de acoplador ... 246
Métodos de optimización ... 246
5.14 Referencias ... 249
5.15 Problemas ... 252

Capítulo 6 Análisis de velocidad ... 260

6.0 Introducción ... 260
6.1 Definición de velocidad ... 260
6.2 Análisis gráfico de velocidad ... 263
6.3 Centros instantáneos de velocidad ... 268
6.4 Análisis de velocidad con centros instantáneos ... 276
Relación de velocidad angular ... 278
Ventaja mecánica ... 279
Uso de los centros Instantáneos en el diseño de eslabonamientos ... 282
6.5 Centrados ... 284
Un eslabonamiento "sin eslabones" ... 287
Cúspides ... 288
6.6 Velocidad de deslizamiento ... 288
6.7 Soluciones analíticas para análisis de velocidad ... 293
Eslabonamiento de cuatro barras conjuntas de pasador ... 293
Eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera ... 296
Eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera Invertido ... 298
6.8 Análisis de velocidad del eslabonamiento de cinco barras con engranaje ... 300
6.9 Velocidad de un punto cualquiera en un eslabonamiento ... 301
6.10 Referencias ... 303
6.11 Problemas ... 303

Capítulo 7 Análisis de aceleración ... 324

7.0 Introducción ... 324
7.1 Definición de aceleración ... 324
7.2 Análisis gráfico de aceleración ... 327

7.3 Soluciones analíticas para el análisis de aceleración 333
El eslabonamiento de cuatro barras conjuntas de pasador 333
Eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera 336
Aceleración de Coriolis 338
Eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera invertido 340
7.4 Análisis de la aceleración del eslabonamiento de cinco barras con engranaje 343
7.5 Aceleración de un punto cualquiera en un eslabonamiento 345
7.6 Tolerancia humana a la aceleración 347
7.7 Rapidez de aceleración 349
7.8 Eslabonamientos de n barras 352
7.9 Referencias 352
7.10 Problemas 352

Capítulo 8 Diseño de levas 372

8.0 Introducción 372
8.1 Terminología de los mecanismos de leva 373
Tipo de movimiento del seguidor 374
Tipo de cierre de junta 375
Tipo de seguidor 375
Tipo de leva 376
Tipos de restricciones de movimiento 378
Tipo de programa de movimiento 379
8.2 Diagramas *s*v *a* *j* 379
8.3 Diseño de levas con doble detenimiento. Selección de las funciones *s* *v* *a* *j* 381
Ley fundamental del diseño de levas 384
Movimiento armónico simple (MAS) 384
Desplazamiento cicloidal 387
Funciones combinadas 390
8.4 Diseño de una leva con detenimiento simple. Selección de las funciones *s* *v* *a* *j* 403
8.5 Funciones polinomiales 406
Aplicaciones de polinomios con doble detenimiento 407
Aplicaciones de polinomios con un solo detenimiento 417
8.6 Movimiento de trayectoria crítica (MTC) 414
Polinomios utilizados en el movimiento de trayectoria crítica 475
Funciones de la familia de armónicas de semiperiodo 423
8.7 Dimensionado de la leva: ángulo de presión y radio de curvatura 426
Ángulo de presión: seguidores de rodillo 428
Elección de un radio de círculo primitivo 431
Momento de volteo: seguidor de cara plana 433
Radio de curvatura: seguidor de rodillo 434
Radio de curvatura: seguidor de cara plana 438
8.8 Consideraciones en la fabricación de levas 443
Generación geométrica 443
Mecanizado manual o NC según coordenadas de levas (corte por empuje) 444

Control numérico continuo con interpolación lineal *445*
Control numérico continuo con interpolación circular *447*
Duplicación analógica *448*
Funcionamiento real de una leva comparado con el funcionamiento teórico *450*
8.9 Consideraciones prácticas de diseño 453
¿Un seguidor traslatorio u oscilatorio? *453*
¿Cierre de fuerza o de forma? *454*
¿Leva radial o axial? *455*
¿Seguidor de rodillo o de cara plana? *455*
¿Usar detenciones o no? *456*
¿Rectificar o no? *456*
¿Lubricar o no? *456*
8.10 Referencias 457
8.11 Problemas 457
8.12 Proyectos 462

Capítulo 9 Trenes de engranes 466

9.0 Introducción 466
9.1 Cilindros rodantes 467
9.2 Ley fundamental del engranaje 468
Forma de involuta para dientes de engrane *469*
Ángulo de presión *472*
Cambio de la distancia entre centros *472*
Juego *473*
9.3 Nomenclatura de los engranes 474
9.4 Interferencia y rebaje entre dientes 477
Formas de dientes de adendo desigual *478*
9.5 Relación de contacto 479
9.6 Tipos de engranes 482
Engranes rectos, helicoidales y espirales *482*
Engranes de tornillos sin fin *483*
Mecanismos de piñón y cremallera *484*
Engranes cónicos e hipoidales *485*
Engranes no circulares *486*
Transmisiones de banda y de cadena *487*
9.7 Trenes de engranes de tipo simple 488
9.8 Trenes de engranes de tipo compuesto 489
Diseño de trenes compuestos *490*
Diseño de trenes de tipo compuesto con reversión *491*
Un algoritmo para el diseño de trenes de engranes de tipo compuesto *494*
9.9 Trenes de engranes planetarios o epicíclicos 499
El método tabular *501*
El método de la fórmula *506*
9.10 Eficiencia de los trenes de engranes 508
9.11 Transmisiones 512
9.12 Diferenciales 515

9.13 Referencias 518
9.14 Problemas 518

PARTE II DINÁMICA DE MAQUINARIA 529

Capítulo 10 Principios de dinámica 531

10.0 Introducción 531
10.1 Leyes del movimiento de Newton 531
10.2 Modelos dinámicos 532
10.3 Masa 532
10.4 Momento de masa y centro de gravedad 534
10.5 Momento de inercia de masa (segundo momento de masa) 535
10.6 Teorema de los ejes paralelos (o de transferencia) 537
10.7 Radio de giro 538
10.8 Centro de percusión 539
10.9 Parámetros concentrados de modelos dinámicos 541
Constante de resorte 541
Amortiguamiento 542
10.10 Sistemas equivalentes 544
Amortiguadores combinados 545
Combinación de resortes 546
Combinación de masas 547
Relaciones de la palanca y el engrane 547
10.11 Métodos de resolución 554
10.12 El principio de d'Alembert 554
10.13 Métodos de energía: trabajo virtual 557
10.14 Referencias 559
10.15 Problemas 559

Capítulo 11 Análisis de fuerzas dinámicas 564

11.0 Introducción 564
11.1 Método de solución de Newton 564
11.2 Un solo eslabón en rotación pura 565
11.3 Análisis de fuerzas de un eslabonamiento de tres barras de manivela-corredera 568
11.4 Análisis de fuerzas de un eslabonamiento de cuatro barras 575
11.5 Análisis de fuerza de un eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera 582
11.6 Análisis de fuerza de la manivela-corredera invertida 584
11.7 Análisis de fuerzas: eslabonamientos con más de cuatro barras 588
11.8 Fuerzas de sacudimiento y par de torsión de sacudimiento 589
11.9 Programa FOURBAR 590
11.10 Análisis de fuerza de eslabonamiento por métodos de energía 590
11.11 Control del par de torsión de entrada: volantes 593
11.12 índice de transmisión de fuerza en un eslabonamiento 600
11.13 Consideraciones prácticas 602
11.14 Referencias 603

11.15 Problemas ... 603
11.16 Proyectos ... 610

Capítulo 12 Equilibrio ... 617

12.0 Introducción ... 617
12.1 Equilibrio estático ... 618
12.2 Equilibrio dinámico ... 621
12.3 Equilibrio de eslabonamientos ... 626
Equilibrio total de fuerzas de eslabonamientos ... 627
12.4 Efecto del equilibrio en fuerzas de sacudimiento y pasador ... 631
12.5 Efecto del equilibrio sobre el par de torsión de entrada ... 632
12.6 Equilibrio de los momentos de sacudimiento en los eslabonamientos ... 634
12.7 Medición y corrección del desequilibrio ... 638
12.8 Referencias ... 640
12.9 Problemas ... 641

Capítulo 13 Dinámica de motores ... 648

13.0 Introducción ... 648
13.1 Diseño del motor ... 650
13.2 Cinemática del mecanismo de manivela-corredera ... 655
13.3 Fuerza del gas y par de torsión del gas ... 660
13.4 Masas equivalentes ... 664
13.5 Fuerzas de inercia y de sacudimiento ... 668
13.6 Pares de torsión de inercia y de sacudimiento ... 671
13.7 Par de torsión total del motor ... 673
13.8 Volantes ... 673
13.9 Fuerzas de pasador en un motor de un cilindro ... 674
13.10 Equilibrio del motor de un cilindro ... 681
13.11 Transacciones y relaciones de diseño ... 686
Relación biela/manivela ... 686
Relación diámetro/carrera ... 686
Materiales ... 687
13.12 Bibliografía ... 687
13.13 Problemas ... 687
13.14 Proyectos ... 690

Capítulo 14 Motores multicilíndricos ... 692

14.0 Introducción ... 692
14.1 Diseños de motores multicilíndricos ... 693
14.2 Diagrama de fase de la manivela ... 696
14.3 Fuerzas de sacudimiento en motores con cilindros en línea ... 698
14.4 Par de torsión de inercia en motores con cilindros en línea ... 702
14.5 Momento de sacudimiento en motores con cilindros en línea ... 703
14.6 Encendido uniforme ... 705
Motor con un ciclo de dos tiempos ... 706
Motor con ciclo de cuatro tiempos ... 708
14.7 Configuraciones de motores en V ... 714
14.8 Configuraciones de motores con cilindros opuestos ... 728

14.9 Equilibrio de motores multicilíndricos 729
Balance secundario en un motor de cuatro cilindros en línea 733
14.10 Referencias 737
14.11 Bibliografía 737
14.12 Problemas 737
14.13 Proyectos 738

Capítulo 15 Dinámica de levas 741

15.0 Introducción 741
15.1 Análisis dinámico de fuerza del mecanismo de leva y seguidor con cierre de fuerza 742
Respuesta no amortiguada 742
Respuesta amortiguada 745
15.2 Resonancia 752
15.3 Análisis de fuerza cinetostática de una leva y seguidor con cierre de fuerza 755
15.4 Análisis de fuerza cinetostática de la forma cerrada de una leva-seguidor con cierre de forma 759
15.5 Par de torsión del árbol de levas 763
15.6 Medición de fuerzas dinámicas y aceleraciones 766
15.7 Consideraciones prácticas 769
15.8 Referencias 771
15.9 Bibliografía 771
15.10 Problemas 772

Capítulo 16 Diseño de ingeniería 776

16.0 Introducción 776
16.1 Un caso de estudio de diseño 777
Educación para la creatividad en ingeniería 777
16.2 Conclusión 782
16.3 Referencias 783

Apéndice A Programas de computadora 785

A.0 Introducción 785
A.1 Información general 787
A.2 Operación general de los programas 787
A.3 Programa FOURBAR 796
A.4 Programa FIVEBAR 805
A.5 Programa SIXBAR 807
A.6 Programa SUDER 811
A.7 Programa DYNACAM 813
A.8 Programa ENGINE 820
A.9 Programa MATRIX 828

Apéndice B Propiedades de materiales 829

Apéndice C Propiedades geométricas 835

Apéndice D Datos de resortes **837**

Apéndice E Atlas de curvas del acoplador de eslabonamientos de cinco barras con engranaje **841**

Apéndice F Respuestas a los problemas seleccionados **847**

Índice **861**

Índice del CD-ROM **877**

PREFACIO

a la segunda edición

¿Por qué nunca tenemos tiempo de hacerlo
bien la primera vez, pero siempre
parece que lo tenemos para volver a hacerlo?
ANÓNIMO

La segunda edición se ha revisado con base en la retroalimentación de un gran número de usuarios del libro. En general, el material en muchos capítulos se ha actualizado para reflejar los últimos hallazgos de investigación. Se han agregado más de 250 problemas, o sea, más del doble del número total de problemas. También se han agregado algunos proyectos de diseño. Todas las ilustraciones se han ampliado, y mejorado.

En el capítulo 1, el tema del proceso del diseño se ha ampliado. Los análisis de la condición de Grashof y el criterio de rotabilidad en el capítulo 2 se han reforzado y se ha ampliado el tema de motores eléctricos. Se ha agregado en el capítulo 3 una sección de diseño óptimo de la aproximación del eslabonamiento en línea recta. En el capítulo 4 se ha agregado un análisis de circuitos y ramas en los eslabonamientos y una sección del método de solución de Newton Raphson. En el capítulo 5 se ha agregado un análisis de otros métodos de soluciones analíticas y por computadora para el problema de síntesis de posición. Esto refleja las últimas publicaciones de este tema y tiene una bibliografía extensa.

Los viejos capítulos 8 y 16, dedicados a las explicaciones del software que acompaña al texto, se han eliminado. En su lugar se ha agregado un nuevo apéndice A para describir los programas FOURBAR, FIVEBAR, SIXBAR, SLIDER, DYNACAM, ENGINE y MATRIX, contenidos en el CD-ROM. Estos programas se reordenaron completamente como aplicaciones de *Windows y* se han mejorado. Una versión para estudiantes del programa de simulación *Working Model* de *Knowledge Revolution,* compatibles con Macintosh y con computadoras con *Windows,* también se incluye un CD-ROM que contiene 20 modelos extraídos del libro, así como un manual del usuario para el *Working Model.*

El capítulo 8 de diseño de levas (anteriormente el 9) se redujo, sin afectar su alcance. El capítulo 9 de trenes de engranaje (anteriormente el 10) se amplió significativamente, especialmente respecto al diseño de trenes de componentes y epicíclicos y su eficiencia. Se ha incluido en el capítulo 10 de fundamentos dinámicos, material del anterior capítulo 17 para dar un tratamiento más coherente de modelado dinámico. El capítulo 12 acerca de equilibrio (anteriormente el 13) incluye el análisis del momento de equilibrio de eslabonamientos.

El autor desea expresar su gratitud a todos los usuarios y revisores que han hecho sugerencias para mejorar la obra e indicaron errores, especialmente quienes revisaron la primera edición. Son demasiados para nombrarlos aquí, así que antes de arriesgarme a ofenderlos por omitir a alguno, me permito simplemente extenderles mi más sincero agradecimiento por sus esfuerzos.

Robert L. Norton
Mattapoisett, Mass.
Agosto de 1997

PREFACIO

a la primera edición

Cuando oigo, olvido
Cuando veo, recuerdo
Cuando hago, entiendo
ANTIGUO PROVERBIO CHINO

Este libro trata acerca de los temas de cinemática y dinámica de maquinaria que suelen impartirse en un curso único, o en dos cursos sucesivos, en el penúltimo año de la mayoría de los programas de ingeniería mecánica. Los requisitos usuales son los cursos básicos de estática, dinámica y cálculo. Por lo general el primer semestre, o parte de éste, se dedica a cinemática de mecanismos, y la segunda, a la dinámica de maquinaria. Tales cursos son medios ideales para introducir al estudiante de ingeniería mecánica en el proceso de diseño ya que los mecanismos tienden a ser intuitivos para que pueda concebirlos y crearlos el estudiante común de ingeniería mecánica. Aunque este libro pretende exponer totalmente los temas de análisis, también destaca los aspectos de síntesis y diseño en esa materia, en un nivel más elevado que la gran mayoría de los textos publicados. Asimismo, resalta el uso de los métodos de ingeniería asistidos por computadora, como un enfoque eficaz para el diseño y análisis de esta clase de problemas, proporcionando programas (software) que permiten acrecentar la comprensión del estudiante. Aunque el nivel matemático de este libro corresponde al de estudiantes de segundo o tercer año de universidad, este conocimiento se repasa, por lo que el estudiante de escuela técnica puede comprenderlo también.

La parte I de esta obra resulta apropiada para un curso de un semestre de cinemática. La parte II lo es para un curso de dinámica de maquinaria. Alternativamente, ambas áreas pueden cubrirse conjuntamente en un solo curso semestral, si se tratan menos algunos de los temas tratados en este libro.

Se procuró que la redacción y el estilo del texto fueran claros, informales y fáciles de leer. Muchos problemas de ejemplo y métodos de solución se explican detalladamente, tanto por escrito como en forma gráfica. Todas las ilustraciones se realizaron mediante programas gráficos por computadora. También algunas imágenes fotográficas que se rastrearon (scanning) se han incluido. Todo el texto, incluso las ecuaciones y el material gráfico, ha sido impreso directamente del disquete mediante impresión láser, para obtener la mayor claridad y calidad. En la bibliografía se proporcionan numerosas obras de referencia y consulta. Al final de los capítulos se ofrecen problemas breves, y donde resulta pertinente se incluyen muchas asignaciones de proyecto, no estructuradas y extensas. Estos proyectos ofrecen a los estudiantes la oportunidad de que *hagan y entiendan.*

El planteamiento de estos cursos y del libro se basa en la experiencia del autor de más de 35 años en el diseño de ingeniería mecánica en la industria en la consultoría. Él ha impartido esas materias desde 1967, tanto en escuelas o centros especiales para ingenieros en ejercicio profesional, como en los centros docentes comunes para estudiantes. Su enfoque didáctico ha pasado desde entonces del estudio tradicional que aplica predominantemente el análisis gráfico de muchos problemas estructurados, a los métodos algebraicos en la medida en que las computadoras se volvieron accesibles, a la demanda de que los estudiantes formulen sus propios programas de computación, y al estado actual que ya se ha descrito.

La constante en el proceso ha sido el propósito de hacer llegar a los estudiantes el arte del proceso de diseño, con el fin de prepararlos para que en la práctica enfrenten los problemas *reales* de ingeniería. Por ello, el autor siempre ha promovido el diseño en los cursos. Recientemente, sin embargo, la tecnología ha proporcionado un medio para realizar esto de manera más eficaz mediante la microcomputadora para gráficos. Este libro trata de representar un medio de enseñanza mejor que los existentes, por medio de la presentación de métodos y técnicas actualizados para el análisis y síntesis, que aprovechen plenamente las ventajas de la microcomputadora; asimismo considera en forma relevante el diseño y el análisis. Esta obra proporciona también un estudio más actualizado y completo del diseño de levas, que el de la bibliografía reciente.

El autor ha elaborado varios programas de computación interactivos activados por mentís y con amigabilidad para el estudiante, enfocados al diseño y análisis de mecanismos y máquinas. Estos programas fueron ideados para que el estudiante comprendiera más los conceptos básicos, y para efectuar asignaciones de problemas y proyectos más amplios y realistas en el limitado tiempo disponible, que en el caso de técnicas de solución manuales, ya sea gráficas o analíticas. Se asignan problemas de diseño realistas, no estructurados, con muchas soluciones válidas. La síntesis y el análisis se subrayan equitativamente. Los métodos de análisis expuestos tienen carácter actual, y utilizan técnicas vectoriales y matriciales siempre que sean aplicables. Los métodos gráficos analíticos manuales no se incluyen. La salida gráfica de los programas de computación permite al estudiante ver en forma rápida y exacta los resultados de la variación de parámetros, lo que refuerza el aprendizaje.

Dichos programas computacionales se proporcionan en un CD-ROM con este libro, el cual contiene también instrucciones para su uso en cualquier computadora, compatible con IBM, con computadoras que soporten Windows 3.1 o Windows 95/NT. Se incluyen también versiones en DOS de estos programas para usuarios que no tengan *Windows.* Los programas SUDER, FOURBAR, FlVEBAR y SIXBAR analizan la cinemática de esos tipos de eslabonamientos. El programa FOURBAR efectúa un análisis dinámico completo del eslabonamiento de cuatro elementos, además de su cinemática. El programa DYNACAM está destinado al diseño y al análisis dinámico de sistemas de leva seguidor. El programa ENGINE analiza el eslabonamiento de manivela corredera según se usa en un motor de combustión (interna), y proporciona un análisis dinámico completo de las configuraciones de motor con uno o con varios cilindros, lo que permite la realización del diseño mecánico-dinámico de motores. El programa MATRIX es un resolvedor de sistemas de ecuaciones lineales, de uso general. Todos esos programas, salvo MATRIX, suministran la animación dinámica y gráfica de los dispositivos diseñados. Se recomienda al lector utilizar tales medios programáticos para investigar los resultados de la variación de los parámetros en estos sistemas cinemáticos. Los programas se han diseñado para destacar y enriquecer el texto, más que para sustituirlo, y también a la inversa. Muchas soluciones a los ejemplos del libro y a los conjuntos de problemas se proporcionan en el CD-ROM del programa como archivos que pueden leerse en esos programas. Gran parte de estas soluciones pueden ser animadas en la pantalla de la computadora para una mejor demostración del concepto que la posible en la página impresa. Se recomienda al profesor y los estudiantes aprovechar estos programas de computación. Las instrucciones para su uso se encuentran en el apéndice A.

La intención del autor es presentar al principio del curso los temas de síntesis para que los estudiantes realicen algunos trabajos simples de diseño en tanto se dominan los temas de análisis. Aunque éste no es el enfoque "tradicional" para la enseñanza de dicho material, el autor considera que es un método superior al de la concentración inicial en el análisis detallado de mecanismos, para los cuales el estudiante no tiene aún el concepto de origen y objetivo. Los capítulos 1 y 2 son introductorios. Los profesores que prefieran el enfoque tradicional de enseñar el análisis antes que la síntesis, pueden dejar los capítulos 3 y 5 acerca de la síntesis de eslabonamientos, para su

estudio posterior. Los capítulos 4, 6 y 7 sobre el análisis de posición, velocidad y aceleración son secuenciales o consecutivos y se apoyan entre sí. De hecho, algunos de los conjuntos de problemas son comunes entre estos tres capítulos, de modo que los estudiantes pueden utilizar sus soluciones de posición para obtener velocidades, y luego usar ambos para evaluar las aceleraciones en los mismos eslabonamientos. La información en el capítulo 8 referente a levas es más extensa y completa que las de otros textos de cinemática y adopta el enfoque de diseño. El capítulo 9 sobre trenes de engranes es introductorio. El tratamiento de fuerzas dinámicas en la parte II utiliza métodos de matrices para la solución del sistema de ecuaciones simultáneas. No se pone de relieve el análisis gráfico de fuerzas. El capítulo 10 presenta una introducción al modelado de sistemas dinámicos. El capítulo 11 trata el análisis de fuerzas en eslabonamientos. La equilibración de maquinaria rotatoria y eslabonamientos se trata en el capítulo 12. Los capítulos 13 y 14 emplean el motor de combustión interna como ejemplo para exponer conjuntamente muchos conceptos dinámicos en un contexto de diseño. El capítulo 15 presenta una introducción a la modelación de sistemas dinámicos y utiliza el sistema de leva seguidor como ejemplo. Los capítulos 3, 8, 11, 13 y 14 incluyen problemas de proyecto abierto, así como conjuntos de problemas estructurados. La asignación y solución de problemas de proyecto no estructurados pueden aumentar en el estudiante la comprensión de los conceptos, según lo señala el proverbio chino en el epígrafe de este prefacio.

RECONOCIMIENTOS: Las fuentes de las fotografías y otros gráficos no originales utilizados en el texto, se indican en los pies de página y en la nota de Trabajo en Computadora, sin embargo, el autor desea expresar su agradecimiento por su colaboración a todas las personas y empresas que generosamente pusieron a su disposición este material. El autor también agradece a las personas que han examinado diversas secciones del texto, y que hicieron muchas sugerencias útiles para mejorarlo. El señor John Titus de la Universidad de Minnesota, revisó el capítulo 5 sobre la síntesis analítica, y el señor Dennis Klipp de Klipp Engineering, Waterville, Maine, examinó el capítulo 8 que trata de diseño de mecanismos de levas. El profesor William J. Crochetiere y el señor Homer Eckhardt de Tufts University, Medford, Mass., revisaron el capítulo 15. El señor Eckhardt y el profesor Crochetiere de Tufts, así como el profesor Charles Warren, de la Universidad de Alabama, revisaron la parte I. El profesor Holly K. Ault, de Worcester Polytechnic Institute, examinó detenidamente todo el texto durante su trabajo de enseñanza, utilizando en clase las pruebas del libro completo antes de su publicación. El profesor Michael Keefe, de la Universidad de Delaware, proporcionó muchos comentarios útiles. Se agradece sinceramente también al gran número de estudiantes, pasantes y adjuntos, quienes descubrieron muchas erratas y errores en el texto y en los programas, mientras utilizaban las versiones previas a la publicación. A partir de las primeras publicaciones del libro, los profesores D. Cronin, K. Gupta, P. Jensen y el señor R. Jantz me han escrito para señalar errores o hacer sugerencias que ya han sido incorporadas, y las cuales agradezco también. El autor asume la total responsabilidad por cualquier equivocación que haya quedado, e invita a los lectores a enviar sus críticas, sugerencias y correcciones al texto o a los programas, de modo que las versiones futuras puedan mejorarse.

Robert L. Norton

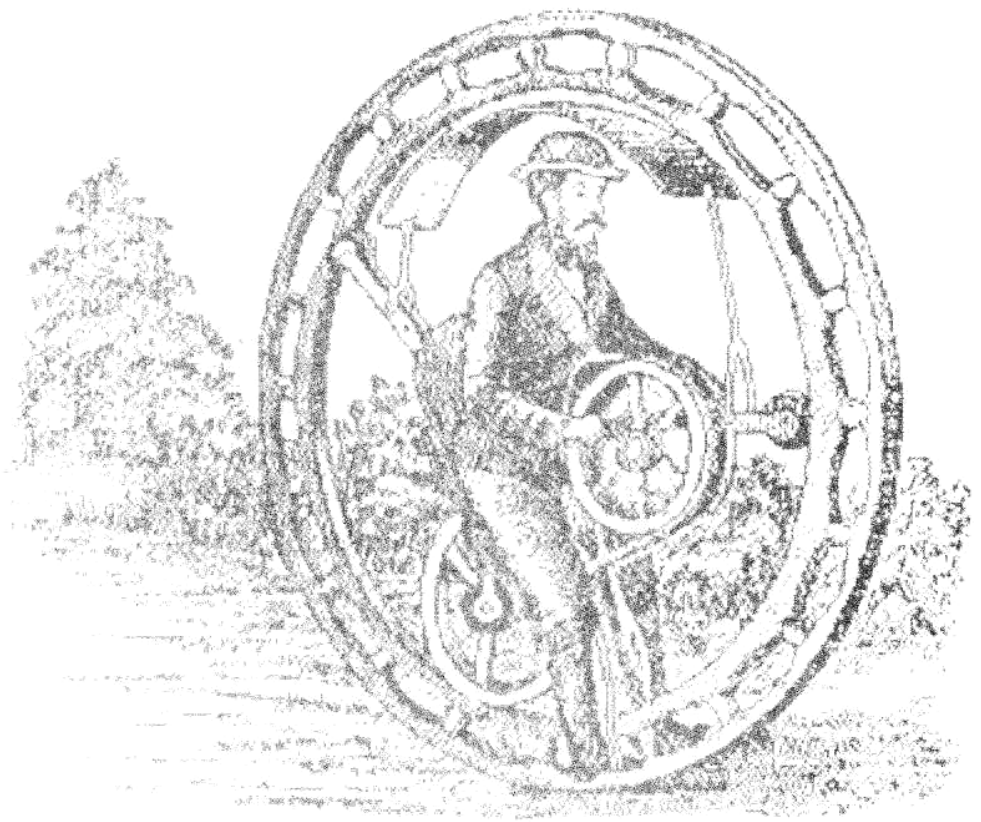
Mattapoisett, Mass.

Agosto de 1991

Dedicarse a la cinemática le recompensará. Es más fecunda que la geometría porque le da al espacio una cuarta dimensión.

CHEBYSCHEV A SYLVESTER, 1873

PARTE I



CINEMÁTICA DE MECANISMOS

Capítulo 1



INTRODUCCIÓN

La inspiración llega con más frecuencia a quienes son amantes de trabajar.
ANÓNIMO

1.0 OBJETIVO

En este libro se explorarán los temas de **cinemática y dinámica de maquinaria** en relación con la **síntesis de mecanismos** con objeto de lograr tareas o movimientos deseados, y también se estudiará el **análisis de mecanismos** para determinar su comportamiento dinámico de cuerpo rígido. Estos temas son fundamentales para entender la materia más amplia del **diseño de máquinas.** Con la premisa de que no se puede analizar algo hasta no haberlo sintetizado en su existencia se explorará primero el tema de la **síntesis de mecanismos** y luego se investigarán las técnicas para el **análisis** de éstos. Lo anterior está dirigido a desarrollar su habilidad para obtener soluciones viables de diseño de mecanismos en problemas reales de ingeniería no estructurados mediante un **proceso de diseño.** Se comenzará con definiciones cuidadosas de los términos utilizados en estas cuestiones.

1.1 CINEMÁTICA Y CINÉTICA

CINEMÁTICA *Estudio del movimiento sin consideración de las fuerzas.*

CINÉTICA *Estudio de fuerzas en sistemas en movimiento.*

Estos dos conceptos *no* son en realidad físicamente separables. Se separan de manera arbitraria por razones de enseñanza en ingeniería. Asimismo, en la práctica del diseño de ingeniería es válido considerar en primer lugar los movimientos cinemáticos deseados y sus consecuencias, y en seguida investigar las fuerzas cinéticas asociadas a tales movimientos. El estudiante debe comprender que la división entre **cinemática y cinética** es por completo arbitraria, y se considera así sólo por conveniencia. No sería posible diseñar la mayoría de los sistemas mecánicos dinámicos si no se tomaran en cuenta ambos aspec-

tos dentro de la consideración total. Es bastante lógico considerarlos en el orden indicado, puesto que de la segunda ley de Newton, F = *ma*, se necesita conocer las **aceleraciones (a)** para calcular las **fuerzas (F)** dinámicas debidas al movimiento de la **masa** (m) del sistema. También hay muchos casos en los que se conocen las fuerzas aplicadas y se busca evaluar las aceleraciones resultantes.

Un objetivo principal de la **cinemática** es crear (diseñar) los movimientos deseados de los elementos mecánicos considerados, y luego calcular matemáticamente las posiciones, velocidades y aceleraciones que tales movimientos generarán sobre dichos elementos. Puesto que para la mayor parte de los sistemas mecánicos ligados a la Tierra, la masa permanece esencialmente constante con respecto al tiempo, al definir las aceleraciones como una función del tiempo las fuerzas dinámicas también se definen como función del tiempo. A su vez, **esfuerzos** serán función de las fuerzas aplicadas y las de inercia (ma). Como el objetivo del diseño de ingeniería es crear sistemas que no fallen durante su vida de servicio esperado, la meta es mantener los esfuerzos dentro de límites aceptables para los materiales elegidos y las condiciones ambientales encontradas. Obviamente esto requiere que se definan todas las fuerzas del sistema y se mantengan dentro de límites deseados. En la maquinaria que se mueve (la única clase que interesa) las fuerzas de mayor intensidad son con frecuencia las debidas a la dinámica de la propia máquina. Estas fuerzas dinámicas son proporcionales a la aceleración, lo cual hace regresar a la cinemática, que es el fundamento del diseño mecánico. En el proceso de diseño las primeras decisiones, básicas, que involucran los principios de la cinemática pueden ser cruciales para el éxito de cualquier diseño mecánico. Un diseño que tenga una cinemática deficiente resultará problemático y su funcionamiento será defectuoso.

1.2 MECANISMOS Y MÁQUINAS



Un mecanismo

Un **mecanismo** es un dispositivo que transforma el movimiento según un esquema deseable y comúnmente desarrolla fuerzas de muy baja intensidad y transmite poca potencia. Una **máquina** contiene por lo común mecanismos diseñados para proporcionar fuerzas significativas y transmitir potencia apreciable.[1] Algunos ejemplos de mecanismos comunes son un sacapuntas de manivela, un obturador de cámara fotográfica, un reloj analógico, una silla plegadiza, una lámpara ajustable de escritorio y una sombrilla. Algunos ejemplos de máquinas que poseen movimientos similares a los de los mecanismos citados son una batidora o mezcladora de alimentos, la puerta de la bóveda de un banco, el engranaje de transmisión de un automóvil, un buldózer, un robot y un juego electromecánico de parque de diversiones. No hay una línea divisoria bien definida entre mecanismos y máquinas. Difieren en grado más que en clase. Si las fuerzas y los niveles de energía dentro del dispositivo son significativos, éste se considera una máquina; si no es así, se considera un mecanismo. Una útil y práctica **definición de un mecanismo** es *un sistema de elementos dispuestos para transmitir* **movimiento** *de un modo predeterminado.* Ésta puede convertirse en la definición de **máquina** al agregar las palabras y **energía** después de la palabra **movimiento.**



Una máquina

Si los mecanismos están cargados ligeramente y operan a bajas velocidades, a veces pueden considerarse de manera estricta como dispositivos cinemáticos; es decir, se pueden analizar cinemáticamente sin tomar en cuenta las fuerzas. Por otra parte, las máquinas (y los mecanismos que funcionan a altas velocidades) deben tratarse en primer lugar como mecanismos, debe efectuarse un análisis cinemático de sus velocidades y aceleraciones, y en seguida deben analizarse como sistemas dinámicos en los que sus fuerzas

estáticas y dinámicas debidas a las aceleraciones se analizan mediante los principios de la cinética. En la **parte I** de este texto se estudia la **cinemática de mecanismos y** en la **parte II,** la **dinámica de maquinaria.** Las técnicas de síntesis de mecanismo expuestas en la parte I son aplicables al diseño de mecanismos y máquinas, puesto que en cada caso debe crearse un conjunto de elementos móviles para proporcionar y controlar los movimientos y la configuración deseados.

1.3 BREVE HISTORIA DE LA CINEMÁTICA



Desde el principio de la historia el hombre ha ideado máquinas y mecanismos. Los antiguos egipcios inventaron las máquinas necesarias para construir pirámides y monumentos. Aunque los egipcios del Antiguo Reino no conocían la rueda y la polea (rueda en un eje), sí usaron la palanca, el plano inclinado (o cuña) y, probablemente, el rodillo de tronco. El origen de la rueda y el eje no se conoce con precisión. Su primera aparición parece haber sido en Mesopotamia hacia los años 3000 a 4000 a.C.



Desde los primeros tiempos se realizó un gran esfuerzo de diseño acerca del problema de la medición del tiempo, a medida que se iban creando mecanismos de reloj más refinados. Una gran cantidad de los primeros diseños de máquinas se dirigió hacia las aplicaciones militares (catapultas, aparatos para escalamiento de muros, etc.). El término **ingeniería civil** se acuñó más tarde para diferenciar las aplicaciones civiles de las militares en la tecnología. La **ingeniería mecánica** tuvo sus orígenes en el diseño de máquinas, a medida que las invenciones de la revolución industrial requerían soluciones más complicadas y refinadas para problemas de control de movimientos. **James Watt** (1736-1819) merece quizás el título de primer cinemático, por su síntesis de un eslabonamiento mecánico de línea recta (véase la figura 3-29a)) para guiar los pistones de muy larga carrera en las entonces nuevas máquinas (o motores) de vapor. Puesto que aún no se inventaba el cepillo mecánico (en 1817), no había ningún medio para fabricar una guía larga y recta que funcionara como una cruceta en la máquina de vapor. Watt fue sin duda el primero en reconocer el valor de los movimientos del elemento acoplador en el eslabonamiento de cuatro barras. **Oliver Evans** (1755-1819), uno de los primeros inventores estadunidenses, también diseñó un eslabonamiento de línea recta para un motor de vapor. **Euler** (1707-1783) fue contemporáneo de Watt, aunque aparentemente nunca se encontraron. Este investigador presentó un estudio analítico de mecanismos en su obra *Mechanica sive Motus Scienta Analytice Expósita* (1736-1742) en la cual incluyó el concepto de que el movimiento planar tiene dos componentes independientes, a saber: la traslación de un punto y la rotación del cuerpo alrededor de ese punto. Euler también sugirió la separación del problema de análisis dinámico desde un punto de vista "geométrico" y otro "mecánico" con el fin de simplificar la determinación de la dinámica de un sistema. Dos de sus contemporáneos, **d'Alembert y Kant** propusieron también ideas similares. Éste es el origen de la división actual de la dinámica, en cinemática y cinética, como se describió antes.

A principios de 1800, L'École Polytechnique, en París, Francia, era la depositaría del conocimiento avanzado en ingeniería. Los investigadores **Lagrange** y **Fourier** formaban parte del cuerpo docente. Uno de sus fundadores fue **Gaspard Monge** (1746-1818), creador de la geometría descriptiva (la cual, incidentalmente, fue mantenida como un secreto militar por el gobierno francés durante 30 años, debido a su valor para la planeación y construcción de fortificaciones). Monge organizó un curso de elementos de máquinas y se dio a la tarea de clasificar ¡todos los mecanismos y máquinas conocidos hasta

1

entonces! Un colega suyo, **Hachette,** terminó el trabajo en 1806 y lo publicó en 1811 como, quizás, el primer tratado sobre mecanismos. El investigador **André Marie Ampére** (1775-1836), también profesor de la L'École Polytechnique, emprendió la formidable tarea de clasificar "todo el conocimiento humano". En su *Essai sur la philosophie des sciences* fue el primero en utilizar el término **"cinématique",** que viene del griego y significa *movimiento,** para describir el estudio del movimiento sin considerar las fuerzas e indicar "que esta ciencia debe incluir todo lo que puede decirse con respecto al movimiento en sus diferentes clases, independientemente de las fuerzas que lo producen". Más tarde, en inglés el término se tradujo como *kinematics* y en alemán, como *kinematik.* **Robert Willis** (1800-1875) escribió en 1841 el tratado *Principies of Mechanism,* cuando era profesor de filosofía natural en la University of Cambridge, Inglaterra. Intentó sistematizar la tarea de síntesis de los mecanismos. Encontró cinco maneras de obtener movimiento relativo entre los eslabonamientos de entrada y salida: contacto de rodamiento, contacto de deslizamiento, eslabonamientos cinemáticos, conectores de contacto envolvente (bandas y cadenas de transmisión) y equipo montacargas (de cable o cadena). **Franz Reuleaux** (1829-1905) publicó su obra *Theoretische Kinematik* en 1875. Muchas de sus ideas son aún vigentes y útiles. **Alexander Kennedy** (1847-1928) tradujo al inglés la obra de Reuleaux en 1876. Este tratado se convirtió en el fundamento de la cinemática moderna y ¡aún está disponible! (Véase la bibliografía al final del capítulo.) Reuleaux introdujo el concepto de par cinemático (junta), cuya forma e interacción definen el tipo de movimiento transmitido entre elementos de un mecanismo. Asimismo, definió seis componentes básicos de mecanismos: el eslabón, la rueda, la leva, el tornillo, el trinquete y la banda (o correa). También definió los pares "superior" e "inferior", con el contacto superior de línea o punto (como en un cojinete de bolas o balero) y el contacto inferior de superficie (como en una junta de pasador). A Reuleaux se le considera padre de la cinemática moderna; creó la notación simbólica de los eslabonamientos esqueletales genéricos utilizados en todos los textos de cinemática actual.

Antes de la Segunda Guerra Mundial el trabajo teórico sobre cinemática se realizó en Europa, especialmente en Alemania. Pocos resultados de investigación estuvieron disponibles en inglés. En Estados Unidos la cinemática era prácticamente ignorada hasta la década de 1940, cuando **A. E. R. De-Jonge** escribió "What Is Wrong with 'Kinematics' and 'Mechanisms'?"[2] que obligó al sistema de educación en ingeniería mecánica de Estados Unidos a prestar atención a los logros europeos en este campo. Desde entonces se han realizado muchos trabajos, especialmente en síntesis cinemática, por ingenieros e investigadores estadunidenses y europeos como **J. Denavit, A. Erdman, F. Freudenstein, A. S. Hall, R. Hartenberg, R. Kaufman, B. Roth, G. Sandor y A. Soni** (todos de Estados Unidos) y **K. Hain** (de Alemania). Después de la caída de la "cortina de hierro" muchos de los trabajos originales de los cinemáticos ex soviéticos están disponibles en Estados Unidos, por ejemplo **Artobolevsky.**[3] Muchos de estos investigadores han aplicado la computadora en la solución de problemas anteriormente intratables, tanto de análisis como de síntesis, mediante un uso práctico de muchas de las teorías de sus predecesores.'[4] En este texto se utilizará con frecuencia la computadora para efectuar análisis y síntesis más eficientes de soluciones a problemas de diseño de máquinas. Este libro incluye varios programas de computadora para uso del lector.

* Ampère escribió "(La ciencia de los mecanismos) debe, por tanto, no definir una máquina, como usualmente se ha hecho, como un instrumento mediante el que se puede alterar la dirección y la intensidad de una *fuerza* dada, sino como un instrumento por medio del cual se puede alterar la dirección y la *velocidad* de un movimiento dado. A esta ciencia... Yo le he dado el nombre de cinemática, que proviene de la palabra griega *movimiento:* Kinma." Tomado de Maunder, L. (1979). "Teoría y práctica". *Proc. 5th World Cong. on Theory of Mechanisms and Machines,* Montreal, p. 1.

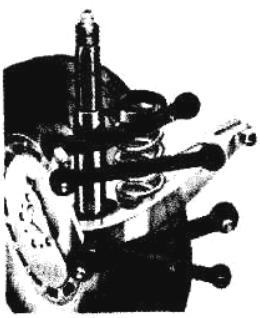
1.4 APLICACIONES DE LA CINEMÁTICA

Una de las principales tareas que debe resolverse en cualquier problema de diseño de máquinas es determinar las configuraciones cinemáticas necesarias para proporcionar los

movimientos deseados. Por lo común no es posible realizar los análisis de fuerzas y tensiones hasta resolver la cuestión cinemática. Este libro está dirigido al diseño de dispositivos tales como eslabonamientos, levas y engranes. Cada uno de estos términos se definirá en los siguientes capítulos y para ello puede ser útil mostrar algunos ejemplos de las aplicaciones cinemáticas en este capítulo introductorio. Usted probablemente ha usado varios de estos sistemas sin pensar en cinemática.

Virtualmente cualquier máquina o dispositivo que se mueve contiene uno o más elementos cinemáticos, por ejemplo, eslabonamientos, levas, engranes, bandas, cadenas. Su bicicleta es un ejemplo sencillo de un sistema cinemático que contiene una cadena de manejo que proporciona un par de torsión multiplicativo y un cable simple que opera eslabonamientos de frenado. Un automóvil contiene más ejemplos de dispositivos cinemáticos. Su sistema de dirección, la suspensión de las llantas y el motor de pistones contienen eslabonamientos; las válvulas del motor están operadas por levas y la transmisión está llena de engranajes. Aun los limpiaparabrisas se manejan por medio de eslabonamientos. La figura 1-la) muestra un eslabonamiento espacial usado para controlar el movimiento de la llanta trasera de un automóvil moderno cuando pasa por un tope.

Los equipos de construcción como tractores, grúas y excavadora usan extensamente eslabonamientos en su diseño. La figura *1-1b)* muestra una pequeña excavadora que es un eslabonamiento manejado por cilindros hidráulicos. Otra aplicación que usa eslabonamientos es el equipo de ejercicio que se muestra en la figura 1-lc). Los ejemplos de la figura 1-1 son todos bienes de consumo que usted puede encontrar en sus viajes diarios. Muchas otras aplicaciones ocurren en la producción de artículos. Las máquinas se usaron para elaborar la mayoría de los productos de consumo que requerimos. Usted encontrará menos fuera del medio de fabricación. Una vez que se haya familiarizado con los términos y principios de la cinemática no podrá ver cualquier máquina o producto sin observar sus aspectos cinemáticos.



a) Eslabonamiento espacial para la suspensión trasera
Cortesía de Daimler Benz Co.



b) Útil tractor con excavadora
Cortesía de John Deere Co.



c) Mecanismo para hacer ejercicio manejado con eslabonamientos
Cortesía de ICON Health & Fitness, Inc.

FIGURA 1-1

Ejemplos de dispositivos cinemáticos de uso común

1

1.5 EL PROCESO DE DISEÑO

Diseño, invención, creatividad

Todos estos términos son bien conocidos pero pueden significar diferentes cosas para distintas personas. Estas palabras pueden abarcar una amplia gama de actividades, desde el refinamiento en la novísima apariencia de vestuario hasta la creación de impresionantes obras de arquitectura, e incluso la ideación de una máquina para la manufactura de pañuelos faciales. La **ingeniería de diseño** que se tratará aquí abarca tres de estas actividades, así como muchas otras. La palabra **diseño** viene del latín *designare,* que significa *"señalar o marcar".* El Webster's ofrece varias definiciones, de las que las más aplicables son *"esbozar, trazar o planear, como acción o trabajo... para concebir, inventar, idear".* La **ingeniería de diseño** se ha definido como "... *el proceso de aplicar diversas técnicas y principios científicos con el objeto de definir un dispositivo, un proceso o un sistema con detalles suficientes que permitan su realización... El diseño puede ser simple o enormemente complejo, fácil o difícil, matemático o no matemático, y puede implicar un problema trivial o uno de gran importancia".* El **diseño** es un componente universal en la práctica de la ingeniería. Sin embargo, la complejidad de las cuestiones de ingeniería generalmente requiere que el estudiante disponga de un conjunto de **problemas bien estructurados** diseñados para aclarar uno o varios conceptos particulares que se relacionan con un tema específico. Estos problemas de libro de texto toman típicamente la forma de *"dadas A, B, C y D, hallar E".* Por desgracia, los problemas de ingeniería de la vida real casi nunca están estructurados así. Los problemas reales de diseño suelen tomar la forma de: *"Lo que se necesita es un cachivache para introducir este tiliche en ese hueco en el tiempo señalado para la transferencia de este otro chisme."* El ingeniero recién egresado buscará en vano entre sus libros de texto los métodos para resolver tal cuestión. Ese enunciado de **problema no estructurado** generalmente lleva a lo que por lo común se llama **"síndrome de la hoja en blanco".** Con frecuencia los ingenieros se quedan absortos ante una hoja de papel en blanco tratando de pensar cómo resolver un problema tan mal definido como éste.



Síndrome de la hoja en blanco

Una parte considerable de la educación en ingeniería aborda temas de **análisis,** lo que significa *descomponer, separar, desorganizar en sus partes constitutivas.* Esto es completamente necesario. El ingeniero debe saber cómo analizar sistemas de diversos tipos: mecánicos, eléctricos, térmicos o hidráulicos. El análisis requiere una cabal comprensión de las técnicas matemáticas apropiadas y de la física fundamental de la función del sistema. Pero antes de que se pueda analizar, el sistema debe existir, y una hoja en blanco proporciona poca sustancia para el análisis. Por lo tanto, el primer paso en cualquier ejercicio de diseño de ingeniería es el de la **síntesis,** que significa *organizar* o *integrar.*

En la práctica, al margen de su disciplina, el ingeniero en diseño afronta de manera continua el desafío de *estructurar el problema no estructurado.* Inevitablemente, el problema, como se le plantea al ingeniero, está mal definido e incompleto. Antes de realizar cualquier intento por *analizar la situación,* se debe comenzar por definir con mucho cuidado el problema, mediante un planteamiento de ingeniería, con el fin de asegurarse de que cualquier solución propuesta lo resolverá correctamente. Hay muchos ejemplos de excelentes soluciones de ingeniería que finalmente se desecharon debido a que resolvían el problema equivocado, es decir, uno diferente del que en realidad tenía el cliente.

Se ha dedicado una gran investigación a la definición de diversos "procesos de diseño" destinados a proporcionar los medios para estructurar un problema no estructurado y

conducir a una solución viable. Algunos de estos procesos presentan docenas de pasos, otros sólo unos cuantos. El que se presenta en la tabla 1-1 tiene 10 pasos y, según la experiencia del autor, se ha empleado con éxito durante 30 años de práctica en la ingeniería de diseño.

ITERACIÓN Antes de describir con detalle cada uno de esos pasos es necesario señalar que no se trata de un proceso en el que se avance del paso 1 al 10 en forma lineal. Más bien es, por su propia naturaleza, un proceso iterativo en el que se avanza de manera errática, dando dos pasos hacia adelante y uno hacia atrás. Es inherentemente *circular*. **Iterar** significa *repetir, volver a un estado anterior*. Por ejemplo, si al ir al análisis resulta que su última gran idea viola la segunda ley de la termodinámica, puede retomar el paso de ideación y ¡llegar a una mejor idea! O, si es necesario, retomar un paso anterior en el proceso, quizás a la investigación preliminar, y aprender más acerca del problema. Una vez que se ha comprendido que la ejecución real del proceso implica iteración, para simplificar se analiza cada paso en el orden indicado en la tabla 1-1.

TABLA 1-1
Un proceso de diseño

1	Identificación de la necesidad
2	Investigación preliminar
3	Planteamiento de la meta
4	Especificaciones de funcionamiento
5	Ideación e invención
6	Análisis
7	Selección
8	Diseño detallado
9	Prototipos y pruebas
10	Producción

Identificación de la necesidad

Este primer paso con frecuencia lo realiza alguien más, su jefe o un cliente "Lo que se necesita es..." En general este enunciado será breve y carente de detalles. Estará muy lejos de proporcionarle un enunciado de problema estructurado. Por ejemplo, el enunciado de problema puede ser: "Se necesita una mejor segadora de césped."





Identificación de la necesidad

Investigación preliminar

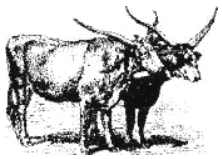
Ésta es la fase más importante en el proceso y desafortunadamente suele desdeñarse. El término *investigación*, cuando se usa en este contexto, *no* debe evocar las visiones de científicos en bata blanca que mezclan sustancias en tubos de ensayo, ya que la investigación en este caso es de una especie más mundana, que se realiza para reunir información preliminar acerca de datos de física, química o de otros aspectos relevantes del problema. Asimismo, es conveniente hallar si éste, o un problema similar, se ha resuelto antes. No se necesita "reinventar la rueda". Con suerte ya está disponible en el mercado una solución, y sin duda será más económico comprarla que elaborar una propia. Lo más probable es que éste no sea el caso; sin embargo, se puede aprender mucho acerca del problema por resolver cuando se investiga la existencia del "arte" asociado a tecnologías y productos similares. La información sobre patentes y las publicaciones técnicas en el área son fuentes de información y es posible tener acceso a ellas por medio de Internet. Es claro que si se halla la solución y está amparada por una patente aún en vigencia, se tendrán pocas opciones éticas: adquirir la solución patentada, diseñar algo que no entre en conflicto con la patente, o bien, abandonar el proyecto. Es muy importante que se dediquen la energía y el tiempo suficientes a esta fase de investigación y preparación del proceso, con el fin de evitar tropiezos al elaborar una solución grandiosa para un problema equivocado. La mayoría de los ingenieros inexpertos (algunos muy experimentados) conceden muy poca atención a esta fase y pasan rápidamente a la etapa de ideación o invención del proceso. *¡Esto debe evitarse!* Hay que disciplinarse y *no* tratar de resolver el problema antes de estar bien preparado para hacerlo.



Reinvención de la rueda

Planteamiento de la meta

Una vez que se comprende el fundamento del área del problema como originalmente se estableció, se estará listo para expresar de nuevo ese problema en un planteamiento de



Cortadoras de pasto

meta más coherente. Esta nueva especificación del problema debe tener tres características. Ser concisa, general y no estar matizada por términos que pronostiquen una solución. Debe ser esbozada con base en una **visualización funcional,** *lo que significa concebir su función,* más que señalar cualquier incorporación particular. Por ejemplo, si el enunciado original de la necesidad fuera: *"Diseñar una mejor segadora de césped",* después de investigar toda la gama de recursos que se han elaborado para cortar césped en el transcurso de los tiempos, el diseñador bien capacitado podría enunciar la meta como **"Diseñar un medio para cortar el pasto".** El planteamiento original del problema tiene una trampa bajo la forma de las palabras *matizantes* "segadora de césped". Esta frase inducirá a muchos a visualizar algo con aspas giratorias chirriantes y un ruidoso motor. Para que la fase de **ideación** tenga éxito, es necesario evitar tales imágenes y enunciar en forma genérica, clara y concisa el problema. Como ejercicio haga una lista de 10 formas para cortar el pasto. La mayor parte de ellas no se le ocurrirían si se le hubiera pedido mencionar los 10 mejores diseños de segadoras de césped. ¡Debe utilizar la **visualización funcional** con el fin de evitar la limitación innecesaria de su creatividad!



Especificaciones de funcionamiento*

Cuando se comprende el fundamento, y la meta se establece claramente, se está listo para formular un conjunto de especificaciones de funcionamiento. Esto no debe incluir especificaciones de diseño. La diferencia es que las **especificaciones de funcionamiento** definen **lo que** *el sistema debe hacer,* en tanto que las **especificaciones de diseño** definen **cómo** *debe hacerse.* En esta etapa del proceso de diseño no es prudente intentar la determinación de *cómo* se ha de plantear el objetivo. Eso se deja para la fase de **ideación.** El propósito de las especificaciones de funcionamiento es definir y restringir cuidadosamente el problema, de modo que se *pueda resolver* y *mostrar que se ha resuelto,* después de tal hecho. En la tabla 1-2 se muestra un ejemplo de especificaciones de funcionamiento para la "cortadora de pasto".

Obsérvese que tales especificaciones limitan el diseño sin demasiada restricción en la libertad para diseñar del ingeniero. Sería inapropiado requerir un motor de gasolina para la especificación número 1, puesto que hay otras posibilidades que proporcionarían la movilidad deseada. De igual manera, requerir acero inoxidable para todos los componentes en la especificación número 2 no sería muy adecuado, pues la resistencia a la corrosión puede obtenerse por otros medios menos costosos. En resumen, las especificaciones de tarea sirven para definir el problema en la forma más completa y general posible, y sirven también como definición contractual de lo que debe lograrse. El diseño terminado puede evaluarse según el cumplimiento de estas especificaciones.

Ideación e invención

Este paso entraña diversión y frustración. Esta fase es, potencialmente, la más satisfactoria para la mayoría de los diseñadores, pero también es la más difícil. Se ha investigado mucho para explorar el fenómeno de la **"creatividad".** Ésta es, por excelencia, una característica de los seres humanos. En efecto, se manifiesta muy en alto grado en todos los niños. La proporción y grado de desarrollo que ocurre en el humano desde el nacimiento hasta los primeros años de vida ciertamente requiere de algo de cierta creatividad innata. Algunos han proclamado que los métodos de educación en el mundo occidental tienden a obstruir la creatividad infantil natural al alentar la conformidad y restringir la individualidad. Desde "colorear dentro de las líneas", que por lo común se enseña en el jardín de

* Orson Welles, el famoso escritor y director de cine, dijo una vez: "*El enemigo del arte es la ausencia de limitaciones."* Podemos parafrasear esta frase como: *El enemigo del diseño es la ausencia de especificaciones.*

niños, hasta la imitación de los esquemas de escritura en libros de texto, en los grados superiores, el individualismo se suprime en favor de una conformidad socializante. Tal vez esto sea necesario para evitar la anarquía, pero es probable que reduzca la capacidad de la persona para pensar creativamente. Hay quienes afirman que la creatividad se puede enseñar y quienes opinan que sólo se hereda. No hay evidencia firme que sostenga una u otra teoría. Quizá es cierto que la creatividad suprimida o perdida se puede recuperar. Otros estudios indican que la mayoría de las personas subemplean sus potenciales habilidades creativas. Uno puede acrecentar su creatividad mediante diversas técnicas.

TABLA 1-2
Especificaciones de funcionamiento

1 Dispositivo para tener suministro de potencia autocontenido.
2 Dispositivo que sea resistente a la corrosión.
3 Dispositivo que cueste menos de $100.00.
4 Dispositivo que emita < 80 dB en intensidad de sonido a 50 pies.
5 Dispositivo que corte 1 /4 de acre de pasto por hora.
6 Etcétera.

PROCESO CREATIVO Se han desarrollado muchas técnicas para acentuar o inspirar la resolución creativa de problemas. Así como se han definido los procesos de diseño, algo semejante ocurre para el *proceso creativo* que se muestra en la tabla 1-3. Este proceso creativo puede considerarse como un subconjunto del proceso de diseño. Los pasos de ideación e invención pueden, por tanto, descomponerse en esos cuatro subpasos.

GENERACIÓN DE IDEAS Ésta es la etapa más difícil. Incluso personas muy creativas tienen dificultad en la invención "sobre pedido". Se han sugerido muchas técnicas para mejorar la producción de ideas, y la más importante es la del *juicio diferido,* lo que significa que el espíritu crítico de uno debe anularse temporalmente. No trate de juzgar la calidad de sus ideas en tal etapa. Eso se atenderá más tarde, en la fase de análisis. La meta aquí es obtener la mayor *cantidad* posible de diseños potenciales. Aun sugerencias en apariencia ridículas deben ser bienvenidas, ya que pueden hacer surgir nuevas perspectivas y proponer otras soluciones más prácticas y realistas.

TABLA 1-3
El proceso creativo

5a Generación de ideas
5b Frustración
5c Incubación
5d ¡Eureka!

LLUVIA DE IDEAS Para algunos ésta es una técnica de gran éxito en la generación de soluciones creativas. En este método se necesita un grupo de personas, de preferencia entre 6 y 15, y se trata de evitar la más grande barrera a la creatividad que es el *miedo al ridículo.* En un grupo la mayoría de las personas no manifestarán sus verdaderos pensamientos acerca de una materia por temor a la burla. Las reglas de la lluvia de ideas subrayan que nadie debe reírse o despreciar las sugerencias de una persona aunque parezcan ridículas. Cada participante deberá actuar como un "escriba" y registrar y examinar todas las sugerencias, sin importar qué tan impropias o tontas puedan parecer. Cuando se realiza apropiadamente esta técnica puede resultar fructífera y divertida, y algunas veces termina en un "torrente frenético" de ideas que se aglomeran y apoyan entre sí. Pueden obtenerse muchísimas ideas en poco tiempo. El juicio acerca de su calidad se tratará más adelante.

Cuando se trabaja solo se requiere usar otras técnicas. Las analogías y la inversión con frecuencia son útiles. Intente establecer analogías entre el problema en cuestión y otros contextos físicos. Si se trata de un problema mecánico conviértalo por analogía en uno hidráulico o eléctrico. La inversión pone al revés el problema. Por ejemplo, plantee que lo que se desea que sea móvil es estacionario y viceversa. Las perspectivas surgen con frecuencia. Otra ayuda útil para la creatividad es el uso de sinónimos. Defina el verbo de acción en el enunciado del problema y luego enuncie tantos sinónimos de ese verbo como sea posible. Por ejemplo:

Planteamiento del problema: Mueva este objeto del punto A al punto B.

El verbo de acción es "mover". Algunos sinónimos son empujar, jalar, deslizar, resbalar, aventar, arrojar, lanzar, hacer saltar, esparcir.



Lluvia de ideas

Por cualesquiera que sea el medio, el objetivo en este paso de ideación es generar un gran número de ideas sin prestar atención, por el momento, a la calidad. Pero, en algún



Frustración

momento, su "pozo mental" se agotará. Se habrá llegado entonces al paso del proceso creativo llamado **frustración.** Es el momento de dejar el problema y hacer otra cosa por un tiempo. Mientras su mente esté consciente, ocupada en otros intereses, su mente subconsciente trabajará de manera ardua en el problema. Éste es el paso llamado **incubación.** De repente, en un tiempo y en un lugar inesperados, una idea brotará en su consciente, y parecerá que es la solución obvia y "correcta" para el problema... **¡Eureka!** Con toda probabilidad un análisis posterior descubrirá algún defecto en tal solución. Si es así retroceda e **¡itere!** Puede ser necesaria mayor ideación, quizá más investigación, y hasta es posible que sea necesario redefinir el problema.

En su obra "Unlocking Human Creativity",[5] Wallen describe tres requisitos para la agudeza creativa:

- *Fascinación con un problema.*
- *Saturación de los hechos, ideas técnicas, datos y bases del problema.*
- *Un periodo de reorganización.*

El primero de estos requisitos proporciona la motivación para resolver el problema. El segundo es la base del paso de investigación descrito antes. El periodo de reorganización se refiere a la fase de frustración cuando su subconsciente trabaja en el problema. Según WallenJ[5]! la gente creativa manifiesta que en este periodo de reorganización no tiene conciencia plena con respecto al problema en particular, y que el momento del entendimiento frecuentemente aparece en medio de la relajación o del sueño. Así aumenta su creatividad, saturándose usted mismo del problema y relacionando el material base. Después relájase y ¡haga que su subconsciente trabaje duro!



¡Eureka!

Análisis

Una vez que llegue a esta etapa habrá estructurado el problema, por lo menos temporalmente, y ya podrá aplicar técnicas de análisis más refinadas para examinar la realización del diseño en la **fase de análisis** del proceso respectivo. (Estos métodos de análisis se discutirán detalladamente en los siguientes capítulos.) Se requerirá mayor iteración a medida que se descubran problemas a partir del análisis. La repetición de muchos pasos anteriores en el proceso del diseño, según sea necesario, debe realizarse para asegurar el éxito del diseño.

Selección

Cuando el análisis técnico indica que hay algunos diseños potencialmente viables, se debe **seleccionar** el óptimo o mejor disponible para el **diseño detallado,** el **prototipo** y las **pruebas.** En el proceso de selección generalmente se incluye un análisis comparativo de las soluciones de diseño disponibles. A veces una **matriz de decisión** ayuda a identificar la mejor solución y obliga a considerar una variedad de factores en forma sistemática. En la figura 1-2 se muestra una matriz de decisión para la mejor cortadora de pasto. Cada diseño ocupa un renglón en la matriz. Las columnas corresponden a categorías asignadas, según las cuales se han de juzgar los diseños: costo, facilidad de uso, eficiencia, funcionamiento, confiabilidad y otras que se juzguen apropiadas para el problema particular. A cada categoría se le asigna luego un **factor de ponderación** que mide su importancia relativa. Por ejemplo, para el usuario la confiabilidad puede ser un criterio más importante que el costo o viceversa. Como ingeniero de diseño usted debe tener un juicio al elegir y ponderar estas categorías. El cuerpo de la matriz se llena en-

	Costo	*Seguridad*	*Funcionamiento*	*Confiabilidad*	*RANGO*
Factor de ponderación	.35	.30	.15	.20	1.0
Diseño 1	3 / 1.05	6 / 1.80	4 / .60	9 / 1.80	5.3
Diseño 2	4 / 1.40	2 / .60	7 / 1.05	2 / .40	3.5
Diseño 3	1 / .35	9 / 2.70	4 / .60	5 / 1.00	4.7
Diseño 4	9 / 3.15	1 / .30	6 / .90	7 / 1.40	5.8
Diseño 5	7 / 2.45	4 / 1.20	2 / .30	6 / 1.20	5.2

FIGURA 1-2

Matriz de decisión

tonces con números que jerarquizan cada diseño según una escala conveniente, por ejemplo de 1 a 10, en cada una de las categorías. Observe que esto es finalmente una *jerarquización subjetiva* de su parte. Se deben examinar los diseños y decidir una calificación para cada uno. Las calificaciones se multiplican luego por los factores de ponderación (generalmente elegidos de modo que su suma sea un número conveniente, como 1), y los productos se suman para cada diseño. Las calificaciones ponderadas dan así una jerarquización de los diseños. Estos resultados deben aplicarse con precaución. ¡Recuerde la fuente y la subjetividad de sus calificaciones y los factores de ponderación! Siempre existirá tentación de otorgar más fe a estos resultados de la que es justificable. ¡Después de todo, se ven impresionantes ¡¡Pueden incluso tomarse con varias cifras decimales! (Pero esto no debe hacerse.) La utilidad real de una matriz de decisión es que descompone el problema en elementos más tratables, y lo obliga a uno a considerar el valor relativo de cada diseño en muchas categorías. Se puede, entonces, tomar una decisión más informada en lo referente al "mejor" diseño.

Diseño detallado

Este paso por lo general incluye la creación de un conjunto completo de dibujos de ensamblaje y de detalle, o de archivos de parte mediante el **diseño asistido por computadora** (CAD), *para todas y cada una de las partes* empleadas en el diseño. Cada dibujo de detalle debe especificar todas las dimensiones y especificaciones de material necesario para elaborar esa pieza o parte. A partir de estos dibujos (o archivos de CAD) debe construirse un modelo prototipo de prueba (o varios modelos) para someterlo a pruebas físicas. Es muy probable que las pruebas revelen más defectos y se requiera, por lo tanto, de más **iteración.**

Prototipos y pruebas

MODELOS Finalmente, no se puede estar seguro de la corrección o viabilidad de un diseño hasta que no sea construido y probado. Esto generalmente necesita de la fabrica-

ción de un modelo físico prototipo. Un modelo matemático, aunque es muy útil, no puede ser una representación tan completa y segura de un sistema físico real como el propio modelo físico, debido a la necesidad de efectuar hipótesis simplificadoras. Los prototipos con frecuencia son muy costosos, pero aun así son la forma más económica de probar un diseño y no tener que construir un dispositivo real, a escala natural. Los prototipos pueden tomar muchas formas, desde modelos a escala de trabajo hasta representaciones del concepto, de tamaño natural pero simplificado. Los modelos a escala introducen sus propias complicaciones respecto a la escalización apropiada de los parámetros físicos. Por ejemplo, el volumen de material varía según el cubo de las dimensiones lineales, pero el área superficial varía según el cuadrado. La transferencia de calor al medio ambiente puede ser proporcional al área de la superficie, en tanto que la generación de calor puede ser proporcional al volumen. Así pues, la escalización lineal de un sistema, hacia arriba o hacia abajo, puede conducir a un comportamiento diferente del de un sistema de escala natural. Se deben tener precauciones al escalizar modelos físicos. Encontrará, cuando comience a diseñar mecanismos de eslabonamiento, que un **modelo de cartulina simple** de las longitudes de eslabón elegidas, unido con tachuelas de presión (o chinches) como pivotes, revela mucho acerca de la calidad y el carácter de los movimientos del mecanismo. Se debe adquirir el hábito de elaborar tales modelos articulados simples para todos los diseños de eslabonamiento.

PRUEBAS del modelo o prototipo pueden variar desde su funcionamiento simple y la observación de su operación, hasta conectar un gran conjunto de instrumentos para medir con precisión desplazamientos, velocidades, aceleraciones, fuerzas, temperaturas y otros parámetros. Puede ser necesario efectuar las pruebas en condiciones ambientales controladas como alta o baja temperatura o humedad. La microcomputadora ha permitido medir muchos fenómenos con mayor precisión y a menor costo en comparación con lo que se hacía antes.

Producción

Finalmente, con bastante tiempo, dinero y perseverancia, el diseño estará listo para la producción. Ésta podría consistir en la manufactura de una sola versión final del diseño, pero probablemente significará hacer miles o incluso millones de artículos de un artefacto. El peligro, costos y conflictos provenientes de encontrar errores en el diseño después de fabricar grandes cantidades de artículos defectuosos debe alertar para observar mayor cuidado en los primeros pasos del proceso de diseño, con el fin de asegurar que se ha "ingenierizado" apropiadamente.

El **proceso de diseño** se usa ampliamente en ingeniería. Esta disciplina por lo general se define en función de lo que hace un ingeniero, pero la ingeniería también puede definirse en función de *cómo* un ingeniero hace lo que hace. La **ingeniería** es *tanto un método, un enfoque, un proceso o un estado mental para resolver problemas como una actividad.* El enfoque de ingeniería se refiere a la minuciosidad, a la atención al detalle y a la consideración de todas las posibilidades. Aunque parece que al destacar la "atención al detalle", mientras se enaltecen las virtudes de la mente abierta, la libertad de imaginación y el pensamiento creativo, se está siendo contradictorio, no es así. Las dos actividades no sólo son compatibles, sino que también son simbióticas. Por último, de nada sirve tener creatividad e ideas originales si no se realizan, o no se pueden materializar; es decir, si no se pueden "llevar a la práctica". Para esto debe disciplinarse uno mismo con el fin de afrontar los molestos e irritantes detalles tediosos, que son tan necesarios para la terminación de cualquier fase del proceso de diseño creativo. Por ejemplo, para efectuar

un trabajo eficaz en el diseño de algo debe definirse *completamente* el problema. Si se omite algún detalle de la definición del mismo se terminará resolviendo el problema equivocado. Además, se debe investigar *minuciosamente* la información preliminar relevante para el problema. Deben perseguirse en forma *exhaustiva* las posibles soluciones conceptuales del problema. Entonces hay que analizar *extensamente* estos conceptos con respecto a su validez. Y, finalmente, se debe *detallar* el diseño elegido hasta la última tuerca y el último tornillo para tener la confianza de que funcionará bien. Si desea ser un buen ingeniero y diseñador, se debe disciplinar para hacer las cosas de manera minuciosa, lógica y ordenada, incluso mientras se consideran conceptos de gran creatividad y se reconsideran repetidamente para llegar a una solución. Ambos atributos, creatividad y atención al detalle, son necesarios para lograr el éxito en el diseño de ingeniería.

1.6 OTROS ENFOQUES DEL DISEÑO

En los últimos años se ha hecho un considerable esfuerzo para entender mejor la metodología del diseño y del proceso del diseño. La metodología del diseño es el estudio del proceso del diseño. Un objetivo de esta investigación es definir el proceso del diseño con suficiente detalle para permitir una codificación amena para una ejecución en computadora usando "inteligencia artificial" (IA).

Dixon[6] define un diseño como un *estado de información* que puede hacerse de varias maneras:

> ...palabras, gráficas, datos electrónicos u otros. Esto puede ser parcial o completo. Esta gama abarca desde una pequeña cantidad de información altamente abstracta en el proceso del diseño hasta una gran cantidad de información detallada en el proceso suficiente para realizar la fabricación. Esto puede incluir, pero no se limita a ello, la información con respecto al tamaño y la forma, la función, los materiales, comercialización, realización simulada, procesos de fabricación, tolerancias, etc. Realmente, parte y toda la información relevante a la vida física o económica de un objeto diseñado es parte de este diseño.

Dixon describe diferentes estados generalizados de información como estados *requeridos,* los cuales son análogos a nuestras **especificaciones de funcionamiento.** La información acerca del concepto físico se refiere como un *estado conceptual* de información y es análogo a nuestra fase de **ideación.** Su *configuración característica* y estados *paramétricos* de información son similares a nuestra fase de **diseño detallado.** Dixon define entonces un proceso de diseño como:

> La serie de actividades a partir de las cuales la información con respecto al objeto diseñado se cambia de un estado de información a otro.

Diseño axiomático

N. P. Suh[7] sugiere un *enfoque axiomático* para diseñar en el que hay cuatro dominios: el dominio del **cliente,** el dominio **funcional,** el dominio **físico,** y el dominio del **proceso.** Este rango del "qué" al "cómo", es decir, de un estado de definición de qué quiere el cliente para determinar las funciones requeridas y las necesidades físicas de la representación de cómo el proceso logra la meta deseada. Suh define dos axiomas que necesita satisfacer para lograr esto:

1 Mantener la independencia de los requerimientos funcionales.

2 Minimizar la información contenida.

El primero de éstos se refiere a la necesidad de crear un conjunto completo y no dependiente de las especificaciones de funcionamiento. El segundo indica que el mejor diseño de solución tendrá el menor contenido de información (es decir, la menor complejidad). Anteriormente otras personas se han referido a esta segunda idea como *KISS* ("Keep it simple, stupid"), la cual establece, algo crudamente, "manténgalo lo más simple".

La implementación de los enfoques de Dixon y Suh para el proceso de diseño es algo más complicado. El lector interesado puede consultar la literatura citada en la bibliografía de este capítulo para completar más información.

1.7 SOLUCIONES MÚLTIPLES

Obsérvese que por la naturaleza del proceso de diseño **no** existe **una** respuesta correcta única para un problema de diseño. A diferencia de los problemas estructurados de un "libro de ingeniería", a los cuales están acostumbrados la mayoría de los estudiantes, no hay respuesta correcta "al final del libro" para un problema real de diseño.* Hay tantas soluciones potenciales como diseñadores deseosos de aplicarlas. Algunas serán mejores que otras, muchas darán buen resultado. ¡Algunas otras no! No hay "una respuesta correcta" en los problemas de ingeniería de diseño, y eso es lo que los vuelve en verdad interesantes. El único modo de determinar los méritos relativos de diversas soluciones potenciales de diseño es mediante un análisis cabal, que generalmente incluirá las pruebas físicas de los prototipos construidos. Debido a que éste es un proceso muy costoso, resulta de gran utilidad hacer el análisis sobre el papel o en la computadora, antes de construir realmente el dispositivo. Donde sea factible, deben crearse modelos matemáticos de diseño, o de partes de él; éstos pueden tomar muchas formas, de acuerdo con el sistema físico que se considera. En el diseño de mecanismos y máquinas generalmente es posible formular las ecuaciones para la dinámica de cuerpo rígido del sistema, y resolverlas en "forma cerrada" con computadora o sin ella. La consideración de las deformaciones elásticas de los elementos de un mecanismo o de una máquina por lo común necesita más planteamientos complicados mediante técnicas de **diferencias finitas** o del **método del elemento finito (MEF).**



Hacer que la máquina se adapte al ser humano

1.8 FACTORES HUMANOS EN LA INGENIERÍA

Con pocas excepciones todas las máquinas se diseñan para que las utilicen seres humanos. Incluso los robots deben ser programados por una persona. Los **factores humanos en la ingeniería** constituyen el estudio de la interacción entre el ser humano y las máquinas, y este concepto se define *como una ciencia aplicada que coordina el diseño de dispositivos, sistemas y condiciones físicas de trabajo con las capacidades y requerimientos del trabajador.* El diseñador de máquinas debe estar consciente de esto y diseñar por tanto dispositivos que se "adapten al ser humano", en vez de esperar que éste se adapte a la acción de la máquina. El término **ergonomía** es sinónimo de los *factores humanos en la ingeniería.* A menudo se hace referencia a la buena o mala ergonomía del interior de un automóvil o de un aparato doméstico. Una máquina con un diseño ergonómico deficiente será de uso incómodo y fatigoso, incluso puede resultar peligrosa. (¿Usted ha programado o ajustado el reloj de su videocasetera?)

* Un estudiante una vez comentó: *"La vida es un problema con numeración impar."* La explicación (lenta) por parte del autor fue: *"La respuesta no está al final del libro."*

Hay una gran cantidad de datos de factores humanos disponibles en la información técnica. Algunas referencias aparecen en la bibliografía de este capítulo. El tipo de información que se podría necesitar para un problema de diseño de máquinas se extiende desde las dimensiones del cuerpo humano y su distribución entre la población, según la edad y el sexo, hasta la capacidad del cuerpo humano para resistir aceleraciones en diversas direcciones sobre él, y a las resistencias típicas, así como a su aptitud para generar fuerzas en diversas posiciones. Obviamente, si se está diseñando un dispositivo que será controlado por un ser humano (quizás una cortadora de pasto) se necesita saber cuánta fuerza puede ejercer el usuario con las manos sostenidas en diversas posiciones, cuáles son los alcances de cada persona y cuánto ruido pueden resistir sus oídos sin sufrir daño. Si el artefacto llevara a bordo a su usuario se necesitan datos sobre los límites de aceleración que el cuerpo puede tolerar. Hay abundante información sobre todos estos asuntos. Gran parte fue desarrollada por el gobierno de Estados Unidos que regularmente prueba la aptitud del personal militar para soportar condiciones ambientales extremas. Parte de la investigación preliminar de un problema de diseño de máquinas debe incluir alguna investigación de los factores humanos.

1.9 EL REPORTE EN INGENIERÍA

La comunicación de ideas y resultados es un aspecto muy importante en la ingeniería. Muchos estudiantes se imaginan en la práctica profesional gastando la mayor parte de su tiempo en la ejecución de cálculos de naturaleza similar a aquellos de sus tiempos de escuela. Por fortuna es raro que esto suceda, pues si así fuera sería muy aburrido. En realidad los ingenieros dedican la mayoría de su tiempo a la comunicación con otros, ya sea verbal o por escrito. Los ingenieros redactan propuestas e informes técnicos, realizan presentaciones y se relacionan con personal de apoyo. Cuando se realiza un diseño generalmente es necesario presentar los resultados a un cliente, a colegas o a un patrón. La forma usual de presentación es un reporte técnico formal. Por lo tanto, es muy importante que el estudiante de ingeniería desarrolle habilidades de comunicación. *Usted puede ser la persona más lista del mundo, pero nadie sabrá eso si usted no puede comunicar sus ideas de manera clara y concisa.* De hecho, si no puede explicar con palabras lo que ha elaborado, es que quizá no lo comprende. Para darle alguna experiencia en esta importante destreza los señalamientos de proyecto de diseño en los capítulos finales están previstos para escribirse en informes o reportes técnicos. Puede encontrarse mayor información acerca de la escritura de reportes de ingeniería en las publicaciones sugeridas en la bibliografía presentada al final de este capítulo.

1.10 UNIDADES

Se dispone de varios sistemas de unidades para su aplicación en ingeniería. Los más comunes en Estados Unidos son el **sistema pie-libra-segundo (fps,** por sus siglas en inglés), el sistema **pulgada-libra-segundo (ips,** por sus siglas en inglés) y el **Sistema Internacional (SI).** Todos los sistemas se crearon a partir de la elección de tres cantidades en la expresión general de la segunda ley de Newton

$$F = \frac{ml}{t^2} \tag{1.1a}$$

donde F es fuerza, m es masa, l es longitud y t es tiempo. Pueden escogerse las unidades para cualesquiera tres de estas variables y entonces la otra se deduce en función de las unidades elegidas. Las tres unidades seleccionadas se llaman *unidades fundamentales* (o básicas) y la restante es entonces una *unidad derivada.*

La mayor parte de los errores en la conversión de cálculos entre uno u otro de los sistemas usuales en Estados Unidos y el SI se debe al hecho de que este último utiliza un conjunto diferente de unidades básicas que los llamados sistemas U.S. (o de Estados Unidos). Éstos eligen *la fuerza, la longitud* y *el tiempo* como unidades fundamentales. La unidad de masa es entonces una unidad derivada de los sistemas usuales en Estados Unidos, que se designan como *sistemas gravitacionales* debido a que el valor de la unidad de masa depende de la constante de aceleración gravitacional local. En el SI se adoptan la *masa,* la *longitud* y el *tiempo* como cantidades básicas, y la unidad de fuerza es una unidad derivada. El SI se denomina, por tanto, *sistema absoluto,* puesto que la unidad de masa es fundamental y su valor no depende de la gravedad local.

La aplicación del sistema inglés **pie-libra-segundo (fps)** requiere que todas las longitudes se midan en pies (pie) las fuerzas en libras (Ib) y el tiempo en segundos (s). La unidad de masa se deduce entonces a partir de la ley de Newton expresada como

$$m = \frac{Ft^2}{l} \tag{1.1b}$$

y las unidades son:

Libra-segundo cuadrado por **pie** (Ib-s^2/pie) = **slug**

En el sistema inglés **pulgada-libra segundo (ips)** se necesita que todas las longitudes se midan en pulgadas (pulg); las fuerzas en libras (Ib) y el tiempo en segundos (s). La unidad de masa se deduce mediante la ley de Newton, ecuación 1.1b, pero las unidades son ahora:

Libra-segundo al cuadrado por **pulgada** (lb-s^2/pulg) = **blob**

¡Esta unidad de masa no es el slug! Un blob tiene un valor de 12 slug.*

El peso se define como la fuerza ejercida por la gravedad sobre un cuerpo o un objeto. Probablemente el error más común que cometen los estudiantes en la aplicación de las unidades es mezclar estos dos sistemas (el **fps** y el **ips)** cuando convierten unidades de peso (las cuales son libras fuerza) en unidades de masa. Obsérvese que la constante de aceleración gravitacional *(g)* en la Tierra, a nivel del mar, vale aproximadamente 32.2 **pies** por segundo al cuadrado, lo cual es equivalente a 386 **pulgadas** por segundo al cuadrado. La relación entre masa y peso es:

Masa = peso/aceleración gravitacional

$$m = \frac{W}{g} \tag{1.2}$$

Debe ser obvio que si se miden todas las longitudes en **pulgadas** y luego se utiliza g = 32.2 **pie/s^2** para calcular masa, se comete un error en *un factor de 12* en los resultados. Éste es un error considerable, lo bastante grande para que se precipite a tierra el avión que se diseñó. Aún peor es el caso del estudiante que omite en absoluto convertir peso a masa *en todos* sus cálculos. Habrá cometido un error en 32.2, o bien, en 386 pulgadas, en sus resultados. ¡Esto es suficiente para que se hunda el navío diseñado!

* Es desafortunado que la unidad de masa en el sistema inglés, en la forma **¡ps** nunca haya recibido un nombre oficialmente, como en el caso del slug, aplicado a la unidad de masa del sistema inglés, en la forma **fps.** El autor se atreve a sugerir (con algo de reticencia) que la unidad de masa en el sistema tipo **ips** se denomine *blob* (bl), para distinguirla más claramente de la unidad **slug** (si), y ayudar así al estudiante a evitar alguno de los frecuentes errores en el uso de unidades que ya se han mencionado.

12 slugs = 1 blob

El nombre **blob** (burbuja), que es casi igual de burdo que el de slug (babosa), es fácil de recordar, implica la idea de masa y tiene una abreviatura conveniente (bl), que es un anagrama del símbolo de la libra (Ib). Además, si alguna vez el lector ha visto una babosa arrastrarse en un jardín o sobre una planta, sabe que puede parecer una especie de *"pequeña burbuja".*

Para agregar aún más a la confusión del estudiante acerca de las unidades, está el uso adicional de la unidad **libra masa** (lb_m). Ésta suele utilizarse en dinámica de fluidos y termodinámica, y proviene del uso de una forma ligeramente distinta de la ecuación de Newton:

$$F = \frac{ma}{g_c} \tag{1.3}$$

en donde m = masa en lb_m, a = aceleración y g_c = la constante gravitacional.

El valor de la **masa** de un objeto medida en **libras masa** (lb_m) es *numéricamente igual* a su **peso** expresado en **libras fuerza** (lb_f). Sin embargo, el estudiante *debe recordar dividir* el valor de m en lb_m, entre el valor de g_c cuando sustituya en esta forma de la ecuación de Newton. Por lo tanto, las lb_m se dividirán entre 32.2, o entre 386, cuando se calcule una fuerza dinámica. El resultado será el mismo que cuando la masa se expresa en slug o en blob en la ecuación $F = ma$. Recuerde que en números redondos y al nivel del mar en la tierra:

$$1\ lb_m = 1\ lb_f \qquad 1\ slug = 32.2\ lb_f \qquad 1\ blob = 386\ lb_f$$

El sistema SI requiere que las longitudes se midan en metros (m), la masa en kilogramos (kg) y el tiempo en segundos (s). Éste algunas veces se llama sistema **mks.** La fuerza se obtiene de la ley de Newton y la ecuación 1. Ib, y las unidades son:

kilogramo-metro por segundo al cuadrado (kg-m/s^2) = newtons (N)

De manera que en el SI hay nombres específicos para las unidades de masa y de fuerza, lo cual ayuda a reducir la confusión. Cuando se convierte entre el SI y el sistema inglés, hay que estar alerta ante el hecho de que la masa se convierta de kilogramos (kg) a slugs (sí) o a blobs (bl), y la fuerza, de newtons (N) a libras (Ib). La constante gravitacional *(g)* en el SI es de aproximadamente 9.81 m/s^2.

El sistema de unidades que se usará principalmente en este libro será el sistema inglés en su forma **ips.** La mayoría de los diseños de máquinas en Estados Unidos se realizan todavía con este sistema. En la tabla 1-4 se muestran algunas cantidades físicas utilizadas en este texto y sus unidades. La segunda de forros contiene una tabla de los factores de conversión entre los sistemas inglés y el sistema internacional (SI).

Se recomienda al estudiante comprobar, siempre, las unidades de toda ecuación escrita para la resolución de un problema, ya sea en la escuela o en la práctica profesional. Si está apropiadamente establecida una ecuación se deben cancelar todas las unidades a uno y otro lado de la igualdad. Si no es así, entonces el estudiante puede estar *absolutamente seguro* de que es ***incorrecta.*** Por desgracia, un balance en las unidades en una ecuación no garantiza que sea correcta, ya que puede tener otros errores. Siempre compruebe dos veces sus resultados. Podría salvar una vida.

1.11 LO QUE VIENE

En este texto se explorará el tema del **diseño de máquinas** con respecto a la **síntesis de mecanismos** para lograr los movimientos o efectos deseados, y también el análisis de estos mecanismos con objeto de determinar su comportamiento dinámico de cuerpo rígido. Partiendo de la premisa de que no se puede analizar algo hasta no haberlo sintetizado

TABLA 1 -4 Cantidades físicas y unidades

Los nombres de las unidades fundamentales se indican en negritas, las abreviaturas entre ( )

Variable	Símbolo	Unidades ips	Unidades fps	Unidades SI
Fuerza	F	**libra (lb)**	**libra (lb)**	newton (N)
Longitud	l	**pulgada (pulg)**	**pie (pie)**	**metro (m)**
Tiempo	t	**segundo (s)**	**segundo (s)**	**segundo (s)**
Masa	m	lb-s^2 / in (bl)	lb-s^2 / ft (sl)	**kilogramo (kg)**
Manivela-balancín	W	libra (lb)	libra (lb)	newton (N)
Velocidad	v	in / s	ft / s	m / s
Aceleración	a	in / s^2	ft / s^2	m / s^2
Rapidez de aceleración	j	in / s^3	ft / s^3	m / s^3
Ángulo	θ	grado (grad)	grado (grad)	grado (grad)
Ángulo	θ	radián (rad)	radián (rad)	radián (rad)
Velocidad angular	ω	rad / s	rad / s	rad / s
Aceleración angular	α	rad / s	rad / s^2	rad / s^2
Rapidez de aceleración angular	φ	rad / s	rad / s^3	rad / s^3
Par de torsión	T	lb-in	lb-ft	N-m
Momento de inercia de masa	I	lb-in-s^2	lb-ft-s^2	N-m-s^2
Energía	E	in-lb	ft-lb	joules
Potencia	P	in-lb / s	ft-lb / s	watts
Volumen	V	in^3	ft^3	m^3
Peso específico	γ	lb / in^3	lb/ft^3	N / m^3
Densidad (masa específica)	ρ	bl / in^3	sl/ft^3	kg / m^3

en su existencia, se explorará en primer lugar el tema de la síntesis de mecanismos. Luego se investigará el análisis de ésos y otros mecanismos según su comportamiento cinemático. Finalmente, en la parte II se tratará el **análisis dinámico** de las fuerzas y pares de torsión generados por estas máquinas en movimiento. Estos temas cubrirán esencialmente las primeras etapas de un proyecto de diseño. Una vez que se ha determinado la cinemática y la cinética de un diseño, puede decirse que se ha concluido la mayor parte del diseño conceptual. Lo que resta entonces es el **diseño detallado** ajustando las partes a las fallas. El tema de *diseño detallado* se analiza en otros textos como el de la referencia [8].

1.12 REFERENCIAS

1 **Rosenauer, N. y A. H. Willis** (1967). *Kinematics of Mechanisms.* Dover Publications: Nueva York, pp. 275 y ss.

2 de **Jonge, A. E. R.** (1942). "What Is Wrong with 'Kinematics' and 'Mechanisms'?" *Mechanical Enginneering,* vol. 64, abril, pp. 273-278.

3 **Artobolevsky,** I. I. (1975). *Mechanisms in Modern Engineering Design.* Trad. por N. Weinstein. vols. 1-5. Publicaciones MIR: Moscú.

4 **Erdman, A. E.,** ed. (1993). *Modern Kinematics: Developments in the Last Forty Years.* Serie en la Wiley Design Engineering de John Wiley & Sons: Nueva York.

5 **Wallen, R. W.** (1957). "Unlocking Human Creativity". *Proc. of Fourth Conference on Mechanics,* Purdue University, pp. 2-8.

6 **Dixon, J. R.** (1995). "Knowledge Based Systems for Design". *Journal of Mechani cal Design,* vol. 117b(2), p. 11.

7 **Suh,** N. P. (1995). "Axiomatic Design of Mechanical Systems". *Journal of Mechanical Design,* vol. **117b(2),** p. 2.

8 **Norton,** R. L. (1996). *Machine Design: An Integmted Approach.* Prentice-Hall: Upper Saddle River. NJ.

1.13 BIBLIOGRAFIA

Para mayor información sobre la historia de la cinemática se recomiendan:

Artobolevsky, I. I. (1976). "Past, Present and Future of the Theory of Machines and Mechanics". *Mechanism and Machine Theory,* vol. 11, pp. 353-361.

Brown, H. T. (1869). *Five Hundred and Seven Mechanical Movements.* Brown, Coombs & Co.: Nueva York, republicado por USM Corporation, Beverly, Mass., 1970.

de Jonge, A. E. R. (1942). "What Is Wrong with 'Kinematics' and Mechanisms'?" *Mechanical Engineering,* vol. 64 (abril), pp. 273-278.

de Jonge, A. E. R. (1943). "A Brief Account of Modern Kinematics". *Transactions of the ASME,* pp. 663-683.

Erdman, A. E., ed. (1993). *Modern Kinematics: Developments in the Last Forty Years.* Serie en la Wiley Design Engineering de John Wiley & Sons: Nueva York.

Ferguson, E. S. (1962). "Kinematics of mechanisms from the Time of Watt". *United States National Museum Bulletin,* 228(27), pp. 185-230.

Freudenstein, F. (1959). "Trends in the Kinematics of Mechanisms". *Applied Mechanics Reviews,* vol. 12(9), septiembre, pp. 587-590.

Hartenberg, R. S. y Denavit. J. (1964). *Kinematic Synthesis of Linkages,* McGraw-Hill: Nueva York, pp. 1-27.

Nolle, H. (1974). "Linkage Coupler Curve Synthesis: A Historical Review—II. Developments after 1875". *Mechanism and Machine Theory, 9,* pp. 325-348.

Nolle, H. (1975). "Linkage Coupler Curve Synthesis: A Historical Review—I. Developments up to 1875". *Mechanism and Machine Theory, 9,* pp. 147-168.

Nolle, H. (1975). "Linkage Coupler Curve Synthesis: A Historical Review—III. Spatial Synthesis and Optimization". *Mechanism and Machine Theory,* 10, pp. 41-55.

Reuleaux, F. (1963). *The Kinematics of Machinery,* trad. por A. B. W. Kennedy, Dover Publications: Nueva York, pp. 29-55.

Strandh, S. (1979). *A History of the Machine.* A&W Publishers: Nueva York.

Para obtener información adicional sobre la creatividad y el proceso de diseño se recomiendan las siguientes publicaciones:

Alger, J. R. M. y Hays, C. V. (1964). *Creative Synthesis in Design.* Prentice-Hall: Upper Saddle River, NJ.

Alien, M. S. (1962). *Morphological Creativity.* Prentice-Hall: Upper Saddle River, NJ.

Altschuller, G. (1984). *Creativity as an Exact Science.* Gordon and Breach: Nueva York.

Buhl, H. R. (1960). *Creative Engineering Design.* Iowa State University Press: Ames, IA.

Dixon, J. R. y Poli C. (1995). *Engineering Design and Design for Manufacturing—A Structured Approach.* Field Stone Publishers: Conway, MA.

Fey, V. y colaboradores (1994). "Application of the Theory of Inventive Problem Solving to Design and Manufacturing Systems". *CIRP Annals,* 43(1), pp. 107-110.

Gordon, W. J. J. (1962). *Synectics.* Harper & Row: Nueva York.

Haefele, W. J. (1962). *Creativity and Innovation.* Van Nostrand Reinhold: Nueva York.

Harrisberger, L. (1982). *Engineersmanship.* Brooks/Cole: Monterey, CA.

Osborn, A. **F.** (1963). *Applied Imagination.* Scribners: Nueva York.

Pleuthner, W. (1956). "Brainstorming". *Machine Design,* enero, 12, 1956.

Suh, N. P. (1990). *The Principies of Design.* Oxford University Press: Nueva York.

Taylor, C. W. (1964). *Widening Horizons in Creativity.* John Wiley & Sons: Nueva York.

Von Fange, E. K. (1959). *Professional Creativity.* Prentice-Hall: Upper Saddle River, NJ.

Para información complementaria sobre el tema de factores humanos se recomiendan las siguientes obras:

Bailey, R. W. (1982). *Human Performance Engineering: A Guide for System Designers.* Prentice-Hall: Upper Saddle River, NJ.

Burgess, W. R. (1986). *Designing for Humans: The Human Factor in Engineering.* Petrocelli Books.

Clark, T. S. y Corlett, E. N. (1984). *The Ergonomics ofWorkspaces and Machines.* Taylor and Francis.

Huchinson, R. D. (1981). *New Horizons for Human Factors in Design.* McGraw-Hill: Nueva York.

McCormick, D. J. (1964). *Human Factors Engineering.* McGraw-Hill: Nueva York.

Osborne, D. J. (1987). *Ergonomics at Work.* John Wiley & Sons: Nueva York.

Pheasant, S. (1986). *Bodyspace: Anthropometry, Ergonomics & Design.* Taylor and Francis.

Salvendy, G. (1987). *Handbook of Human Factors.* John Wiley & Sons, Nueva York.

Sanders, M. S. (1987). *Human Factors in Engineering and Design.* McGraw-Hill: Nueva York.

Woodson, W. E. (1981). *Human Factors Design Handbook.* McGraw-Hill: Nueva York.

Para información complementaria sobre redacción de informes de ingeniería pueden verse las siguientes obras:

Barrass, R. (1978). *Scientists Must Write.* John Wiley & Sons: Nueva York.

Crouch, W. G. y Zetler, R. L. (1964). *A Guide to Technical Writing.* The Ronald Press: Nueva York.

Davis, D. S. (1963). *Elements of Engineering Reports.* Chemical Publishing Co. Nueva York.

Gray, D. E. (1963). *So You Have to Write a Technical Repon.* Information Resources Press: Washington D.C.

Michaelson, H. B. (1982). *How to Write and Publish Engineering Papers and Reports.* ISI Press: Philadelphia, PA.

Nelson, J. R. (1952). *Writing the Technical Repon.* McGraw-Hill: Nueva York.

Capítulo 2



FUNDAMENTOS DE CINEMÁTICA

El azar favorece a la mente preparada.
PASTEUR

2.0 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentarán las definiciones de algunos términos y conceptos fundamentales para la síntesis y el análisis de mecanismos. Se presentarán también algunas herramientas de análisis muy simples pero poderosas que son útiles en la síntesis de mecanismos.

2.1 GRADOS DE LIBERTAD *(GDL)*

Un sistema mecánico puede clasificarse de acuerdo con el número de **grados de libertad** *{GDL)* que posee. El *GDL* de un sistema es igual *al número de parámetros independientes (medidas) que se necesitan para definir unívocamente su posición en el espacio en cualquier instante.* Observe que el *GDL* se define con respecto a un marco de referencia seleccionado. En la figura 2-1 se muestra un lápiz colocado sobre una hoja en un plano que tiene un sistema de coordenadas *xy.* Si este lápiz permanece en el plano del papel se requieren tres parámetros *(GDL)* para definir completamente la posición del lápiz en el papel, dos coordenadas lineales *(x, y)* para definir la posición de cualquier punto del lápiz y una coordenada angular (8) para definir el ángulo que forma ese objeto con respecto al eje *x.* El mínimo número de medidas necesarias para definir su posición se muestran en la figura como *x, y* y 0. Este sistema del lápiz en un plano tiene entonces **tres** *GDL.* Observe que los parámetros particulares elegidos para definir su posición no son únicos. Podría utilizarse un conjunto alterno de tres parámetros. Hay una infinidad de conjuntos de parámetros posibles, pero en este caso deben ser tres por conjunto, **por ejemplo dos longitudes y un ángulo,** para definir la posición del sistema, ya que *un cuerpo rígido en movimiento plano tiene tres GDL.*

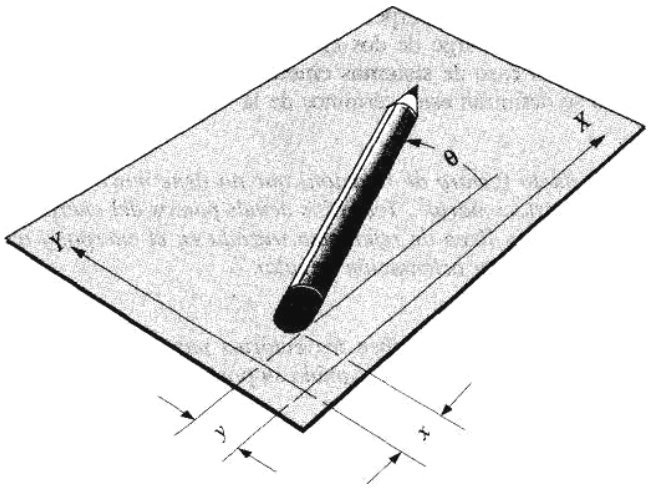


FIGURA 2-1

Un cuerpo rígido en un plano tiene tres *GDL*

Considere ahora el lápiz en un mundo tridimensional. Sosténgalo por encima de la cubierta de su escritorio y muévalo respecto a él. Se necesitarán entonces seis parámetros para definir sus **seis** *GDL.* Un conjunto paramétrico posible que podría usarse es: **tres longitudes (x, *y, z)*** más **tres ángulos** (θ, ϕ, ρ). . *Cualquier cuerpo rígido en el espacio tridimensional posee seis grados de libertad.* Trate de identificar los seis *GDL* moviendo su lápiz o pluma con respecto a la cubierta de su escritorio.

En estos ejemplos el lápiz representa un **cuerpo rígido** o **eslabón,** que para los propósitos del análisis cinemático se supondrá que no experimenta ninguna deformación. Ésta es una hipótesis conveniente que permite definir con mayor facilidad los movimientos totales del cuerpo. Después puede sobreponerse cualquier deformación debida a cargas externas o de inercia a los movimientos cinemáticos para obtener una más completa y exacta imagen del comportamiento del cuerpo. Pero recuerde que se está frente a una *hoja en blanco* en la etapa inicial del proceso de diseño. No se pueden determinar deformaciones de un cuerpo hasta definir tamaño, forma, propiedades del material y cargas. Por consiguiente, en esta etapa se supondrá, para fines de síntesis y análisis cinemáticos, que los *cuerpos cinemáticos son rígidos y sin masa.*

2.2 TIPOS DE MOVIMIENTO

Para moverse dentro de un marco de referencia un cuerpo rígido libre tendrá, en el caso general, un **movimiento complejo,** el cual es una combinación simultánea de **rotación y traslación.** En el espacio tridimensional puede haber rotación alrededor de cualquier eje (un eje oblicuo, o bien, alguno de los tres ejes principales), así como traslación simultánea, que puede descomponerse en componentes a lo largo de tres ejes. En un plano, o espacio bidimensional, el movimiento complejo se vuelve una combinación de rotación

simultánea con respecto a un eje (perpendicular al plano), y también traslación, descompuesta en componentes a lo largo de dos ejes en el plano. Para simplificar, la presente exposición se limitará al caso de **sistemas cinemáticos en el plano (2-D).** En el movimiento en el plano se definirán estos términos de la siguiente manera:

Rotación pura

el cuerpo posee un punto (centro de rotación) que no tiene movimiento con respecto al marco de referencia "estacionario". Todos los demás puntos del cuerpo describen arcos respecto a ese centro. Una línea de referencia trazada en el cuerpo, y que pasa por su centro, cambia únicamente su orientación angular.

Traslación pura

todos los puntos en el cuerpo describen trayectorias paralelas (curvas o rectas). Una línea de referencia trazada en el cuerpo cambia su posición lineal pero no su orientación angular.

Movimiento complejo

es una combinación simultánea de rotación y traslación. Cualquier línea de referencia trazada en el cuerpo cambiará su posición lineal y su orientación angular. Los puntos en el cuerpo se moverán en trayectorias no paralelas y habrá en todo momento un centro de rotación, que continuamente cambiará de ubicación.

La **traslación y** la **rotación** representan movimientos independientes del cuerpo. Cada uno puede presentarse sin el otro. Si se define un sistema de coordenadas bidimensional (2-D) como se muestra en la figura 2-1, los términos en *x* y *y* representan las componentes del movimiento de traslación, y el término 0, la componente de rotación.

2.3 ESLABONES, JUNTAS Y CADENAS CINEMÁTICAS

La exploración de la cinemática de mecanismos se iniciará con una investigación del tema de **diseño de eslabonamientos.** Estos sistemas son los componentes básicos de todos los mecanismos. Se mostrará en los capítulos siguientes que todas las formas comunes de mecanismos (levas, engranes, bandas, cadenas) son de hecho variantes de una clase común de eslabonamientos, los cuales se componen de eslabones y juntas.

Un **eslabón,** como se muestra en la figura 2-2, es (hipotéticamente) un cuerpo rígido que posee por lo menos dos **nodos,** que son *los puntos de unión con otros eslabones.*

Eslabón binario *el que tiene dos nodos.*

Eslabón ternario *el que tiene tres nodos.*

Eslabón cuaternario *el que tiene cuatro nodos.*

Una **junta** es *una conexión entre dos o más eslabones (en sus nodos), la cual permite algún movimiento o movimiento potencial, entre los eslabones conectados.* Las **juntas** (llamadas también **pares cinemáticos)** se pueden clasificar de varios modos:

1 Por el tipo de contacto entre los elementos: de línea, de punto o de superficie.

2 Por el número de grados de libertad permitidos en la junta.

3 Por el tipo de cierre de la junta, de **fuerza** o de **forma.**

4 Por el número de eslabones conectados (orden de la junta).

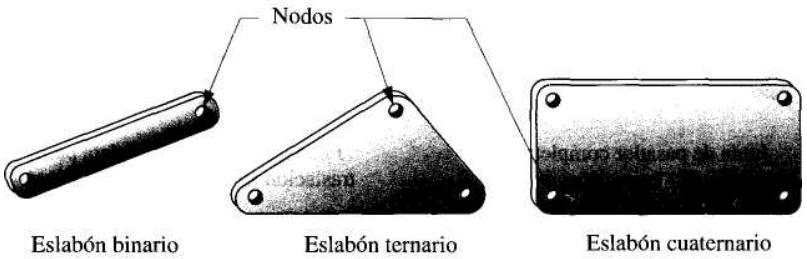


FIGURA 2-2

Eslabones de diferente orden

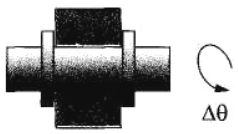
Reuleaux[1] acuñó el término **par inferior** para describir juntas con contacto de superficie (como el de un pasador dentro de su agujero) y el término de **par superior** para describir las juntas con contacto de punto o de línea. Sin embargo, si hay holgura o espacio libre entre el pasador y su agujero (como debe ser para que haya movimiento), el contacto de superficie en la junta de pasador es realmente contacto de línea, pues el pasador toca sólo un "lado" del hueco. Asimismo, a escala microscópica, un bloque deslizante sobre una superficie plana en realidad tiene contacto sólo en porciones aisladas de superficie, que son las cimas de las salientes o asperezas de las superficies. La principal ventaja práctica de los pares inferiores sobre los pares superiores es su mayor capacidad para atrapar lubricante entre las superficies envolventes. Esto es especialmente cierto para la junta de pasador de rotación. En una junta no envolvente el lubricante se expulsa con mayor facilidad entre las superficies de un par superior. Como resultado, se prefiere la junta de pasador para el caso de bajo desgaste y larga duración, aun sobre su relacionada de par inferior, la junta prismática de corredera.

La figura *2-3a)* muestra los seis pares posibles inferiores, sus grados de libertad y sus símbolos de una letra. Los pares de rotación (R) y prismáticos (P) son los únicos pares inferiores que se usan comúnmente en los mecanismos en un plano. El tornillo (H), cilíndrico (C), esférico (S), y los pares inferiores planos (F) son todas las combinaciones de la revolución y/o de los pares prismáticos y se usan en los mecanismos espaciales (3-D). Los pares R y P son elementos básicos de los demás pares, los cuales son combinaciones de estos dos, como se muestra en la tabla 2-1.

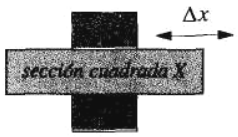
Una forma más útil de clasificar las juntas (pares) es por el número de grados de libertad que hay entre dos elementos unidos. La figura 2-3 también muestra ejemplos de una y dos juntas libres comúnmente encontrada en mecanismos en un plano. En la figura *2-3b)* se indican dos formas de una junta plana con **una libertad** (o par), a saber, una junta de pasador rotacional (R) y una junta de traslación de corredera (P). A ambas uniones se les llama **juntas completas** (es decir, completa = 1 *GDL), y* son **pares inferiores.** La junta de pasador tiene un *GDL* rotacional y la junta de corredera un *GDL* traslacional entre los eslabones conectados. Éstos son casos especiales de otra junta común, con un grado de libertad, la de tornillo y tuerca (véase la figura 2-3a)). El movimiento de la tuerca con respecto al tornillo o viceversa resulta en movimiento helicoidal. Si el ángulo de hélice es cero, la tuerca gira sin avanzar y se tiene así la junta de pasador. Si el ángulo de hélice es de 90° la tuerca se trasladará a lo largo del eje del tornillo, y se tiene así la junta de corredera.

TABLA 2-1
Los seis pares inferiores

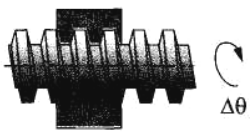
Nombre (símbolo)	GDL	Contiene
Rotación (R)	1	R
Prismático (P)	1	P
Helicoidal (H)	1	RP
Cilíndrico (C)	2	RP
Esférico (S)	3	RRR
En un plano (F)	3	RPP



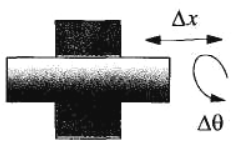
Junta de rotación (R) (1 *GDL*)



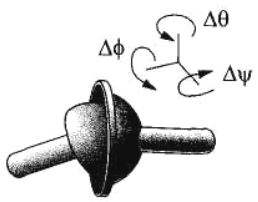
Junta prismática (P) (1 *GDL*)



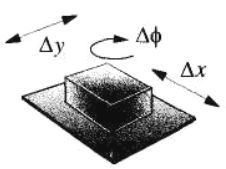
Junta helicoidal (H) (1 *GDL*)



Junta cilíndrica (C) (2 *GDL*)



Junta esférica (S) (3 *GDL*)

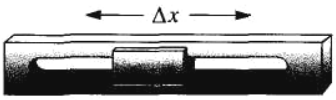


Junta en un plano (F) (3 *GDL*)

a) Los seis pares inferiores

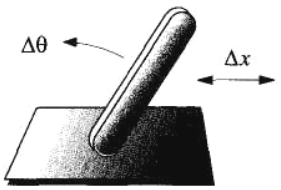


Junta de pasador completa para rotación (R) (con cierre de forma)

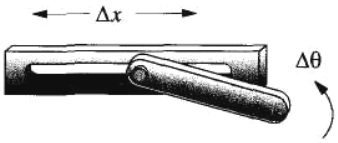


Junta de corredera completa para traslación (P) (con cierre de forma)

b) Juntas completas de un *GDL* (pares inferiores)

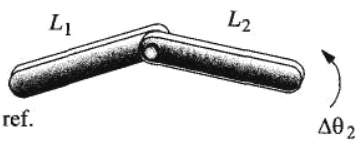


Eslabón apoyado contra un plano (con cierre de fuerza)

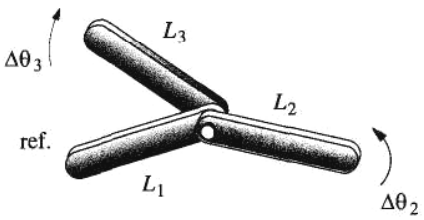


Pasador en ranura (con cierre de forma)

c) Semijuntas de rodamiento-deslizamiento de dos *GDL* (pares superiores)

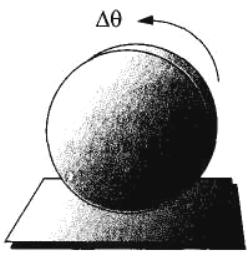


Junta de pasador de primer orden de un *GDL* (dos eslabones conectados)



Junta de pasador de segundo orden de dos *GDL* (tres eslabones

d) El orden de una junta es menor en uno que el número de eslabones unidos



Puede rodar, deslizar, o rodar y deslizar según la fricción

e) Junta de rodamiento puro (R), de deslizamiento puro (P) o de rodamiento (RP), uno o dos GDL (pares superiores)

FIGURA 2-3

Juntas (pares) de diversos tipos

En la figura 2-3c) se muestran ejemplos de juntas con dos grados de libertad (pares superiores) que permiten simultáneamente dos movimientos relativos independientes, a saber, traslación y rotación entre los eslabones conectados. Paradójicamente, esta **junta con dos libertades** a veces se denomina **"semijunta",** con sus dos libertades colocadas en el denominador. En ocasiones la **semijunta** se denomina también **junta de rodamiento-deslizamiento,** ya que permite ambas formas de movimiento. Una junta de rótula (o de bola) y casquillo (véase la figura 2-3a)) es un ejemplo de una junta con tres libertades, que permite tres movimientos angulares independientes entre los dos eslabones conectados. Esta *junta de rótula* se aplicaría típicamente en un mecanismo tridimensional; por ejemplo, las juntas de bola en el sistema de suspensión de un automóvil.

Una junta con más de un grado de libertad por lo general es también un **par superior,** como se muestra en la figura 2-3c). Las juntas completas (pares inferiores) y las semijuntas (pares superiores) se utilizan en mecanismos planares (2-D) y espaciales (3-D). Observe que si no se permite deslizamiento entre los dos eslabones de la figura 2-3c) conectados por una junta de rodamiento-deslizamiento, quizá al proporcionar un elevado coeficiente de fricción entre ellos se puede "bloquear" la libertad de traslación (Δx) y hacer que funcione como una junta completa. Esto se llama entonces **junta de rodamiento puro** y sólo tiene libertad rotacional $(\Delta\theta)$. Un ejemplo común de este tipo de junta es la llanta de automóvil que rueda sobre el pavimento, como se muestra en la figura 2-3e). En uso normal hay rodamiento puro y no deslizamiento en esta junta, a menos, desde luego, que se desplace sobre un camino helado o se maneje con demasiado entusiasmo por la aceleración o los virajes. Si se aplican los frenos al desplazarse sobre hielo, esta junta se convierte en una de deslizamiento puro, como la de corredera de la figura 2-3*b*). La fricción determina el número real de libertades en esta clase de junta. Puede ser de **rodamiento puro,** de **deslizamiento puro** o de **rodamiento-deslizamiento.**

Para imaginar el grado de libertad de una junta en un mecanismo es útil "desconectar mentalmente" los dos eslabones que forman la junta, respecto del resto del mecanismo. Se puede ver entonces con más facilidad cuántas libertades tienen entre sí los dos eslabones conectados.

En la figura 2-3c) se muestran también ejemplos de juntas con **cierre de forma y** con **cierre de fuerza.** Una junta con **cierre de forma** se mantiene unida *o cerrada por su geometría.* Un pasador en su agujero o una corredera en su ranura o guía de dos lados tienen cierre de forma. En contraste, una junta con **cierre de fuerza,** como un pasador en un medio cojinete, o una corredera sobre una superficie, *requieren alguna fuerza externa para mantenerse en contacto o cierre.* La gravedad, un resorte u otros medios externos podrían proporcionar esta fuerza. Como se verá, puede haber diferencias sustanciales en el comportamiento de un mecanismo debido a la elección de cierre de fuerza o de forma. La elección se debe considerar cuidadosamente. En los eslabonamientos por lo general se prefiere el cierre de forma y es fácil de lograr. Pero para sistemas de leva-seguidor con frecuencia se prefiere el cierre de fuerza. Este tema se explorará en capítulos subsiguientes.

En la figura 2-3*d*) se muestran ejemplos de juntas de diversos órdenes; el **orden** se define como *el número de eslabones conectados menos uno.* Se necesitan dos eslabones para constituir una junta simple; por tanto, la conexión más simple de dos eslabones tiene un orden igual a uno. A medida que se agregan eslabones a la misma junta, aumenta el orden de ésta de uno en uno. El orden de una junta es significativo en la determinación apropiada del grado total de libertad para el ensamblaje. En el capítulo 1 ya se dieron definiciones para el **mecanismo y** la **máquina.** Si se definen los elementos cinemáticos

de eslabones y juntas, entonces es posible definir con mayor precisión aquellos dispositivos con base en las clasificaciones de Reuleaux de cadena cinemática, mecanismo y máquina.[11]^

Una cadena cinemática se define como:

Un ensamblaje de eslabones y juntas, interconectados de modo que proporcionen un movimiento de salida controlado en respuesta a un movimiento de entrada proporcionado.

Un mecanismo se define como:

Una cadena cinemática en la que por lo menos se ha fijado o sujetado un eslabón al marco de referencia (el cual puede estar en movimiento).

Una máquina se define como:

Una combinación de cuerpos resistentes dispuestos para hacer que las fuerzas mecánicas de la naturaleza realicen trabajo acompañado por movimientos determinados.

Según la definición de Reuleaux,[1] una máquina es *un conjunto de mecanismos dispuestos para trasmitir fuerzas y realizar trabajo.* De acuerdo con su planteamiento, todos los dispositivos que trasmiten energía o fuerzas son máquinas que utilizan mecanismos como elementos que proporcionan las restricciones de movimiento necesarias.

Se definirá ahora una **manivela** como *un eslabón que efectúa una revolución completa y está pivotado a un elemento fijo;* un **balancín** es un *eslabón que tiene rotación oscilatoria (de vaivén) y está pivotado a un elemento fijo,* y una **biela** (o acoplador), *como un eslabón que tiene movimiento complejo y no está pivotado a un elemento fijo a tierra.* La **fijación** se define *como cualquier eslabón o eslabones que están sujetos en el espacio* (sin movimiento) en relación con el marco de referencia. Observe también que el propio marco puede, de hecho, estar en movimiento.

2.4 DETERMINACIÓN DEL GRADO DE LIBERTAD

El concepto de **grado de libertad** *(GDL)* es fundamental para la síntesis y el análisis de los mecanismos. Es necesario determinar rápidamente el *GDL* de un conjunto de eslabones y juntas que pueden sugerirse como solución de un problema. El grado de libertad (también llamado **movilidad** *M)* de un sistema se puede definir como:

Grado de libertad

el número de entradas que se necesita proporcionar con la finalidad de crear una salida predecible;

también:

el número de coordenadas independiente requerido para definir su posición.

En el inicio del proceso de diseño suele disponerse de alguna definición general del movimiento de salida deseado. El número de entradas necesario para obtener tal salida puede o no estar especificado. Aquí el costo es la principal restricción. Cada entrada requerida necesitará de algún tipo de actuador, ya sea un operario humano o un "esclavo" en forma de motor, solenoide, cilindro neumático o de otro dispositivo de conversión de energía. (Dichos dispositivos se describen en la sección 2.15.) Estos dispositivos de entradas múltiples deberán coordinar sus acciones por medio de un "controlador", que a su vez debe poseer cierto grado de inteligencia. Ahora este control se suele proporcionar

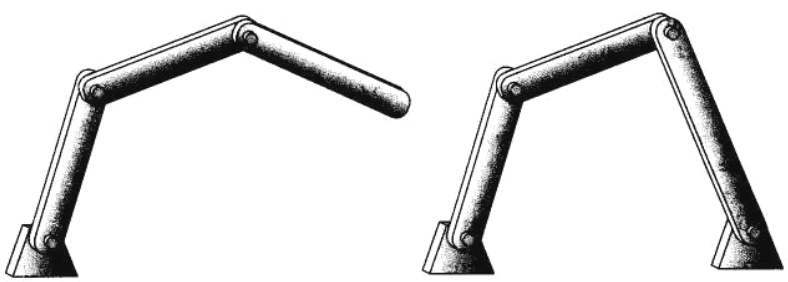
mediante una computadora, pero también puede estar programado mecánicamente dentro del diseño del mecanismo. No se requiere que el mecanismo tenga sólo un *GDL*, aunque a menudo esto es deseable para simplificar. Algunas máquinas tienen muchos *GDL*. Por ejemplo, considere el número de palancas de control o cilindros actuadores que se encuentran en un buldózer o en una grúa. Véase la figura 1-1*b)*.

Las cadenas cinemáticas o mecanismos pueden ser **abiertos** o **cerrados.** En la figura 2-4 se presenta un mecanismo abierto y otro cerrado. Un mecanismo cerrado no tendrá puntos de conexión con apertura o **nodos** y puede tener uno o más grados de libertad. Un mecanismo abierto con más de un eslabón tendrá siempre más de un grado de libertad, y con esto necesitará tantos actuadores (motores) como *GDL* tenga. Un ejemplo común de mecanismo abierto es un robot industrial. *Una cadena cinemática abierta de dos eslabones binarios y una junta* se denomina **diada.** Los conjuntos de eslabones que se muestran en las figuras 2-3a) y *2-3b)* son **diadas.**

Reuleaux limitó sus definiciones a las cadenas cinemáticas cerradas y a los mecanismos que tienen sólo un *GDL*, a los que llamó *restringidos.*[1] Las amplias definiciones anteriores están quizá mejor adaptadas a aplicaciones actuales. Un mecanismo con múltiples *GDL*, como un robot, estará restringido en sus movimientos de acuerdo con el número necesario de entradas que se proporcionen para controlar todos sus *GDL*.

Grados de libertad en mecanismos en un plano

Para determinar los *GDL* totales de un mecanismo se debe tener en cuenta el número de eslabones y juntas, así como las interacciones entre ellos. Los *GDL* de un ensamblaje de eslabones pueden predecirse a partir de una investigación de la **condición de Gruebler** [2] Un eslabón cualquiera en un plano tiene tres *GDL*. Por consiguiente, un sistema de *L* eslabones no conectados en el mismo plano tendrá 3L *GDL*, como se muestra en la figura 2-5a), en la que dos eslabones no conectados tienen en total seis *GDL*. Cuando estos dos eslabones están conectados por una **junta completa,** como se muestra en la figura *2-5b)*, Δy_1 y Δy_2 se combinan como Δy, y Δx_1 y Δx_2 se combinan como Δx. Esto elimina dos *GDL* y deja cuatro. En la figura 2-5c) la semijunta elimina sólo un *GDL* del sistema (debido a que una semijunta tiene dos *GDL)* y queda el sistema de dos eslabones conectados por una semijunta, con un total de cinco *GDL*. Además, cuando un eslabón cual-



a) Cadena de mecanismo abierta b) Cadena de mecanismo cerrada

FIGURA 2-4

Cadenas de mecanismos

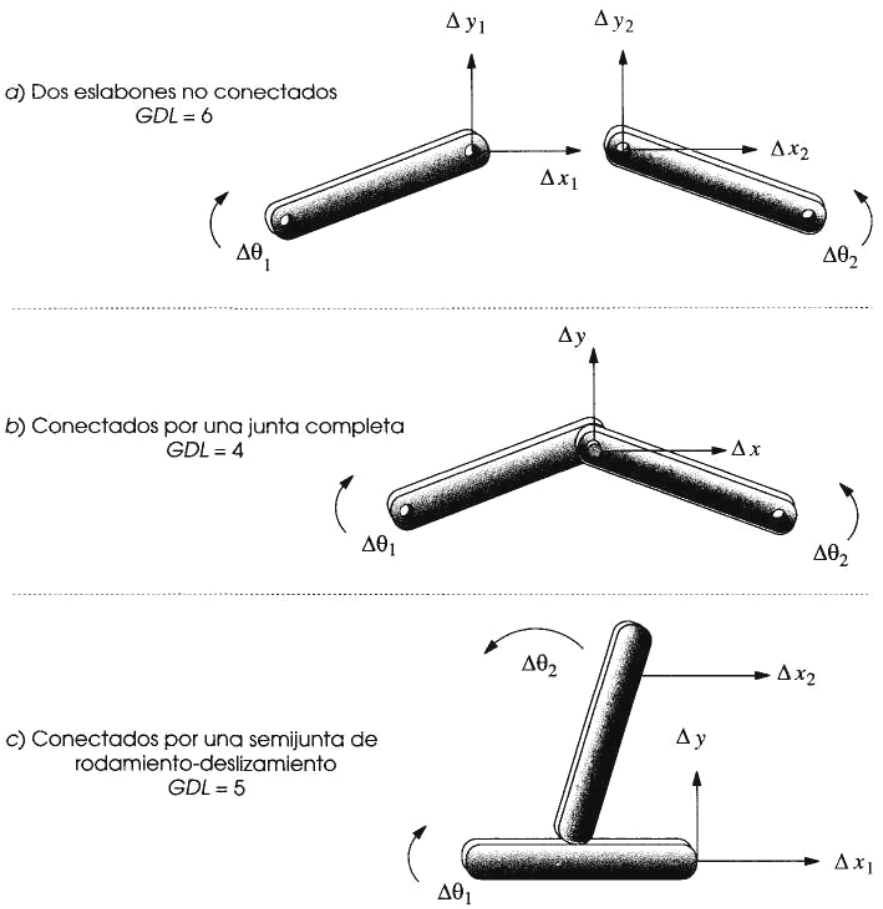


FIGURA 2-5

Juntas que eliminan grados de libertad

quiera se fija o sujeta al marco de referencia, sus tres *GDL* se eliminarán. Este razonamiento conduce a la **ecuación de Gruebler:**

$$M = 3L - 2J - 3G \tag{2.1a}$$

donde: *M = grados de libertad o movilidad*
L = número de eslabones
J = número de juntas
G = número de eslabones fijos

Observe que en un mecanismo real, aun cuando más de un eslabón de la cadena cinemática esté fijo, el efecto neto será crear un eslabón fijo mayor y de orden superior, ya que sólo hay un plano de sujeción. Por tanto, *G* es siempre igual a uno y la ecuación de Gruebler se convierte en:

$$M = 3(L - 1) - 2J \tag{2.1b}$$

El valor de J en las ecuaciones 2.1a y 2.1b debe reflejar el valor de todas las juntas en el mecanismo. Es decir, las semijuntas cuentan como 1/2 debido a que sólo eliminan un *GDL*. Esto es menos confuso si se utiliza la modificación de **Kutzbach** para la ecuación de Gruebler en esta forma:

$$M = 3(L - 1) - 2J_1 - J_2 \tag{2.1c}$$

donde: M = grados de libertad o movilidad L
= número de eslabones
J_1 = número de 1 *GDL*, juntas completas
J_2 = número de 2 *GDL*, semijuntas

El valor de J_1 y J_2 en estas ecuaciones aún debe determinarse cuidadosamente para considerar todas las juntas completas, las semijuntas y las juntas múltiples en cualquier eslabonamiento. Las juntas múltiples cuentan en una unidad menos que el número de eslabones conectados en tal junta, y se agregan a la categoría de "completas" (J_1). Los *GDL* de un mecanismo propuesto pueden determinarse rápidamente a partir de esta expresión antes de invertir tiempo en un diseño más detallado. Es interesante observar que esta ecuación no aporta información acerca de tamaños o formas de eslabones, sino sólo su cantidad. En la figura 2-6a) se muestra un mecanismo con un *GDL* y sólo juntas completas en éste.

En la figura 2-6*b*) se presenta una estructura con cero *GDL* que contiene semijuntas y juntas múltiples. Observe la notación esquemática utilizada para mostrar el eslabón fijo. Dicho eslabón no necesita dibujarse en detalle, en tanto se indiquen todas las juntas fijadas. Considere también las juntas **múltiples y semijuntas** en las figuras *2-6a)* y *2-6b).* Como ejercicio determine los *GDL* en estos ejemplos con la ecuación de **Kutzbach.**

Grados de libertad en mecanismos espaciales

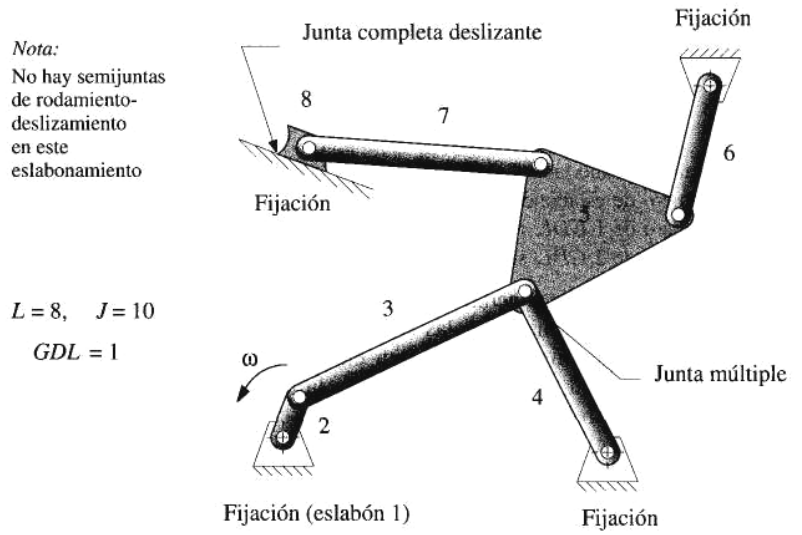
El enfoque usado para determinar la movilidad de un mecanismo en un plano puede extrapolarse fácilmente a tres dimensiones. Cada eslabón no conectado en el espacio tridimensional tiene seis *GDL* y cualquiera de los seis pares inferiores puede usarse para conectarlos, como pueden ser pares superiores con más libertad. Una junta de una libertad elimina cinco *GDL,* una junta de dos libertades elimina cuatro *GDL,* etcétera. Al fijar un eslabón se eliminan seis *GDL.* Esto conduce a la ecuación de movilidad de Kutzbach para eslabonamientos espaciales:

$$M = 6(L - 1) - 5J_1 - 4J_2 - 3J_3 - 2J_4 - J_5 \tag{2.2}$$

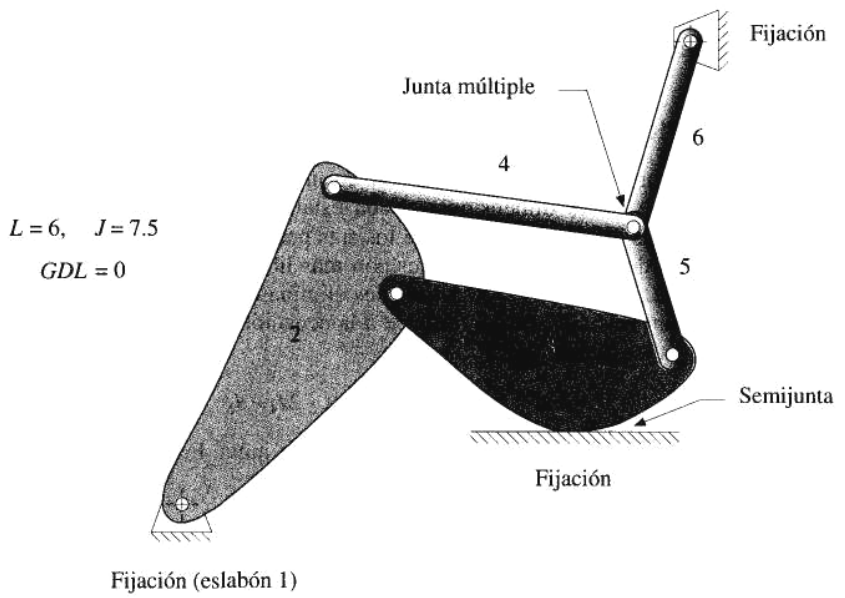
donde el subíndice se refiere al número de libertades de la junta. En este texto se limitará el estudio a mecanismos en 2-D.

2.5 MECANISMOS Y ESTRUCTURAS

Los grados de libertad de un ensamblaje de eslabones predicen por completo su carácter. Hay sólo tres posibilidades. *Si el GDL es positivo se tendrá un mecanismo* y los eslabones tendrán movimiento relativo. *Si el GDL es igual a cero, entonces se tendrá una estructura y* no será posible ningún movimiento. *Si el GDL es negativo, entonces se tendrá una estructura precargada,* lo que significa que no será posible ningún movi-



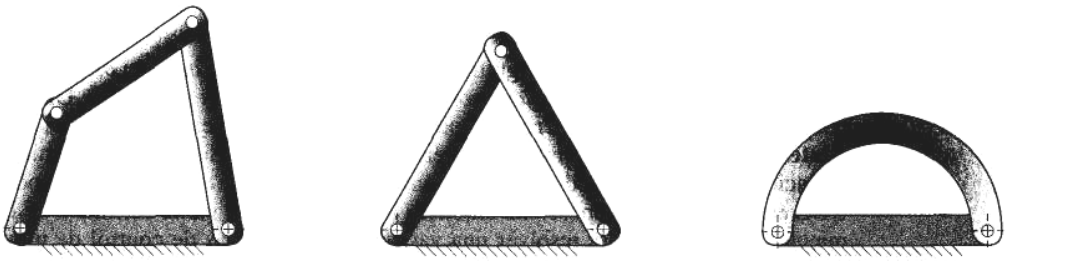
a) Eslabonamiento con juntas completas y múltiples



b) Eslabonamiento con juntas completas, seminuevas y juntas múltiples

FIGURA 2-6

Eslabonamientos que contienen juntas de diversos tipos



a) Es un mecanismo, *GDL* = +1 *b*) Es una estructura, *GDL* = 0 *c*) Es un estructura precargada, *GDL* = −1

FIGURA 2-7

Mecanismos, estructuras y estructuras precargadas

miento y algunos esfuerzos también pueden estar presentes en el momento del ensamblaje. En la figura 2-7 se muestran ejemplos de estos tres casos. Un eslabón está fijo en cada caso.

En la figura *2-1 a)* se presentan cuatro eslabones conectados por cuatro juntas completas, lo cual, a partir de la ecuación de Gruebler, da un *GDL*. Se moverá y sólo se necesita una entrada para producir resultados predecibles.

En la figura *2-1b)* se muestran tres eslabones conectados por tres juntas completas. Tiene cero *GDL* y es, por tanto, una **estructura.** Observe que si las longitudes de los eslabones permiten la conexión,* los tres pasadores se pueden insertar en sus respectivos pares de agujeros de eslabón (nodos) sin forzar la estructura, ya que puede hallarse siempre una posición que permita el ensamblaje.

En la figura 2-7c) se presentan dos eslabones conectados por dos juntas completas. Tiene un *GDL* de -1, lo cual los convierte en una **estructura precargada.** Con el fin de insertar los dos pasadores sin someter a esfuerzo los eslabones, la distancia al centro de los agujeros en ambos eslabones debe ser exactamente la misma. En la práctica es imposible realizar dos partes exactamente iguales. Habrá siempre algún error de manufactura, aunque sea muy pequeño. Por tanto, quizá deba forzarse el segundo pasador a su lugar y originar con ello algún esfuerzo en los eslabones. La estructura estará, entonces, precargada. Probablemente ya se encontró en una situación similar en un curso de mecánica aplicada, en la forma de una viga hiperestática, aquella en la que también se tienen demasiados apoyos o restricciones para las ecuaciones disponibles. Una viga estáticamente indeterminada o hiperestática también tiene un *GDL* negativo, en tanto que una viga *simplemente apoyada* o isostática tiene *GDL* igual a cero.

Las estructuras simples y las estructuras precargadas se utilizan por lo general en ingeniería. De hecho, la estructura real con *GDL* igual a cero es rara en la práctica de la ingeniería. La mayor parte de las construcciones, puentes y armazones de máquina son estructuras precargadas, debido al uso de juntas soldadas y remachadas en vez de juntas de pasador o articuladas. Incluso estructuras muy simples, como la silla en que está usted sentado, con frecuencia son precargadas. Puesto que el interés aquí es acerca de los mecanismos, nos concentraremos sólo en dispositivos con *GDL* positivo.

* Si la suma de las longitudes de cualesquiera dos eslabones es menor que la longitud de un tercer eslabón, entonces es imposible su interconexión.

2.6 SÍNTESIS NUMÉRICA

El término **síntesis numérica** significa *la determinación del número y orden de eslabones y juntas necesarios para producir movimiento con un GDL en particular*. **Orden,** en este contexto, se refiere al número de nodos por eslabón, por ejemplo, **binario, ternario, cuaternario,** etcétera. La síntesis numérica es útil en la medida en que permite la determinación exhaustiva de todas las combinaciones posibles de eslabones que producirán un *GDL* escogido. Esto proporciona entonces al diseñador una gama definitiva de eslabonamientos potenciales para resolver una variedad de problemas de control de movimiento.

Como ejemplo se deducirán ahora todas las combinaciones de eslabones posibles para un *GDL*, incluso conjuntos hasta de ocho eslabones, y órdenes de eslabones que incluyen eslabonamientos hexagonales. Por sencillez se supondrá que los eslabones estarán conectados sólo con juntas completas de rotación. Después se introducirán semijuntas, juntas múltiples y de deslizamiento por medio de la transformación de eslabonamiento. En primer lugar observe algunos atributos interesantes de los eslabonamientos, como se definieron por la hipótesis anterior referente a juntas completas.

Hipótesis: Si todas las juntas son completas, un número impar de *GDL* requiere un número par de eslabones y viceversa.

Demostración: **Datos:** Todos los enteros pares pueden designarse por 2m o por *1n*, y todos los enteros impares pueden denotarse por *2m* - 1 o *2n* - 1, donde *n y m* son cualesquiera enteros positivos. El número de juntas debe ser un entero positivo.

Sean: L = número de eslabones, J = número de juntas y $M = GDL = 2m$ (es decir, todos números pares).

Entonces: Se reescribe la ecuación de Gruebler (ecuación 2.1b) para despejar J.

$$J = \frac{3}{2}(L-1) - \frac{M}{2} \tag{2.3a}$$

Intento: Se sustituyen $M = 2m$ y $L = 2n$ (es decir, ambos números pares):

$$J = 3n - m - \frac{3}{2} \tag{2.3b}$$

Esto puede dar como resultado que J no sea un entero positivo como se requiere.

Intento: $M = 2m - 1$ y $L = 2n - 1$ (es decir, ambos números son impares):

$$J = 3n - m - \frac{7}{2} \tag{2.3c}$$

Esto puede dar como resultado que J tampoco sea un entero positivo como se requiere.

Intento: $M = 2m - 1$ y $L = 2n$ (es decir, impar y par):

$$J = 3n - m - 2 \tag{2.3d}$$

Esto es un entero positivo para $m \geq 1$ y $n \geq 2$.

Intento: $M = 2m$ y $L = 2n - 1$ (es decir, par e impar):

$$J = 3n - m - 3 \tag{2.3e}$$

Éste es un entero positivo para $m \geq 1$ y $n \geq 2$.

Así que para el ejemplo de mecanismo con un *GDL* pueden considerarse sólo combinaciones de 2, 4, 6, 8,... eslabones. Si el orden de los eslabones se representa por:

B = número de eslabones binarios
T = número de eslabones ternarios
Q = número de eslabones cuaternarios
P = número de eslabones pentagonales
H = número de eslabones hexagonales

el número total de eslabones en un mecanismo cualquiera será:

$$L = B + T + Q + P + \mathrm{H} + \cdots \tag{2.4a}$$

Puesto que se necesitan *dos nodos de eslabón* para constituir *una junta:*

$$J = \frac{nodos}{2} \tag{2.4b}$$

y

$$nodos = orden\ de\ eslabón \times núm.\ de\ eslabones\ de\ ese\ orden \tag{2.4c}$$

entonces

$$J = \frac{(2B + 3T + 4Q + 5P + 6H + \mathrm{L})}{2} \tag{2.4d}$$

Sustituya las ecuaciones 2.4a y 2.4d en la ecuación de Gruebler (2.1b)

$$M = 3(B + T + Q + P + H - 1) - 2\left(\frac{2B + 3T + 4Q + 5P + 6H}{2}\right)$$
$$M = B - Q - 2P - 3\mathrm{H} - 3 \tag{2.4e}$$

¡Observe lo que falta a partir de esta ecuación! Se suprimieron los eslabones ternarios. El *GDL* es independiente del número de eslabones ternarios en el mecanismo. Pero como cada eslabón ternario tiene tres nodos, sólo puede crear o eliminar 3/2 de juntas. Así que se deben agregar o restar eslabones ternarios en pares con el fin de mantener un número entero de juntas. *La suma o resta de eslabones ternarios en pares no afectará el GDL del mecanismo.*

Para determinar todas las combinaciones posibles de eslabones para un *GDL* particular se deben combinar las ecuaciones 2.3a y 2.3d:

$$\frac{3}{2}(L-1) - \frac{M}{2} = \frac{(2B + 3T + 4Q + 5P + 6H)}{2}$$
$$3L - 3 - M = 2B + 3T + 4Q + 5P + 6H \tag{2.5}$$

Ahora combine la ecuación 2.5 con la 2.3a para eliminar *B:*

$$L - 3 - M = T + 2Q + 3P + 4H \tag{2.6}$$

Luego se resolverán simultáneamente las ecuaciones 2.3a y 2.6 (por sustitución progresiva) para así determinar todas las combinaciones compatibles de eslabones para *GDL* = 1, hasta ocho eslabones. La estrategia consiste en comenzar con el número más pequeño de eslabones y el eslabón de más alto orden posible con ese número, y eliminar así combinaciones imposibles.

(Nota: *L debe ser par para GDL impar.)*

CASO 1. $\boldsymbol{L = 2}$

$$L - 4 = T + 2Q + 3P + 4H = -2 \tag{2.7a}$$

Esto requiere un número negativo de eslabones, así que $L = 2$ es imposible.

CASO 2. $\boldsymbol{L = 4}$

$$L - 4 = T + 2Q + 3P + 4H = 0; \qquad \text{por lo tanto: } T = Q = P = H = 0$$
$$L = B + 0 = 4; \qquad B = 4 \tag{2.7b}$$

El eslabonamiento más simple de un *GDL* tiene cuatro eslabones binarios; es decir, **el eslabonamiento de cuatro barras.**

CASO 3. $\boldsymbol{L = 6}$

$$L - 4 = T + 2Q + 3P + 4H = 2; \qquad \text{así que: } P = H = 0 \tag{2.7c}$$

T sólo puede ser 0, 1 o 2 $\qquad$ Q sólo puede ser 0 o 1

Si $Q = 0$, entonces T debe ser 2 y:

$$L = B + 2T + 0Q = 6; \qquad B = 4, \qquad T = 2 \tag{2.7d}$$

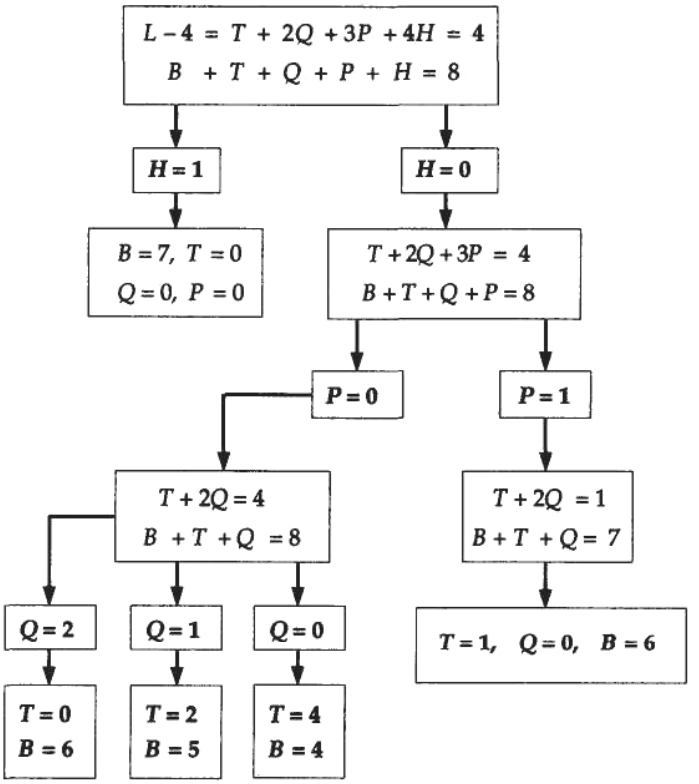
Si $Q = 1$, entonces T debe ser 0 y:

$$L = B + 0T + 1Q = 6; \qquad B = 5, \qquad Q = 1 \tag{2.7e}$$

Hay entonces dos posibilidades para $L = 6$. Note que una de ellas es de hecho el eslabonamiento de cuatro barras más simple con dos ternarios agregados, como se había dicho antes.

CASO 4. $\boldsymbol{L = 8}$

Con este número grande de eslabones es necesario un enfoque tabular:



(2.7f)

A partir de este análisis se puede ver que para un *GDL* sólo hay una posible configuración de cuatro eslabones, dos configuraciones de seis eslabones y cinco posibilidades para ocho eslabones de binario a hexagonal. En la tabla 2-2 se muestra el "conjunto de eslabones" de todos estos posibles eslabonamientos para el caso de un *GDL* con más de ocho eslabones y de orden hexagonal.

2.7 PARADOJAS

Puesto que el criterio de Gruebler no presta atención a los tamaños y formas de eslabones, *puede ocasionar resultados engañosos* ante las configuraciones geométricas únicas. Por ejemplo, en la figura 2-8a) se presenta una estructura *(GDL* = 0) con eslabones ternarios de forma arbitraria. Esta disposición de eslabones se denomina algunas veces **quinteto E** por su semejanza con una E mayúscula y por el hecho de que tiene cinco eslabones, incluido el de fijación.* Es el siguiente elemento **estructural** más simple de la **"tripleta delta".**

En la figura *2-8b)* se muestra el mismo quinteto E con eslabones ternarios rectos y paralelos y con nodos equiespaciados. Los tres binarios también son iguales en longitud.

* También se llama cadena de Assur.

TABLA 2-2 Mecanismos en un plano (1 GDL) con juntas de rotación y hasta 8 eslabones

Eslabones totales	Conjuntos de eslabones				
	Binario	Ternario	Cuaternario	Pentagonal	Hexagonal
4	4	0	0	0	0
6	4	2	0	0	0
6	5	0	1	0	0
8	7	0	0	0	1
8	4	4	0	0	0
8	5	2	1	0	0
8	6	0	2	0	0
8	6	1	0	1	0

Con esta peculiar configuración se puede ver que se movería, a pesar de la predicción contraria de Gruebler.

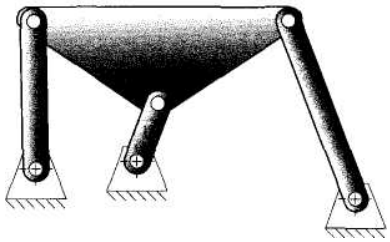
En la figura 2-8c) se muestra un mecanismo muy común que tampoco cumple con el criterio de Gruebler. Puede presuponerse que la junta entre las dos ruedas en contacto no permite deslizamiento, siempre que la fricción suficiente esté disponible. Si no ocurre efecto deslizante, entonces se trata de una junta con una libertad (o completa) que permite sólo movimiento angular relativo $(\Delta\theta)$ entre las ruedas. Con esta hipótesis se tienen 3 eslabones y 3 juntas completas, a partir de lo que la ecuación de Gruebler pronostica *GDL* = 0. Sin embargo, en este eslabonamiento hay movimiento (en realidad *GDL* = 1), debido a que la distancia entre centros, o longitud del eslabón 1, es exactamente igual a la suma de los radios de las dos ruedas.

Hay otros ejemplos de paradojas que no cumplen el criterio de Gruebler debido a su geometría especial. El diseñador necesita estar alerta ante estas posibles incongruencias.

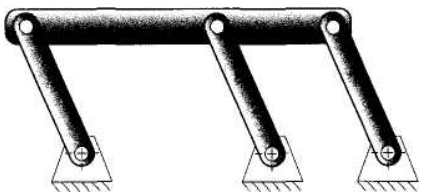
2.8 ISÓMEROS

La palabra **isómero** viene del griego y significa *que tiene partes iguales.* En química los isómeros son compuestos que tienen el mismo número y tipo de átomos, pero que están unidos en forma diferente, por lo tanto, tienen distintas propiedades físicas. En la figura *2-9a)* se muestran dos isómeros de hidrocarburo: n-butano e isobutano. Observe que cada uno tiene el mismo número de átomos de hidrógeno y de carbono (C_4H_{10}), pero están unidos de modo diferente y tienen propiedades distintas.

Los isómeros de eslabonamientos son análogos a estos compuestos químicos en el hecho de que los **eslabones** (como los átomos) tienen diversos **nodos** (electrones) disponibles para conectarse a otros nodos de eslabones. El eslabonamiento ensamblado es análogo al compuesto químico. De acuerdo con las conexiones particulares de los eslabones disponibles el ensamblaje tendrá diferentes propiedades cinemáticas o de movimien-

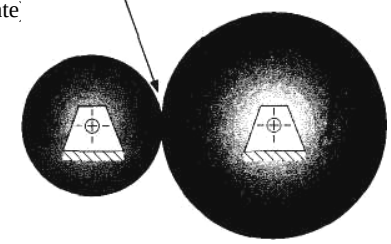


a) El quinteto E con *GDL* = 0
(de acuerdo con la ecuación de Gruebler)



b) El quinteto E con *GDL* = 1
(en desacuerdo con la ecuación
de Gruebler debido a la geometría única)

Junta completa
(rodamiento puro
no deslizante)



c) Cilindros rodantes con *GDL* = 1 (en
desacuerdo con la ecuación de
Gruebler que predice *GDL* = 0)

FIGURA 2-8

Paradojas de Gruebler (eslabonamientos que no se comportan como predice la ecuación de Gruebler)

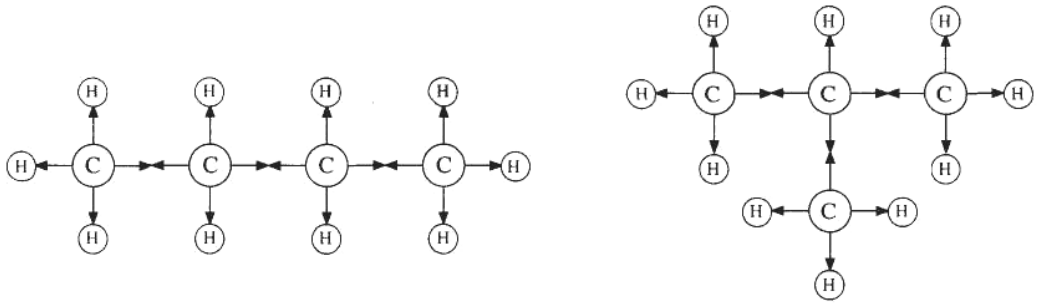
to. El número posible de isómeros para un conjunto dado de eslabones (como se ve en cualquier renglón de la tabla 2-2) está lejos de ser obvio. De hecho, el problema de predecir matemáticamente el número de isómeros para todas las combinaciones de eslabones está todavía por resolverse. Muchos investigadores han hecho un gran esfuerzo por resolver este problema con algún éxito reciente. Para mayor información véanse las referencias [3] a [7]. Dhararipragada[6] presenta un excelente resumen histórico de las investigaciones en isómeros hasta 1994. La tabla 2-3 muestra el número válido de isómeros encontrado para mecanismos de un *GDL* con pares de rotación hasta con 12 eslabones.

En la figura *2-9b)* se muestran todos los isómeros para los casos simples de un *GDL*, con cuatro y seis eslabones. Observe que sólo hay un isómero para el caso de cuatro eslabones. Un isómero es único si, y sólo si, son diferentes las interconexiones entre sus tipos de eslabones. Es decir, todos los eslabones binarios se consideran iguales, del mismo modo que todos los átomos de hidrógeno son iguales en la analogía con la química.

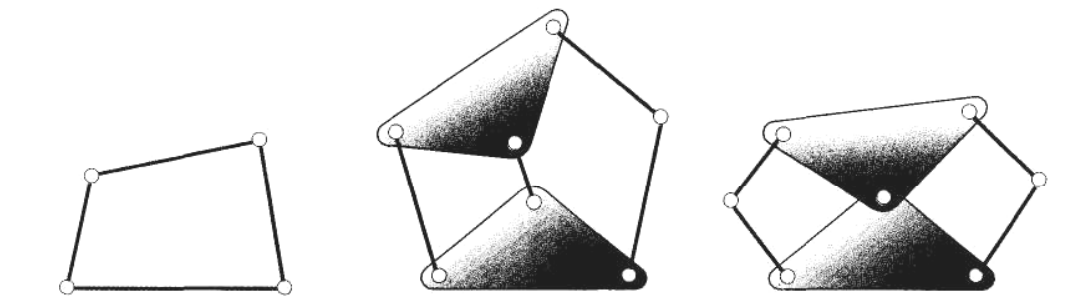
TABLA 2-3
Número de isómeros válidos

Eslabones	Isómeros válidos
4	1
6	2
8	16
10	230
12	6 856 o 6 862*

* No concuerda con algunos investigadores.

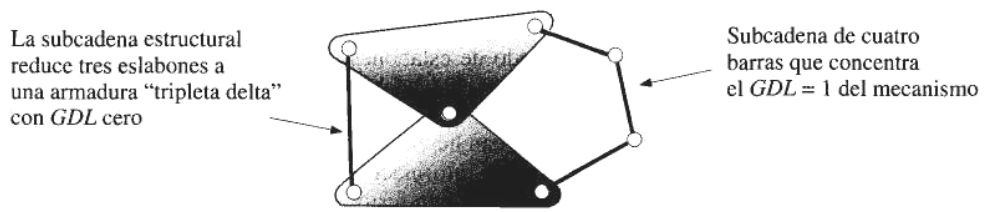


o) Isómeros de los hidrocarburos n-butano e isobutano



El único isómero de cuatro barras | Isómero de seis barras de Stephenson | Isómero de seis barras de Watt

b) Todos los isómeros válidos de los eslabonamientos de cuatro y seis barras



c) Un isómero de seis barras no válido que se reduce al eslabonamiento de cuatro barras más simple

FIGURA 2-9

Isómeros de cadenas cinemáticas

Las longitudes y formas de eslabón no aparecen en el criterio de Gruebler ni en la condición de isomerismo. El caso de seis eslabones de cuatro binarios y dos ternarios tiene sólo dos isómeros válidos. Éstos se conocen como la **cadena de Watt y** la **cadena de Stephenson** en honor de sus descubridores. Observe en estos dos ejemplos las diferentes interconexiones de los ternarios a los binarios. La cadena de Watt tiene los dos ternarios directamente conectados, pero la cadena de Stephenson no.

Hay también un tercer isómero potencial para este caso de seis eslabones, como se muestra en la figura 2-9c), pero falla en la prueba de **distribución de grados de libertad,** que requiere que los *GDL* globales (aquí $GDL = 1$) estén distribuidos uniformemente en todo el eslabonamiento y no concentrados en una subcadena. Considere que esta disposición (figura 2-9c)) tiene una **subcadena estructural** con $GDL = 0$ en la formación triangular de los dos ternarios y el binario único que los conecta. Esto crea una armadura llamada **tripleta delta.** Los tres binarios restantes en serie forman una cadena de cuatro barras ($GDL = 1$) con la subcadena estructural de los dos ternarios y el binario único, reducida efectivamente a una estructura que actúa como un solo eslabón. Por lo tanto, esta disposición se ha reducido al caso más simple del eslabonamiento de cuatro barras, a pesar de sus seis elementos. Éste es un **isómero no válido** y se rechaza. Se deja como ejercicio hallar los 16 isómeros válidos de los casos de ocho barras con $GDL = 1$.

2.9 TRANSFORMACIÓN DE ESLABONAMIENTOS

Las técnicas de síntesis descritas antes dan al diseñador un equipo de eslabonamientos básicos con *GDL* particular. Si ahora se relaja la restricción arbitraria que sólo limita a juntas completas de rotación, se puede transformar estos eslabonamientos básicos en una variedad más amplia de mecanismos, aun con mayor utilidad. Existen varias técnicas o reglas de transformación que pueden aplicarse a las cadenas cinemáticas en un plano.

1 Una junta completa de rotación puede remplazarse por una junta prismática sin cambio en los *GDL* del mecanismo, siempre que al menos dos juntas de rotación estén en un arreglo.*

2 Una junta completa puede remplazarse por una semijunta, pero esto aumentará en uno los *GDL.*

3 La eliminación de un eslabón reducirá en uno los *GDL.*

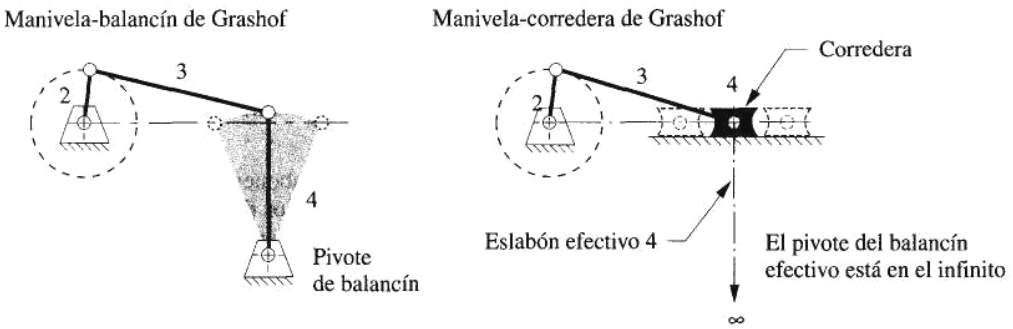
4 La combinación de los incisos 2 y 3 mantendrá sin cambio los *GDL* originales.

5 Un eslabón ternario o de orden superior puede ser parcialmente "contraído" a un eslabón de orden inferior por la coalición de nodos. Esto creará una junta múltiple pero no cambiará los *GDL* del mecanismo.

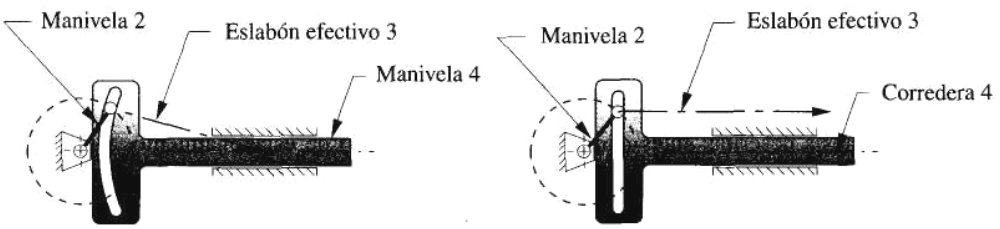
6 La contracción completa de un eslabón de orden superior equivale a su eliminación. Se creará una junta múltiple y los *GDL* se reducirán.

En la figura 2-10a) se muestra una manivela-balancín de cuatro barras transformada en una manivela-corredera también de cuatro barras, por la aplicación de la regla núm. 1. Es aún un eslabonamiento de cuatro barras. El eslabón 4 se ha convertido en una corredera. La ecuación de Gruebler no cambia en un *GDL* debido a que la corredera proporciona una junta completa contra el eslabón 1, como la junta de pasador que remplaza. Observe que esta transformación desde un eslabón de salida de balancín hasta un eslabón de salida

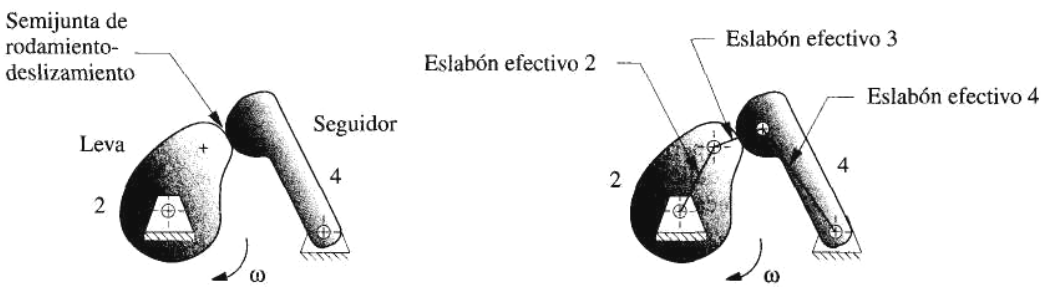
* Si todas las juntas de revolución en un eslabonamiento de cuatro barras se remplazan por juntas prismáticas, el resultado será un ensamble con dos *GDL.* También, si tres revolutas en un ciclo de cuatro barras se remplazan con juntas prismáticas, la única junta de revoluta remanente no será capaz de girar; de hecho, bloquea los eslabones articulados como si fueran sólo uno. Esto reduce prácticamente el ensamble a un eslabonamiento de tres barras que deberá tener cero GDL. Sin embargo, una tripleta delta con tres juntas prismáticas tiene un *GDL* (otra paradoja de Gruebler).



a) Transformación de una manivela-balancín de cuatro barras en una manivela-corredera



b) Transformación de la manivela-corredera en el yugo escocés



c) El mecanismo leva-seguidor tiene un eslabonamiento efectivo equivalente de cuatro barras

FIGURA 2-10

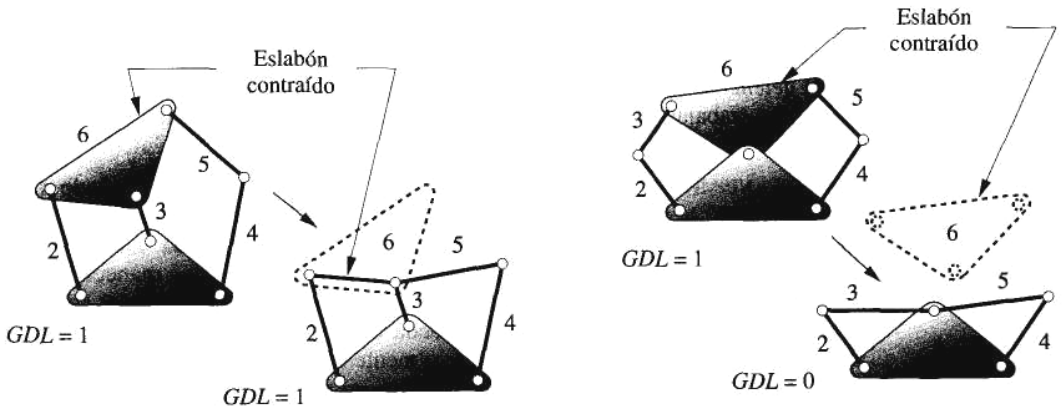
Transformación de eslabonamientos

de corredera equivale a aumentar la longitud (radio) del eslabón balancín 4 hasta que su movimiento de arco en la junta entre los eslabones 3 y 4 se convierte en rectilíneo. Por lo tanto, la corredera es equivalente a un eslabón 4 de balancín infinitamente largo, que está pivotado en el infinito a lo largo de una recta perpendicular al eje de la corredera, como se muestra en la figura 2-10a).

En la figura 2-10*b*) se presenta una manivela-corredera de cuatro barras, transformada por la regla núm. 4 mediante la sustitución del acoplador por una semijunta. La primera versión mostrada retiene el mismo movimiento de la corredera que el eslabonamiento original, mediante el uso de una ranura curva en el eslabón 4. El acoplador efectivo siempre es perpendicular a la tangente a la ranura y cae sobre la línea del acoplador original. La segunda versión mostrada tiene la ranura recta y perpendicular al eje de la corredera. El acoplador efectivo ahora está "pivotado" en el infinito. A este mecanismo se le llama **yugo escocés** y da un *movimiento armónico simple* exacto de la corredera en respuesta a una entrada de velocidad constante para la manivela.

En la figura 2-10c) aparece un eslabonamiento de cuatro barras transformado en un eslabonamiento de **leva-seguidor,** por la aplicación de la regla núm. 4. Se eliminó el eslabón 3 y la junta completa entre los eslabones 2 y 4 se sustituyó por una semijunta. Esto aún tiene un *GDL* y la leva-seguidor es de hecho un eslabonamiento de cuatro barras con otra configuración, en la cual la biela (eslabón 3) se convirtió en un eslabón efectivo de *longitud variable.* En los capítulos siguientes se estudiará con mayor detalle el eslabonamiento de cuatro barras y estas variantes.

En la figura 2-1 la) se observa la **cadena de seis barras de Stephenson** de la figura *2-9b),* transformada por la *contracción parcial* de un eslabón ternario (regla núm. 5) para crear una junta múltiple. Todavía es un eslabonamiento séxtuple de Stephenson con un *GDL.* En la figura 2-11*b)* se muestra la **cadena de seis barras de Watt** de la figura *2-9b)*



a) la contracción parcial del eslabón superior retiene los *GDL* originales

b) La contracción completa del eslabón superior reduce los *GDL*

FIGURA 2-11

Contracción de eslabones

con un eslabón ternario *completamente contraído* para crear una junta múltiple. Esto es ahora una estructura con *GDL* - 0. Las dos subcadenas triangulares son obvias. De la misma manera que la cadena de cuatro barras es el elemento básico de mecanismo con un *GDL,* este triángulo de tres barras, tripleta delta, es el *elemento básico* de las estructuras con *GDL* = 0 (armaduras).

2.10 MOVIMIENTO INTERMITENTE

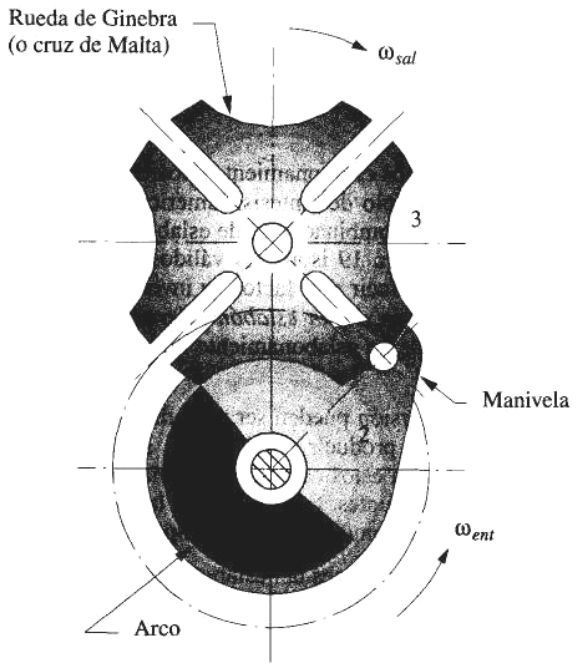
El movimiento intermitente es *una sucesión de movimientos y detenimientos.* Un detenimiento es *un lapso en el que el eslabón de salida permanece estacionario, en tanto que el eslabón de entrada continúa moviéndose.* Hay muchas aplicaciones en maquinaria en las que se necesita movimiento intermitente. La variante de la leva-seguidor en el eslabonamiento de cuatro barras de la figura 2-10c) se utiliza con frecuencia en estos casos. El diseño de ese dispositivo para salidas intermitentes y continuas se tratará en detalle en el capítulo 8. En el siguiente capítulo se describirán otros mecanismos con detenimiento de eslabonamiento puro.

MECANISMO DE GINEBRA Una forma común de dispositivo de movimiento intermitente es el mecanismo de Ginebra, mostrado en la figura 2-12a). Es también un eslabonamiento de cuatro barras transformado, en el cual el acoplador se remplazó por una semijunta. Por lo común, un motor a la velocidad constante impulsa la manivela de entrada (eslabón 2). El elemento ranurado que recibe el nombre de rueda de Ginebra está provisto por lo menos de tres ranuras radiales equiespaciadas. La manivela tiene un pasador que entra en una ranura radial y hace que la rueda de Ginebra gire una fracción de revolución. Cuando el pasador sale de esa ranura, la rueda ranurada permanece estacionaria hasta que el pasador entra en la siguiente abertura. El resultado es la rotación intermitente de la rueda de Ginebra.

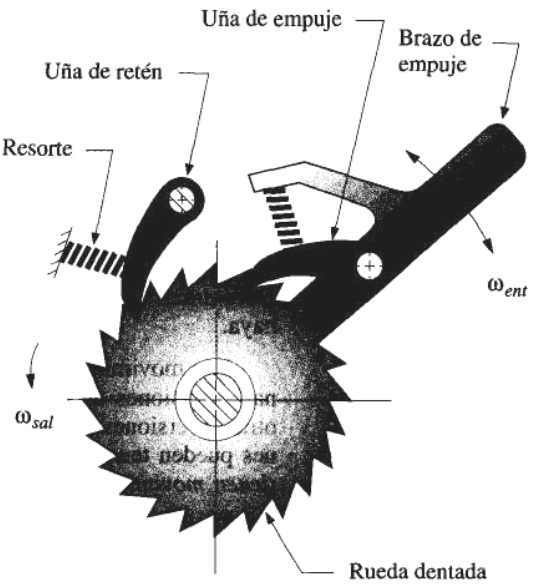
La manivela también cuenta con un segmento de arco, el cual se adapta a un recorte circular en la periferia de la rueda cuando el pasador está fuera de la ranura. Esto mantiene a dicha rueda sin movimiento y en el lugar apropiado para la siguiente entrada del pasador. El número de ranuras determina el número de "detenciones" del mecanismo, donde *detención* es sinónimo de *paro.* Una rueda de Ginebra necesita un mínimo de tres paros para trabajar. El tamaño de la rueda limita el número máximo de paros o detenciones.

MECANISMO DE TRINQUETE En la figura *2-12b)* se muestra el llamado mecanismo de trinquete. El brazo de empuje pivotea sobre el eje de la rueda dentada y entonces el eje se mueve hacia atrás y hacia adelante para accionar la rueda. La uña de empuje del brazo hace girar la rueda dentada en sentido contrario al de las manecillas del reloj y no trabaja durante el movimiento de regreso del brazo en sentido de las manecillas del reloj. La uña de retén impide que la rueda del trinquete cambie de dirección de giro mientras regresa la uña de empuje. Generalmente ambas uñas tienen carga de resorte para su aplicación contra la rueda. Este mecanismo es ampliamente utilizado en dispositivos como llaves de trinquete (o matraca) para tuercas, montacargas, etcétera.

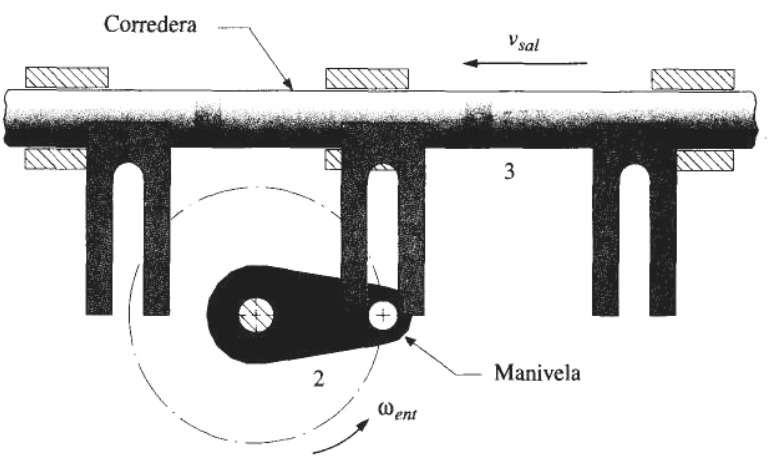
MECANISMO DE GINEBRA LINEAL Existe también una variante del mecanismo de Ginebra que tiene salida de traslación lineal, como se indica en la figura 2-12c). Este mecanismo es análogo a un dispositivo de yugo escocés abierto con yugos múltiples. Puede utilizarse como un impulsor de transportador intermitente con las ranuras formadas a lo largo de la cadena o banda de transporte. A veces también se utiliza con un motor



a) Mecanismo de Ginebra con cuatro detenimientos



b) Mecanismo de trinquete



c) Mecanismo "ginebrino" de movimiento lineal intermitente

FIGURA 2-12

Mecanismos de movimiento intermitente rotatorio y rectilíneo

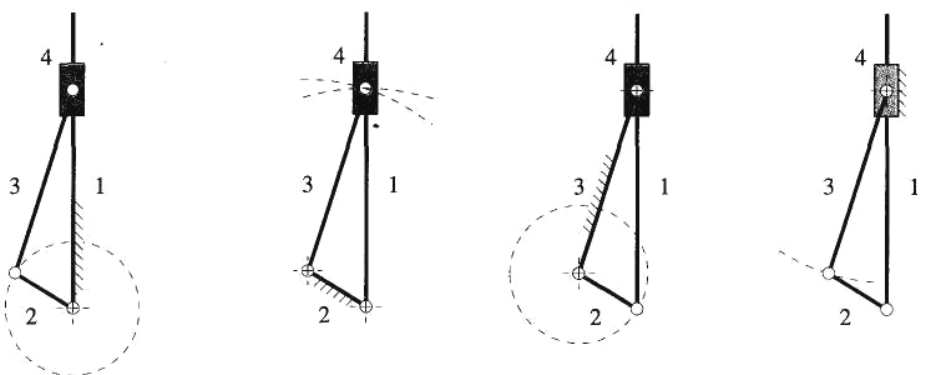
de giro alterno o reversible para lograr oscilación reversiva lineal de una única corredera de salida ranurada.

2.11 INVERSIÓN

A estas alturas debe ser evidente que hay muchos eslabonamientos posibles para un caso. Aun con las limitaciones impuestas en el ejemplo de síntesis numérica (un *GDL,* ocho eslabones, hasta el orden hexagonal), hay ocho combinaciones de eslabonamientos que se muestran en la tabla 2-2 y en conjunto producen 19 isómeros válidos como los que se indican en la tabla 2-3. Además, se puede introducir otro factor: la inversión de mecanismo. Una **inversión** se *crea mediante la fijación de un eslabón diferente en la cadena cinemática.* Por tanto, hay tantas inversiones de un eslabonamiento dado como eslabones haya.

Los movimientos resultantes de cada inversión pueden ser muy distintos, pero algunas inversiones de un eslabonamiento pueden producir movimientos similares a los de otras inversiones del mismo eslabonamiento. En estos casos sólo algunas de las inversiones pueden tener claramente movimientos diferentes. Se designarán las *inversiones que tienen movimientos específicamente diferentes* como **inversiones específicas.**

En la figura 2-13 se muestran las cuatro inversiones del eslabonamiento de manivela-corredera de cuatro barras, cuyos movimientos están bien definidos. La inversión núm. 1, con el eslabón 1 fijo y su corredera en traslación pura, es la más común y se utiliza en **motores de pistón** y **bombas de pistón.** La inversión núm. 2 se obtiene al fijar el eslabón 2 y produce el **mecanismo Whitworth** o **manivela de cepilladora,** un dispositivo de retorno rápido en el que la corredera tiene movimiento complejo. (Los mecanismos de



o) Inversión núm. 1 traslación de la corredera

fc>) inversión núm. 2 la corredera tiene movimiento complejo

c) Inversión núm. 3 la corredera gira

d) Inversión núm. 4 la corredera es estacionarla

FIGURA 2-13

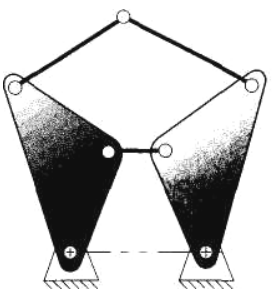
Cuatro Inversiones específicas del mecanismo de manivela-corredera de cuatro barras (los eslabones en negro son estacionarios; los rojos, móviles)

retomo rápido se estudiarán en el siguiente capítulo.) La inversión núm. 3 proviene de fijar el eslabón 3 y da a la corredera rotación pura. La inversión núm. 4 se obtiene al fijar el eslabón-corredera 4 y se usa en mecanismos de **bombas de pozo** operados manualmente, en los que la manija es el eslabón 2 (extendido) y el eslabón 1 desciende por el tubo del pozo; en él se monta un pistón en su parte inferior. (Se muestra en posición invertida en la figura.)

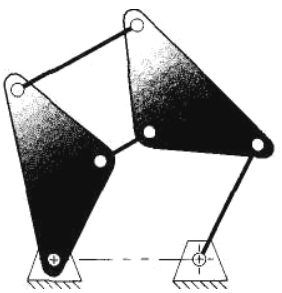
La **cadena de seis barras de Watt** tiene dos inversiones específicas, mientras que la **cadena de seis barras de Stephenson** tiene tres inversiones específicas, como se muestra en la figura 2-14. La junta de pasador de cuatro barras admite cuatro inversiones específicas: la manivela-balancín, la doble manivela, el doble balancín y el triple balancín que se muestran en las figuras 2-15 y 2-16.

2.12 LA CONDICIÓN DE GRASHOF

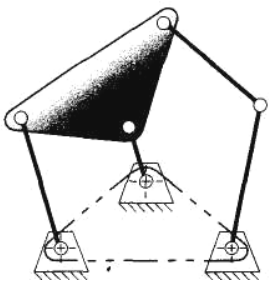
Ya se mostró que el **eslabonamiento de cuatro barras** es el *mecanismo articulado más simple posible* para movimiento controlado de un grado de libertad. También aparece en diversas facetas, como el dispositivo de **manivela-corredera y** el de **leva-seguidor. Es,**



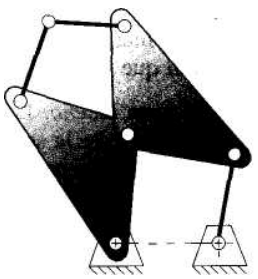
o) Inversión I del eslabonamiento de seis barras de Stephenson



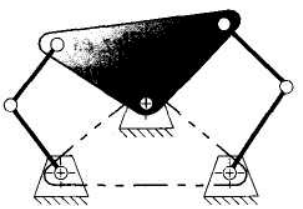
b) Inversión II del eslabonamiento de seis barras de Stephenson



c) Inversión III del eslabonamiento de seis barras de Stephenson



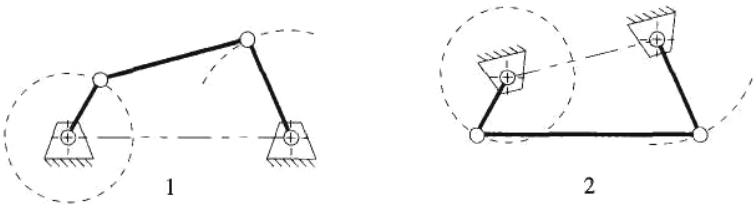
d) Inversión I del eslabonamiento de seis barras de Watt



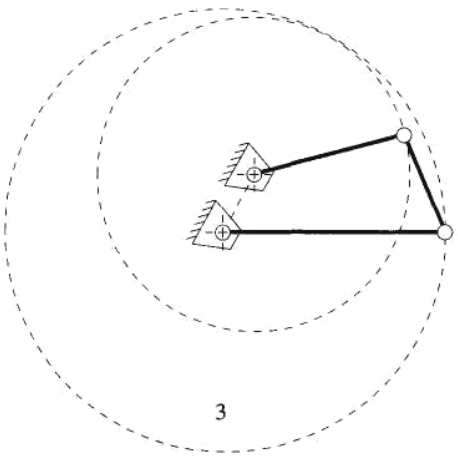
e) Inversión II del eslabonamiento de seis barras de Watt

FIGURA 2-14

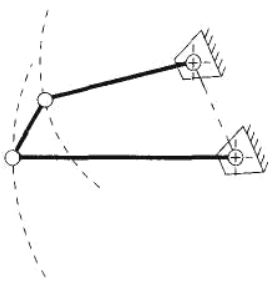
Todas las inversiones específicas del eslabonamiento de seis barras



a) Dos inversiones no específicas de manivela-balancín (GCRR)



b) Inversión de doble manivela (GCRC)
(mecanismo de eslabón de arrastre)



c) Inversión de doble balancín (GRCR)
(la biela gira)

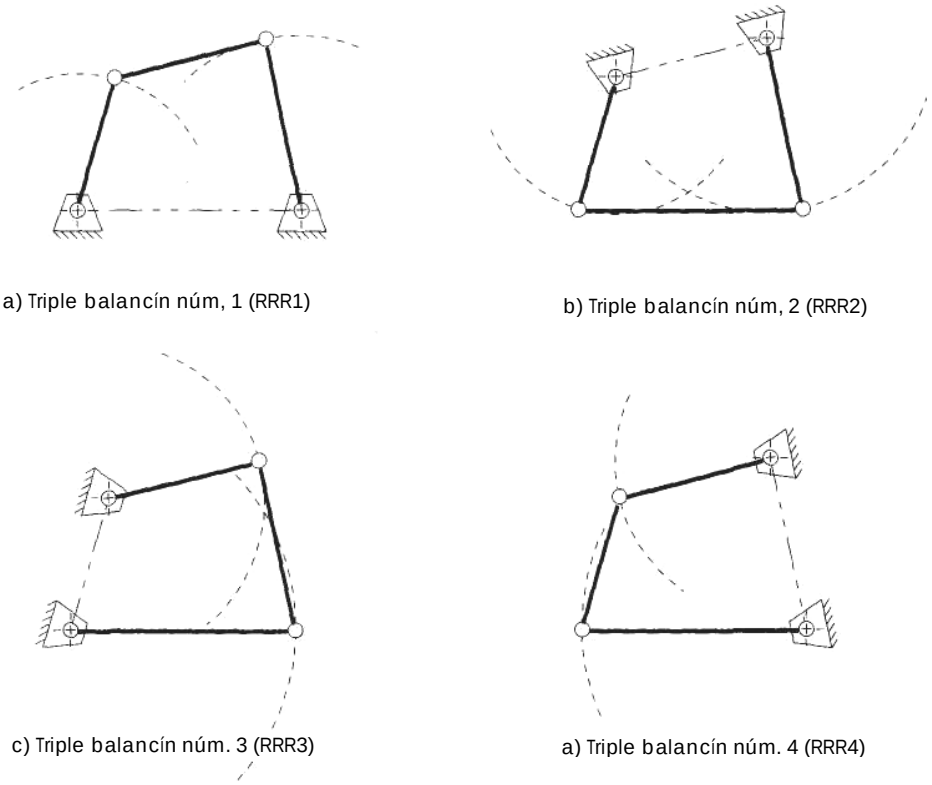
FIGURA 2-15

Todas las inversiones del eslabonamiento de cuatro barras de Grashof

de hecho, el dispositivo más común utilizado en maquinaria. También es extremadamente versátil en función de los tipos de movimiento que puede generar.

La sencillez es una marca distintiva del buen diseño. La menor cantidad de partes que puedan efectuar el trabajo constituye generalmente la solución menos costosa y más confiable. Por tanto, el **eslabonamiento de cuatro barras** debe considerarse dentro de las primeras soluciones para problemas de control de movimiento que hay que investigar. La **condición de Grashof[18]!** es una relación muy simple que pronostica el *comportamiento de rotación* o **rotabilidad** de las inversiones de un eslabonamiento de cuatro barras con base sólo en las longitudes de eslabón.

Sean:
S = longitud del eslabón más corto
L = longitud del eslabón más largo
P = longitud de un eslabón restante
Q = longitud de otro eslabón restante



a) Triple balancín núm, 1 (RRR1)

b) Triple balancín núm, 2 (RRR2)

c) Triple balancín núm. 3 (RRR3)

a) Triple balancín núm. 4 (RRR4)

FIGURA 2-16

Todas las Inversiones del eslabonamiento de cuatro barras de no Grashof son balancines triples

Luego si:

$$S + L \leq P + Q \tag{2.8}$$

el eslabonamiento es de **Grashof** y por lo menos un eslabón será capaz de realizar una revolución completa con respecto al plano de fijación. A ésta se le llama cadena cinemática de **clase I.** Si esa desigualdad no es cierta, entonces el eslabonamiento es **no Grashof** y *ningún* eslabón podrá realizar una revolución completa relativa con respecto al plano de fijación. Ésta es una cadena cinemática de **clase II.**

Observe que los enunciados anteriores se aplican independientemente del orden de ensamblaje de los eslabones. Es decir, la determinación de la condición de Grashof puede realizarse en un conjunto de eslabones no ensamblados. Si se ensamblan después en una cadena cinemática en el orden *S, L, P,* Q o en el 5, *P, L, Q* o en cualquier otro orden, *no* cambiará la condición de Grashof.

Los movimientos posibles a partir de un eslabonamiento de cuatro barras dependerán de la condición de Grashof y de la **inversión** elegida. Las inversiones se definirán en relación con el eslabón más corto. Los movimientos son:

Para el caso de clase I, $S + L < P + Q$:

Si se fija uno u otro eslabón adyacente al más corto, se obtiene una **manivela-balancín,** en la cual el eslabón más corto girará completamente y el otro eslabón oscilará pivotado a la fijación.

Si se fija el eslabón más corto se logrará una **doble-manivela,** en la que tanto el acoplador como los eslabones pivotados a la fijación realizan revoluciones completas.

Si se fija el eslabón opuesto al más corto se obtendrá un **doble-balancín de Grashof,** en el que oscilan los dos eslabones fijos pivotados a la fijación y sólo el acoplador realiza una revolución completa.

Para el caso de clase II, $S + L > P + Q$:

Todas las inversiones serán **triples-balancines,**[1]^ en las cuales ningún eslabón puede girar completamente.

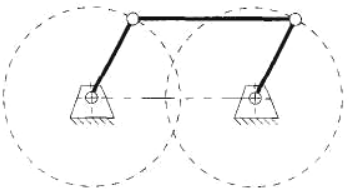
Para el caso de clase III, $S + L = P + Q$:

Designado éste como **caso especial de Grashof** y también como cadena cinemática de **clase III,** todas las inversiones serán **dobles-manivelas,** o **manivelas-balancín,** pero tendrán **"puntos de cambio"** dos veces por revolución de la manivela de entrada cuando todos los eslabones quedan colineales. En estos puntos de cambio el comportamiento de salida se volverá indeterminado. El comportamiento del eslabonamiento es entonces impredecible, ya que puede asumir cualquiera de las dos configuraciones. Su movimiento debe limitarse para evitar alcanzar los puntos de cambio, o proporcionar un eslabón adicional fuera de fase para garantizar un "traslado" de los puntos de cambio. (Véase la figura 2-17c).)

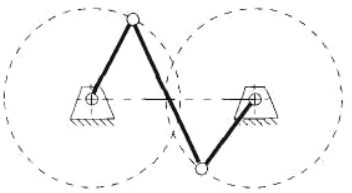
En la figura 2-15 se muestran las cuatro inversiones posibles del **caso Grashof:** dos manivelas-balancín, una doble-manivela (también llamada eslabón de arrastre) y un doble balancín con acoplador rotatorio. Las dos manivelas-balancín dan movimientos similares y, por tanto, no son distintas entre sí. En la figura 2-16 se presentan inversiones no específicas, todas triples-balancines de un **eslabonamiento no Grashof.**

En las figuras 2-17a) y *2-17b)* se muestran las configuraciones de **paralelogramo y antiparalelogramo** del eslabonamiento **especial de Grashof.** El eslabonamiento de paralelogramo es muy útil, ya que duplica exactamente el movimiento rotatorio de la manivela impulsora en la manivela impulsada. Un empleo común es el acoplamiento de los balancines frotadores de un limpiaparabrisas de automóvil. El acoplador del eslabonamiento de paralelogramo tiene traslación curvilínea y permanece con el mismo ángulo mientras todos sus puntos describen trayectorias circulares idénticas. Este movimiento paralelo sé utiliza con frecuencia en los elevadores de carga traseros de camiones y en robots industriales.

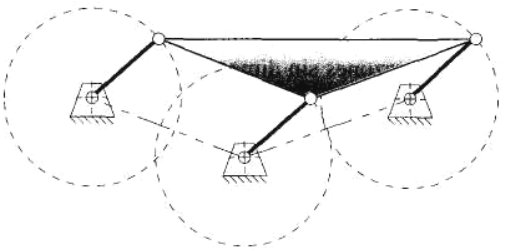
El eslabonamiento de antiparalelogramo es también una doble-manivela, pero la manivela de salida tiene una velocidad angular diferente de la velocidad de la manivela de entrada. Observe que los puntos de cambio permiten al eslabonamiento variar de modo imprevisible entre las formas de paralelogramo y antiparalelogramo cada 180°, a menos que se proporcionen algunos eslabones adicionales para llevarlo por aquellas posiciones. Esto se puede lograr si se agrega un eslabonamiento compañero desfasado acoplado a la misma manivela, como se muestra en la figura 2-17c). Una aplicación común de este eslabonamiento de doble paralelogramo se usaba en las antiguas locomotoras de vapor y servía para interconectar las ruedas motrices. Los puntos de cambio se



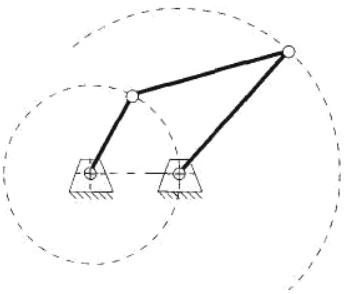
a) Forma de paralelogramo



b) Forma de antiparalelogramo



c) El eslabonamiento de doble paralelogramo produce movimiento paralelo (traslación curvilínea pura) en la biela y también lo lleva a través de los puntos de cambio



a) Forma deltoide o de corneta

FIGURA 2-17

Algunas formas del caso especial de eslabonamiento de Grashof

manejaban al proporcionar el eslabonamiento duplicado, 90° fuera de fase, en el otro lado de la locomotora. Cuando un lado estaba en un punto de cambio, el otro ya lo había rebasado.

La disposición de **doble-paralelogramo** que se muestra en la figura 2-17c) es muy útil, ya que aporta un acoplador en traslación que permanece horizontal en todas las posiciones. Las dos etapas de paralelogramo del eslabonamiento están desfasadas, de modo que cada una lleva a la otra a través de sus puntos de cambio. La figura 2-17<¿) muestra la configuración **deltoide,** que es una manivela-balancín.

No hay nada malo o bueno acerca de la condición de Grashof. Los eslabonamientos de las tres variantes son igualmente útiles. Si, por ejemplo, se necesita un eslabonamiento de limpiaparabrisas impulsado por motor, puede utilizarse un eslabonamiento de Grashof del caso no especial, con la finalidad de tener un eslabón rotatorio para la entrada del motor, más una etapa de paralelogramo del caso especial, con el fin de acoplar los dos lados, como se describió antes. Si se necesita controlar los movimientos de las ruedas de un auto sobre los obstáculos, puede usarse un eslabonamiento de no Grashof de triple balancín para movimiento oscilatorio de corto alcance. Si se desea duplicar o reproducir con exactitud algún movimiento de entrada, en una ubicación remota, puede usarse el caso especial de eslabonamiento de paralelogramo de Grashof, como se utiliza en una máquina de dibujar. En cualquier caso, esta condición determinada simplemente aporta

gran cantidad de información acerca del comportamiento que se espera a partir de un diseño de eslabonamiento de cuatro barras propuesto, antes de la construcción de modelos o prototipos.

Clasificación del eslabonamiento de cuatro barras

Barker[10] ha desarrollado un esquema de clasificación que permite predecir el tipo de movimiento que se puede esperar de un eslabonamiento de cuatro barras basado en los valores de sus relaciones de eslabón. Las características del movimiento angular de un eslabonamiento son independientes de los valores absolutos de las longitudes de los eslabones. Esto permite que las longitudes de los eslabones se normalicen al dividir tres de éstas entre la cuarta para crear tres razones sin dimensiones que definen su geometría.

Sean las longitudes de los eslabones designadas por r_1, r_2, r_3 y r_4 (todas positivas y ninguna cero), con el subíndice 1 se indica el eslabón a la fijación, con 2 el eslabón de manejo, con 3 el acoplador y con 4 el eslabón restante (o de salida). Las relaciones de eslabonamiento se forman al dividir cada longitud del eslabón entre r_2 dando: $\lambda_1 = r_1/r_2$, $\lambda_3 = r_3/r_2$, $\lambda_4 = r_4/r_2$.

Cada eslabón se designará también con una letra basada en su tipo de movimiento cuando se conecte con otros eslabones. Si un eslabón puede hacer una revolución completa con respecto a otros eslabones, se llama manivela (C), y si no, balancín (R). El movimiento de los eslabonamientos ensamblados basados en su condición de Grashof e inversión pueden entonces dar un código de letras, por ejemplo, GCRR para una manivela-balancín de Grashof o GCCC para un mecanismo de doble-manivela de Grashof (eslabón de arrastre). Las designaciones de movimiento C y R se enlistan siempre en el siguiente orden: eslabón de entrada, acoplador, eslabón de salida. El prefijo G indica un eslabonamiento de Grashof, S es un caso especial de Grashof (punto de cambio) y sin prefijo un eslabón de no Grashof.

La tabla 2-4 muestra los 14 tipos de eslabonamiento de cuatro barras de Barker con base en su esquema de nombres. Los primeros cuatro renglones son las inversiones de Grashof, los siguientes cuatro son los triples balancines de no Grashof y los seis últimos son los casos especiales de eslabonamientos de Grashof. Él asigna nombres únicos de cada tipo basados en una combinación de su condición de Grashof e inversión. Para efectos comparativos también se muestran los nombres tradicionales de las mismas inversiones y son menos específicos que la nomenclatura de Barker. Observe las diferencias entre la manivela-balancín de Grashof (subclase 2) y el balancín-manivela (subclase 4). Para manejar un eslabonamiento GRRC del balancín se necesita agregar un volante a la manivela, como se hizo en el eslabonamiento de motor de combustión interna con mecanismo de manivela-corredera (el cual es un GPRC). Véase la figura 2-10a).

Barker también define "un espacio de solución" cuyos ejes son las relaciones de eslabonamiento λ_1, λ_3, λ_4 como se muestra en la figura 2-18. Estos valores de las relaciones se extienden teóricamente hasta el infinito, pero para eslabonamientos reales las relaciones se limitan a valores razonables.

Con la finalidad de ensamblar cuatro eslabones, el eslabón más largo debe ser más corto que la suma de los otros tres eslabones,

$$L < (S + P + Q) \tag{2.9}$$

TABLA 2-4 Clasificación completa de Barker de mecanismos de cuatro barras en un plano

Adaptado de la referencia (9). s = eslabón corto, *l* = eslabón largo, Gxxx = Grashof, RRRx = no-Grashof, Sxx = caso especial

Tipo	s + l versus p + q	Inversión	Clase	Designación de Barker	Código	También se conoce como
1	<	$L_1 = s$ = fijación	I-1	Grashof manivela-manivela-manivela	GCCC	doble manivela
2	<	$L_2 = s$ = entrada	I-2	Grashof manivela-balancín-balancín	GCRR	manivela-balancín
3	<	$L_3 = s$ = acoplador	I-3	Grashof balancín-manivela-balancín	GRCR	doble balancín
4	<	$L_4 = s$ = salida	I-4	Grashof balancín-balancín-manivela	GRRC	balancín-manivela
5	>	$L_1 = l$ = fijación	II-1	clase 1 balancín-balancín-balancín	RRR1	triple balancín
6	>	$L_2 = l$ = entrada	II-2	clase 2 balancín-balancín-balancín	RRR2	triple balancín
7	>	$L_3 = l$ = acoplador	II-3	clase 3 balancín-balancín-balancín	RRR3	triple balancín
8	>	$L_4 = l$ = salida	II-4	clase 4 balancín-balancín-balancín	RRR4	triple balancín
9	=	$L_1 = s$ = fijación	III-1	punto de cambio manivela-manivela-manivela	SCCC	SC* doble manivela
10	=	$L_2 = s$ = entrada	III-2	punto de cambio manivela-balancín-balancín	SCRR	SC manivela-balancín
11	=	$L_3 = s$ = acoplador	III-3	punto de cambio balancín-manivela-balancín	SRCR	SC doble balancín
12	=	$L_4 = s$ = salida	III-4	punto de cambio balancín-balancín-manivela	SRRC	SC balancín-manivela
13	=	dos pares iguales	III-5	doble punto de cambio	S2X	paralelogramo o deltoide
14	=	$L_1 = L_2 = L_3 = L_4$	III-6	triple punto de cambio	S3X	cuadrado

*SC = Caso especial,

Si $L - (S + P + Q)$, entonces los eslabones pueden ensamblarse pero no se moverán, por lo tanto, esta condición proporciona un criterio para separar regiones de no movilidad de regiones que permitan movilidad en un espacio de solución. Aplicando este criterio en términos de las tres relaciones de eslabones se definen cuatro planos de movilidad cero, los cuales proporcionan límites al espacio de solución.

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_3 &= \lambda_1 + 1 + \lambda_4 \\ \lambda_4 &= \lambda_1 + 1 + \lambda_3 \\ \lambda_1 &= 1 + \lambda_3 + \lambda_4 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Aplicando la condición de Grashof $S + L = P + Q$ (en función de las relaciones del eslabón) se definen tres planos adicionales en los que caen todos los mecanismos de cambio de punto.

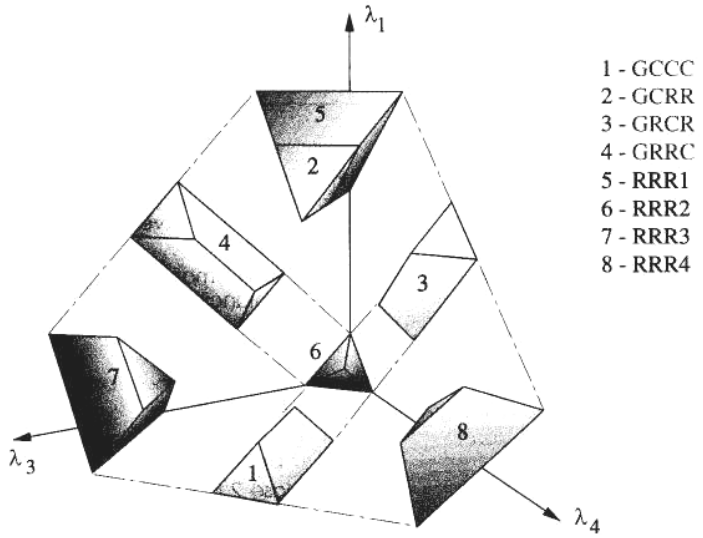


FIGURA 2-18

Espacio de solución de Barker para el eslabonamiento de cuatro barras *Adaptado de la referencia (10).*

$$\begin{aligned} 1 + \lambda_1 &= \lambda_3 + \lambda_4 \\ 1 + \lambda_3 &= \lambda_1 + \lambda_4 \\ 1 + \lambda_4 &= \lambda_1 + \lambda_3 \end{aligned} \tag{2.11}$$

El octante positivo de este espacio, acotado por los planos λ_1-λ_3, λ_1-λ_4, λ_3-λ_4 y los cuatro planos de movilidad cero (ecuación 2.10), contiene ocho volúmenes que están separados por los planos de punto de cambio (ecuación 2.11). Cada volumen contiene mecanismos extraordinarios para una de las primeras ocho clasificaciones de la tabla 2-4. Estos ocho volúmenes están en contacto con algún otro en el espacio de solución, pero para mostrar sus formas éstos tienen que ser "explorados" separadamente en la figura 2-18. Los seis mecanismos restantes de punto de cambio de la tabla 2-4 existen sólo en los planos de punto de cambio, que son las interfaces entre los ocho volúmenes. Para más detalles de este espacio de solución y del sistema de clasificación de Barker de lo que el espacio permite aquí, véase la referencia [10].

2.13 ESLABONAMIENTOS DE MÁS DE CUATRO BARRAS

Eslabonamientos con engranaje de cinco barras

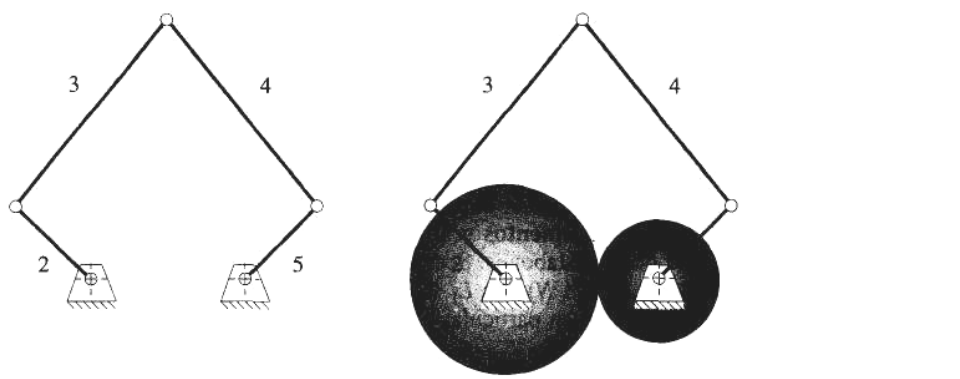
Se ha visto que el eslabonamiento más simple con un *GDL* es el mecanismo de cuatro barras. Es un dispositivo extremadamente versátil y útil. Muchos problemas complejos de control de movimiento pueden resolverse con sólo cuatro eslabones y cuatro pasadores. Por lo tanto, en aras de la sencillez, los diseñadores siempre deben tratar primero de re-

solver sus problemas con este dispositivo. Sin embargo, habrá casos en que es necesaria una solución más complicada. Agregar un eslabón y una junta para formar uno de cinco barras (figura 2-19a)) hará que se tengan dos *GDL* en vez de uno. Añadir un par de engranes para enlazar dos eslabones con una semijunta nueva hace que se reduzcan de nuevo a uno y se origine el **mecanismo de cinco barras con engranaje (GFBM)** que se muestra en la figura 2-19*b).*

Este mecanismo proporcionará movimientos más complejos que el de cuatro barras, a costa del eslabón y el par de engranes agregados, esto lo puede constatar en el apéndice E. El lector puede observar el comportamiento dinámico del eslabonamiento en la figura 2-19*b),* al correr el programa FIVEBAR que se incluye en esta obra, y leer el archivo de datos denominado F02-19b.5br. Véase el apéndice A para saber cómo correr los programas. Simplemente acepte todas las respuestas de reopción y anime el eslabonamiento.

Eslabonamientos de seis barras

Ya se han considerado los mecanismos de seis barras de Watt y Stephenson. Véase la figura 2-14. El mecanismo de **seis barras de Watt** se puede considerar como *dos eslabonamientos de cuatro barras conectados en serie,* con dos eslabones en común. El mecanismo de **seis barras de Stephenson** puede considerarse como dos eslabonamientos de *cuatro barras conectados en paralelo,* con dos eslabones en común. Muchos eslabonamientos pueden diseñarse mediante la técnica de combinar múltiples cadenas de cuatro barras, como *elementos básicos,* en ensambles más complejos. Muchos problemas de diseño reales necesitarán soluciones que incluyan más de cuatro barras. Algunos eslabonamientos de Watt y Stephenson se proporcionan como ejemplos integrados en el programa SIXBAR suministrado con este libro. Se puede correr ese programa para observar dinámicamente estos eslabonamientos. Seleccione un ejemplo a partir del menú, acepte todas las respuestas por preopción y anime los eslabonamientos.



a) Eslabonamiento de cinco barras, 2 *GDL* b) Eslabonamiento de cinco barras con engranaje, 1 *GDL*

FIGURA 2-19

Dos formas del eslabonamiento de cinco barras

Criterio de rotabilidad de tipo Grashof para eslabonamientos de orden superior

Rotabilidad se define como *la habilidad de que al menos un eslabón en la cadena cinemática haga una revolución completa con respecto a los otros eslabones* y defina la cadena como clase I, II o III. **Revolvabilidad** se refiere a *un eslabón específico en una cadena e indica que éste es uno de los eslabones que puede rotar.*

ROTABILIDAD DE UN ESLABONAMIENTO DE CINCO BARRAS CON ENGRANAJE Tingf[1] dedujo una expresión para la rotabilidad de un eslabonamiento de cinco barras con engranaje que es similar al criterio de Grashof de cuatro barras. Las longitudes de los eslabones se denominan L_1 a L_5 en orden creciente de longitud, entonces si:

$$L_1 + L_2 + L_5 < L_3 + L_4 \qquad (2.12)$$

los dos eslabones más cortos pueden revolucionar completamente con respecto a los otros y el eslabonamiento se designa como una cadena cinemática de clase I. Si esta desigualdad *no* es cierta, entonces es una cadena de clase II y puede o no permitir cualquier eslabón que gire completamente dependiendo de la relación de engranaje y del ángulo de fase entre los engranes. Si la desigualdad de la ecuación (2.12) se remplaza por un signo de igualdad, el eslabonamiento será una cadena de clase III en la cual los dos eslabones más cortos pueden girar completamente pero tendrán puntos de cambio parecidos a los del caso especial de cuatro barras de Grashof.

La referencia [11] describe las condiciones en que un eslabonamiento de cinco barras con engranaje de clase II girará o no girará. En términos de diseño práctico tiene sentido obedecer la ecuación 2.12 con el fin de garantizar una condición de "Grashof. También tiene sentido evitar la condición de cambio de punto de clase III. Observe que si uno de los eslabones cortos (digamos L_2) se hace cero, la ecuación 2.12 se reduce a la fórmula de Grashof de la ecuación 2.8.

Además de la rotabilidad de eslabonamientos se desearía conocer los tipos de movimientos posibles de cada una de las cinco inversiones de una cadena de cinco barras. Tingí[11]! describe esto en detalle. Pero si se quiere aplicar un conjunto de engranes entre dos eslabones de la cadena de cinco barras (para reducir su *GDL* a 1), en realidad se necesita un eslabonamiento de doble manivela, con los engranes sujetos a las dos manivelas. Una cadena de cinco barras de clase I será un mecanismo de doble-manivela si *los dos eslabones más cortos están entre el conjunto de los tres eslabones que comprimen el mecanismo eslabonado a la fijación y las dos manivelas pivotadas a la fijación}*-^

ROTABILIDAD DE LOS ESLABONAMIENTOS DE *N* BARRAS [Ting y colaboradores[12], [13] ampliaron el criterio de rotabilidad a todos los eslabonamientos de un solo ciclo de *N*-barras] con juntas en rotación y desarrollaron teoremas generales para la rotabilidad de eslabonamientos y la revolvabilidad de eslabones individuales con base en la longitud de los eslabones. Sean los eslabones del eslabonamiento de *N*-barras denotados por L_i $(i = 1, 2, \ldots N)$ con $L_1 \leq L_2 \leq \cdots \leq N$. Estos eslabones no necesitan estar conectados en un orden en particular y al igual que en el criterio de la rotabilidad son independientes de ese factor.

Un solo ciclo de *N* eslabones con juntas giratorias tendrá *(N* - 3) *GDL.* La condición necesaria y suficiente para el ensamblaje de un eslabonamiento de *N* barras es

$$L_N \leq \sum_{k=1}^{N-1} L_k \qquad (2.13)$$

Un eslabón K se llamará eslabón *corto* si

$$\{K\}_{k=1}^{N-3} \tag{2.14a}$$

y será un eslabón *largo* si

$$\{K\}_{k=N-2}^{N} \tag{2.14b}$$

Habrá tres eslabones largos y $(N-3)$ eslabones cortos en cualquier eslabonamiento de este tipo.

Un solo ciclo de una cadena cinemática de *N* barras que contenga sólo juntas giratorias de primer orden será un eslabonamiento de clase I, clase **II** o clase **III,** dependiendo de si la suma de las longitudes de su eslabón más largo y sus *(N-* 3) eslabones más cortos son, respectivamente, menores, mayores o iguales a la suma de las longitudes de los dos restantes eslabones largos:

$$\begin{aligned}
&\text{Clase I:} && L_N + (L_1 + L_2 + \cdots + L_{N-3}) < L_{N-2} + L_{N-1} \\
&\text{Clase II:} && L_N + (L_1 + L_2 + \cdots + L_{N-3}) > L_{N-2} + L_{N-1} \\
&\text{Clase III:} && L_N + (L_1 + L_2 + \cdots + L_{N-3}) = L_{N-2} + L_{N-1}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

y, para un eslabonamiento de clase I, debe haber uno y sólo un eslabón entre los ángulos de no entrada. Estas condiciones son necesarias y suficientes para definir la rotabilidad.

La **revolvabilidad** de cualquier eslabón L_i se define como la capacidad de girar completamente con respecto a los otros eslabones en la cadena y puede determinarse a partir de:

$$L_i + L_N \leq \sum_{k=1,\, k\neq i}^{N-1} L_k \tag{2.16}$$

Si L_i es cualquier eslabón giratorio, cualquier eslabón que no sea más grande que L_i también será giratorio.

En las referencias [12] y [13] pueden hallarse teoremas adicionales y corolarios que consideran los límites de los movimientos de los eslabones. El espacio no permite su completa exposición aquí. Observe que las reglas que toman en cuenta el comportamiento de eslabonamientos de cinco y cuatro barras con engranajes (ley de Grashof) establecidas antes son consistentes con estos teoremas generales de rotabilidad y están contenidas en ellos.

2.14 LOS RESORTES COMO ESLABONES

Hasta aquí sólo se han tratado eslabones rígidos. En muchos mecanismos y máquinas, es necesario equilibrar las cargas estáticas aplicadas al dispositivo. Un ejemplo común es el mecanismo de articulación de capota de un automóvil. A menos que se trate de un modelo (más barato) con un puntal que se coloca en un agujero para sostener levantada la capota, es probable que se tenga un eslabonamiento de cuatro barras o de seis barras que conecta la capota a la carrocería en cada lado. La capota es el acoplador de un eslabonamiento de no Grashof cuyos dos balancines están pivotados a la carrocería. Se coloca un resorte entre dos de los eslabones para proporcionar una fuerza que sostenga la capota en

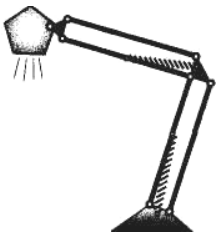


FIGURA 2-20

Un mecanismo de eslabonamiento equilibrado mediante resortes.

la posición abierta. En este caso el resorte es un quinto eslabón de longitud variable. En tanto puede proporcionar la intensidad correcta de fuerza, actúa para reducir a cero los *GDL* del mecanismo y mantiene el sistema en equilibrio estático. Sin embargo, puede convertirse de nuevo en un sistema con un *GDL,* al vencer la fuerza del resorte cuando se tira de la capota para cerrarla.

Otro ejemplo, que pudiera estar cercano a usted, es el de la lámpara de escritorio de brazo ajustable ilustrada en la figura 2-20. Este dispositivo tiene dos resortes que equilibran el peso de los eslabones y de la cabeza de la lámpara. Si está bien diseñado y construido permanecerá estable en una amplia variedad de posiciones, a pesar de la variación en el momento de volteo debida al brazo de momento cambiante de la cabeza de la lámpara. Esto se logra mediante el diseño cuidadoso de la configuración geométrica de las relaciones entre resorte y eslabón, de modo que cuando la fuerza del resorte cambia por el incremento de longitud, su brazo de momento también varía y esto equilibra continuamente el momento cambiante de la cabeza de la lámpara.

Un resorte lineal puede caracterizarse por su constante, $k = F/x$, donde F es fuerza y x es el desplazamiento (deformación) del resorte. Al duplicar su deformación se duplica también la fuerza. La mayor parte de los resortes helicoidales, del tipo utilizado en estos ejemplos, son lineales. En el siguiente capítulo se abordará el diseño de estos eslabonamientos de resorte-cargados.

2.15 CONSIDERACIONES PRÁCTICAS

Hay muchos factores que necesitan considerarse al crear diseños de buena calidad. No todos están dentro de las teorías aplicables. Un gran detalle de arte basado en la experiencia está también implicado en el diseño. Esta sección intenta describir algunas consideraciones prácticas en el diseño de máquinas.

JUNTAS DE PASADOR *VERSUS* CORREDERAS Y SEMIJUNTAS

La selección de materiales apropiados y una eficaz lubricación son la clave para obtener una larga duración en cualquier caso de mecanismos, como una junta, en donde dos materiales rozan entre sí. La superficie de contacto rozante se llama **cojinete de apoyo.** Si se supone que se escogen los materiales apropiados, la elección del tipo de junta puede tener un efecto importante sobre la capacidad para proporcionar una lubricación adecuada y eficaz durante el tiempo de vida de la máquina.

JUNTAS GIRATORIAS (PASADOR) La giratoria simple o junta de pasador (figura 2-21a)) es la opción ideal aquí por varias razones. Es relativamente fácil y barato diseñar y construir una junta de pasador de buena calidad. En su forma pura, el así llamado cojinete de **manguito** o cojinete **liso,** la geometría de perno con perforación captura una película de lubricante dentro de su interface anular por acción capilar y promueve una condición llamada *lubricación hidrodinámica,* en la cual las partes están separadas por una película delgada, como se muestra en la figura 2-22. Pueden proporcionarse fácilmente elementos sellantes en los extremos del agujero de paso que envuelven al pasador para evitar la pérdida de lubricante. La reposición de éste puede hacerse por los orificios radiales que desembocan en la superficie de cojinete de apoyo, de manera continua o periódica, sin tener que desensamblar.

Comercialmente se dispone ya de una forma conveniente de cojinete para eslabonamientos pivotados como **barras de extremo esférico,** semejantes a las mostradas en la

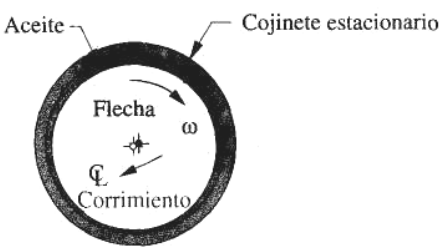
figura 2-23. Este cojinete de tipo manguito, esférico, que se *autoalinea* a una flecha puede estar fuera de la paralela. Las cuerdas en su cuerpo sobre el eslabón permiten que los eslabones se hagan de manera conveniente de barras redondas con extremos roscados y que con ello sea posible ajustar la longitud del eslabón.

También se venden ya **cojinetes de rodillo y de bola** en una gran variedad de tamaños para juntas de revoluta como las mostradas en la figura 2-24. Algunos de estos cojinetes (principalmente los de bola) se pueden obtener prelubricados y con sellos en sus extremos. Los elementos rodantes proporcionan operación de baja fricción y un buen control dimensional. Observe que los *cojinetes con elementos rodantes* contienen, de hecho, interfaces de junta superior (semijuntas) en cada bola o rodillo, lo cual es un problema en potencia, como se indicará más tarde. Sin embargo, la capacidad para capturar lubricante dentro de su carcaza de rodamiento (mediante sellos en sus extremos) combinada con la relativamente alta velocidad de rodamiento de las bolas o rodillos promueve una lubricación hidrodinámica y una duración mayor. Para mayor información sobre los cojinetes y la lubricación véase la referencia [15].

Para el caso de juntas de revoluta pivoteadas a una fijación se dispone comercialmente de algunos tipos de cojinetes que hacen el empaquetado más fácil. También existen **cojinetes de tipo chumacera y de montaje en brida** (figura 2-25) que ya incluyen cojinetes con elemento rodante (bola, rodillo) o cojinetes de apoyo del tipo de manguito. La chumacera permite un montaje adecuado a una superficie paralela al eje del pasador, y los de montaje en brida se aseguran a superficies perpendiculares al eje del pasador.

JUNTAS PRISMÁTICAS (CORREDERA) Requieren de un trabajo cuidadoso y de barras y ranuras rectas (figura 2-2*Ib)).* Los cojinetes con frecuencia se fabrican al gusto del cliente, aunque comercialmente se dispone de cojinetes lineales de bolas (figura 2-26) que deben trabajar en flechas endurecidas y rectificadas. Es difícil mantener la lubricación en cualquier junta deslizante. La lubricación no se captura de manera geométrica y se debe reabastecer introduciendo la junta en un baño de aceite o mediante un engrasado manual periódico. Una ranura abierta o una flecha tienden a acumular partículas de polvo del ambiente que pueden actuar como un compuesto abrasivo cuando son atrapadas en el lubricante y, en consecuencia, acelerar el desgaste.

JUNTAS SUPERIORES (SEMIJUNTAS) Estos elementos, como un pasador redondo en una ranura (figura 2-21c)) o en una junta de leva-seguidor (figura 2-10c)), experimentan aún más agudamente los problemas de lubricación de la corredera, pues en general tienen dos superficies curvadas de manera opuesta, en contacto lineal, que tienden a ex-



Flecha que gira rápidamente
- lubricación hidrodinámica
- contacto no metálico
- fluido bombeado por la flecha
- la flecha va en retraso con respecto a la línea central del cojinete

FIGURA 2-22
Lubricación hidrodinámica en un cojinete de manguito, espacios y movimientos exagerados

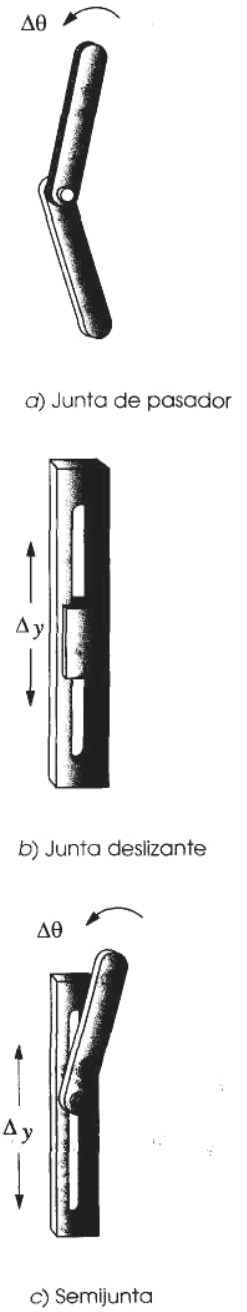


FIGURA 2-21
Juntas de varios tipos

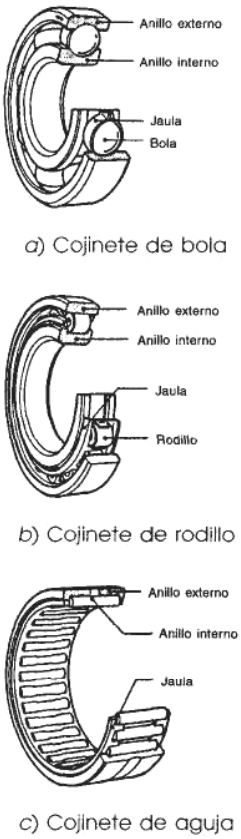


FIGURA 2-24

Cojinetes de bola, rodillo y aguja para juntas giratorias *Cortesía de NTN Corporation, Japón*

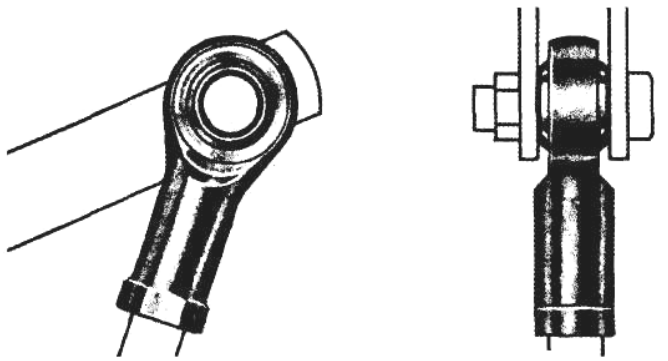


FIGURA 2-23

Rótula esférica *Cortesía de Emerson Power Transmission, Ithaca Nueva York*

pulsar la capa de lubricante de la unión. Este tipo de junta necesita operar en baño de aceite para larga duración. Lo anterior requiere que el elemento se aloje en una costosa envolvente hermética al aceite, con sellos en todos los ejes sobresalientes.

Los tres tipos de juntas se utilizan ampliamente en toda clase de maquinaria con gran éxito. En tanto se preste la debida *atención a los detalles de ingeniería,* el diseño puede ser exitoso. Algunos ejemplos comunes de los tres tipos de juntas pueden hallarse en un automóvil. El mecanismo del limpiaparabrisas es un eslabonamiento de juntas de pasador puro. Los pistones en los cilindros del motor de un auto son correderas reales y funcionan en contacto con el aceite lubricante del motor. Las válvulas del citado motor se abren y cierran por medio de juntas de leva-seguidor (semijuntas) ahogadas en el aceite lubricante del motor. Es probable que usted cambie el aceite de su motor con bastante frecuencia, ¿cuándo fue la última vez que lubricó el eslabonamiento del limpiaparabrisas? ¿Se ha averiado alguna vez este eslabonamiento (no el motor)?

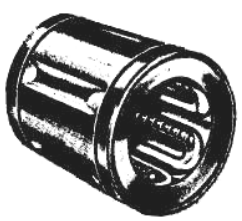


FIGURA 2-26

Buje lineal de bolas *Cortesía de Thomson Industries, Port Washington, Nueva York*

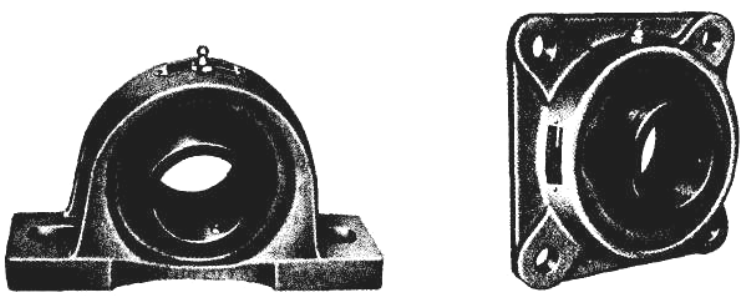
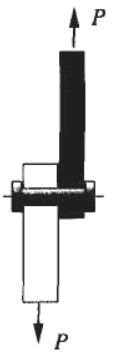


FIGURA 2-25

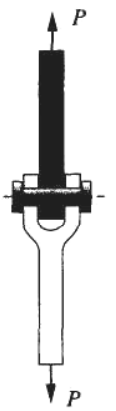
Cojinetes unitarios en caja de chumacera y en montaje de caja de brida *Cortesía de Emerson Power Transmission, Ithaca, Nueva York*

¿Viga en voladizo o viga en doble voladizo?

Cualquier junta debe sostenerse contra las juntas de cargas. Como se muestra en la figura 2-27, dos enfoques básicos son posibles. Una junta en voladizo tiene el pasador (apoyo) sostenido solo, como una viga en voladizo. A veces esto es necesario, por ejemplo en una manivela que deba pasar por el acoplador y que no tenga nada en el otro lado del acoplador. Sin embargo, una viga en voladizo es inherentemente más débil (para la misma sección transversal y carga) que una viga en doble voladizo (simplemente apoyada). La viga en doble voladizo puede evitar que se aplique un momento de flexión en los eslabones manteniendo las fuerzas en el mismo plano. El pasador sentirá un momento de flexión en ambos casos, pero el pasador en la viga en doble voladizo está en cortante doble (dos secciones transversales comparten la carga). Un pasador en voladizo está en cortante simple. Se sugiere usar las juntas en doble voladizo (ya sean revolutas, prismáticas o superiores) donde sea posible. Si se debe usar un pasador en voladizo, entonces un tornillo en escalón comercial que se ha endurecido y está fijo al cuerpo, como se muestra en la figura 2-28, puede servir algunas veces como un pasador pivote.



a) Montaje en voladizo, cortante simple



b) Montaje en doble voladizo, cortante doble

FIGURA 2-27

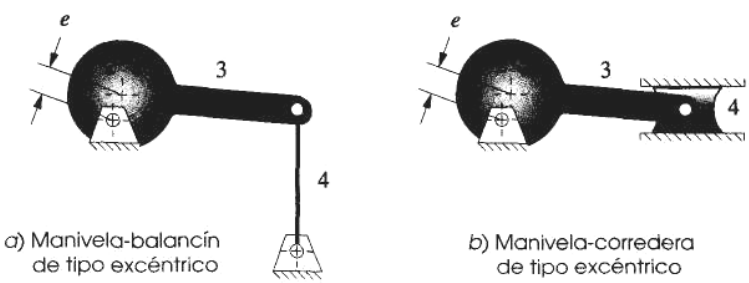
Juntas de pasador en voladizo y en doble voladizo

Eslabones cortos

Algunas veces sucede que la longitud requerida de una manivela es tan corta que no es posible proporcionar pasadores de tamaño apropiado o cojinetes en cada uno de sus pivotes. La solución es diseñar el eslabón como una **manivela excéntrica,** como se muestra en la figura 2-29. Un pasador de pivote se agranda hasta el punto en que, en efecto, contiene el eslabón. El diámetro exterior de la manivela circular es el muñón para el pivote de movimiento. El pivote fijo se coloca a una distancia *e* desde el centro de este círculo, igual a la longitud de manivela requerida. La distancia *e* es la excentricidad de la manivela (la longitud de la manivela). Esta disposición tiene la ventaja de poseer una gran superficie dentro del cojinete para reducir el desgaste, aunque puede ser difícil mantener lubricado el muñón de gran diámetro.

Relación de apoyo

La necesidad de movimiento rectilíneo en la maquinaria requiere el uso extenso de juntas de corredera con traslación lineal. Hay una relación geométrica básica llamada *relación de apoyo* que, si se omite o infringe, conducirá invariablemente a problemas.



a) Manivela-balancín de tipo excéntrico

b) Manivela-corredera de tipo excéntrico

FIGURA 2-29

Manivelas excéntricas



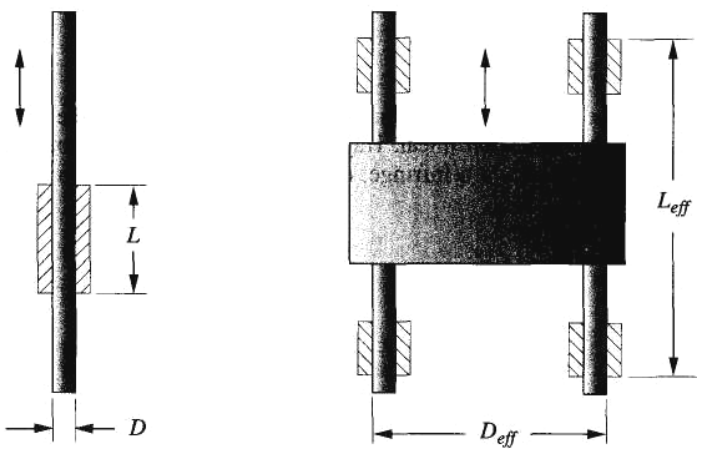
FIGURA 2-28

Tornillo en escalón
Cortesía de Cordova Bolt Inc., Buena Park. CA

La **relación de apoyo** *(BR,* por sus siglas en inglés) se define como *la longitud efectiva de la corredera dividida entre el diámetro efectivo del cojinete de apoyo: BR = L/D.* Para una operación suave **este cociente debe ser mayor que 1.5 y nunca menor que 1.** Cuanto mayor sea es mejor. La **longitud efectiva** se define como *la distancia sobre la cual la corredera móvil está en contacto con la guía estacionaria.* No hay necesidad de contacto continuo sobre esa distancia. Es decir, dos collarines cortos, espaciados a gran distancia, son en efecto tan largos como su separación total, más sus propias longitudes, y equivalen cinemáticamente a un tubo largo. El **diámetro efectivo** es *la mayor distancia entre las guías estacionarias,* en un plano perpendicular al movimiento deslizante.

Si la junta de corredera es simplemente una varilla dentro de un casquillo o buje, como se muestra en la figura 2-30a), el diámetro y la longitud efectivos son idénticos a las dimensiones reales del diámetro de varilla y longitud de casquillo. Si la corredera fuera una plataforma que se desliza sobre dos varillas y casquillos múltiples, como se indica en la figura 2-30Í»), entonces el diámetro y la longitud efectivos son el ancho y la longitud total, respectivamente, del ensamblaje de la plataforma. Es este caso el que conduce con frecuencia a relaciones de apoyo deficientes.

Un ejemplo común de dispositivo con una relación de apoyo deficiente es el cajón de un mueble no muy bien hecho. Si las únicas guías para el movimiento deslizante del cajón son sus lados que corren contra el marco, se tendrá una relación de apoyo menor que 1, pues su ancho es mayor que su profundidad. Probablemente ha experimentado el trabamiento que ocurre al mover tal cajón. Una cómoda de varios cajones, de buena calidad, tiene en ellos una guía central con gran relación de apoyo *LID,* bajo el fondo del cajón, y éste se deslizará suavemente.



o) Varilla simple en casquillo (o manguito)

b) Plataforma deslizante sobre dos varillas

FIGURA 2-30

Relación de apoyo

Eslabonamientos *versus* levas

El eslabonamiento con juntas de pasador tiene todas las ventajas mencionadas antes, y el mecanismo de leva-seguidor (figura 2-10c)) tiene todos los problemas asociados a una semijunta enumerados con anterioridad. Sin embargo, ambos se utilizan ampliamente en el diseño de máquinas, con frecuencia en la misma máquina y en combinación (eslabonamientos impulsores de levas). Así, ¿por qué elegir unos mecanismos en vez de otros?

El eslabonamiento "puro" de juntas de pasador con cojinetes buenos en las juntas es un diseño potencialmente superior, igual a todo o más, y debe ser la primera posibilidad en la exploración de cualquier problema de diseño de máquinas. Sin embargo, habrá muchos problemas en los que deba seguirse un camino más directo, el movimiento deslizante o los detenimientos precisos de una leva-seguidor. Entonces las limitaciones prácticas de las juntas de leva y las juntas deslizantes se tendrán que tratar de forma coordinada.

Los eslabonamientos tienen la desventaja de su tamaño relativamente grande en comparación con el desplazamiento de salida de la parte operante. Por lo tanto, son difíciles de compactar. Las levas tienden a ser compactas en comparación con el desplazamiento del seguidor. Los eslabonamientos son relativamente difíciles de sintetizar y las levas son relativamente fáciles de diseñar (siempre y cuando se disponga de una computadora). Pero los eslabonamientos son mucho más fáciles y menos costosos de fabricar que las levas. Los detenimientos son fáciles de conseguir con levas, y difíciles con eslabonamientos. Éstos pueden funcionar incluso en entornos muy hostiles, con lubricación deficiente, en tanto que las levas no, a menos que estén aisladas herméticamente de los contaminantes ambientales. Los eslabonamientos son mejores que las levas para el comportamiento dinámico a altas velocidades, son menos sensibles a los errores de fabricación y se pueden manejar con muy altas cargas, pero las levas se pueden acoplar mejor a los movimientos.

De modo que la respuesta está lejos de hallarse bien definida. Éste es otro caso de *transacción en el diseño*, en el cual se deben ponderar todos los factores y tomar la mejor decisión. Debido a las ventajas potenciales de un eslabonamiento puro es importante considerarlo antes de elegir una tarea de diseño fácil que al final es una solución más costosa.

2.16 MOTORES E IMPULSORES

A menos que se opere manualmente, un mecanismo requerirá algún tipo de dispositivo impulsor para proporcionar el movimiento y energía de entrada. Hay muchas posibilidades. Si el diseño requiere un movimiento rotatorio continuo de entrada, para un eslabonamiento de Grashof, una manivela-corredera o una leva-seguidor, por ejemplo, entonces un motor o máquina* es la elección lógica. Existe una amplia variedad de motores. La fuente de energía más común para un motor es la electricidad, pero el aire comprimido y el líquido a presión se utilizan también para accionar motores neumáticos e hidráulicos, respectivamente. Los motores de gasolina o diesel son otra posibilidad. Si el movimiento de entrada es de traslación, como normalmente sucede en un equipo de movimiento en tierra, entonces es necesario un cilindro hidráulico o neumático.

Motores eléctricos

Los motores eléctricos se clasifican de acuerdo con su función o aplicación y por su configuración eléctrica. Algunas clasificaciones funcionales (descritas abajo) son los

* Los términos *motor y máquina* a menudo se usan de manera indistinta, pero no significan lo mismo. Su diferencia es semántica, pero los "puristas" se reservan el término *motor* para motores eléctricos, hidráulicos y neumáticos, y el de *máquina* para dispositivos termodinámicos tales como máquinas de vapor y máquinas de combustión interna. Así que su automóvil es accionado por una máquina, pero sus limpiadores de parabrisas y elevadores de ventanas son accionados por motores.

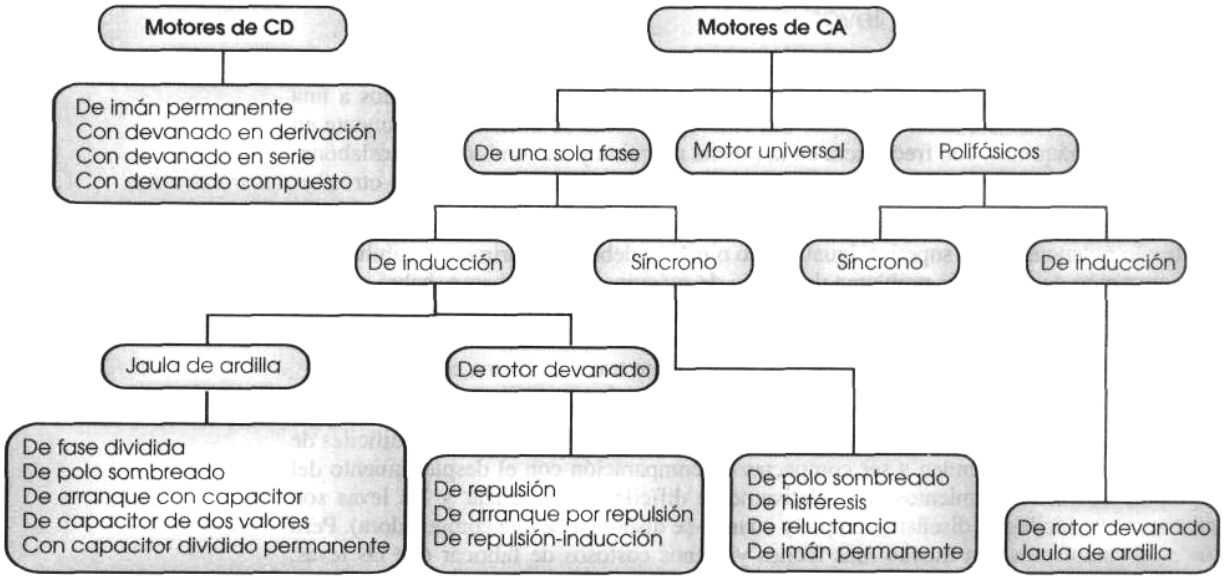


FIGURA 2-31

Tipos de motores eléctricos *Fuente: Referencia (14)*

motores de engranes, los **servomotores y** los **motores de pasos.** Existen también diferentes configuraciones eléctricas, como las que se presentan en la figura 2-31, independientemente de sus clasificaciones de funcionalidad. La principal división en la configuración eléctrica es entre los motores de CA y CD, aunque hay un tipo, el **motor universal,** que está diseñado para trabajar tanto con CA como con CD.

CA y CD se refieren a *corriente alterna* y *corriente directa,* respectivamente. La CA la proporcionan generalmente las compañías abastecedoras de energía eléctrica, y en muchos países (como Estados Unidos) es de 60 hertz (o ciclos por segundo) a ±120, ±240 o ±480 volts (V). Otros países proporcionan CA a 50 Hz. Una sola fase de CA proporciona una [sola onda senoidal] que varía con el tiempo, y la corriente alterna trifásica proporciona tres ondas senoidales a ángulos de fase de 120°. La corriente CD es constante con el tiempo, se proporciona mediante generadores o baterías, y a menudo se usa en vehículos, por ejemplo, automóviles, barcos y aviones. Los voltajes de batería se tienen en múltiplos de 1.5 V; los más comunes son los de 6, 12 y 24 V. Los motores eléctricos también están clasificados por su relación de potencia como se muestra en la tabla 2-5. Ambos motores de CA y CD están diseñados para proporcionar una continua rotabilidad de salida. En tanto que pueden atascarse momentáneamente contra una carga, no pueden tolerar una corriente completa, a velocidad cero se atascan por más de unos minutos sin sobrecalentarse.

TABLA 2-5
Clases de potencias en motores

Clase	HP
Subfraccional	< 1/20
Fraccional	1/20-1
Integral	> 1

MOTORES DE CD Se fabrican con diferentes configuraciones eléctricas, por ejemplo, *de imán permanente (PM, por sus siglas en inglés), devanado en derivación, devanado en serie y devanado compuesto.* Los nombres se refieren a la manera en que eléctricamente se conectan las espiras de la armadura giratoria a las espiras de campo estacionarias

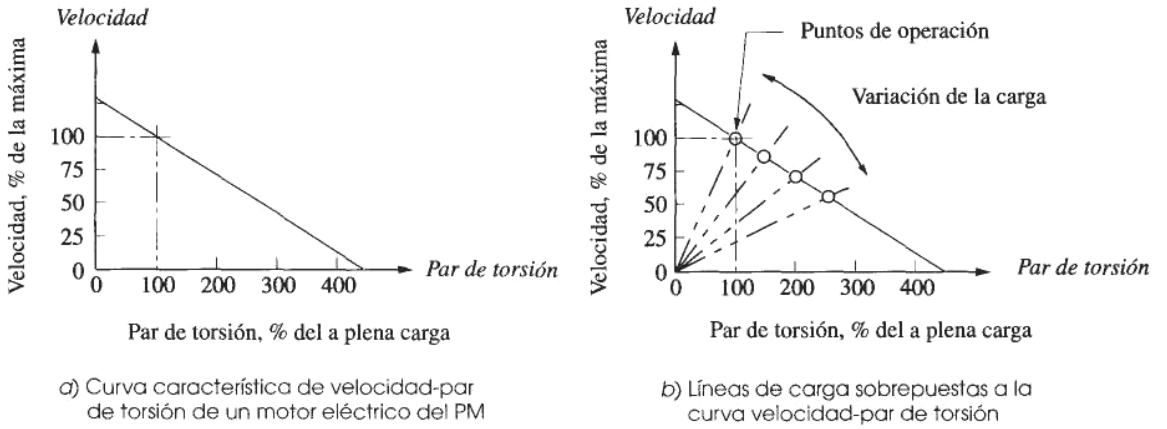


FIGURA 2-32

Curva característica de velocidad-par de torsión de un motor eléctrico típico de CD, del tipo de imán permanente (PM)

(en paralelo, en serie o en una combinación serie-paralelo). Los imanes permanentes remplazan las espiras de campo en un motor MR Cada configuración proporciona diferentes características del *par de torsión-velocidad.* La curva *par de torsión-velocidad* de un motor describe cómo responderá a la aplicación de una carga y es de gran interés para el diseñador mecánico, ya que le ayuda a predecir cómo se comportará el sistema mecánicoeléctrico cuando varíe dinámicamente la carga con el tiempo.

MOTORES DE IMÁN PERMANENTE DE CD En la figura 2-32a) se muestra una curva de par de torsión-velocidad para un motor de CD del tipo PM. Observe que el par de torsión varía mucho con la velocidad, y va de un valor máximo (en paro) de velocidad cero, a un valor nulo a velocidad máxima (no cargado). Esta relación proviene del hecho de que *potencia = par de torsión* x *velocidad angular.* Puesto que la potencia disponible del motor es limitada para algún valor finito, un aumento en el par de torsión requiere una disminución en la velocidad angular y viceversa. Su par de torsión es máximo en paro (velocidad cero), lo cual es típico de todos los motores eléctricos. Esto significa una ventaja cuando se inicia con cargas muy pesadas: por ejemplo un vehículo de motor eléctrico no necesita embrague, a diferencia de un motor de combustión interna, en el cual es muy difícil avanzar desde el reposo cuando tiene una carga muy pesada. El par de torsión de un motor aumenta en vez de disminuir cuando aumenta su velocidad angular.

En la figura 2-32*b*) se presenta una familia de líneas de carga sobrepuesta a la gráfica *par de torsión-velocidad* de un motor PM. Estas líneas de carga representan una carga que varía con el tiempo aplicada a un mecanismo impulsor. El problema se deriva del hecho de que *conforme aumenta el par de torsión para la carga requerida, el motor debe reducir la velocidad para proporcionarlo.* Por lo tanto, la velocidad de entrada variará como respuesta a las variaciones de carga en la mayoría de los motores sin considerar su diseño.* Si se desea velocidad constante esto resulta inaceptable. Otros tipos de motores de CD tienen más o menos sensibilidad a la carga que un motor PM. *Un motor es típicamente seleccionado con base en su curva de par de torsión-velocidad.*

* El motor síncrono de CA y el motor de velocidad controlada de CD son las excepciones.

MOTORES CD CON DEVANADO EN PARALELO Tienen una curva de par de torsión-velocidad como la que se muestra en la figura 2-33a). Observe la pendiente plana alrededor del punto de torque valorado (al 100%) comparada con la figura 2-32. El motor devanado en serie es menos sensible a la velocidad para la variación de carga en su rango de operación, pero se atasca muy rápidamente cuando se excede la capacidad máxima de sobrecarga a aproximadamente 250% del torque valorado. Los motores devanados en paralelo se usan típicamente en ventiladores y sopladores.

MOTORES CD DEVANADOS EN SERIE Tienen una característica de par de torsión-velocidad como la que se muestra en la figura 2-33*b*). Este tipo es más sensible a la velocidad que las configuraciones en paralelo o PM. Sin embargo, su par de inicio puede ser tan alto como un 800% del par medido a carga completa. No tiene ninguna velocidad teórica máxima sin carga que desboque si la carga se quita. De hecho, las pérdidas por fricción y fricción por el viento limitarán su velocidad máxima, que puede ser tan grande como 20 000 a 30 000 revoluciones por minuto (rpm). Los detectores de exceso de velocidad a veces se ajustan para limitar sus velocidades sin carga. Los motores con devanado en serie se usan en máquinas de coser y en taladros eléctricos portátiles, cuya variabilidad de velocidad representa una ventaja controlable con la variación del voltaje hasta cierto punto. Tales motores se usan también en aplicaciones para trabajos duros, como en la dirección de los vehículos de tracción, en la cual es una ventaja su alto par de inicio. También su sensibilidad a la velocidad (de gran pendiente) resulta ventajoso en aplicaciones de carga alta como la de un "comienzo suave" cuando se mueven las cargas de gran inercia. La tendencia del motor a ir más despacio cuando la carga se aplica amortigua el golpe que se sentiría si se aplicara repentinamente un gran par a los elementos mecánicos.

MOTORES CD CON DEVANADO COMPUESTO SU campo y sus espiras de armadura están conectadas a una combinación en serie y en paralelo. Como resultado su característico par de torsión-velocidad tiene aspectos de motores devanados en derivación y en serie, como se muestra en la figura 2-33c). Su sensibilidad a la velocidad es mayor que un devanado en derivación pero menor que un motor devanado en serie y no se desbocará

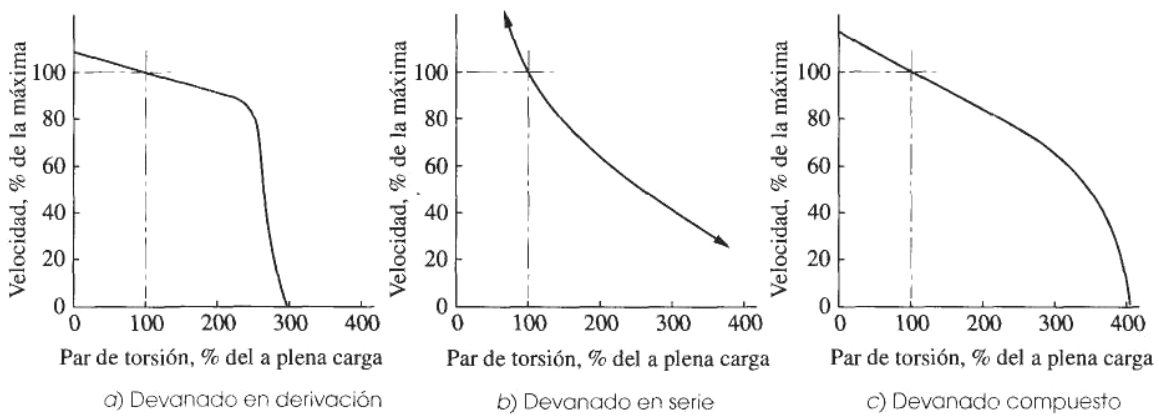


FIGURA 2-33

Curvas de par de torsión-velocidad para los tres tipos de motores de CD

sin carga. Esta característica más su gran par de torsión de inicio y la capacidad de un arranque suave lo hacen una elección adecuada para grúas y malacates que experimentan cargas con gran inercia y pueden perder repentinamente esa carga debido a una falla en el cable; con esto se genera un potencial problema de desbocamiento, en el caso de que el motor no tenga una autolimitación de velocidad cuando gira sin carga.

MOTORES CD CON VELOCIDAD CONTROLADA Si es necesario el control preciso de la velocidad, como a menudo resulta en el caso de maquinaria de producción, otra solución consiste en usar un motor CD con velocidad controlada, el cual opera desde un controlador que aumenta y disminuye la corriente hacia el motor cuando la carga varía para mantener la velocidad constante. Estos motores CD de velocidad controlada (típicamente PM) operan con una fuente de CA, ya que el controlador también convierte la CA a CD. Sin embargo, el costo de esta solución resulta alto. Otra solución posible consiste en proporcionar un volante en la flecha de entrada, que almacenará energía cinética y ayudará a suavizar las variaciones de velocidad que se introducen por las variaciones de carga. Los volantes se analizarán en el capítulo 11.

MOTORES DE CA Éstos representan la solución menos costosa para el suministro de movimiento rotatorio continuo, y tienen una variedad de curvas *par de torsión-velocidad* para manejar las diversas aplicaciones de carga. Están limitados a pocas velocidades que son función de la frecuencia de línea de CA (60 Hz en Estados Unidos, 50 Hz en otros lugares). La velocidad del motor síncrono n_s es una función de la frecuencia de línea f y del número de polos magnéticos p presentes en el rotor.

$$n_s = \frac{120f}{p} \tag{2.17}$$

El motor síncrono "se acopla" a la frecuencia en línea de CA y opera exactamente a velocidad síncrona. Estos motores se usan en relojes y cronómetros. Los motores no síncronos de CA presentan un pequeño deslizamiento que los hace retrasarse respecto a la frecuencia de línea de 3 a 10%.

En la tabla 2-6 se muestran las velocidades síncronas y no síncronas para diferentes configuraciones de motores CA con polos. El más común de los motores de CA tiene 4 polos, con lo que se obtienen *velocidades sin carga* no síncronas de alrededor de 1725 rpm (revoluciones por minuto), las cuales representan alguna diferencia (llamada deslizamiento) respecto de las velocidades de sincronismo de los motores síncronos de CA, de 1800 rpm a 60 Hz.

La figura 2-34 muestra las curvas típicas de par de torsión-velocidad para motores CA de una sola fase (1ϕ) y de 3 fases (3ϕ) de diferentes diseños. El de polo sombreado (en cortocircuito) y el de capacitor de deslizamiento permanente tienen un par de inicio menor que a plena carga. Para aumentar el par de inicio, los diseños de fase de deslizamiento y el capacitor de inicio emplean un circuito de inicio separado que se corta por un interruptor centrífugo, en tanto el motor se aproxima a su velocidad de operación. Las curvas punteadas indican que el motor ha cambiado de su circuito de inicio a su circuito de operación. Los diseños de los motores trifásicos B, C y D, de acuerdo con la clasificación NEMA,* mostrados en la figura 2-34, difieren principalmente en su par de inicio y en su sensibilidad de velocidad (pendiente) cerca del punto de plena carga.

MOTORREDUCTORES Si se requieren diferentes velocidades de salida en un motor de las enlistadas en la tabla 2-6, entonces se puede acoplar un reductor de velocidad (caja de engranajes) a la flecha de salida del motor, o también se puede comprar un motorreductor

TABLA 2-6
Velocidad de motores de CA

Polos	Síncrono	Asíncrono
2	3 600	3 450
4	1 800	1 725
6	1 200	1 140
8	900	850
10	720	690
12	600	575

* Asociación Nacional de Fabricantes Eléctricos (NEMA, por sus siglas en inglés).

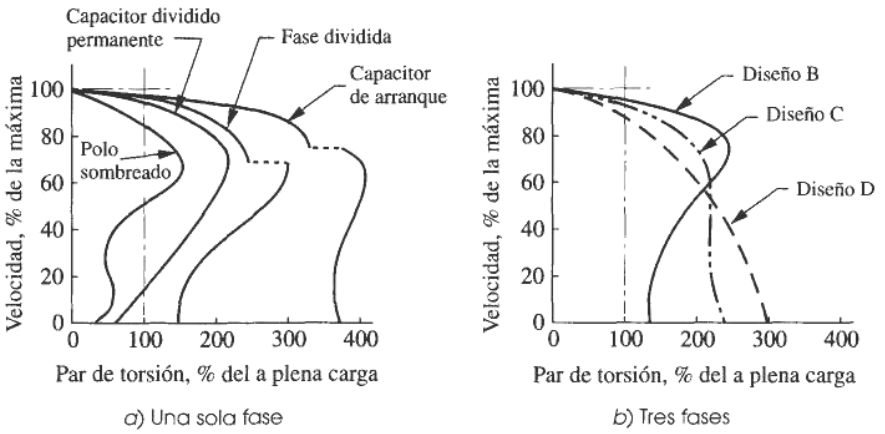


FIGURA 2-34

Curvas de par de torsión-velocidad para motores de CA de una y tres fases

que tenga una caja de engranajes integral. Se dispone comercialmente de motorreductores en una amplia variedad de velocidades de salida y potencias de operación. La cinemática del diseño de una caja de engranajes se estudia en el capítulo 9.

SERVOMOTORES Son máquinas motrices de respuesta rápida y control de ciclo cerrado, capaces de proporcionar una función programada de aceleración o velocidad, así como de mantener una posición fija ante una carga. **Ciclo cerrado** significa que *los sensores en el dispositivo de salida accionado retroaplican información acerca de posiciones, velocidad y aceleración.* Los circuitos en el controlador del motor responden a la información retroaplicada al reducir o aumentar (o invertir) el flujo de corriente al motor. De esta manera se logra el posicionamiento preciso del dispositivo de salida, así como el control de la velocidad y la forma de su respuesta a los cambios en las órdenes (o comandos) en la carga o en la entrada. Los servomotores son dispositivos muy costosos y se utilizan comúnmente en aplicaciones tales como el accionamiento de superficies de control de vuelo en aviones y misiles teleguiados y en el control de robots. Tienen baja potencia y reducida capacidad de par de torsión, en comparación con los motores de CA o CD.

MOTORES DE PASOS Están diseñados para posicionar un dispositivo de salida. A diferencia de los servomotores estas máquinas son de **ciclo abierto,** lo que significa *que no reciben retroalimentación, como si el dispositivo de salida hubiera respondido como se requería.* Por tanto, quedan desfasados (o fuera de fase) con el programa deseado. Sin embargo, permanecerán satisfactoriamente energizados durante un lapso indefinido, y mantendrán la salida en una posición. Su construcción interna consiste en un número de tiras magnéticas dispuestas alrededor de la periferia del rotor y del estator. Cuando se energiza, el rotor avanzará un paso, al imán próximo, por cada pulso recibido. Por tanto, estos motores constituyen dispositivos de **movimiento intermitente,** y no proporcionan movimiento de rotación continua como otros motores. El número de tiras magnéticas determina su resolución (generalmente unos cuantos grados por paso). Son pequeños si se comparan con los motores de CA/CD, y tienen baja capacidad de par. Son moderadamente costosos y requieren controladores especiales.

Motores neumáticos e hidráulicos

Estas máquinas tienen aplicación más limitada que los motores eléctricos porque requieren la disponibilidad de aire comprimido o líquido a presión. Ambos dispositivos son menos eficientes en energía que la conversión directa eléctrica a mecánica de los motores eléctricos, debido a las pérdidas asociadas con la conversión de energía, primero de química o eléctrica, a la de presión de un fluido y luego a la forma mecánica. Toda conversión de energía implica algunas pérdidas. Los motores neumáticos hallan su más amplia aplicación en fábricas y talleres, donde el aire comprimido a alta presión está disponible para otras aplicaciones. Un ejemplo común es la llave de tuercas de impactos de aire que se utiliza en talleres de reparación de automóviles. Aunque los motores y cilindros de aire individuales resultan relativamente baratos, estos sistemas neumáticos son bastante costosos cuando se incluye el costo de todo el equipo auxiliar. Los motores hidráulicos se encuentran con mayor frecuencia en máquinas o sistemas como los equipos de construcción (grúas), aviones y barcos, donde un fluido (líquido) a presión elevada se proporciona para muchos fines. Los sistemas hidráulicos son también muy costosos cuando se incluye el costo de todo el equipo auxiliar.

Cilindros neumáticos e hidráulicos

Éstos son actuadores lineales (de pistón en cilindro) que proporcionan una salida de carrera rectilíneo-limitada, a partir de una entrada de fluido a presión (aire comprimido o aceite). Son el equipo que se elige si se requiere una entrada de movimiento lineal. Sin embargo, tienen las mismas características de costo elevado, baja eficiencia y factores de complicación que se enunciaron para sus equivalentes anteriores de motor.

Otro problema es el del control. La mayor parte de los motores dejados a sus propios dispositivos tenderán a operar a una velocidad constante. Un actuador lineal cuando se somete a una fuente de fluido a presión constante, lo que resulta común en la mayoría de los compresores, responderá con aceleración casi constante, lo cual significa que su velocidad aumentará linealmente en el tiempo. Esto puede resultar en cargas de impacto severo sobre el mecanismo impulsado, cuando el actuador llega al final de su carrera a máxima velocidad. Es posible utilizar el control servovalvular del flujo para desacelerar el actuador al final de su carrera, pero resulta muy costoso.

La aplicación más común de los cilindros de potencia fluídica se presenta en el equipo agrícola y el de construcción, como tractores y rasadores, en los cuales los cilindros hidráulicos (no servos) de ciclo abierto activan la pala u hoja mediante eslabonamientos. El cilindro y su pistón se convierten en dos eslabones (corredera y guía) de un mecanismo de manivela-corredera. Véase la figura *1-1b).*

Solenoides

Éstos son actuadores lineales electromecánicos (de CA o CD) que comparten algunas de las limitaciones de los cilindros de aire y poseen otras más de sus propiedades. Son *ineficientes en energía,* están limitados a carreras muy cortas (aproximadamente de 2 a 3 cm) y desarrollan una fuerza que varía de manera exponencial sobre la carrera; manejan cargas de impacto elevadas. Sin embargo, son poco costosos, confiables y tienen brevísimos tiempos de respuesta. No pueden manejar mucha potencia y se utilizan sobre todo

como dispositivos de control o interrupción más que como equipos que efectúan grandes cantidades de trabajo en un sistema.

Una aplicación común de los solenoides es en los obturadores de cámaras fotográficas, donde un pequeño solenoide sirve para tirar del seguro y permitir la acción del obturador cuando se oprime el botón para tomar una foto. Su casi instantánea respuesta es una ventaja aquí y se realiza muy poco trabajo. Otra aplicación es en una puerta eléctrica o en sistemas de cierre de tapa de cofre en automóviles, donde el clic del impacto puede oírse claramente cuando se gira la llave (o se presiona el botón) para asegurar o soltar el mecanismo.

2.17 REFERENCIAS

1 **Reuleaux, F.** (1963). *The Kinematics of Machinery.* Dover Publications, Nueva York, pp. 29-55.

2 **Gruebler, M.** (1917). *Getriebelehre.* Springer Verlag: Berlín.

3 **Fang, W. E. y F. Freudenstein** (1990). "The Stratified Representation of Mechanisms". *Journal of Mechanical Design.* **112(4),** p. 514.

4 **Kim, J. T. y B. M. Kwak** (1992). "An Algorithm of Topological Ordering for Unique Representation of Graphs". *Journal of Mechanical Design.* **114(1), p.** 103.

5 **Tang,** C. **S. y T. Liu** (1993). "The Degree Code—A New Mechanism Identifier". *Journal of Mechanical Design.* **115(3),** p. 627.

6 **Dhararipragada, V. R. y colaboradores** (1994). "A More Direct Method for Structural Synthesis of Simple-Jointed Planar Kinematic Chains". *Proc. of 23rd Biennial Mechanisms Conference:* Minneapolis, **MI,** p. 507.

7 **Yadav, J. N. y colaboradores** (1995). "Detection of Isomorphism Among Kinematic Chains Using the Distance Concept". *Journal of Mechanical Design.* **117(4).**

8 **Grashof, F.** (1883). *Theoretische Maschinenlehre.* vol. 2. Voss: Hamburgo.

9 **Paul, B.** (1979). "A Reassessment of Grashof's Criterion". *Journal of Mechanical Design.* **101(3),** pp. 515-518.

10 **Barker, C.** (1985). "A Complete Classification of Planar Fourbar Linkages". *Mecha nism and Machine Theory.* **20(6),** pp. 535-554.

11 **Ting, K. L.** (1993). "Fully Rotatable Geared Fivebar Linkages". *Proc. of 3rd Applied Mechanisms and Robotics Conference:* Cincinnati, pp. 67-71.

12 **Ting, K. L. y Y. W. Liu** (1991). "Rotatability Laws for N-Bar Kinematic Chains and Their Proof'. *Journal of Mechanical Design.* **113(1),** pp. 32-39.

13 **Shyu, J. H. y K. L. Ting** (1994). "Invariant Link Rotatability of N-Bar Kinematic Chains". *Journal of Mechanical Design.* **116(1), p.** 343.

14 **Miller, W. S.,** ed. *Machine Design Electrical and Electronics Reference Issue.* Penton Publishing: Cleveland, Ohio.

15 **Norton, R. L.** (1998). *Machine Design: An Integrated Approach.* Prentice-Hall: Upper Saddle River, NJ.

2.18 PROBLEMAS

*2-l Encuentre tres (u otro número, según se indique) de los siguientes dispositivos comunes. Trace cuidadosamente diagramas cinemáticos y halle sus grados de libertad totales.

a. Un mecanismo articulado para el movimiento de la capota de un automóvil.
b. Un mecanismo de levantamiento en la puerta trasera de un automóvil.
c. Un abrelatas eléctrico.
d. Un burro de planchar plegadizo.
e. Una mesa para jugar cartas plegadiza.
f. Una silla de playa plegadiza.
g. Un columpio para bebé.
h. Una andadera para bebé plegadiza.
i. Una máquina de dibujar.
j. Un tirabuzón de fantasía.
k. Un mecanismo de limpiaparabrisas.
1. Un mecanismo de volcar de camión de volteo.
m. Un mecanismo descargador de un camión de basura.
n. Un mecanismo de compuerta trasera de un auto vagoneta.
o. Un gato para automóvil.
p. Una antena retráctil de radio para automóvil,
q. Un tornamesa de tocadiscos y el brazo del fonocaptor.

2-2 ¿Cuántos *GDL* combinados tiene en su muñeca y mano combinadas?

*2-3 ¿Cuántos *GDL* tienen las siguientes articulaciones humanas?

a. Su rodilla.
b. Su tobillo.
c. Su hombro.
d. Su cadera.
e. Su nudillo del dedo.

*2-4 ¿Cuántos *GDL* tienen los equipos o aparatos siguientes en su entorno normal?

a. Un submarino sumergido.
b. Un satélite artificial en la órbita terrestre.
c. Una embarcación de superficie.
d. Una motocicleta.
e. Una cabeza de impresión de una impresora de computadora, con matriz de puntos de 9 puntas.
f. La pluma o trazador de una graneadora *XY.*

*2-5 ¿Son las juntas del problema 2-3 de cierre de fuerza o de cierre de forma?

*2-6 Describa el movimiento de los siguientes dispositivos como rotación pura, traslación pura o movimiento planar complejo.

a. Una rueda de molino de viento.
b. Una bicicleta (en el plano vertical, no al dar vuelta).
c. Una ventana común de "doble suspensión".
d. Las teclas en el teclado de una computadora.
e. La manecilla de un reloj.
f. Una ficha para hockey sobre hielo.
g. El trazador (o pluma) en un graficador (o graneadora) *XY.*
h. La cabeza de impresión de una impresora de una computadora.
1. Una ventana "de cubierta".

* Respuestas en el apéndice F.

*2-7 Calcule los *GDL* de los eslabonamientos mostrados en la figura P2-1.

*2-8 Identifique los dispositivos de la figura P2-1, como mecanismos estructuras o estructuras precargadas.

*2-9 Use transformación de eslabonamientos del eslabonamiento de la figura P2-l*a*) para convertirlo en un mecanismo de un *GDL*.

*2-10 Use transformación de eslabonamientos del eslabonamiento de la figura P2-l*d*) para convertirlo en un mecanismo de dos *GDL*.

2-11 Utilice síntesis numérica para hallar todas las combinaciones de eslabón posibles de dos *GDL*, hasta nueve eslabones, al orden hexagonal, sólo mediante juntas de revoluta.

2-12 Encuentre todos los isómeros válidos de una combinación de eslabonamiento de un *GDL* de ocho barras, de la tabla 2-2, teniendo:

a. Cuatro eslabones binarios y cuatro ternarios.
b. Cinco eslabones binarios, dos ternarios y un cuaternario.
c. Seis eslabones binarios y dos cuaternarios.
d. Seis eslabones binarios, un ternario y un pentagonal.

2-13 Utilice transformación de eslabonamiento para crear un mecanismo con un *GDL* con dos juntas completas deslizantes a partir del eslabonamiento de seis barras de Stephenson de la figura 2-14a).

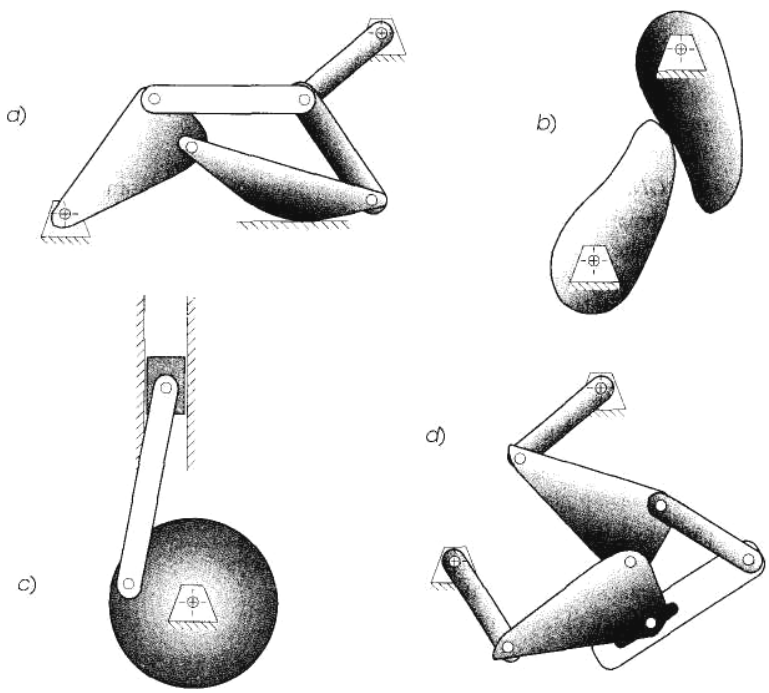


FIGURA P2-1

Eslabonamientos para los problemas 2-7 al 2-10

* Respuestas en el apéndice F.

2-14 Use transformación de eslabonamientos para crear un mecanismo con un *GDL* con una junta completa deslizante y una semijunta a partir del eslabonamiento de Stephenson de seis barras de la figura *2-Hb).*

*2-15 Calcule la condición de Grashof de los mecanismos de cuatro barras definidos a continuación. Construya modelos en cartulina de los eslabonamientos y describa los movimientos de cada inversión. Las longitudes de eslabón se dan en pulgadas (duplíquense los números dados para considerar centímetros aproximadamente).

a.	2	4.5	7	9
b.	2	3.5	7	9
c.	2	4.0	6	8

2-16 ¿Qué tipos de motor eléctrico podría especificar?

a. Para conducir una carga con una gran inercia.
b. Para minimizar la variación de la velocidad con una variación de la carga.
c. Para mantener velocidad exacta y constante sin considerar variaciones de la carga.

2-17 Describa la diferencia entre una semijunta de leva-seguidor y una junta de pasador.

2-18 Examine un mecanismo articulado para accionamiento de capota de automóvil, del tipo descrito en la sección 2.14. Trácelo cuidadosamente. Calcule sus *GDL* y la condición de Grashof. Elabore un modelo en cartulina. Analícelo con un diagrama de cuerpo libre. Describa cómo se mantiene estable.

2-19 Obtenga una lámpara de escritorio de brazo ajustable del tipo que se muestra en la figura P2-2. Mídala y haga un croquis de ella a escala. Calcule sus *GDL* y la condición de Grashof. Elabore un modelo en cartulina. Analícelo con un diagrama de cuerpo libre. Describa cómo se mantiene estable. ¿Hay algunas posiciones en las que pierda estabilidad? ¿Por qué?

2-20 Haga dibujos cinemáticos, defina los tipos de todos los eslabones y juntas y determine los *GDL* de los mecanismos mostrados en la figura P2-3.



FIGURA P2-2
Problema 2-19

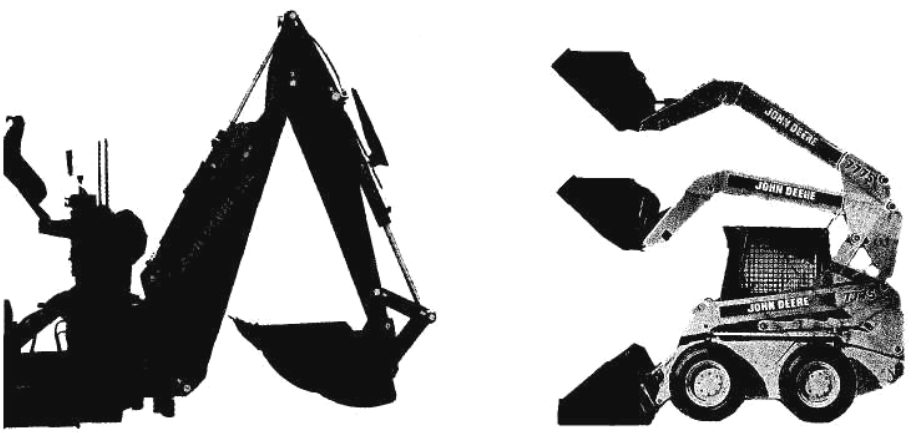


FIGURA P2-3
Problema 2-20 Excavadora de cucharón trasero y cargadora frontal
Cortesía de la compañía John Deere

* Respuestas en el apéndice F.

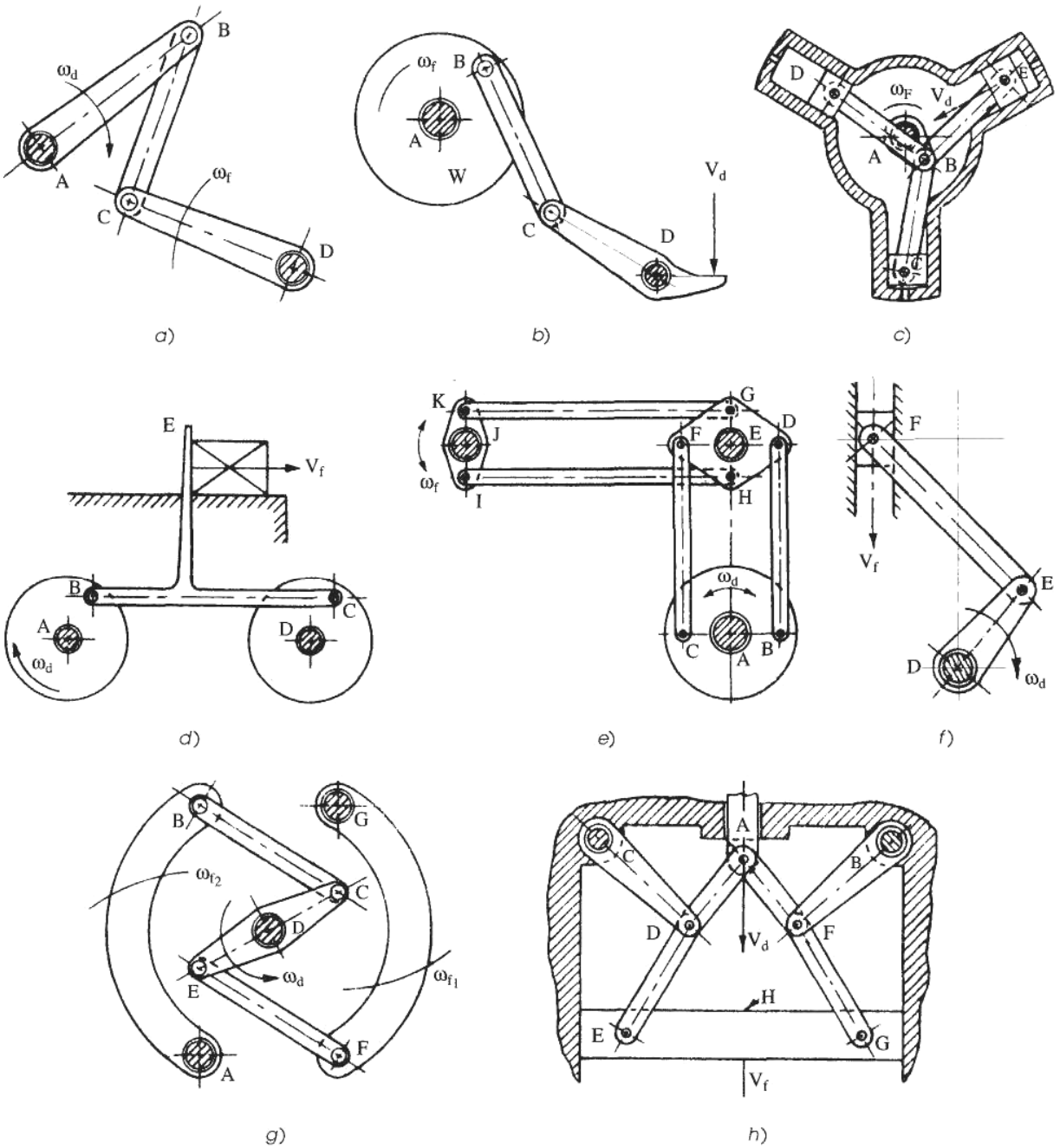


FIGURA P2-4

Problemas 2-21 al 2-23 *Adaptado de RH. Hill y W.RRule.* (1960) *Mechanisms: Analysis and Design, con la autorización correspondiente*

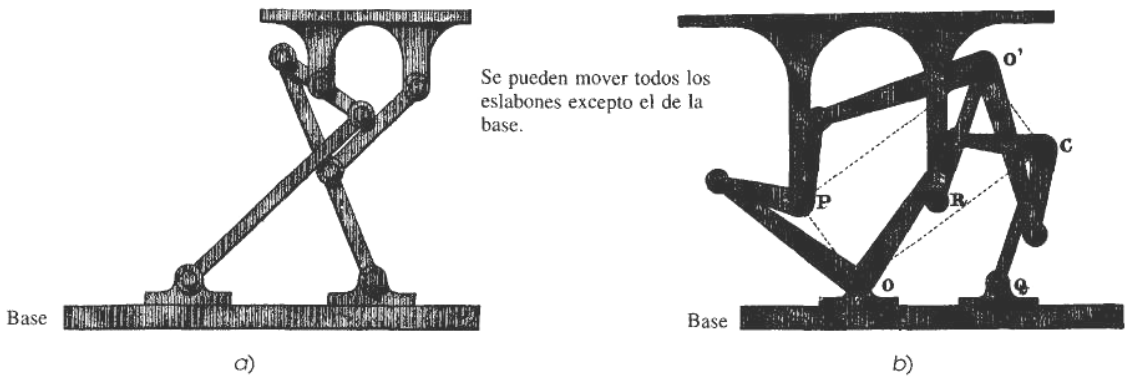


FIGURA P2-5

Problema 2-24 Mecanismos rectilíneos de Chebyschev o) y Syivester-Kempe *ti). Adaptado de Kempe, How to Draw a Straight Une, Macmillan: Londres, 1877.*

*2-21 Encuentre los *GDL* de los mecanismos de la figura P2-4.

2-22 Encuentre la condición de Grashof y las clasificaciones de Barker de los mecanismos de las figuras P2-4a), *b)* y *d).* Escale los diagramas para dimensiones.

2-23 Encuentre la rotabilidad de cada ciclo de los mecanismos mostrados en la figura P2-4e), /) y *g).* Escale los diagramas para dimensiones.

*2-24 Encuentre los *GDL* de los mecanismos de la figura P2-5. Escale los diagramas para dimensiones.

2-25 Encuentre los *GDL* para las tenazas de la figura P2-6:

a. Cuando se utilizan para asir el bloque de hielo.
b. Cuando sujetan al bloque de hielo pero antes de levantarlo (bloque de hielo en el piso)
c. Cuando la persona lleva el bloque de hielo con las tenazas.

*2-26 Encuentre los *GDL* para el mecanismo de mariposa del automóvil que se presenta en la figura P2-7.

2-27 Trace un diagrama cinemático del gato de tijeras mostrado en la figura P2-8 y determine sus *GDL*. Describa cómo funciona.

2-28 Encuentre los *GDL* del sacacorchos de la figura P2-9.

2-29 En la figura P2-10 se muestra el mecanismo impulsor planetario de Watt que se utiliza en su máquina de vapor. El pistón de la máquina impulsa en oscilación la viga 2. El engranaje planetario está fijo rígidamente al eslabón 3 y su centro está guiado en el carril fijo 1. La rotación de salida se toma del engranaje solar 4. Trace un diagrama cinemático de este mecanismo y determine sus *GDL*. ¿Puede clasificarse de acuerdo con el esquema de Barker? Si es así, ¿a qué clase y subclase de Barker pertenece?

2-30 En la figura P2-11 se muestra un ensamblaje de palanca para el freno de mano de una bicicleta. Trace un diagrama cinemático de este dispositivo y dibuje su eslabonamiento equivalente. Determine sus *GDL*. Sugerencia: considere el cable flexible como un eslabón.



FIGURA P2-6

Problema 2-25

* Respuestas en el apéndice F.

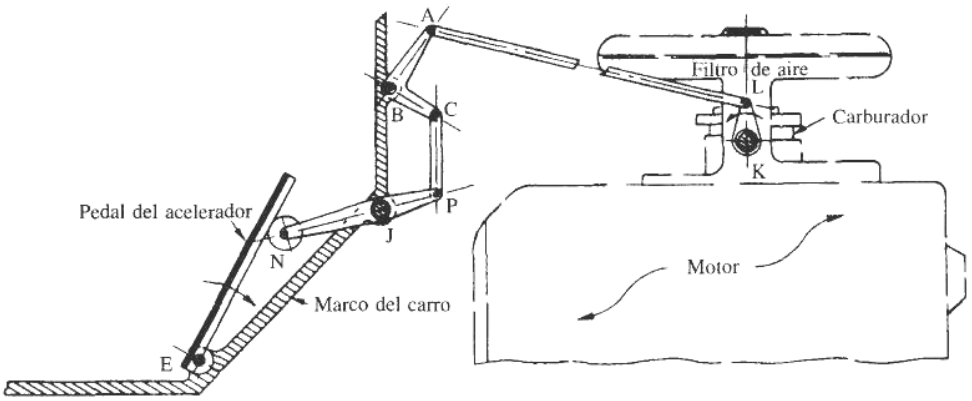


FIGURA P2-7
Problema 2-26 *Adaptado de P. H. Hill y W. P. Rule. (1960) Mechanisms: Analysis and Design, con la autorización correspondiente*

2-31 En la figura P2-12 se muestra el ensamble de freno de una bicicleta. Trace un diagrama cinemático de este dispositivo y dibuje su eslabonamiento equivalente. Determine sus *GDL* con dos condiciones:

a. Las gomas de los frenos no hacen contacto con el rin de la rueda.
b. Las gomas de los frenos hacen contacto con el rin de la rueda.

Sugerencia: Considere que se remplazan los cables flexibles por fuerzas en este caso.

2-32 Encuentre el *GDL*, la condición de Grashof y la clasificación de Barker del mecanismo mostrado en la figura P2-13.

2-33 En la figura P2-14 se muestra un mecanismo de "tomar y colocar" en combinación con una "viga viajera". Trace su diagrama cinemático, determine sus *GDL* y su tipo

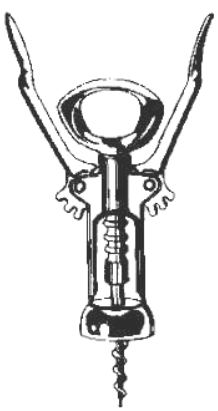


FIGURA P2-9
Problema 2-28

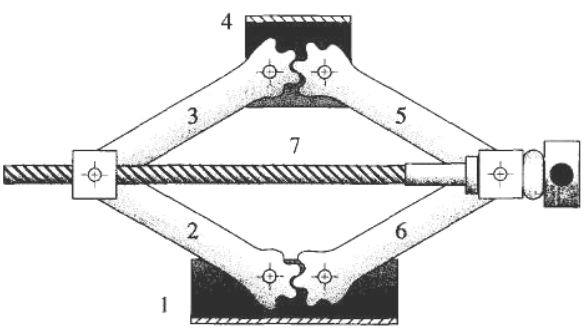


FIGURA P2-8
Problema 2-27

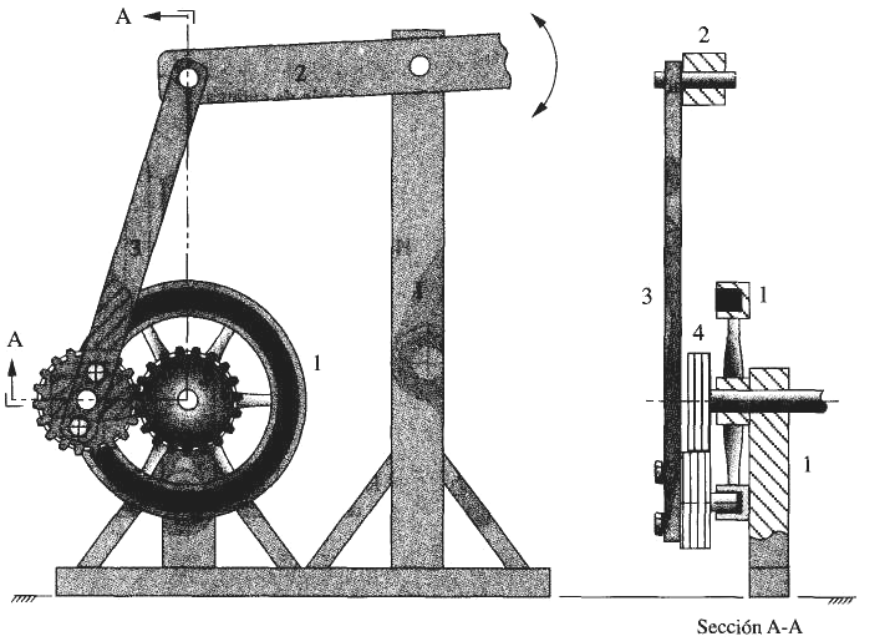


FIGURA P2-10

Problema 2-29 Mecanismo impulsor planetario de James Watt

(es decir, si es de cuatro barras, de seis barras de Watt, de seis barras de Stephenson, de ocho barras, ¿o de qué?). Realice un modelo en cartulina de todo el sistema, excepto de la parte del transportador y examine sus movimientos. Describa cómo funciona. (Puede auxiliarse haciendo una ampliación de la página. Después coloque las copias en la cartulina y quite los eslabones.)

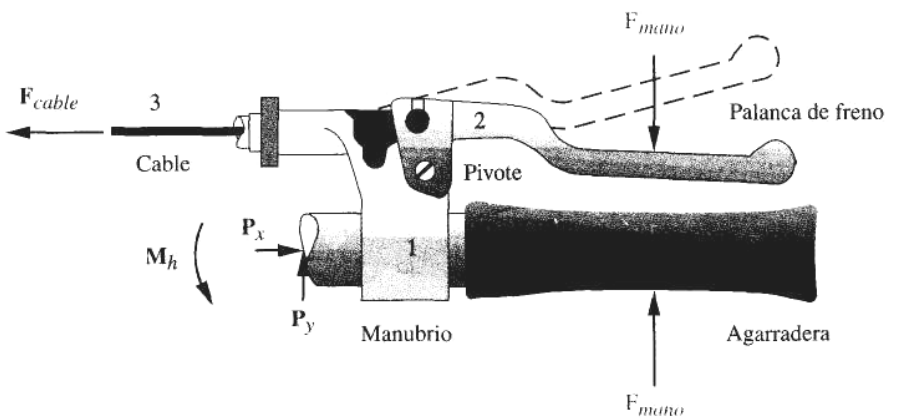


FIGURA P2-11

Problema 2-30 Ensamblaje de una palanca de freno de una bicicleta

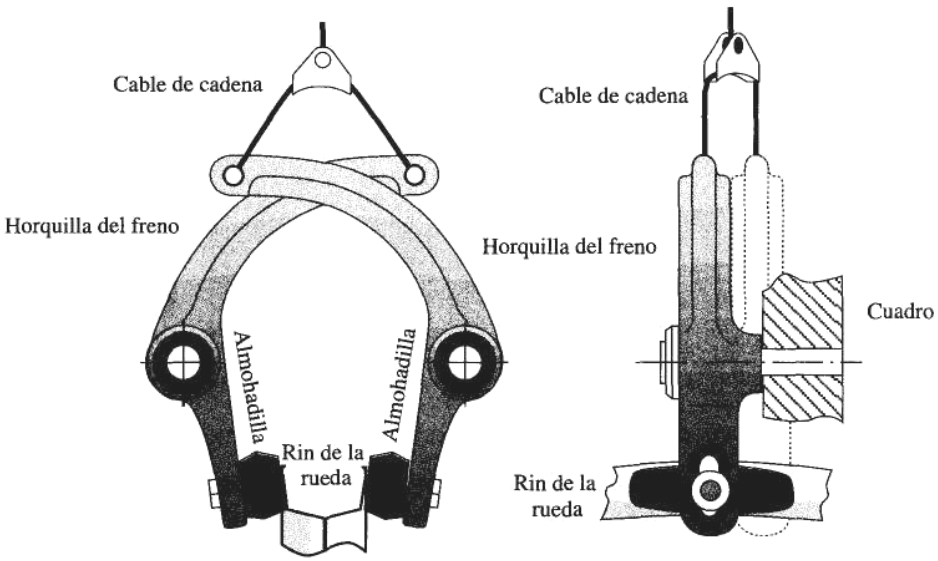


FIGURA P2-12

Problema 2-31 Ensamblaje de la horquilla de los frenos de una bicicleta

2-34 En la figura P2-15 se muestra una sierra de potencia que se utiliza para cortar metal. Trace su diagrama cinemático, determine sus *GDL* y su tipo (es decir, es de cuatro barras, de seis barras de Watt, de seis barras de Stephenson, de ocho barras, ¿o de qué?). Use la transformación del eslabonamiento equivalente puro de junta revoluta.

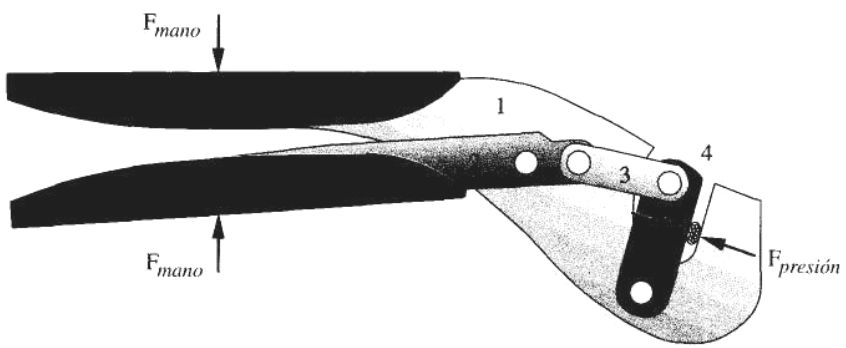


FIGURA P2-13

Problema 2-32 Herramienta de presión

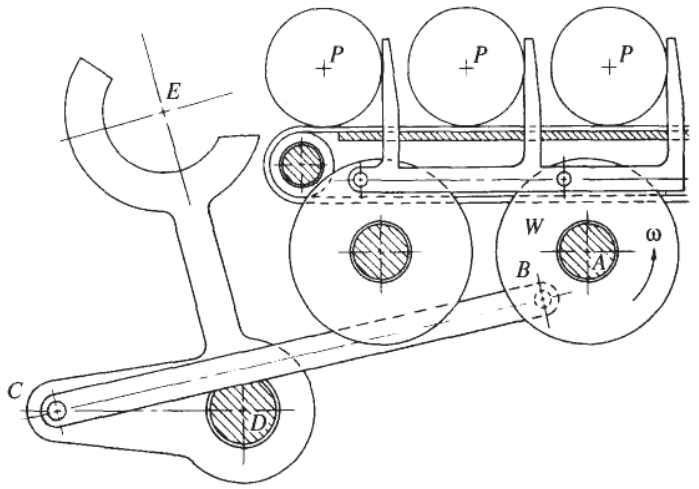


FIGURA P2-14

Problema 2-33 Mecanismo empujador y de "tome y coloque" *Adaptado de RH. Hill yW.R Rule. (1960). Mechanisms: Analysis and Design; reproducido con la autorización correspondiente*

2-35 En la figura P2-16 se muestra una prensa manual que se utiliza para compactar materiales granulados. Trace su diagrama cinemático, determine sus *GDL* y su tipo (es decir, es de cuatro barras, de seis barras de Watt, de seis barras de Stephenson, de ocho barras, ¿o de qué?). Use la transformación del eslabonamiento inverso para determinar su eslabonamiento equivalente puro de junta revoluta.

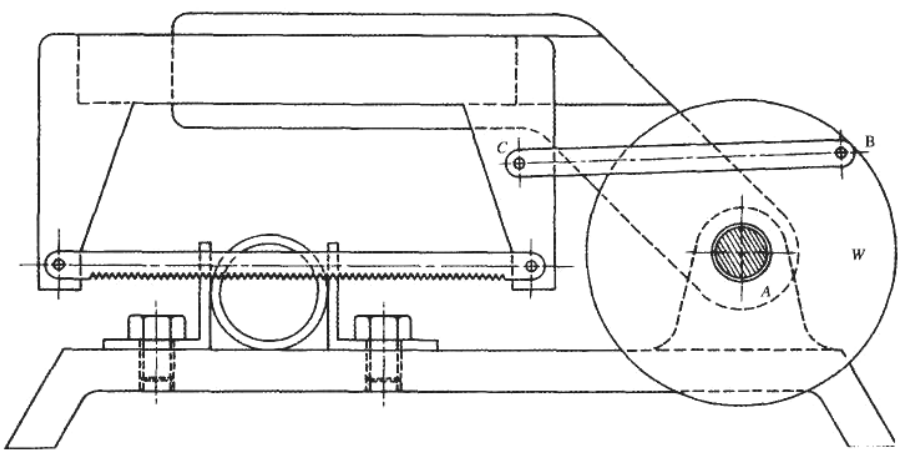


FIGURA P2-15

Problema 2-34 Cortadora de potencia *Adaptado de RH. Hlll y W. RRule. (1960). Mechanisms: Analysls and Design. reproducido con la autorización correspondiente*

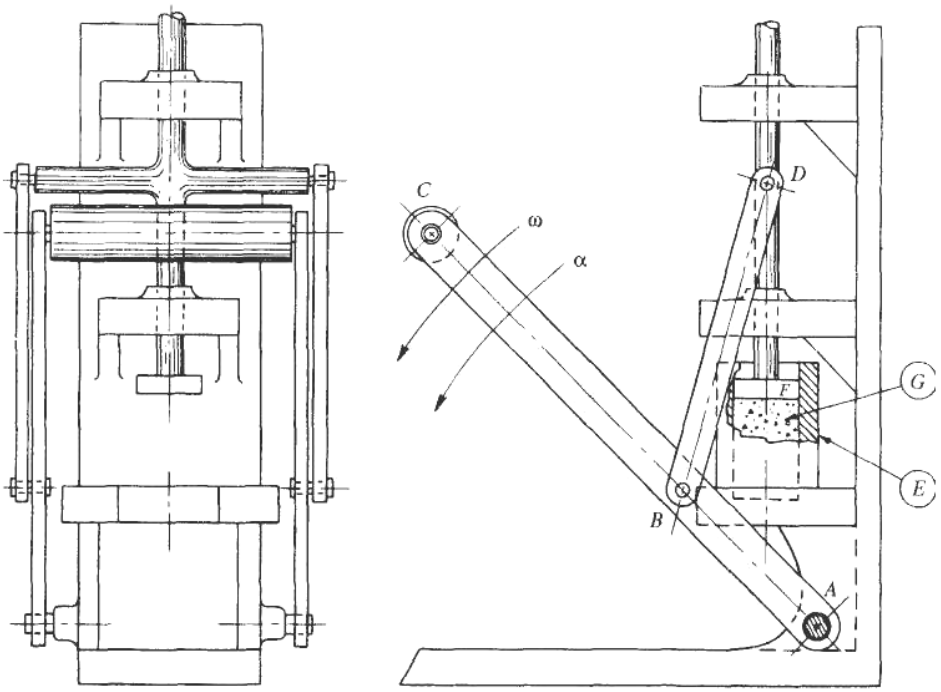


FIGURA P2-16

Problema 2-35 Prensa trituradora *Adaptado de PH. mil y W.RRule. (1960). Mechanisms: Analysis and Design, reproducido con la autorización correspondiente*

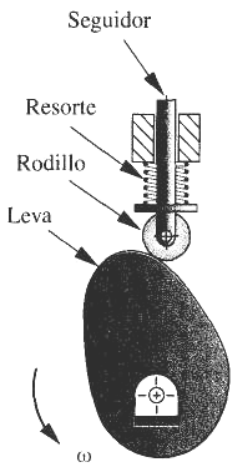


FIGURA P2-17

Problema 2-36

2-36 Trace el eslabonamiento equivalente para el sistema de leva y seguidor mostrado en la figura P2-17 en la posición mostrada. Muestre que tiene los mismos GDL que el mecanismo original.

Capítulo 3



SÍNTESIS GRÁFICA DE ESLABONAMIENTOS

El genio es 1% de inspiración y 99% de transpiración.
THOMAS A. EDISON

3.0 INTRODUCCIÓN

En la práctica la mayor parte del diseño en ingeniería comprende una combinación de síntesis y análisis. La mayoría de los cursos para ingenieros consideran sobre todo técnicas de análisis para diversas situaciones. Sin embargo, no puede analizarse algo que aún no se ha sintetizado. Muchos problemas de diseño de máquinas requieren la creación de un dispositivo con características de movimiento peculiares. Quizá se necesite mover o desplazar una herramienta de la posición *A* a la *B* en un lapso determinado. Tal vez se necesite describir una trayectoria particular en el espacio para insertar una pieza en un ensamblaje. Las posibilidades son infinitas, pero un denominador común suele ser la necesidad de un eslabonamiento para generar los movimientos deseados. Por eso ahora se explorarán algunas técnicas simples de síntesis que le permitirán crear soluciones de eslabonamiento potenciales para aplicaciones cinemáticas típicas.

3.1 SÍNTESIS

SÍNTESIS CUALITATIVA significa *la creación de soluciones potenciales en ausencia de un algoritmo bien definido que configure o pronostique la solución.* Puesto que la mayoría de los problemas reales de diseño tendrán muchas más variables desconocidas que ecuaciones disponibles para describir el comportamiento del sistema, no se puede sim-

plemente resolver las ecuaciones para llegar a una solución. No obstante, se debe trabajar en este confuso panorama con el fin de crear una solución potencial y juzgar también su **calidad.** Luego es posible analizar la solución propuesta para determinar su viabilidad e iterar entre síntesis y análisis, como se expresó en el **proceso de diseño,** hasta quedar satisfecho con el resultado. En este proceso pueden ayudar varias herramientas y técnicas. La herramienta tradicional es la mesa de dibujo, en la cual se trazan, a escala, múltiples vistas ortogonales del diseño y se investigan sus movimientos dibujando arcos, mostrando posiciones múltiples y utilizando plantillas transparentes removibles. Los sistemas de *dibujo asistido por computadora* (CAD por sus siglas en inglés) pueden acelerar el proceso hasta cierto punto, pero probablemente encontrará que el modo más rápido de obtener un sentido de la calidad de un diseño de eslabonamiento es modelarlo a escala, en cartulina o en material *Mylar*® para dibujo y captar directamente los movimientos.

Otras herramientas que están disponibles en forma de programas de computación son: FOURBAR, FIVEBAR, SIXBAR, SLIDER, DINACAM, ENGINE y MATRIX (incluidos en este libro); algunos efectúan síntesis, pero éstos son sobre todo herramientas de análisis. Pueden analizar una solución de mecanismo de prueba tan rápidamente que su salida gráfica dinámica aporta una retroalimentación visual casi instantánea acerca de la calidad del diseño. Los programas comercialmente disponibles como el *Working Model** también proporcionan análisis rápidos de un diseño mecánico propuesto. El proceso se convierte entonces en uno de **diseño cualitativo por análisis sucesivos,** que es realmente *una iteración entre síntesis y análisis.* Se puede examinar un gran número de soluciones de prueba en breve tiempo mediante estas herramientas de *ingeniería asistida por computadora* (CAE por sus siglas en inglés). En los capítulos subsecuentes desarrollaremos las soluciones matemáticas aplicadas en estos programas con el fin de proporcionar el fundamento adecuado para comprender su operación. Si desea ensayar estos programas para reforzar algunos de los conceptos descritos en estos capítulos iniciales, puede hacerlo. El apéndice A es un manual para el uso de esos programas y puede leerse en cualquier momento sin perder la continuidad. Se hará referencia a características del programa que son afines a temas de cada capítulo a medida que se vayan presentando. También se proporcionan, en disco, archivos de datos para entrada a esos programas de computación, destinados a problemas de ejemplo y figuras en esos capítulos. Los nombres de los archivos se indican cerca de la figura o del ejemplo. Se recomienda al estudiante introducir estos archivos de muestra en los programas para observar ejemplos más dinámicos que los de una página impresa. Estos ejemplos pueden correrse aceptando las preopciones proporcionadas para todas las entradas.

SÍNTESIS DE TIPO se refiere *a la definición del tipo apropiado de mecanismo mejor adaptado al problema* y es una forma de síntesis cualitativa.† Ésta es quizá la tarea más difícil para el estudiante, y requiere algo de experiencia y conocimiento de los diversos tipos de mecanismos que se presentan y que también pueden ser factibles desde el punto de vista de funcionamiento y manufactura. Por ejemplo, suponga que la tarea es diseñar un dispositivo para rastrear el movimiento rectilíneo de una parte en un transportador de banda y, además, rociar ésta con un revestimiento químico a medida que pasa. Lo anterior tiene que hacerse a una velocidad alta, constante, con repetibilidad y gran exactitud, y también debe ser confiable. Además, la solución no debe ser costosa. A menos que se haya tenido la oportunidad de ver una amplia variedad de equipo mecánico, podría efectuarse con uno de los siguientes dispositivos:

* La versión para el estudiante del programa *Working Model* se incluye en el CD-ROM de este libro. La versión profesional está disponible en la compañía Knowledge Revolution, San Mateo CA 94402, (800)766-66-15

† Un buen análisis de la síntesis de tipo y una amplia bibliografía sobre el tema se encuentran en Olson, D.G. y otros (1985). "A systematic Procedure for Type Synthesis of Mechanisms with Literature Review". *Mechanism and Machine Theory,* 20(4), pp. 285-295.

- *Un eslabonamiento rectilíneo*
- *Una leva-seguidor*
- *Un cilindro neumático*
- *Un cilindro hidráulico*
- *Un robot*
- *Un solenoide*

Cada una de estas soluciones, en caso de ser posibles, puede que no sean ni óptimas, ni prácticas. Es necesario conocer más detalles acerca del problema para formular ese juicio; tales detalles vendrán de la fase de investigación del proceso de diseño. El eslabonamiento rectilíneo puede resultar demasiado grande y tener aceleraciones indeseables, y el mecanismo de leva-seguidor resultar muy caro, aunque sea preciso y repetible. El cilindro neumático es poco costoso pero produce mucho ruido y no es confiable. El cilindro hidráulico cuesta más, lo mismo que el robot. El solenoide, aunque no es costoso, tiene altas cargas de impacto y elevada velocidad de impactos. Por lo anterior se ve que la elección de la clase de dispositivo puede tener un efecto decisivo en la calidad del diseño. Una elección deficiente en la etapa de síntesis de tipo podría originar problemas irresolubles posteriormente, y el diseño tendría que desecharse después de su terminación, con un costo muy elevado. **El diseño es esencialmente un ejercicio de transacciones.** Cada tipo de solución propuesta en este ejemplo tiene puntos buenos y puntos malos. Rara vez se tiene una solución bien definida y obvia para un problema de ingeniería de diseño real. Será trabajo del lector, como ingeniero de diseño, hallar el equilibrio en estos hechos conflictivos y llegar a una solución que dé la mejor transacción de funcionalidad contra costo, confiabilidad y otros factores de interés. Recuerde que se dice que *un ingeniero puede hacer con un dólar lo que un "inepto" puede hacer con diez.* El costo es siempre una restricción importante en el diseño de ingeniería.

SÍNTESIS CUANTITATIVA **o** ANALÍTICA significa la generación de una o más soluciones de un tipo particular que se consideran adecuadas para el problema, y lo más importante, una solución que tiene definido un algoritmo de síntesis. Como el nombre lo indica, este tipo de solución se puede cuantificar, ya que hay un conjunto de ecuaciones que dan una respuesta numérica. Si tal respuesta es conveniente o adecuada, esto se deja a juicio del diseñador y se requiere análisis e iteración para optimizar el diseño. Con frecuencia el número de ecuaciones disponibles es menor que el de variables potenciales, en cuyo caso se deben suponer algunos valores razonables para suficientes incógnitas a fin de reducir el conjunto restante al número de ecuaciones disponibles. Por lo tanto, en este caso, también interviene un criterio o juicio cualitativo en la síntesis. Excepto para casos muy simples, se requiere de una herramienta como CAE para realizar síntesis cuantitativa. Un ejemplo de tal medio es el programa LINCAGES,* de A. Erdman y co. laboradores, de la University of Minnesota^ que resuelve problemas de síntesis de eslabonamientos de tres y de cuatro posiciones. Los programas de computación proporcionados con este libro también permiten efectuar una **síntesis analítica** de tres posiciones, y el diseño general de eslabonamientos por **análisis sucesivos.** La rapidez de cálculo de estos programas permite analizar en breve tiempo el desempeño de muchos diseños de mecanismos de prueba y favorece la rápida iteración para hallar una mejor solución.

SÍNTESIS DIMENSIONAL de un eslabonamiento *es la determinación de los tamaños (longitudes) de los eslabones necesarios para realizar los movimientos deseados* y puede ser una forma de síntesis cuantitativa si se define un algoritmo para el problema particular, pero también puede ser una forma de síntesis cualitativa si hay más variables que ecuaciones. El último caso es más común para los eslabonamientos. (La síntesis dimen-

* Disponible en la compañía Knowledge Revolution, San Mateo CA 94402, (800)766-66-15.

sional de las levas es cuantitativa.) La síntesis dimensional supone que, mediante la *síntesis de tipo,* ya se ha determinado que un eslabonamiento (o una leva) es la solución más apropiada para el problema. En el presente capítulo se describe en detalle la **síntesis dimensional gráfica** de eslabonamientos. En el capítulo 5 se presentan métodos de **síntesis analítica de eslabonamientos** y en el capítulo 8 se presenta la **síntesis de levas.**

3

3.2 GENERACIÓN DE FUNCIÓN, TRAYECTORIA Y MOVIMIENTO

GENERACIÓN DE FUNCIÓN se define como *la correlación de un movimiento de entrada con un movimiento de salida en un mecanismo.* Un generador de función es, conceptualmente, una "caja negra" que suministra una salida predecible en respuesta a una entrada conocida. Históricamente, antes del advenimiento de las computadoras electrónicas, los generadores de función mecánicos tenían una amplia aplicación en telémetros de artillería y en sistemas de puntería de cañones a bordo de navios y muchas otras tareas. Son, de hecho, **computadoras analógicas mecánicas.** El desarrollo de microcomputadoras digitales poco costosas, mediante sistemas de control acoplados a la disponibilidad de servomotores compactos y motores de pasos, ha reducido la demanda de estos dispositivos de eslabonamiento para generadores de función mecánicos. Muchas de estas aplicaciones pueden efectuarse ahora más económica y eficientemente con dispositivos electromecánicos.* Además, el generador de función electromecánico controlado por computadora es programable, lo que permite una rápida modificación de la función generada según varían las demandas. Por esta razón, aunque en este capítulo se presentan algunos ejemplos simples, y en el capítulo 5 un método de diseño general, no se destacará en esta obra los generadores de funciones de eslabonamiento mecánicos. No obstante, observe que el sistema leva-seguidor, que se describirá ampliamente en el capítulo 8, es en realidad una forma de generador de función mecánico, capaz de lograr los más altos niveles de fuerza y potencia por dólar que los sistemas electromecánicos.

GENERACIÓN DE TRAYECTORIA se define como *el control de un* ***punto*** *en el plano, tal que siga alguna trayectoria prescrita.* Esto se logra por lo menos con cuatro barras, en donde un punto en el acoplador describe la trayectoria deseada. En la sección que sigue se presentan ejemplos específicos de curvas de acoplador. Note que no se realiza ningún intento en la generación de trayectorias por controlar la orientación del eslabón que contiene el punto de interés. Sin embargo, es común para temporización de la llegada del punto a localizaciones particulares a lo largo de la trayectoria por definir. Este caso se llama *generación de trayectorias con temporización prescrita* y es análogo a la generación de funciones en que se especifica una función de salida particular. La generación de trayectorias analíticas y de funciones se tratará en el capítulo 5.

GENERACIÓN DE MOVIMIENTO se define como *el control de una* ***línea*** *en el plano, tal que supone algún conjunto prescrito de posiciones secuenciales.* Aquí es importante la orientación del eslabón que contiene la línea. Éste es un problema más general que la generación de trayectoria y, de hecho, esta generación es un subconjunto de la generación de movimientos. Un ejemplo de un problema de generación de movimiento es el control del cucharón de un buldózer. El cucharón debe adoptar un conjunto de posiciones para excavar, recoger y vaciar la tierra de excavación. Conceptualmente, el movimiento de una línea pintada al lado del cucharón debe hacerse de modo que suponga las posiciones deseadas. La solución usual es un eslabonamiento.

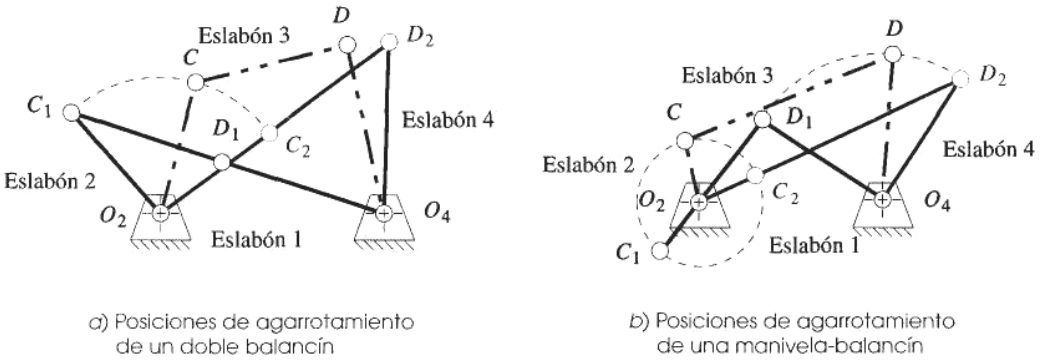
* Ya pasaron los días en que un ingeniero mecánico podía permanecer ignorante de la electrónica y la electromecánica, ya que prácticamente todas las máquinas modernas están controladas por dispositivos electrónicos y electromecánicos. Los profesionales de la ingeniería mecánica actual deben comprender bien su operación.

MECANISMOS EN UN PLANO *VERSUS* MECANISMOS ESPACIALES En la descripción anterior del movimiento controlado se supuso que los movimientos deseados eran en un plano (2-D). Sin embargo, vivimos en un mundo tridimensional y los mecanismos deben funcionar en tal mundo. Los **mecanismos espaciales** *son dispositivos* 3-D. Su diseño y análisis es mucho más complejo que el de los **mecanismos en un plano,** que *son dispositivos* 2-D. El estudio de los mecanismos espaciales queda fuera del alcance de este texto introductorio. En la bibliografía se mencionan algunas referencias. Sin embargo, el estudio de mecanismos en un plano no es tan limitante en la práctica como podría parecer a primera vista, puesto que muchos dispositivos de tres dimensiones se construyen con conjuntos múltiples de dispositivos bidimensionales acoplados entre sí. Un ejemplo es una silla plegadiza. Tendrá alguna especie de eslabonamiento en el plano del lado izquierdo, que permite que se pliegue. Habrá un eslabonamiento idéntico en el lado derecho de la silla. Estos dos eslabonamientos planos *XY* estarán conectados por una estructura a lo largo de la dirección Z, que enlaza los dos eslabonamientos planares en un ensamblaje tridimensional. Muchos mecanismos reales están dispuestos de este modo, como **eslabonamientos planos duplicados,** desplazados en la dirección Z en planos paralelos y conectados rígidamente. Observe el mecanismo de articulación cuando se levanta la capota de un auto. Note que se reproduce a cada lado del auto. La capota y la carrocería del auto enlazan los dos eslabonamientos planos en un ensamblaje 3-D. Observe a su alrededor y hallará muchos otros ejemplos de ensambles de eslabonamientos planos en configuraciones 3-D. Así que las técnicas 2-D de síntesis y de análisis presentadas aquí resultan de valor práctico al diseñar en 3-D.

3.3 CONDICIONES LÍMITE

Las técnicas de síntesis dimensional, gráfica y manual presentadas en este capítulo, y las técnicas de síntesis analítica, con computadora, presentadas en el capítulo 5, son medios razonablemente rápidos para obtener una solución de prueba en un problema de control de movimiento. Una vez que se halla una solución potencial se debe evaluar según su calidad. Se pueden aplicar muchos criterios. En capítulos posteriores se explorará en forma detallada el análisis de estos mecanismos. Sin embargo, por lo común no se quiere gastar mucho tiempo en analizar minuciosamente un diseño que puede resultar inadecuado por algunas evaluaciones simples y apresuradas.

AGARROTAMIENTO Una prueba importante que se aplica en los procedimientos de síntesis que se describen a continuación. Se necesita comprobar que el eslabonamiento puede, en realidad, alcanzar todas las posiciones de diseño especificadas sin encontrar una posición límite o de **agarrotamiento,** también llamada **configuración estacionaria.** Con frecuencia los métodos de síntesis de eslabonamiento sólo permiten obtener las posiciones particulares especificadas. No indican nada acerca del comportamiento del eslabonamiento entre esas posiciones. En la figura 3-la) se muestra un eslabonamiento de cuatro barras de no Grashof en una posición arbitraria *CD* (con trazo punteado) y también en sus dos **posiciones de agarrotamiento,** C_1D_1 (con trazo continuo negro) y C_2D_2 (con trazo continuo rojo). *Las posiciones de agarrotamiento se determinan mediante la* ***colinealidad*** *de dos de los eslabones móviles.* Un mecanismo de doble o triple balancín de cuatro barras tendrá por lo menos dos de estas posiciones de agarrotamiento en las que el eslabonamiento adquiere una configuración triangular. Cuando se llega a una posición triangular (agarrotamiento) no se permitirá movimiento de entrada adicional en una dirección, a partir de uno de sus eslabones de balancín (del eslabón 2 a partir de la posición



a) Posiciones de agarrotamiento de un doble balancín

b) Posiciones de agarrotamiento de una manivela-balancín

FIGURA 3-1

Eslabonamientos en agarrotamiento

C_1D_1 o del eslabón 4 a partir de la posición C_2D_2). El otro balancín tendrá que impulsarse luego para retirar el eslabonamiento de la posición de agarrotamiento. Un eslabonamiento de manivela-balancín de cuatro barras de Grashof asumirá también dos posiciones de agarrotamiento, como se muestra en la figura *3-1b),* cuando el eslabón más corto (manivela O_2C) es colineal con el acoplador CD (eslabón 3) ya sea *colineal prolongada* ($O_2C_2D_2$) o *colineal traslapado* ($O_2C_1D_1$) No puede ser *impulsado hacia atrás* desde el balancín O_4D (eslabón 4) a través de estas posiciones colineales, pero cuando la manivela O_2C (eslabón 2) recibe impulso, lo llevará a través de ambos agarrotamientos debido a que es de Grashof. Observe que estas posiciones de agarrotamiento también definen los límites de movimiento del balancín impulsado (eslabón 4), en los cuales su velocidad angular pasará por cero. Utilice el programa FOURBAR para leer los archivos de datos F03-*0la.4br* y F03-01b.4br, y animar estos ejemplos.

Después de sintetizar una solución de **doble** o **triple balancín** para un problema de multiposición (generación de movimiento), se **debe** comprobar para la presencia de posiciones de agarrotamiento *entre* sus posiciones de diseño. *La manera más fácil de hacer esto es con un modelo de cartulina del diseño de eslabonamiento.* Una herramienta CAE como el FOURBAR O el *Working Model* comprobará también este problema. Es importante advertir que una condición de agarrotamiento es indeseable sólo si impide que el eslabonamiento pase de una posición deseada a otra. En otras circunstancias el agarrotamiento es muy útil. Puede proporcionar una característica de autobloqueo cuando el eslabonamiento se mueve ligeramente más allá de la posición de agarrotamiento y contra un paro fijo. Cualquier intento por invertir el movimiento del eslabonamiento hará que se trabe con fuerza contra el paro. Se debe tirar de ella manualmente "sobre centro", fuera de la posición de agarrotamiento, antes de que se mueva el eslabonamiento. Usted habrá encontrado muchos ejemplos de esta aplicación, en una mesa para jugar cartas, por ejemplo, o en el burro de planchar, e incluso en los mecanismos de la portezuela trasera de una camioneta o de una vagoneta. En la figura 3-2 se ilustra un ejemplo de tal eslabonamiento con posición límite. Éste es un caso especial del eslabonamiento de Grashof en la configuración deltoide (véase también la figura *2-11 d))* que proporciona una posición de agarrotamiento de bloqueo cuando está abierto y se pliega sobre su parte superior cuando se cierra para ahorrar espacio. En un capítulo posterior se analizará la condición de agarrotamiento con mayor detalle.

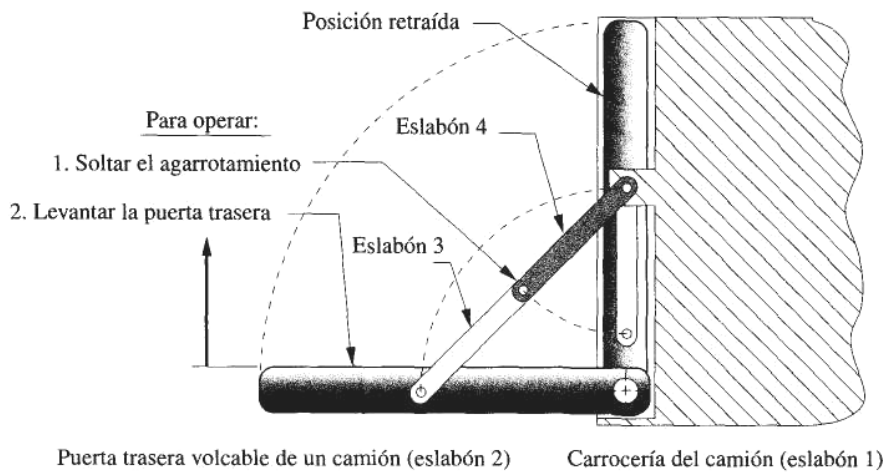


FIGURA 3-2

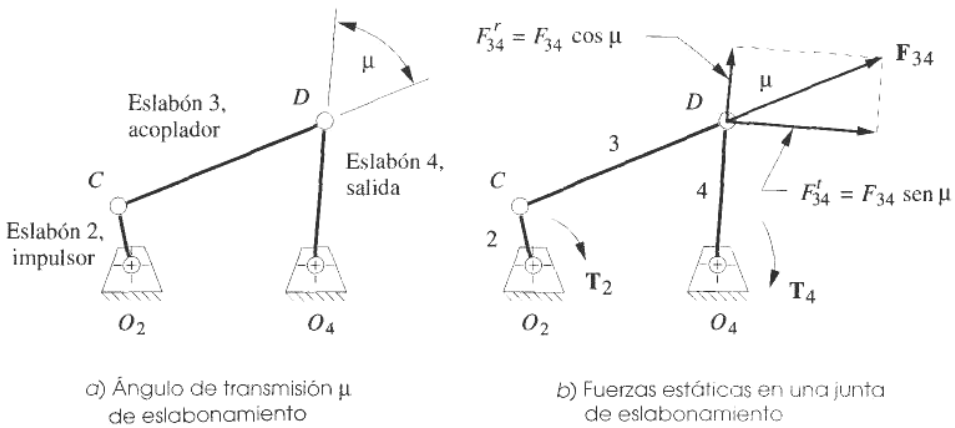
Eslabonamiento deltoide con agarrotamiento utilizado para controlar la acción móvil de una compuerta trasera de un camión

ÁNGULO DE TRANSMISIÓN Otra prueba útil que puede aplicarse rápidamente a un diseño de eslabonamiento para juzgar su calidad es la medida de su ángulo de transmisión. Esto se puede efectuar analíticamente, en forma gráfica en la mesa de dibujo o con el modelo de cartulina para una aproximación preliminar. (Extienda los eslabones más allá del pivote para medir el ángulo.) El **ángulo de transmisión** μ se muestra en la figura *3-3a)* y se define como *el ángulo entre el eslabón de salida y el acoplador** Generalmente se toma como *el valor absoluto del ángulo agudo del par de ángulos formados por la intersección de los dos eslabones, el cual varía en forma continua desde un valor máximo hasta uno mínimo a medida que el eslabonamiento pasa por su intervalo de movimiento.* Es una medida de la calidad de la transmisión de fuerza y de velocidad en la junta.† Observe en la figura 3-2 que el eslabonamiento no puede moverse desde la posición abierta que se muestra mediante una fuerza aplicada a la portezuela trasera, eslabón 2, ya que el ángulo de transmisión está entonces entre los eslabones 3 y 4, y es cero en esa posición. Pero una fuerza aplicada al eslabón 4, como eslabón de entrada, lo moverá. El ángulo de transmisión está ahora entre los eslabones 3 y 2 y es de 45°.

La figura *3-3b)* muestra un par de torsión T_2 aplicado al eslabón 2. Aun antes de que ocurra algún movimiento, esto causa que el eslabón 3 aplique una fuerza colineal, estática, F_{34} al eslabón 4 en el punto *D.* Sus componentes radial y tangencial, F_{34}^r y F_{34}^t, se descomponen en forma paralela y perpendicular al eslabón 4, respectivamente. En el caso ideal sería conveniente que toda la fuerza F_{34} produjera el par de torsión de salida T_4 sobre el eslabón 4. Sin embargo, sólo la componente tangencial origina par de torsión en este eslabón. Esta componente radial sólo aumenta la fricción en el pivote y no contribuye al par de torsión de salida. Por consiguiente, el valor óptimo del **ángulo de transmisión** es de 90°. Cuando μ es menor de 45° la componente radial sera mayor que la componente tangencial. La mayoría de los diseñadores de máquinas trata de mantener el

* Definido por Alt. [2]

† El ángulo de transmisión tiene una aplicación limitada. Sólo predice la calidad de la transmisión de fuerza o de par de torsión si los eslabones de entrada o de salida están pivotados a una fijación. Si se toma la fuerza de salida de un eslabón flotante (acoplador), entonces el ángulo de transmisión no tiene valor. Un índice diferente muy útil llamado junta con índice de fuerza (JFI por sus siglas en inglés) se presenta en el capítulo 11, en el cual se hace un análisis de fuerzas en eslabonamientos. (Véase la sección 11.12.) La JFI es útil en situaciones en que el eslabón de salida es flotante, así como para dar el mismo tipo de información cuando se toma la salida de un eslabón que gira contra la fijación. Sin embargo, la JFI requiere que se realice un análisis completo de las fuerzas del eslabonamiento, mientras que el ángulo de transmisión sólo se determina por la geometría del eslabonamiento.



a) Ángulo de transmisión μ de eslabonamiento

b) Fuerzas estáticas en una junta de eslabonamiento

FIGURA 3-3

Ángulo de transmisión en un eslabonamiento de cuatro barras

ángulo de transmisión mínimo aproximadamente arriba de 40° con la finalidad de promover un movimiento suave y una adecuada transmisión de fuerza. Sin embargo, si en su diseño particular hubiera poca o ninguna fuerza o momento externos aplicados al eslabón 4, es posible salir avante con valores aún más bajos de μ.* Este ángulo de transmisión proporciona un medio rápido para juzgar la calidad de un eslabonamiento sintetizado de nueva cuenta. Si no es satisfactoria se puede iterar con el procedimiento de síntesis para mejorar el diseño. En capítulos subsecuentes se investigará con más detalle el ángulo de transmisión.

3.4 SÍNTESIS DIMENSIONAL

La **síntesis dimensional** de un eslabonamiento es *la determinación de las dimensiones (longitudes) de los eslabones necesarios para efectuar los movimientos deseados.* En esta sección se supone que, mediante la *síntesis de tipo,* se determinó que la solución más apropiada al problema es un eslabonamiento. Hay muchas técnicas para realizar esta tarea de **síntesis dimensional de un eslabonamiento de cuatro barras.** Los métodos más sencillos y rápidos son gráficos. Funcionan bien hasta para tres posiciones de diseño. Si el número de posiciones es mayor, por lo general es necesario un enfoque de síntesis analítica, numérica, como el que se describe en el capítulo 5, mediante una computadora.

Observe que los principios utilizados en estas técnicas de síntesis gráfica son simplemente los de la **geometría euclidiana.** Para generar estos eslabonamientos se necesitan las reglas para la bisección de líneas y ángulos, las propiedades de las rectas perpendiculares y paralelas, las definiciones de arcos, etcétera. Un **compás,** un **transportador y** una **regla** son las herramientas necesarias para la síntesis gráfica de eslabonamientos. Consulte cualquier texto introductorio de geometría (de bachillerato) si sus nociones geométricas no están muy claras.

* Alt,[2] quien definió el ángulo de transmisión, recomendó mantenerlo a $\mu_{mín} > 40°$. Sin embargo, puede argumentarse que a velocidades altas la cantidad de movimiento de los elementos móviles o la adición de un volante llevará a un mecanismo a lugares con ángulos de transmisión deficiente. El ejemplo más común es la manivela-corredera con movimiento de retroceso (como la que se usa en motores de combustión interna), cuya $\mu = 0$ dos veces por revolución. Asimismo, el ángulo de transmisión solamente es crítico en un eslabonamiento de cuatro barras cuando el balancín es el eslabón de salida contra el que choca la carga de trabajo. Si el acoplador toma la carga de trabajo en lugar del balancín, entonces pueden ser viables ángulos de transmisión mínimos menores de 40°. Una manera concluyente de calificar la función dinámica de un mecanismo es calculando la variación en el par de torsión impulsor requerido. El par de torsión impulsor y los volantes se analizan en el capítulo 11. También se puede calcular una junta con índice de fuerza (JFI). (Véase la nota al pie †, en la p. 89.)

Síntesis de dos posiciones

La **síntesis de dos posiciones** se divide en dos categorías: **salida de balancín** (rotación pura) y **salida de acoplador** (movimiento complejo). La salida de balancín es más apropiada para situaciones en que se desea una manivela-balancín de Grashof, y es, de hecho, un caso trivial de *generación defunción* en el que la función de salida se define como dos posiciones angulares discretas del balancín. La salida de acoplador es más general, y es un caso simple de *generación de movimiento* en el cual la salida se define como dos posiciones de una recta en el plano. Esta solución con frecuencia conducirá a un triple balancín. Sin embargo, el triple balancín de cuatro barras puede impulsarse con un motor mediante la adición de una **diada** (cadena de dos barras); el resultado final es una cadena **de seis barras de Watt** que contiene una **subcadena de cuatro barras de Grashof.** Ahora se explorará la síntesis de cada uno de estos tipos de solución para el problema de dos oosiciones.

EJEMPLO 3-1

Salida de balancín. Dos posiciones con desplazamiento angular. (Generación de función.)

Problema: Diseñe una manivela-balancín de Grashof de cuatro barras para dar un giro de 45° de balancín, con el mismo tiempo hacia adelante y hacia atrás, a partir de una entrada de motor de velocidad constante.

Solución: (Véase la figura 3-4.)

1 Trace el eslabón de salida O_4B en ambas posiciones extremas, B_1 y B_2, en una localización conveniente tal que se subtienda el ángulo deseado de movimiento, θ_4.

2 Trace la cuerda B_1B_2 y prolónguela en una dirección conveniente.

3 Seleccione un punto conveniente O en la recta B_1B_2 prolongada.

4 Bisecte el segmento B_1B_2 y trace una circunferencia con ese radio alrededor de O_2.

5 Designe las dos intersecciones de la circunferencia y de B_1B_2 prolongado como A_1 y A_2.

6 Mida la longitud del acoplador de A_1 a B_1, o bien, de A_2 a B_2.

7 Mida la longitud de la fijación 1, de la manivela 2 y del balancín 4.

8 Obtenga la condición de Grashof. Si se trata de un caso de no Grashof desarrolle de nuevo los pasos 3 a 8 con O_2 después de O_4.

9 Elabore un modelo de cartulina del eslabonamiento y articúlelo para comprobar su función y sus ángulos de transmisión.

10 Se puede introducir el archivo F03-4.4br en el programa FOURBAR para ver este ejemplo en funcionamiento.

Observe varios aspectos de este proceso de síntesis. Se inició con el extremo de salida del sistema, que era lo único definido en el planteamiento del problema. Se debieron tomar muchas decisiones e hipótesis completamente arbitrarias para proceder, pues

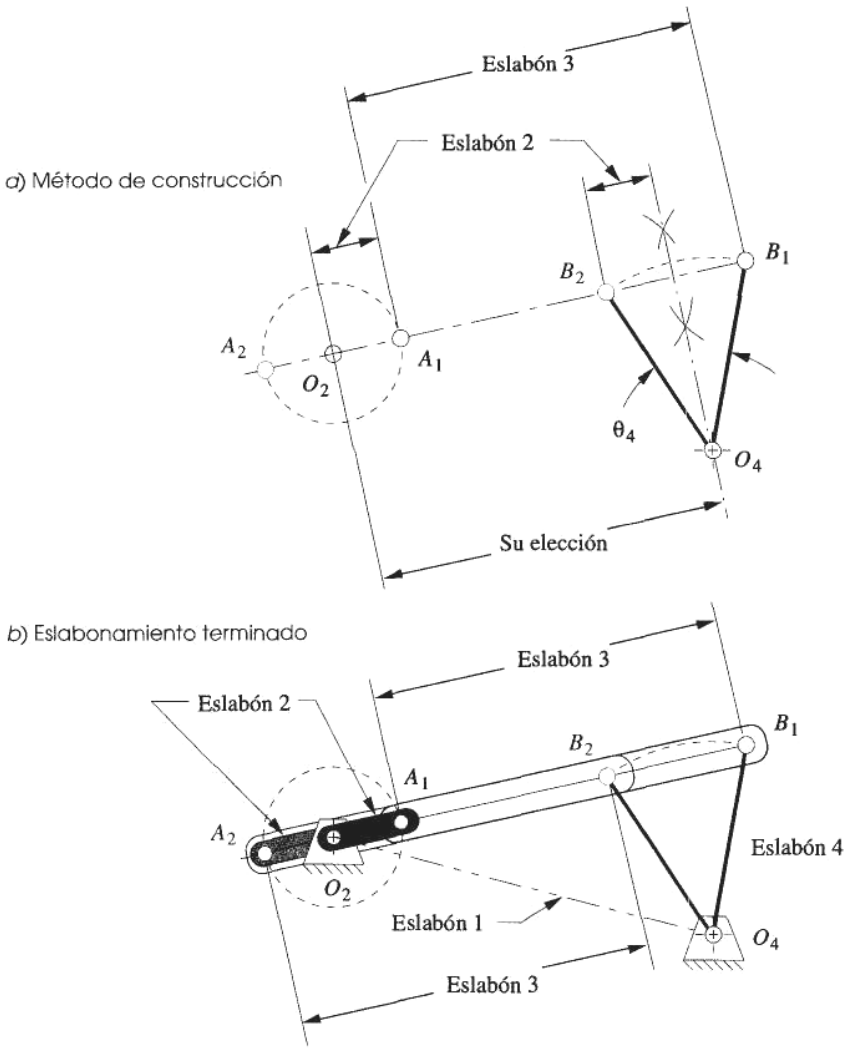


FIGURA 3-4

Síntesis de función de dos posiciones con salida de balancín (de no retorno rápido)

había muchas más variables que "ecuaciones" disponibles. Con frecuencia es necesario realizar una "libre elección" de "un ángulo o longitud conveniente". Estas opciones son en realidad definiciones de parámetros de diseño. Una elección deficiente conducirá a un diseño también deficiente. Por lo tanto, tales enfoques son de **síntesis cualitativa** y requieren un proceso iterativo, incluso para este ejemplo simple. La primera solución a la que se llegue quizá no sea satisfactoria, y tal vez se requiera efectuar varios intentos (iteraciones). A medida que se adquiera más experiencia en la obtención de soluciones cinemáticas, se podrán realizar mejores elecciones para estos parámetros de diseño con

menos iteraciones. **¡No puede sobrestimarse el valor de elaborar un modelo simple de cartulina del diseño efectuado!** La realización, articulación y análisis del modelo de cartulina permite conocer con menos esfuerzo más sobre la calidad del diseño. Estas observaciones generales son válidas para la mayoría de los ejemplos presentados de síntesis de eslabonamiento.

EJEMPLO 3-2

Salida de balancín. Dos posiciones con desplazamiento complejo. (Generación de movimiento.)

Problema: Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para mover un eslabón *CD* de la posición C_1D_1 a la C_2D_2.

Solución: (Véase la figura 3-5.)

1 Trace el eslabón *CD* en sus posiciones deseadas, C_1D_1 y C_2D_2 como se indica en el plano.

2 Trace líneas de construcción del punto C_1 al C_2 y del punto D_1 al D_2.

3 Bisecte las rectas C_1C_2 y D_1D_2, y prolongue sus mediatrices hasta la intersección en O_4. Tal punto de intersección es el **rotopolo.**

4 Seleccione un radio conveniente y trace un arco alrededor del rotopolo hasta cortar las rectas O_4C_1 y O_4C_2. Marque tales intersecciones como B_1 y B_2.

5 Efectúe los pasos 2 a 8 del ejemplo 3-1 para completar el eslabonamiento.

6 Realice un modelo de cartulina del eslabonamiento y articúlelo para comprobar su funcionamiento y sus ángulos de transmisión.

Observe que una vez que se obtiene el **rotopolo** el ejemplo 3-2 se reduce al método del ejemplo 3-1. Por tanto, un eslabón representado por una recta en movimiento complejo puede reducirse al problema más simple de rotación pura y moverse a cualesquiera dos posiciones en el plano, como el balancín en un eslabonamiento de cuatro barras. El siguiente ejemplo mueve el mismo eslabón a través de las mismas dos posiciones, como el acoplador de un eslabonamiento de cuatro barras.

EJEMPLO 3-3

Salida de acoplador. Dos posiciones con desplazamiento complejo. (Generación de movimiento.)

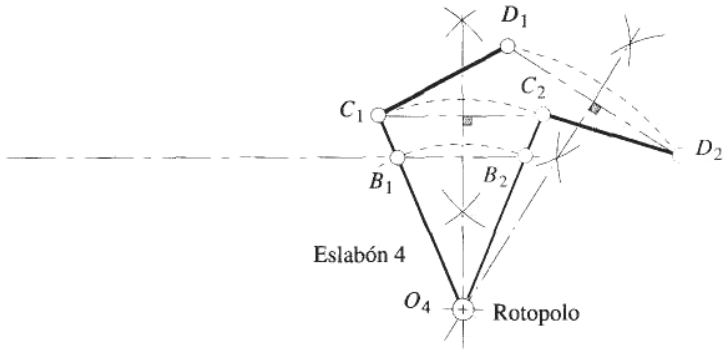
Problema: Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras que desplace el eslabón *CD* que se ilustra de la posición C_1D_1 a C_2D_2 (con pivotes móviles en *C* y *D.)*

Solución: (Véase la figura 3-6.)

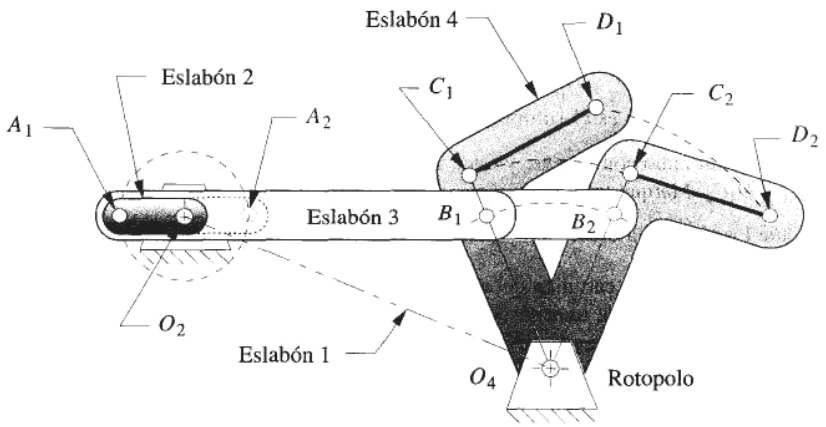
1 Trace el eslabón *CD* en sus dos posiciones deseadas, C_1D_1 y C_2D_2, como se muestra en el plano.

2 Trace líneas de construcción del punto C_1 al C_2 y del punto D_1 al D_2.

3 Bisecte los segmentos C_1C_2 y D_1D_2 y prolongue las mediatrices en las direcciones convenientes. En esta solución no se usará el rotopolo.



a) Localizador! del rotopolo para el ejemplo 3-2



b) Construcción del eslabonamiento con el método del ejemplo 3-1

FIGURA 3-5

Síntesis de movimiento de dos posiciones con salida de balancín (de no retorno rápido)

4 Seleccione un punto conveniente en cada bisectriz como los pivotes fijos O_2 y O_4.

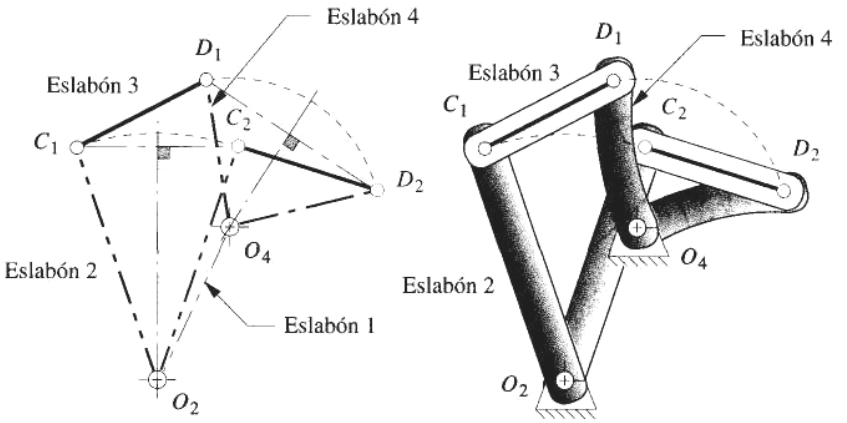
5 Una O_2 con ? y designe a este segmento como eslabón 2. Una O_4 con D_1 y llámelo eslabón 4.

6 El segmento C_1D es el eslabón 3 y el O_2O_4 es el eslabón 1.

7 Compruebe la condición de Grashof; si no se satisface repita los pasos 4 a 7. Observe que cualquier condición de Grashof es potencialmente aceptable en este caso.

8 Elabore un modelo en cartulina y compruebe su funcionamiento para asegurarse de que puede pasar de la posición inicial a la final sin encontrar alguna posición límite (agarrotamiento).

9 Verifique los ángulos de transmisión.



a) Síntesis de dos posiciones

fc>) Eslabonamiento de cuatro barras de no Grashof terminado

FIGURA 3-6

Síntesis de movimiento de dos posiciones con salida de acoplador

Introduzca el archivo F03-06.4br en el programa FOURBAR para ver en acción el ejemplo 3-3. Observe que este ejemplo tenía casi el mismo planteamiento que el ejemplo 3-2, pero la solución es completamente distinta. Por tanto, un eslabón también puede moverse a cualesquiera dos posiciones en el plano, como el acoplador de un eslabonamiento de cuatro barras más que como el balancín. Sin embargo, a fin de limitar sus movimientos para esas dos posiciones de acoplador como extremos se necesitan dos eslabones adicionales. Tales elementos pueden diseñarse con el método que se muestra en el ejemplo 3-4 y la figura 3-7.

EJEMPLO 3-4

Agregar una diada (cadena de dos barras) para controlar el movimiento en el ejemplo 3-3.

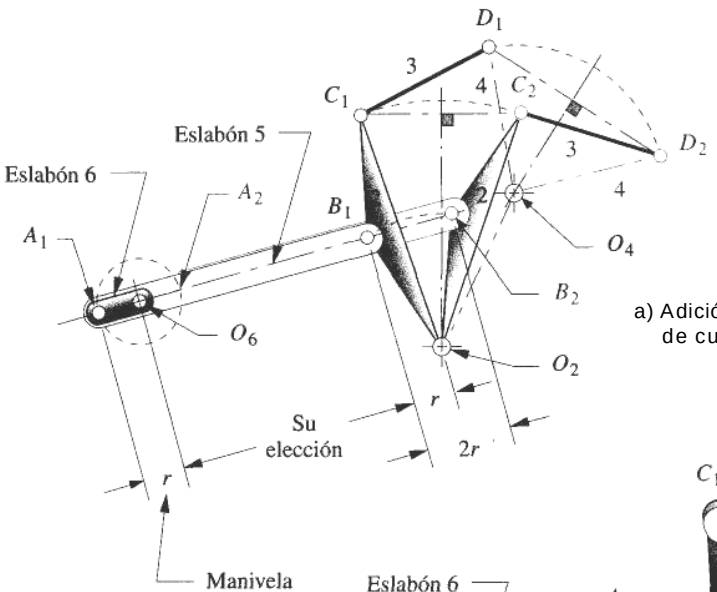
Problema: Diseñe una **diada** para controlar y limitar los extremos de movimiento del eslabonamiento del ejemplo anterior a sus dos posiciones de diseño.

Solución: (Véase la figura 3-7a).)

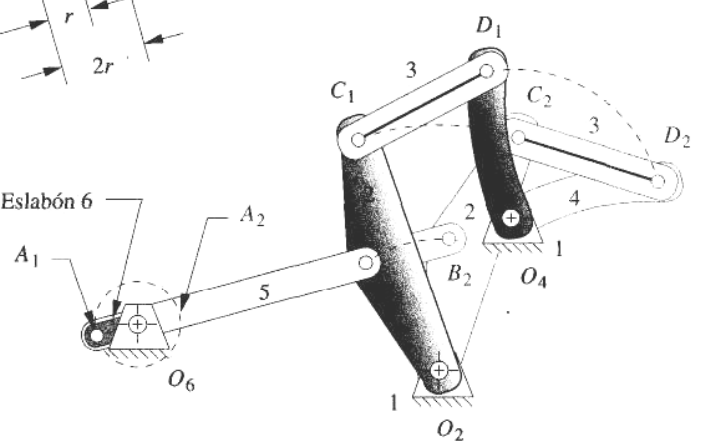
1 Seleccione un punto conveniente en el eslabón 2 del eslabonamiento diseñado en el ejemplo 3-3. Observe que no necesita estar en la recta O_2C_1. Marque este punto como B_1.

2 Trace un arco alrededor del centro O_2, que pase por B_1, para intersecar la recta correspondiente O_2B_2 en la segunda posición del eslabón 2. Designe este punto como B_2. La cuerda B_1B_2 proporciona el mismo problema que el del ejemplo 3-1.

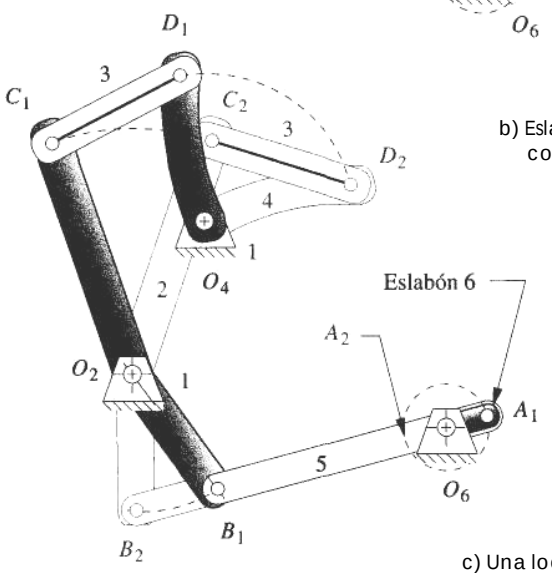
3 Siga los pasos 2 a 9 del ejemplo 3-1 para completar el eslabonamiento, excepto al agregar los eslabones 5 y 6 y el centro O_6, en vez de los eslabones 2 y 3 y el centro O_2. El eslabón 6 será la manivela impulsora. La subcadena de cuatro barras de eslabones O_6, A_1, B_1, O_2 debe ser una manivela-balancín de Grashof.



a) Adición de una diada impulsora a la cadena de cuatro barras



b) Eslabonamiento completo de seis barras de Watt con el motor en O_6



c) Una localización alterna de la diada impulsora con el motor en O_6

FIGURA 3-7

Impulsor de un eslabonamiento de no Grashof con una diada (de no retorno rápido)

Observe que se usó el enfoque del ejemplo 3-1 para agregar una **diada** que sirva como *etapa de impulso* de esta cadena de cuatro barras. Esto origina un **mecanismo de Watt de** seis **barras** cuya primera etapa es de Grashof, como se muestra en la figura *3-7b).* Por lo tanto, esto se puede impulsar con un motor en el eslabón 6. Note también que es posible localizar el centro de motor O_{fi} en cualquier parte del plano mediante una elección juiciosa del punto B_1 en el eslabón 2. Si se hubiera puesto B_1 abajo del centro O_2, el motor estaría a la derecha de los eslabones 2, 3 y 4, como se indica en la figura *3-1 c).* Hay *una infinidad de diadas impulsoras* posibles que accionarán un ensamblaje cualquiera de eslabones de doble balancín. Introduzca los archivos F03-07b.6br y F03-07c.6br en el programa SlXBAR para ver el ejemplo 3-4 en movimiento en estas dos soluciones.

Síntesis de tres posiciones con pivotes móviles especificados

La **síntesis de tres posiciones** permite definir tres ubicaciones de una línea en el plano y crear con ello una configuración de eslabonamiento de cuatro barras para moverlo a cada una de esas posiciones. Éste es un problema de **generación de movimiento.** La técnica de síntesis es una extensión lógica del método utilizado en el ejemplo 3-3 para síntesis de dos posiciones con salida de acoplador. El eslabonamiento resultante puede ser una condición cualquiera de Grashof y generalmente requerirá la adición de una diada para controlar y limitar su movimiento a las posiciones de interés. El compás, el transportador y la regla son las herramientas necesarias en este método gráfico.

EJEMPLO 3-5

Salida de acoplador. Tres posiciones con desplazamiento complejo. (Generación de movimiento.)

Problema: Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para mover el eslabón *CD* que se muestra desde la posición C_1D_1 hasta la C_2D_2 y luego a la posición C_3D_3. Los pivotes móviles están en *C* y *D.* Obtenga las ubicaciones del pivote fijo.

Solución: (Véase la figura 3-8.)

1 Trace el eslabón *CD* en sus tres posiciones de diseño en el plano, C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3, como se ilustra.

2 Trace líneas de construcción del punto C_1 al C_2 y del punto C_2 al C_3.

3 Bisecte los segmentos C_1C_2 y C_2C_3 y prolongue sus mediatrices hasta que se corten. Marque su intersección como O_2.

4 Repita los pasos 2 y 3 para las rectas D_1D_2 y D_2D_3. Marque su intersección como O_4.

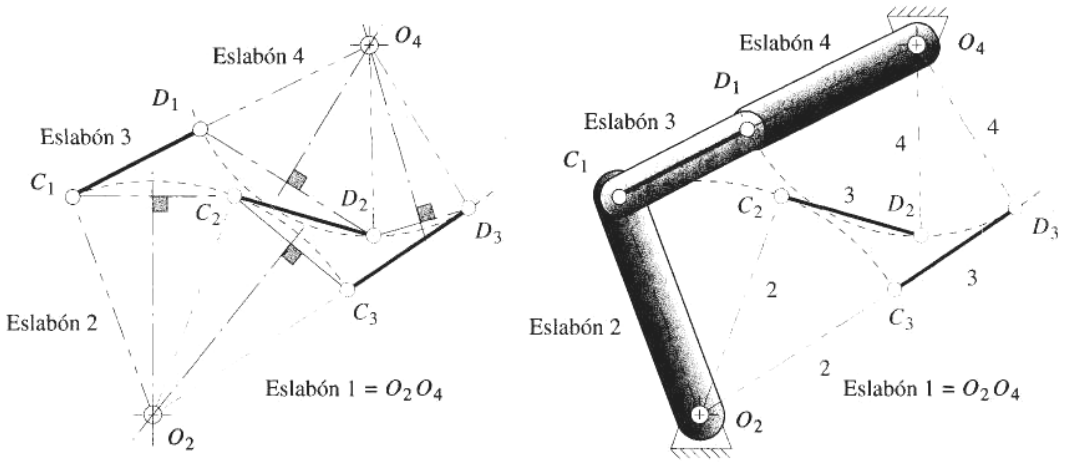
5 Una O_2 con C_1 y llámelo eslabón 2. Una O_4 con D_1 y llámelo eslabón 4.

6 El segmento C_1D_1 es el eslabón 3 y el O_2O_4 es el eslabón 1.

7 Compruebe la condición de Grashof. Observe que una condición de Grashof es potencialmente aceptable en este caso.

8 Elabore un modelo de cartulina y compruebe su funcionamiento para asegurarse de que puede pasar de la posición inicial a la final sin encontrar posiciones límite (agarrotamiento).

9 Elabore una diada impulsora, de acuerdo con el método del ejemplo 3-4, mediante una extensión del eslabón 3 para enlazar la diada.



a) Método de construcción b) Eslabonamiento de cuatro barras de no Grashof terminado

FIGURA 3-8

Síntesis de movimiento de tres posiciones

Observe que aunque suele obtenerse una solución para este caso, es posible que no sea capaz de mover el eslabonamiento continuamente desde una posición hasta la siguiente sin desensamblar los eslabones y reensamblarlos para conseguir que rebasen una posición límite. Eso, obviamente, no será satisfactorio. En la solución particular presentada en la figura 3-8 note que los eslabones 3 y 4 están agarrotados en la posición uno y los eslabones 2 y 3 lo están en la posición tres. En este caso se tendrá que impulsar el eslabón 3 con una diada impulsora, puesto que cualquier intento de accionar los eslabones 2 o 4 fallará en las posiciones de agarrotamiento. Ninguna magnitud de par de torsión aplicada al eslabón 2 en la posición C1 moverá el eslabón 4 más allá del punto D_1 y el eslabón impulsor 4 no moverá el eslabón 2 más allá de la posición C_3. Introduzca el archivo F03-08.4br en el programa FOURBAR para ver en acción el ejemplo 3-5.

Síntesis de tres posiciones con pivotes móviles alternos

Otro problema potencial es la posibilidad de una ubicación indeseable de los pivotes fijos O_2 y O_4 con respecto a sus restricciones de empaque. Por ejemplo, si el pivote fijo para un diseño de eslabonamiento de limpiaparabrisas termina a la mitad del parabrisas sería deseable rediseñarlo. En el ejemplo 3-6 se muestra cómo obtener una configuración alterna para el mismo movimiento de tres posiciones, como en el ejemplo anterior. El método señalado en el ejemplo 3-8 permite especificar anticipadamente la ubicación de los pivotes fijos y luego hallar las localizaciones de los pivotes móviles en el eslabón 3, que es compatible con los pivotes fijos.

EJEMPLO 3-6

Salida de acoplador. Tres posiciones con desplazamiento complejo. Puntos de unión alternos para pivotes móviles. (Generación de movimiento.)

Problema: Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras que mueva el eslabón CD que se muestra de la posición C_1D_1 a la C_2D_2 y luego a la posición de C_3D_3. Utilice diferentes pivotes móviles en lugar de *CD*. Obtenga las ubicaciones de pivote fijo.

Solución: (Véase la figura 3-9.)

1 Trace el eslabón *CD* en sus tres posiciones deseadas en el plano, C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3 como se hizo en el ejemplo 3-5.

2 Defina los nuevos puntos de unión E_1 y F_1 que tienen una relación fija entre C_1D_1 y E_1F_1 dentro del eslabón. Ahora use E_1F_1 para definir las tres posiciones del eslabón.

3 Trace líneas de construcción del punto E_1 al E_2 y del punto E_2 al E_3.

4 Bisecte los segmentos E_1E_2 y E_2E_3, y prolongue las mediatrices hasta que se corten. Marque la intersección como O_2.

5 Repita los pasos 2 y 3 para las rectas F_1F_2 y F_2F_3. Marque la intersección como O_4.

6 Una O_2 con E y llame al segmento eslabón 2. Una O_4 con F_1 y desígnelo como eslabón 4.

7 El segmento E_1F es el eslabón 3 y el O_2O_4 es el eslabón 1.

8 Compruebe la condición de Grashof. Observe que una condición de Grashof es potencialmente aceptable en este caso.

9 Elabore un modelo de cartulina y compruebe su funcionamiento para asegurarse de que puede pasar de la posición inicial a la final sin encontrar posiciones límite (agarrotamientos). Si no lo hace cambie las ubicaciones de los puntos *E y F* y repita los pasos 3 a 9.

10 Elabore una diada impulsora que actúe sobre el eslabón 2 de acuerdo con el método del ejemplo 3-4.

Observe que el corrimiento de los puntos de unión en el eslabón 3, de *CD* a *EF*, origina también un desplazamiento de las ubicaciones de los pivotes fijos O_2 y O_4. Por lo tanto, pueden hallarse ahora en ubicaciones más favorables que las que tenían en el ejemplo 3-5. Es importante comprender que cualesquiera dos puntos en el eslabón 3, como *E* y *F*, pueden servir para definir completamente ese eslabón como un cuerpo rígido, y que hay una infinidad de estos conjuntos de puntos que pueden elegirse. Mientras que los puntos *C y D* tienen alguna ubicación particular en el plano que define la función del eslabonamiento, los puntos *E* y *F* pueden estar en cualquier ubicación en el eslabón 3, por consiguiente, generan una infinidad de soluciones para este problema.

La solución de la figura 3-9 es diferente de la de la figura 3-8 en varios aspectos. Esta última evita las posiciones límite, así que puede impulsarse mediante una diada que actúa

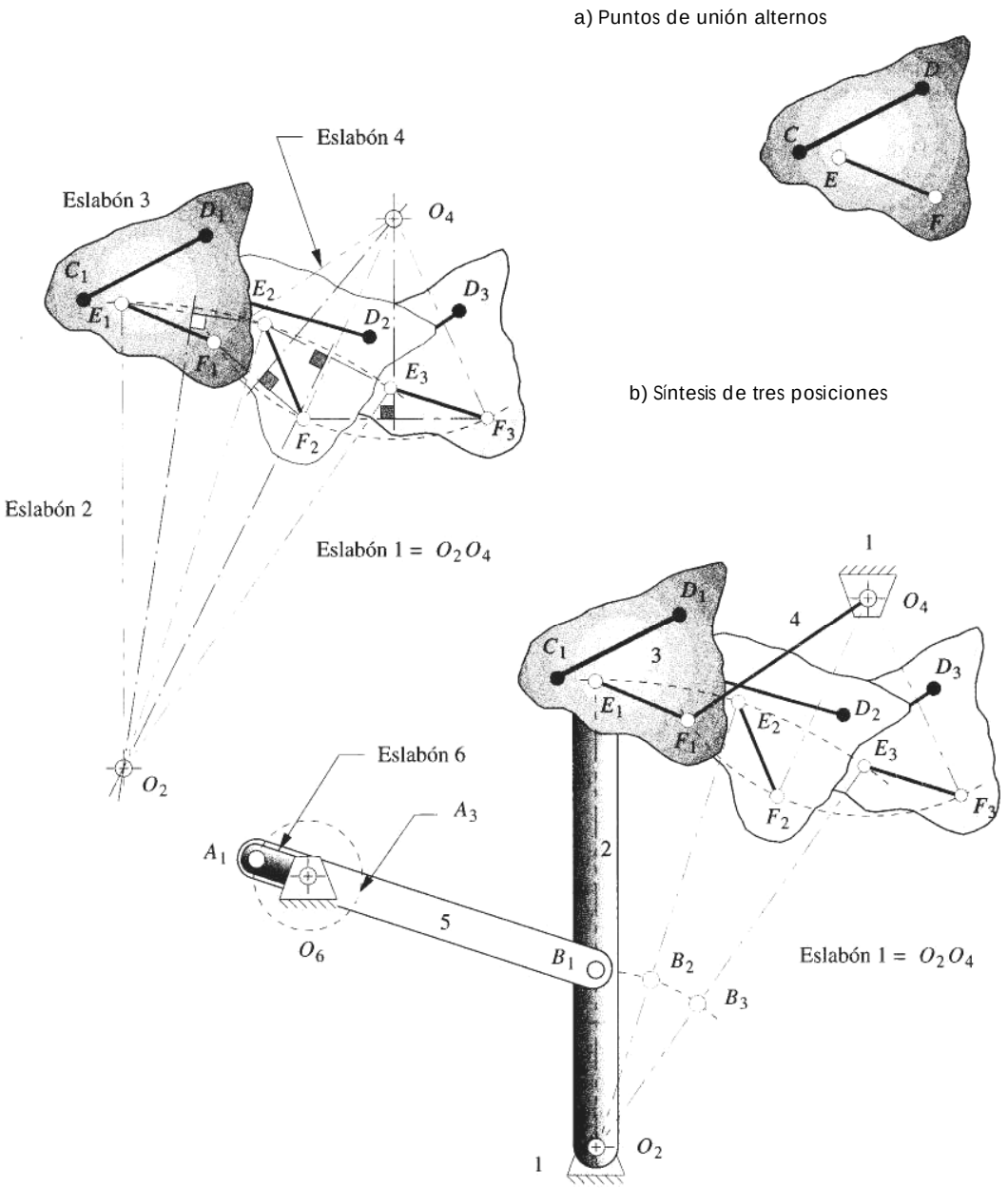


FIGURA 3-9

Síntesis de tres posiciones con pivotes móviles alternos

sobre uno de los balancines como se muestra en la figura 3-9c), y los ángulos de transmisión son más convenientes. Sin embargo, las posiciones de agarrotamiento de la figura 3-8 podrían ser realmente valiosas si se desea una característica de autobloqueo. *Debe entenderse que ambas soluciones son para el mismo problema* y que la solución de la figura 3-8 es precisamente un caso especial del de la figura 3-9. Ambas soluciones pueden ser útiles. Con ambos diseños el segmento *CD* se mueve por las mismas tres posiciones. Hay una infinidad de soluciones para este problema. Introduzca el archivo F03-09c.6br en el programa SIXBAR para ver en acción el ejemplo 3-6.

Síntesis de tres posiciones con pivotes fijos especificados

Aunque es posible obtener una solución aceptable para el problema de tres posiciones mediante los métodos descritos en los dos ejemplos anteriores, puede verse que el diseñador tendrá poco control directo sobre la ubicación de los pivotes fijos, ya que éstos son uno de los resultados del proceso de síntesis. Es común que el diseñador tenga algunas limitaciones acerca de las ubicaciones aceptables de los pivotes fijos, puesto que estarán limitados para localizaciones en las cuales sea accesible el plano de fijación del conjunto. Sería preferible que se pudieran definir las ubicaciones del pivote fijo, así como las tres posiciones del eslabón móvil, y luego sintetizar los puntos de unión apropiados, *E* y *F*, al eslabón móvil para satisfacer estas restricciones más realistas. Se puede aplicar a este problema el principio de **inversión.** En los ejemplos 3-5 y 3-6 se indica cómo obtener los pivotes fijos requeridos para tres posiciones elegidas de pivotes móviles. La inversión de este problema permite la especificación de las ubicaciones de pivote fijo y la determinación de los pivotes móviles requeridos para aquellas localizaciones. El primer paso es obtener las tres posiciones del plano de fijación que corresponden a las tres posiciones de acoplador deseadas. Esto se hace **invirtiendo el eslabonamiento*** como se muestra en la figura 3-10 y en el ejemplo 3-7.

EJEMPLO 3-7

Síntesis de tres posiciones con pivotes fijos especificados. Inversión del problema de síntesis de movimiento de tres posiciones.

Problema: Invierta un eslabonamiento de cuatro barras que mueva el eslabón *CD* que se muestra de la posición C_1D_1 a la C_2D_2 y luego a la posición C_3D_3. Utilice los pivotes fijos especificados O_2 y O_4.

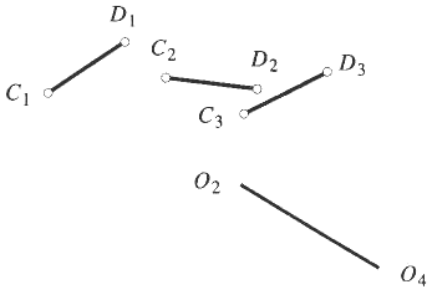
Solución: Obtenga primero las posiciones invertidas del eslabón de fijación correspondiente a las tres posiciones de acoplador especificadas. (Véase la figura 3-10.)

1 Trace el eslabón *CD* en sus tres posiciones deseadas en el plano, C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3, como se hizo en el ejemplo 3-5 y según se indica en la figura 3-10a).

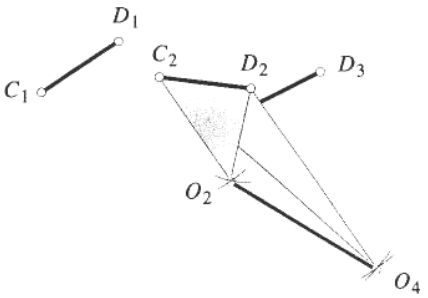
2 Trace el eslabón fijo O_2O_4 en su posición deseada en el plano con respecto a la primera posición del acoplador C_1D_1, como se muestra en la figura 3-10a).

3 Trace los arcos de construcción desde el punto C_2 hasta el O_2 y del punto D_2 al O_2, cuyos radios determinan los lados del triángulo $C_2O_2D_2$. Esto define la relación del pivote fijo O_2 con respecto a la línea de acoplador *CD* en la segunda posición de acoplador, como se muestra en la figura 3-10¿>).

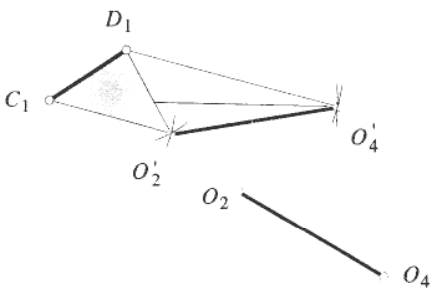
* Este método y el ejemplo fueron proporcionados por el señor Homer D. Eckhardt, ingeniero consultor, Lincoln, MA.



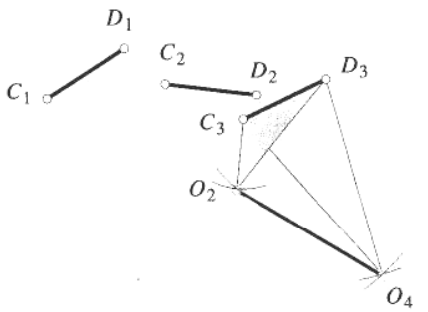
o) Problema original de tres posiciones de acoplador con pivotes especificados



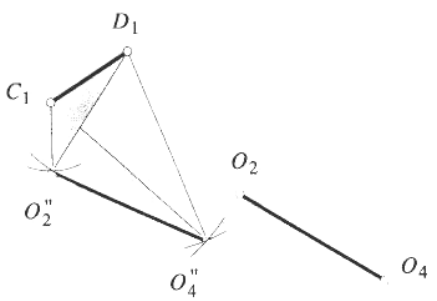
b) Posición del plano de fijación con respecto a la segunda posición de acoplador



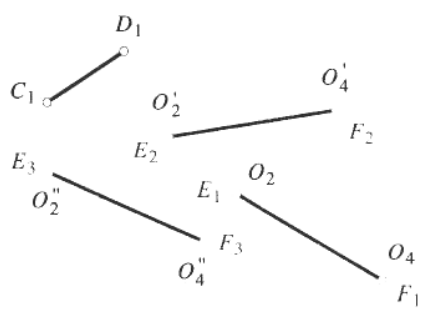
c) Traslado de la segunda posición del plano de fijación a la localización de referencia en la primera posición



d) Posición de plano de fijación con respecto a la tercera posición de acoplador



e) Traslado de la tercera posición del plano de fijación a la localización de referencia en la primera posición



f) Las tres posiciones invertidas del plano de fijación correspondientes a la posición original del acoplador

FIGURA 3-10

Inversión del problema de síntesis de movimiento de tres posiciones

4 Trace los arcos de construcción del punto C_2 al O_4 y del punto D_2 al O_4 para determinar el triángulo $C_2O_4D_2$. Lo anterior define la relación del pivote fijo O_4 con respecto a la línea de acoplador *CD* en la segunda posición de acoplador, como se muestra en la figura 3-10*b*).

5 Ahora transfiera estas relaciones hac ia atrás, a la primera posición de acoplador C_1D_1, de modo que la posición del plano de fijación $O_2'O_4'$ guarde la misma relación con C_1D_1 que O_2O_4 con la segunda posición de acoplador C_2D_2. Con esto se pretende que el plano de fijación se mueva de O_2O_4 a $O'_2O'_4$ en vez de que el acoplador se desplace de C_1D_1 a C_2D_2. Es decir, se *invierte* el problema.

6 Repita el proceso para la tercera posición del acoplador, como se muestra en la figura 3-10*d*), y transfiera la tercera posición relativa del eslabón fijo a la primera posición, la de referencia, como se ilustra en la figura 3-10*e*).

7 Las tres posiciones invertidas del plano de fijación, que corresponden a las tres posiciones del acoplador deseadas, se dejan como O_2O_4, $O'_2O'_4$ y $O''_2O''_4$ y también se renombran como E_1F_1, E_2F_2 y E_3F_3, según se muestra en la figura 3-10*f*). Éstas corresponden a las tres posiciones del acoplador que se indican en la figura 3-10*a*). Observe que ahora no se necesitan las tres líneas originales C_1D_1, C_2D_2 y C_3D_3 para la síntesis de eslabonamiento.

Se pueden utilizar estas tres nuevas líneas, E_1F_1, E_2F_2 y E_3F_3, con el fin de obtener los puntos de unión *GH* (pivotes móviles) en el eslabón 3, lo que permitirá que los pivotes fijos deseados O_2 y O_4 se empleen para las tres posiciones de salida especificadas. En efecto, ahora se considerará el eslabón de fijación O_2O_4 como un acoplador que se mueve a través del inverso de las tres posiciones originales, se obtendrán los "pivotes de fijación" *GH* necesarios para tal movimiento invertido y se colocarán en el acoplador real. El proceso de inversión efectuado en el ejemplo 3-7 y la figura 3-10 cambió las funciones del acoplador y del plano de fijación. Lo demás es idéntico a lo realizado en el ejemplo 3-5 y en la figura 3-8. El resultado de la síntesis debe reinvertirse para obtener la solución.

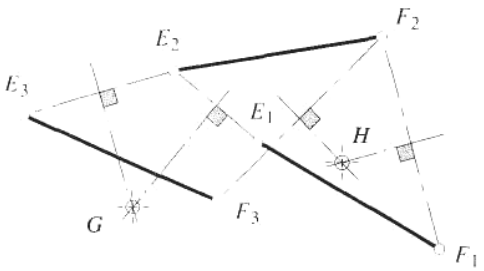
EJEMPLO 3-8

Determinación de los pivotes móviles para tres posiciones y pivotes fijos especificados.

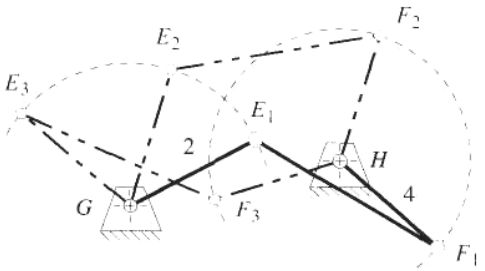
Problema: Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para mover el eslabón *CD* que se muestra de la posición C_1D_1 a la C_2D_2 y luego a la posición C_3D_3. Utilice los pivotes fijos especificados O_2 y O_4. Obtenga mediante inversión las ubicaciones de pivote móvil requeridas en el acoplador.

Solución: Utilice las posiciones de eslabón de fijación invertido E_1F_1, E_2F_2 y E_3F_3, que se obtuvieron en el ejemplo 3-7, y halle los pivotes fijos para tal movimiento invertido; luego reinvierta el eslabonamiento resultante con el fin de crear los pivotes móviles para las tres posiciones del acoplador *CD* que usan los pivotes fijos seleccionados O_2 y O_4, como se muestra en la figura 3-10a). (Véase también la figura 3-11.)

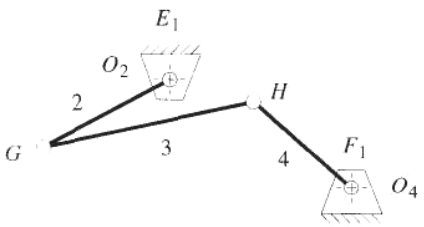
1 Inicie con las tres posiciones invertidas en el plano, como se indica en las figuras 3-10*f*) y 3-11*a*). Los segmentos E_1F_1, E_2F_2 y E_3F_3 definen las tres posiciones del eslabón invertido que hay que mover.



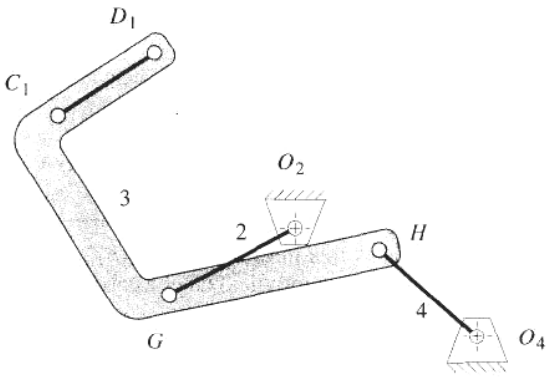
a) Construcción para hallar los rotopolos GyH



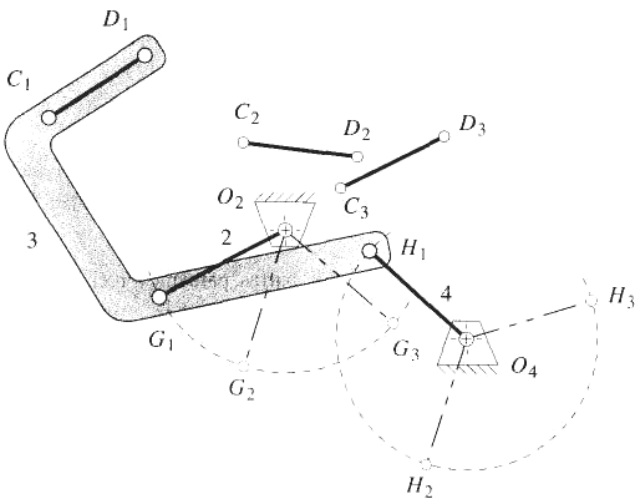
b) Inversión correcta del eslabonamiento deseado



c) Reinversión para obtener el resultado



d) Recolocación de la línea *CD* en el eslabón 3



e) Las tres posiciones (el eslabón 4 impulsa en sentido contrario al de las manecillas del reloj)

FIGURA 3-11

Construcción del eslabonamiento para tres posiciones con pivotes fijos especificados por inversión

2 Trace líneas de construcción desde el punto E_1 hasta E_2 y del E_2 al E_3.

3 Bisecte los segmentos E_1E_2 y E_2E_3 y prolongue las mediatrices hasta que se intersequen. Marque la intersección como *G*.

4 Repita los pasos 2 y 3 para las líneas F_1F_2 y F_2F_3. Marque la intersección como *H*.

5 Una *G* con E y desígnelo eslabón 2. Una *H* con F_1 y llámelo el eslabón 4. Véase la figura 3-11*b*).

6 En este eslabonamiento invertido el segmento E_1F_1 es el acoplador, eslabón 3; el segmento *GH* es el eslabón "de fijación" 1.

7 Ahora se debe reinvertir el eslabonamiento para volver a la configuración original. El segmento E_1F_1 es realmente el eslabón de fijación O_2O_4 y *GH* es el acoplador. En la figura 3-11*c*) se muestra la reinversión del eslabonamiento en el que los puntos *G* y *H* son ahora los pivotes móviles en el acoplador, y E_1F_1 nuevamente es el eslabón fijo O_2O_4. (Véase la figura 3-10*e*).)

8 En la figura 3-11*d*) se reintroduce la línea original C_1D_1 en su relación correcta con el segmento O_2O_4 en la posición inicial, como se indica en el planteamiento del problema original en la figura 3-10*a*). Esto constituye el plano del acoplador requerido y define una forma mínima del eslabón 3.

9 Los movimientos angulares requeridos para alcanzar la segunda y tercera posiciones de la línea *CD*, como se ilustra en la figura 3-11e), son iguales a los definidos en la figura 3-11*b*) para la inversión de eslabonamiento. El ángulo F_1HF_2 de la figura 3-11*b*) es igual al $H_1O_4H_2$ de la figura 3-11*e*), y el F_2HF_3 es igual al $H_2O_4H_3$. Las excursiones angulares del eslabón 2 retienen la misma relación entre las figuras 3-11*b*) y *e*). Los movimientos angulares de los eslabones 2 y 4 son los mismos para ambas inversiones, ya que las excursiones de eslabón son relativas entre sí.

10 Compruebe la condición de Grashof. Observe que cualquier condición de Grashof es potencialmente aceptable en este caso, siempre que el eslabonamiento tenga movilidad entre las tres posiciones. Esta solución es un eslabonamiento de no Grashof.

11 Elabore un modelo de cartulina y compruebe su funcionamiento para asegurarse de que se puede pasar de una posición inicial a una final sin encontrar posiciones límite (agarrotamiento). En este caso los eslabones 3 y 4 alcanzan una posición de agarrotamiento entre los puntos H_1 y H_2. Esto significa que este eslabonamiento no puede impulsarse desde el eslabón 2, ya que quedará bloqueado en esa posición de agarrotamiento. Debe impulsarse desde el eslabón 4.

Al invertir el problema original se le ha reducido a una forma más manejable que permite una solución directa por el método general de síntesis de tres posiciones de los ejemplos 3-5 y 3-6.

Síntesis posicional para más de tres posiciones

Debe ser obvio que cuantas más restricciones se impongan en estos problemas de síntesis, más complicada será la tarea de llegar a una solución. Cuando se definen más de tres posiciones del eslabón de salida la dificultad aumenta sustancialmente.

SÍNTESIS DE CUATRO POSICIONES no se adapta muy bien a las soluciones gráficas de tipo manual, aunque Hall[3] presenta un enfoque. Quizás el mejor planteamiento es el utilizado por Sandor, Erdman[4] y otros investigadores, un método de síntesis cuantitativa que requiere una computadora para su ejecución. De manera breve, se formula un conjunto de ecuaciones vectoriales simultáneas para representar las cuatro posiciones deseadas de todo el eslabonamiento. Las ecuaciones se resuelven después de que el diseñador elige la magnitud de algunas variables. Tanto el programa de computación LINCAGES[1] de Erdman y colaboradores, como el programa KINSYN[5] de Kaufman, proporcionan un conveniente medio gráfico para las elecciones de diseño necesarias en la resolución del problema de cuatro posiciones. Véase en el capítulo 5 una descripción adicional.

3.5 MECANISMOS DE RETORNO RÁPIDO

En muchas aplicaciones de diseño de máquinas se necesita una diferencia en la velocidad media entre sus carreras "de avance" y "de retorno". Por lo común el eslabonamiento realiza algún trabajo externo en la carrera de avance adelante, y la de retorno necesita efectuarse con tanta rapidez como sea posible, de modo que quede disponible un máximo de tiempo para la carrera de trabajo. Muchas configuraciones de eslabones proporcionarán esta característica. ¡El único problema consiste en sintetizar lo correcto!

Mecanismo de retorno rápido de cuatro barras

El eslabonamiento sintetizado en el ejemplo 3-1 es quizá la muestra más simple de problema de diseño de un eslabonamiento de cuatro barras (véase la figura 3-4 y el archivo de disco F03-04.4br del programa FOURBAR). Es una manivela-balancín que aporta dos posiciones de balancín con tiempos iguales para las carreras de avance y de retorno. A éste se le llama eslabonamiento *de no retorno rápido* y es un caso especial del caso más general de retorno rápido. La razón para su estado de no retorno rápido es el posicionamiento del centro de manivela O_2 en la cuerda B_1B_2 prolongada. Esto da como resultado que la manivela describa ángulos iguales de 180° cuando impulsa al balancín desde un extremo (posición de agarrotamiento) al otro. Si la manivela gira con velocidad angular constante, como tenderá a hacerlo cuando se impulse con un motor, entonces cada giro de 180° hacia adelante y hacia atrás requiere el mismo lapso. Ensaye esto con su modelo de cartulina del ejemplo 3-1 haciendo girar la manivela a velocidad uniforme, y observe el movimiento y la velocidad del balancín.

Si el centro de manivela O_2 se localiza fuera de la cuerda B_1B_2 prolongada, como se muestra en las figuras *3-1b)* y 3-12, entonces la manivela describirá ángulos desiguales entre las posiciones de agarrotamiento (definidas como de colinealidad de manivela y acoplador). Ángulos desiguales darán un tiempo desigual cuando la manivela gira a velocidad constante. Estos ángulos se denominan α y β en la figura 3-12. El cociente α/β se llama relación de tiempo (T_R) y define el grado de retorno rápido del eslabonamiento. Observe que el término retorno rápido se usa arbitrariamente para describir esta clase de eslabonamiento. Si la manivela girara en sentido opuesto sería un mecanismo de avance rápido. Dado un eslabonamiento completo, es una tarea trivial estimar la relación de tiempo midiendo o calculando los ángulos α y β. Es más difícil diseñar el eslabonamiento para una relación de tiempo elegida. Hall[16] proporciona un método gráfico para sintetizar un eslabonamiento de retorno rápido de cuatro barras de Grashof. Para ello se necesita calcular los valores de α y β que den la relación de

tiempo especificada. Se pueden formular dos ecuaciones que incluyan α y β y resolverlas simultáneamente.

$$T_R = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \alpha + \beta = 360 \tag{3.1}$$

También se debe definir un ángulo de construcción

$$\delta = |180 - \alpha| = |180 - \beta| \tag{3.2}$$

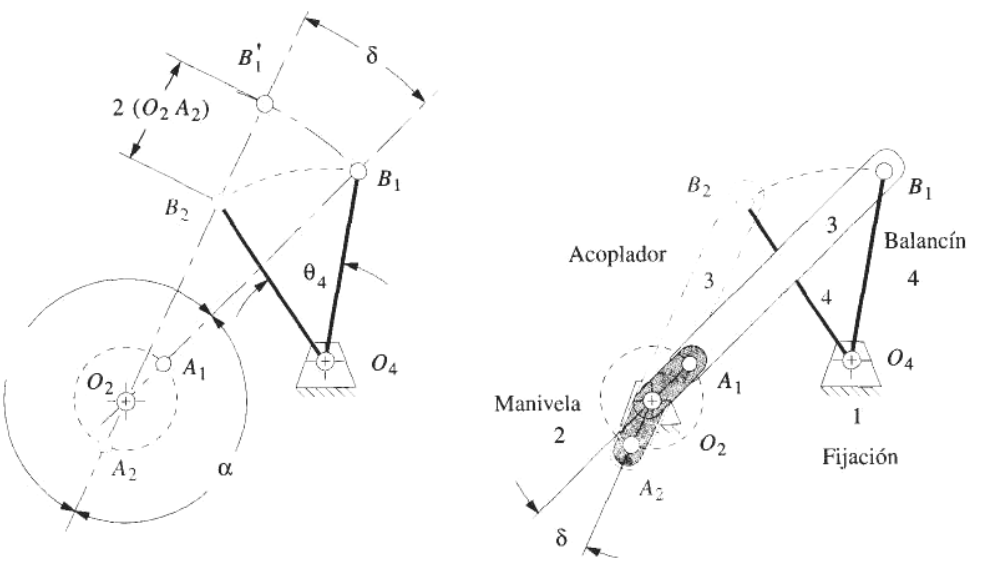
que se empleará para sintetizar el eslabonamiento.

EJEMPLO 3-9

Eslabonamiento de cuatro barras de manivela-balancín de retorno rápido para una relación de tiempo especificada.

Problema: Rediseñe el ejemplo 3-1 para proporcionar una relación de tiempo de 1:1.25, con movimiento de balancín de salida de 45°.

Solución: (Véase la figura 3-12.)



a) Construcción de una manivela-balancín de Grashof con retorno rápido

b) El eslabonamiento terminado en sus dos posiciones de agarrotamiento

FIGURA 3-12

Eslabonamiento de manivela-balancín de cuatro barras de Grashof y de retorno rápido

1 Trace el eslabón de salida O_4B en ambas posiciones extremas en una localización conveniente, de tal manera que se subtienda el ángulo de movimiento deseado, es decir, θ_4.

2 Calcule α, β y δ mediante las ecuaciones 3.1 y 3.2. Para este ejemplo, $\alpha = 160°$, $\beta = 200°$ y $\delta = 20°$.

3 Trace una línea de construcción que pase por el punto B_1 a un ángulo conveniente.

4 Trace una línea de construcción por el punto B a un ángulo δ desde la primera línea.

5 Marque la intersección de las dos líneas de construcción como O_2.

6 El segmento O_2O_4 define ahora el eslabón de fijación.

7 Para calcular las longitudes de manivela y acoplador mida O_2B_1 y O_2B_2, y resuelva simultáneamente las ecuaciones:

$$\text{Acoplador} + \text{manivela} = O_2B_1$$

$$\text{Acoplador} - \text{manivela} = O_2B_2$$

Para obtener la longitud de manivela también se puede describir un arco con centro en O_2 desde B_1 hasta cortar la línea O_2B_2 prolongada. Marque esa intersección como B_1'. El segmento B_2B_1' tiene el doble de la longitud de manivela. Biseque este segmento para medir la longitud de manivela O_2A_1.

8 Calcule la condición de Grashof. Si es de no Grashof repita los pasos 3 a 8, con O_2 adelante de O_4.

9 Elabore un modelo de cartulina del eslabonamiento y articúlelo para comprobar su funcionamiento.

10 Compruebe los ángulos de transmisión.

Este método funciona bien para relaciones de tiempo bajas de aproximadamente 1:1.5. Más allá de este valor los ángulos de transmisión serán deficientes y se necesitará un eslabonamiento más complejo. Introduzca el archivo F03-12.4br en el programa FOURBAR para ver en acción el ejemplo 3-9.

Mecanismo de retorno rápido de seis barras

Las relaciones de tiempo mayores, de casi 1:2, se obtienen mediante el diseño de un eslabonamiento de seis barras. La estrategia aquí es diseñar primero un mecanismo de eslabón de arrastre de cuatro barras que tenga la relación de tiempo deseada entre su manivela impulsora y su manivela impulsada (o "arrastrada"), y luego agregar una salida de diada (dos barras) impulsada por la manivela de arrastre. Esta diada puede configurarse para que tenga un balancín o una corredera de traslación como eslabón de salida. Se comenzará por sintetizar el eslabonamiento de cuatro barras con eslabón de arrastre y luego se agregará la diada.

EJEMPLO 3-10

Eslabonamiento de arrastre de seis barras de eslabón de retorno rápido para una relación de tiempo especificada.

Problema: Proporcione una relación de tiempo de 1:1.4 con movimiento de balancín de 90°.

Solución: (Véase la figura 3-13.)

1 Calcule α y β mediante las ecuaciones 3.1. Para este ejemplo $\alpha = 150°$ y $\beta = 210°$.

2 Trace una recta de centros *XX* en una posición conveniente.

3 Elija una ubicación el pivote de manivela O_2 en la recta *XX* y trace un eje *YY* perpendicular a *XX* a través de O_2.

4 Trace un círculo de radio conveniente O_2A alrededor del centro O_2.

5 Trace el ángulo con vértice en O_2, simétrico respecto del cuadrante uno.

6 Marque los puntos A_1 y A_2 en las intersecciones de las líneas que subtienden el ángulo α y el círculo de radio O_2A.

7 Coloque el compás a un radio conveniente *AC* con la longitud suficiente para cortar la recta *XX* en dos lugares, a uno y otro lados de O_2, cuando se desplace de A_1 a A_2. Marque las intersecciones como C_1 y C_2.

8 El segmento O_2A es la manivela impulsora (eslabón 2) y el A_1C_1 es el acoplador (eslabón 3).

9 La distancia C_1C_2 es dos veces la longitud de la manivela impulsada (arrastrada). Biséctela para localizar el pivote fijo O_4.

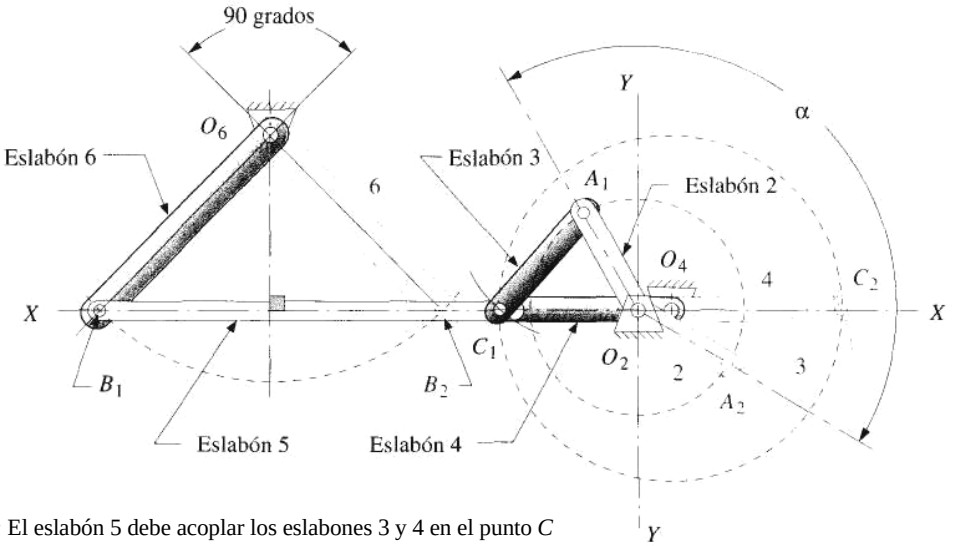
10 El segmento O_2O_4 define ahora el eslabón de fijación. El segmento O_4C_1 es la manivela impulsada (eslabón 4).

11 Calcule la condición de Grashof. Si resulta de no Grashof repita los pasos 7 a 11, con un radio menor en el paso 7.

12 Invierta el método del ejemplo 3-1 para crear la diada de salida, use *XX* como la cuerda y O_4C_1 como la manivela impulsora. Los puntos B_1 y B_2 estarán en la recta *XX* y a una distancia de $2O_4C_1$. El pivote O_6 se hallará en la bisectriz perpendicular de B_1B_2 a una distancia de la recta *XX* que subtiende el ángulo especificado de balancín de salida.

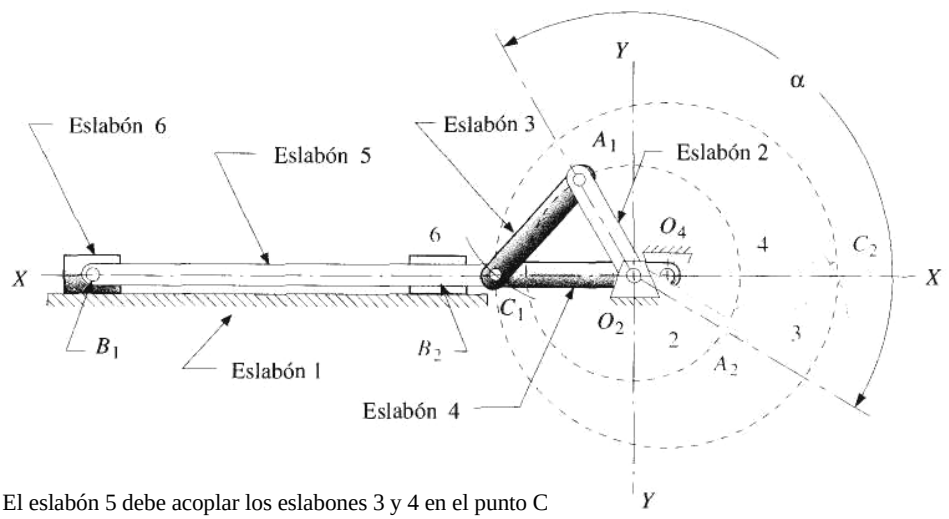
13 Compruebe los ángulos de transmisión.

Este eslabonamiento proporciona un retorno rápido cuando un motor de velocidad constante se une al eslabón 2. Dicho eslabón pasará por el ángulo α mientras el eslabón 4 (que arrastra la diada de salida) pasa por los primeros 180 de la posición C_1 a la C_2. Luego, mientras el eslabón 2 completa su ciclo a través de β grados, la etapa de salida



Nota: El eslabón 5 debe acoplar los eslabones 3 y 4 en el punto *C*

a) Mecanismo de seis barras de retorno rápido, eslabón de arrastre y salida de balancín



Nota: El eslabón 5 debe acoplar los eslabones 3 y 4 en el punto C

b) Mecanismo de seis barras de retorno rápido, eslabón de arrastre y salida de corredera

FIGURA 3-13

Síntesis de un mecanismo de seis barras con eslabón de arrastre y retorno rápido

completará otros 180° de C_2 a C_1. Como el ángulo β es mayor que α, la carrera de avance dura más. Note que el desplazamiento cordal de la diada de salida es el doble de la longitud de la manivela O_4C_1. Esto es independiente del desplazamiento angular del eslabón de salida, que puede ajustarse al mover el pivote O_6 más cerca o más lejos de la línea *XX*.

Se optimizará el ángulo de transmisión en la junta entre el eslabón 5 y 6 si el pivote fijo O_6 se coloca en la mediatriz de la cuerda B_1B_2, como se muestra en la figura 3-13a). Si se desea una salida de traslación la corredera (eslabón 6) se ubicará en la recta *XX y* oscilará entre B_1 y B_2, como se indica en la figura 3-13b). El tamaño elegido arbitrariamente de éste o cualquier otro eslabonamiento puede ampliarse o reducirse multiplicando todas las longitudes de los eslabones por el mismo factor de escala. Por tanto, un diseño elaborado con un tamaño arbitrario puede adaptarse a cualquier empaque. Introduzca el archivo F03-13a.6br en el programa SIXBAR para ver el ejemplo 3-10 en acción.

MANIVELA-CORREDERA DE RETORNO RÁPIDO En la figura 3-14 se ilustra un mecanismo utilizado comúnmente que es capaz de tener grandes relaciones de tiempo. Con frecuencia se emplea en máquinas conformadoras de metal para proporcionar una carrera de avance lento (corte) y una de retorno rápido, cuando la herramienta cortante no realiza trabajo. Es la inversión núm. 2 del mecanismo manivela-corredera como se indica en la figura 2-13*b)*. Es muy fácil sintetizar este eslabonamiento mediante el simple movimiento del pivote de balancín O_4 a lo largo de la línea central vertical O_2O_4, mientras se mantienen tangentes a la circunferencia de la manivela las dos posiciones extremas del eslabón 4, hasta que se obtiene la relación de tiempo (α/β) deseada. Note que también queda definido el desplazamiento angular del eslabón 4. El eslabón 2 es el de entrada, y el 6 el de salida.

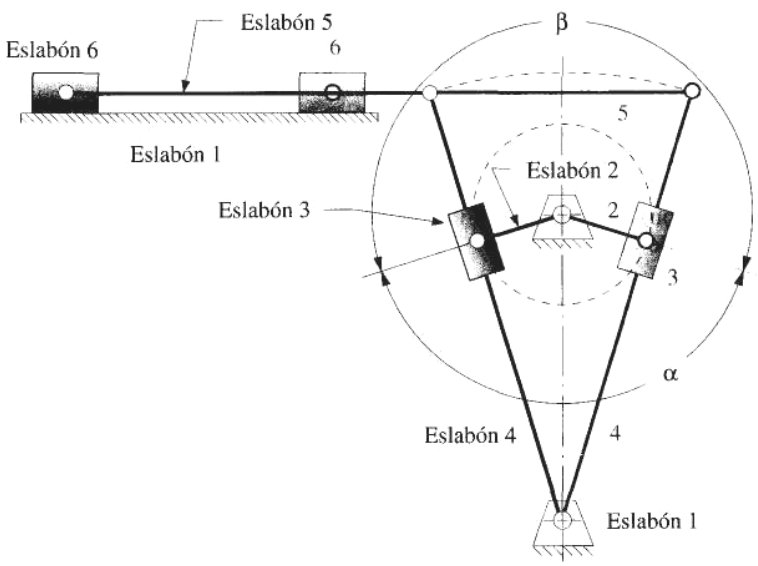


FIGURA 3-14
Mecanismo de retorno rápido, del tipo de manivela de cepilladora

De acuerdo con la longitud relativa de los eslabones la cadena puede considerarse como mecanismo **Whitworth** o **de manivela de cepilladora.** Si el eslabón más corto es el de fijación, entonces se comportará como un eslabonamiento de doble manivela o *mecanismo Whitworth,* en el que ambos eslabones pivotados realizan revoluciones completas, como se aprecia en la figura 2-13b). Si el eslabón más corto es la manivela impulsora, entonces se comportará como un eslabonamiento de manivela-balancín o *mecanismo de manivela de cepilladora,* como se muestra en la figura 3-14. Son la misma inversión, ya que en cada caso la corredera está en movimiento complejo.

3.6 CURVAS DE ACOPLADOR

El **acoplador** es el eslabón más interesante en cualquier eslabonamiento. Está en movimiento complejo, por consiguiente, los puntos en tal elemento pueden tener movimientos de trayectoria de grado superior.* En general, cuantos más eslabones haya, más alto será el grado de la curva generada. "Grado" significa aquí *la potencia más alta de cualquier término en su ecuación.* Una curva (función) puede tener *tantas* intersecciones (raíces) con una recta, como sea el grado de la función. La *manivela-corredera de cuatro barras* tiene, en general, curvas de acoplador de cuarto grado; el *eslabonamiento de cuatro barras conjuntas de pasador,* hasta de sexto grado.† El eslabonamiento de cinco barras con engranaje, el de seis barras y ensamblajes más complicados tendrán curvas de mayor grado. Wunderlich[7b] dedujo una expresión para el grado más alto, m, posible en una curva de acoplador de un mecanismo de *n* eslabones unido solamente con juntas giratorias.

$$m = 2 \cdot 3^{(n/2-1)} \tag{3.3}$$

Esto da, respectivamente, los grados de 6, 18 y 54 a las curvas de acoplador de un eslabonamiento de cuatro, seis y ocho barras. Los puntos específicos en sus acopladores pueden tener curvas degeneradas de grado inferior, por ejemplo las juntas de pasador entre cualquier manivela o balancín, y el acoplador que describe curvas de segundo grado (circunferencias). El eslabonamiento de paralelogramo de cuatro barras tiene curvas de acoplador degeneradas, todas son circunferencias.

Todos los eslabonamientos que poseen uno o más eslabones de acopladores "flotantes" generarán curvas de acoplador. Es interesante observar que las curvas de acoplador serán curvas cerradas, aun para eslabonamientos de no Grashof. El acoplador (o cualquier otro eslabón) se prolonga infinitamente en el plano. La figura 3-15 muestra un eslabonamiento de cuatro barras con su acoplador ampliado para que incluya un gran número de puntos, cada uno de los cuales describirá una curva de acoplador diferente. Observe que estos puntos pueden estar en cualquier parte del acoplador, incluso a lo largo de la línea *AB.* Desde luego, hay una infinidad de puntos en el acoplador y cada uno genera una curva distinta.

Las curvas de acoplador se usan para generar movimientos de trayectoria útiles en problemas de diseño de máquinas. Son capaces de *aproximar líneas rectas* y *arcos de círculo grandes* con centros distantes. Advierta que la curva de acoplador es una solución al problema de generación de trayectoria descrito en la sección 3.2. No es necesariamente una solución al problema de generación de movimiento, puesto que la orientación o actitud de una recta en el acoplador no se predice por la información contenida en la trayectoria. No obstante, es un dispositivo muy útil y puede convertirse en un generador de movimiento paralelo al añadir dos eslabones como se describe en la siguiente sección. Como se ve, se dispone de movimientos de aproximación de rectas, movimientos con paro

* En 1876 Kempe[7a] probó su teoría de que un eslabonamiento sólo con juntas de revolución (de pasador) y prismáticas (de deslizamiento) trazará cualquier curva algebraica de cualquier orden o complejidad. Pero el eslabonamiento para cierta curva puede ser excesivamente complejo e incapaz de recorrer una curva sin encontrarse con posiciones límite (agarrotamiento); incluso puede ser necesario que se desensamble y reensamble para alcanzar todos los puntos sobre la curva. Véase el análisis de un circuito y los defectos de rama en la sección 4.12. No obstante, esta teoría señala el potencial de movimientos interesantes desde la curva de acoplador.

† En ocasiones la ecuación algebraica de la curva de acoplador se denomina como una "séxtica tricircular" refiriéndose, respectivamente, a su circularidad de 3 y su grado de 6.

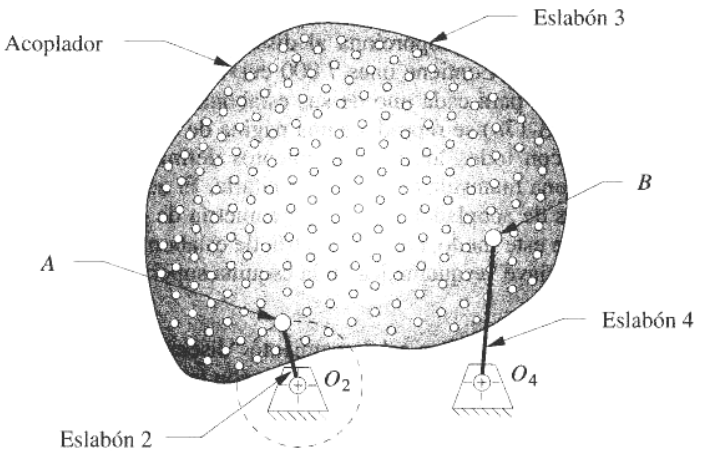


FIGURA 3-15

Acoplador de un eslabonamiento de cuatro barras extendido para incluir un gran número de puntos de acoplamiento

y conjuntos complicados de movimientos temporizados, aun desde la elemental cadena de cuatro barras y su variedad infinita de sorprendentes movimientos de curva de acoplador.

CURVAS **DE ACOPLADOR DE CUATRO BARRAS** Vienen en una variedad de formas que se clasifican *grosso modo* como se muestra en la figura 3-16. Hay una gama infinita de variación entre estas formas generalizadas. Algunas características de interés son los **puntos dobles** de curva, los cuales tienen dos tangentes. Pueden ser de dos tipos, la **cúspide** y **la crúnoda.** Una **cúspide** *es una forma puntiaguda en la curva que tiene la útil propiedad de que la velocidad instantánea es igual a cero.* El ejemplo más simple de curva con cúspide es la curva cicloide, la cual se genera por medio de un punto en el aro de una rueda que gira sobre una superficie plana. Cuando el punto toca esta superficie tiene la misma velocidad (nula) que todos los puntos en la superficie estacionaria, siempre que exista rodamiento puro y no haya deslizamiento entre los elementos. Cualquier cosa unida a un punto de cúspide llegará suavemente a la detención a lo largo de una trayectoria y luego se acelerará de modo suave a partir de ese punto en una trayectoria diferente. El que una cúspide tenga velocidad cero la hace valiosa en aplicaciones como los procesos de transporte, estampado y alimentación. Observe que *la aceleración en la cúspide no es nula.* Una **crúnoda** *crea una curva en forma de número ocho que contiene un punto doble en el cruce.* Las dos pendientes (tangentes) en una crúnoda dan al punto dos velocidades diferentes, de las cuales ninguna es cero con respecto a la cúspide. Por lo general una curva de acoplador de cuatro barras puede tener más de tres puntos dobles reales,* puede ser una combinación de cúspides y crúnodas como se aprecia en la figura 3-16.

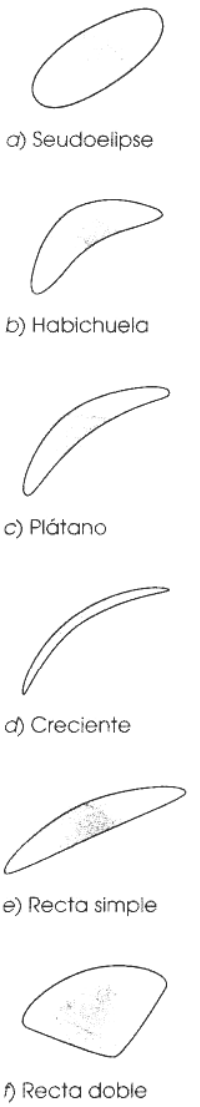
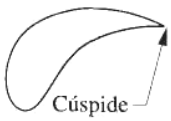


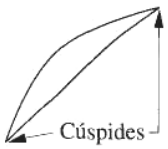
FIGURA 3-16 Parte 1

Catálogo sucinto de formas de curvas de acoplador

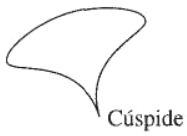
* En realidad la curva de acoplador de un eslabonamiento de cuatro barras tiene 9 puntos dobles, de los cuales 6 son comúnmente imaginarios. Sin embargo, Fichter y Hunt[8b] hacen notar que algunas configuraciones únicas del eslabonamiento de cuatro barras (es decir, los paralelogramos romboidales y los parecidos a esta configuración) pueden tener más de 6 puntos dobles reales, los que incluyen tres puntos dobles reales "propios" y 3 puntos dobles reales "impropios". Para casos no especiales de eslabonamientos de cuatro barras de Grashof, con ángulos de transmisión mínimos en aplicaciones adecuadas de ingeniería, sólo aparecerán los tres puntos dobles "propios".



g) Lágrima



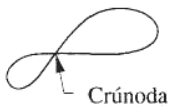
h) Cimitarra



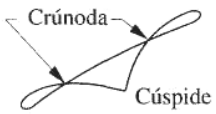
i) Sombrilla



j) Triple cúspide



k) "Ocho"



l) Triple espiral

FIGURA 3-16 Parte 2
Catálogo sucinto de formas de curvas de acoplador

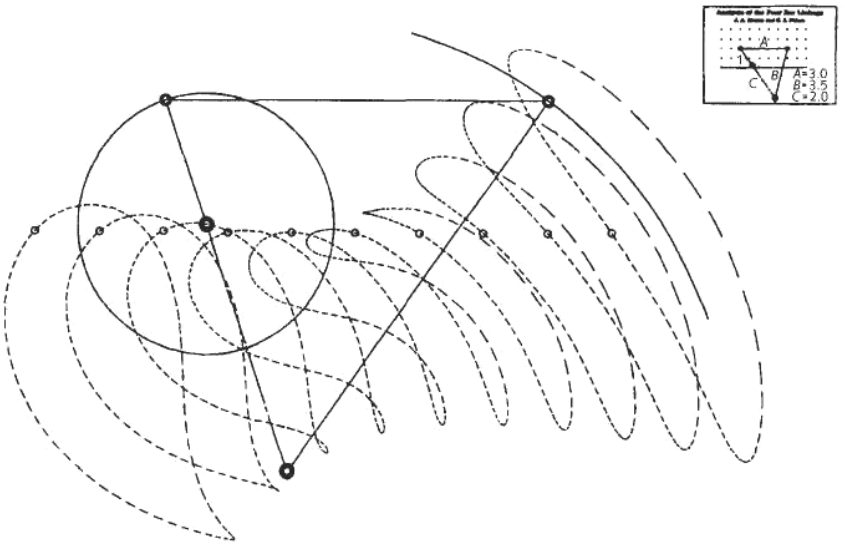
El atlas de *Hrones & Nelson* (H&N) de curvas de acoplador de cuatro barras [8a] es una obra de referencia útil que proporciona al diseñador un punto de partida para el diseño y análisis adicionales. Contiene unas 7 000 curvas de acoplador y define la geometría de eslabonamientos para cada uno de sus eslabonamientos de manivela-balancín de Grashof. En la figura 3-17a) se reproduce una página de ese libro. El atlas H&N está ordenado lógicamente, con todos los eslabonamientos definidos por sus relaciones de eslabones, con base en una manivela de longitud unitaria. El acoplador se muestra como una matriz de 50 puntos de acoplador para cada geometría de eslabonamiento y se presentan 10 por página. De este modo, cada geometría de eslabonamiento ocupa 5 páginas. Cada una contiene una "clave" esquemática en la esquina superior derecha que define las relaciones de eslabones.

En la figura 3-176) se muestra un eslabonamiento "disecado" que se halla en la parte superior de la página del atlas para ilustrar su relación con la información del mismo atlas. Los círculos dobles de la figura 3-17a) definen los pivotes fijos, y la manivela es siempre de longitud unitaria. En cada página se dan las relaciones de las otras longitudes de eslabón a la de manivela. Las longitudes de eslabón reales pueden ampliarse o reducirse para adaptarse a las restricciones del empaque; esto afectará el tamaño pero no la forma de la curva de acoplador. Cualquiera de los diez puntos de acoplador señalados puede utilizarse incorporándolo a un eslabón acoplador triangular. La ubicación del punto de acoplador elegido se obtiene del atlas y se define dentro del acoplador mediante el vector de posición R, cuyo ángulo constante ϕ se mide con respecto a la línea de centros del acoplador. Las curvas de acoplador H&N se indican con trazo punteado. Cada ciclo a rayas representa cinco grados de rotación de manivela. Así, para una velocidad de manivela supuesta constante, el espaciamiento de las rayas es proporcional a la velocidad de trayectoria. Los cambios en la velocidad y en la naturaleza de retorno rápido del movimiento de trayectoria del acoplador pueden verse claramente a partir del espaciamiento citado.

Puede estudiarse el atlas de eslabonamientos y obtener una solución aproximada para cualquier problema de generación de trayectoria. A continuación es posible llevar la solución tentativa hallada en el atlas a un recurso de *CAE*, como el programa FOURBAR o el *Working Model*, * y perfeccionar aún más el diseño con base en el análisis completo de posiciones, velocidades y aceleraciones que uno u otro proporcionan. Los datos que necesita el programa FOURBAR son las cuatro longitudes de eslabón y la ubicación del punto de acoplador elegido con respecto a la línea de centros del eslabón de acoplador, como se muestra en la figura 3-17. Estos parámetros se cambian fácilmente en el programa para modificar y perfeccionar el diseño. Introduzca el archivo F03-17b.4br en el programa FOURBAR para animar el eslabonamiento de esa figura.

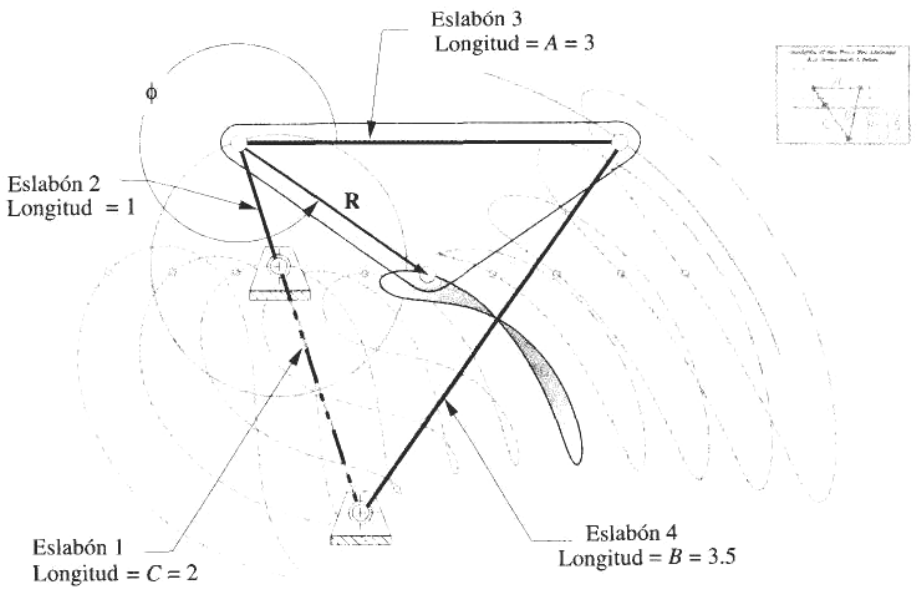
En la figura 3-18 se ilustra un ejemplo de aplicación de un eslabonamiento de cuatro barras a un problema práctico, que es un mecanismo de avance de película de una cámara (o un proyector) cinematográfica. El punto O_2 es el pivote de la manivela impulsada por un motor a velocidad constante. El punto O_4 es el pivote de balancín, y los puntos *A y B* son los pivotes móviles. Los puntos *A, B y C* definen el acoplador, y *C* es el punto de interés del acoplador. Una cinta cinematográfica consiste realmente en una serie de tomas fijas, y cada "cuadro" de la misma se proyecta durante una fracción de segundo en la pantalla. Entre cada toma la película debe correrse con rapidez desde un cuadro hasta el siguiente, mientras el obturador se cierra para dejar en blanco la pantalla. El ciclo total sólo toma 1/24 de segundo. La respuesta en tiempo del ojo humano es demasiado lenta para advertir el parpadeo asociado a este flujo discontinuo de imágenes fijas, así que aquello que se ve parece un continuo de imágenes cambiantes.

* Incluido en el CD-ROM de este libro.



o) Una página del atlas de Hrones y Nelson
de curvas de acoplador de cuatro barras*

Hrones, J. A. y Nelson, G. L. (1951). Analysis of the Fourbar Linkage, MIT Technology Press, Cambridge MA. Reproducido con autorización.



b) Creación del eslabonamiento a partir del atlas

FIGURA 3-17
Selección de una curva de acoplador y construcción del eslabonamiento a partir del atlas de Hrones y Nelson

* El atlas de Hrones y Nelson está agotado, pero puede estar disponible en University Microfilms, Ann Arbor, MI. También el *Atlas of Linkage Design and Analysis Vol I: The Four Bar Linkage*, similar al atlas de H&N, fue publicado recientemente y está disponible en Saltire Software, 9725 SW Gemini Drive, Beaverton, OR 97005, (800)659-1874.

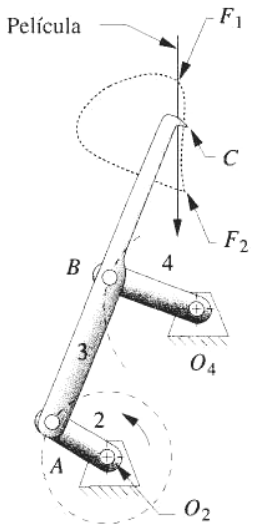


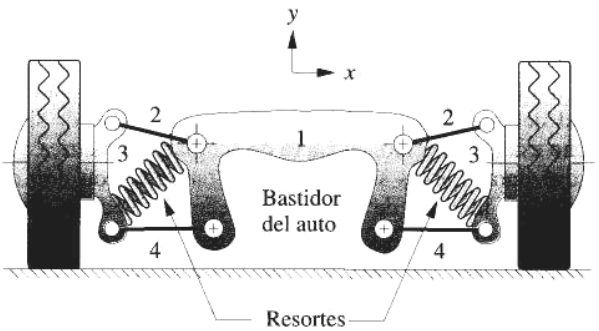
FIGURA 3-18

Mecanismo para el avance de película en una cámara cinematográfica De *Die Wissenschaftliche und Angenwandte Photographie; Kurt, Michel, (1955). Vol. 3, Harold Weise, Die Kinematographische Kamera, pág. 202, Springer Verlag, OHG, Viena.* (Introduzca el archivo F03-18.4br en el programa FOURBAR para la animación de este eslabonamiento)

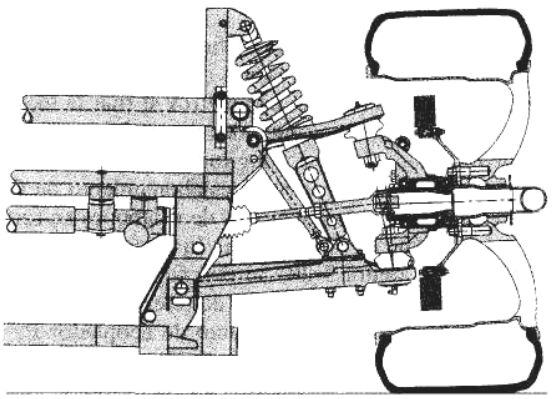
El eslabonamiento mostrado en la figura 3-18 se diseñó ingeniosamente para proporcionar el movimiento requerido. Un gancho se corta en el acoplador de esta cadena de cuatro barras de manivela-balancín de Grashof, en el punto *C,* lo cual genera la curva de acoplador mostrada. El gancho entrará en cada uno de los orificios de empuje de la película, cuando pase por el punto F_1. Observe que el sentido de movimiento del gancho en ese punto es casi perpendicular a la cinta, asi que entra limpiamente en el orificio para el diente de la rueda impulsora. Luego gira de manera brusca hacia abajo y sigue una línea que se aproxima burdamente a una recta cuando tira con rapidez hacia abajo de la película para colocar el siguiente cuadro. La película se conduce por separado sobre una guía recta llamada "compuerta". El obturador (impulsado por otro eslabonamiento desde el mismo eje de impulsión en O_2) se cierra durante este intervalo del movimiento de la película y deja en blanco la pantalla. En el punto F_2 hay una cúspide en la curva de acoplador que hace que el gancho se desacelere suavemente hasta la velocidad cero en la dirección vertical, y luego se acelere también suavemente hacia arriba y afuera del orificio para el diente de la rueda de empuje. El cambio brusco de dirección en la cúspide permite al gancho salir del orificio sin arañar la película, lo que ocasionaría el salto de una imagen en la pantalla cuando se abre el obturador. El resto del movimiento de la curva de acoplador es esencialmente "de desperdicio de tiempo", ya que se efectúa por el lado de atrás, a fin de que esté dispuesto para que entre de nuevo la película y se repita el proceso. Introduzca el archivo F03-18.4br en el programa FOURBAR para animar el eslabonamiento mostrado en la figura.

Algunas ventajas de utilizar este tipo de dispositivo para tal aplicación son: sencillez y poco costo (sólo cuatro eslabones, uno de los cuales es la estructura de la cámara), gran confiabilidad, experimenta baja fricción si se utilizan cojinetes adecuados en los pivotes y se puede temporizar confiablemente con otros sucesos en el mecanismo total de la cámara mediante el eje de transmisión común de un solo motor. Hay muchos otros ejemplos de curvas de acoplador de cuatro barras utilizados en máquinas y mecanismos de todas clases.

Otro ejemplo de una aplicación muy diferente es la suspensión de un automóvil (figura 3-19). En general los movimientos hacia arriba y hacia abajo de las ruedas del auto están controlados por algunas combinaciones de eslabonamientos de cuatro barras en un plano, dispuestas por duplicado para proporcionar control tridimensional, como se describió en la sección 3.2. Sólo algunos fabricantes emplean un verdadero eslabonamiento espacial en el que los eslabones no están colocados en planos paralelos. En todos los casos el ensamblaje de las ruedas se une al acoplador del ensamblaje de eslabonamientos, y su movimiento es a lo largo de un conjunto de curvas de acoplador. En este caso también interesa la orientación de la rueda, de modo que éste no es estrictamente un problema de generación de trayectoria. Mediante el diseño del eslabonamiento para controlar las trayectorias de los puntos múltiples en la rueda, área de contacto de la llanta, centro de la rueda, etcétera; todos estos puntos están en el mismo eslabón de acoplador prolongado, se logra la generación de movimiento como el del acoplador que tiene movimiento complejo. En las figuras 3-19a) y 3-19b) se muestran eslabonamientos planos de cuatro barras paralelos en los que se suspenden las ruedas. La curva de acoplador del centro de la rueda es casi una línea recta sobre el pequeño desplazamiento vertical requerido. Esto es deseable si se quiere mantener la llanta perpendicular al pavimento para una mejor tracción en todos los cambios de respuestas y viraje de la carrocería del auto. Ésta es una aplicación en la que un eslabonamiento de no Grashof es perfectamente aceptable, por ejemplo cuando la rotación completa de la rueda en este plano podría tener algunos resultados indeseables que sorprendieran al conductor. Se proporcionan, desde luego,

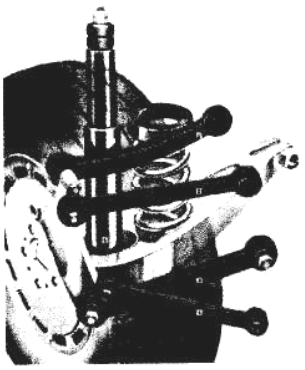


a) Los eslabonamientos planos de cuatro barras se reproducen en planos paralelos, desplazados en la dirección z, detrás de los eslabones mostrados



b) Eslabonamiento plano en paralelo utilizado para controlar el movimiento de la rueda delantera

(Cortesía de la Corporación Chrysler)



c) Eslabonamiento espacial verdadero con múltiples eslabones utilizado para controlar el movimiento de la rueda trasera

(Cortesía de Mercedes-Benz de Norteamérica Inc.)

FIGURA 3-19

Eslabonamientos utilizados en suspensiones de chasis de autos

topes para impedir tal comportamiento, de modo que podría emplearse incluso un eslabonamiento de Grashof. Los resortes sostienen el peso del vehículo y proporcionan un quinto "eslabón de fuerza" de longitud variable que estabiliza el mecanismo, como se describió en la sección 2.14. El eslabonamiento de cuatro barras sólo guía y controla los movimientos de las ruedas. En la figura 3-19c) se muestra un eslabonamiento espacial real de siete eslabones (que incluyen armazón y rueda) y nueve juntas (algunas de las cuales son de bola y casquillo) utilizadas para controlar el movimiento de la rueda trasera. Estos eslabones no se mueven en planos paralelos, sino más bien controlan el movimiento tridimensional del acoplador que lleva el ensamblaje de la rueda.

CURVAS DE ACOPLADOR SIMÉTRICAS DE CUATRO BARRAS Cuando la geometría de un eslabonamiento de cuatro barras es tal que el acoplador y el balancín son de la misma longitud de pasador a pasador, entonces todos los puntos de acoplador que se encuentran en una circunferencia centrada en la junta acoplador-balancín, con radio igual a la longitud del acoplador, generarán curvas de acoplador simétricas. La figura 3-20 muestra dicho eslabonamiento, su curva de acoplador simétrica y la localización de todos los puntos que darán curvas simétricas. Utilizando la notación de esa figura, el criterio para la simetría de la curva de acoplador puede establecerse como:

$$AB = O_4B = BP \tag{3.4}$$

Un eslabonamiento para el que la ecuación 3.4 es verdadera se denomina **eslabonamiento de cuatro barras simétrico.** El eje de simetría de la curva de acoplador es la línea O_4P trazada cuando la manivela O_2A y el eslabón de fijación O_2O_4 se extienden colinealmente (es decir, $\theta_2 = 180°$). Como se verá en las siguientes secciones las curvas de acoplador simétricas son muy útiles. Algunas dan buenas aproximaciones a arcos circulares y otras dan excelentes aproximaciones a líneas rectas (sobre una porción de la curva de acoplador).

En el caso general se requieren nueve parámetros para definir la geometría de un **eslabonamiento de cuatro barras no simétrico** con un punto de acoplador.* Esto se puede reducir a cinco como sigue. Se pueden eliminar tres parámetros al fijar la localización y orientación del eslabón de fijación. Las cuatros longitudes de eslabón se reducen a tres parámetros mediante la regularización de las tres longitudes de eslabón con el cuarto. Usualmente el eslabón más corto (la manivela si es un eslabonamiento de Grashof) se toma como el eslabón de referencia, y las tres relaciones de eslabones se forman como L_1/L_2, L_3/L_2, L_4/L_2, donde L_1 = fijación, L_2 = manivela, L_3= acoplador y L_4 = longitud del balancín, como se muestra en la figura 3-20. Se necesitan dos parámetros para localizar el punto de acoplador: la distancia desde un punto de referencia conveniente en el acoplador (ya sea *B o A* en la figura 3-20) hasta el punto de acoplador *P,* y el ángulo que la línea BP (o AP) forma con la línea de centros de acoplador *AB* (ya sea δ o γ). Así, con un eslabón de fijación definido, los cinco parámetros que definirán la geometría de un eslabonamiento de cuatro barras no simétrico (utilizando el punto *B* como la referencia en eslabón 3 y las marcas de la figura 3-20) son: L_1/L_2, L_3/L_2, L_4/L_2, BP/L_2 y γ. Observe que al multiplicar estos parámetros por un factor escalar cambiarán el tamaño del eslabonamiento y su curva de acoplador, pero no cambiará la forma de la curva de acoplador.

Un **eslabonamiento de cuatro barras simétrico** con un eslabón de fijación definido sólo necesita *tres parámetros* para definir su geometría debido a que tres de los cinco parámetros no simétricos son ahora iguales a la ecuación 3.4: $L_3/L_2 = L_4/L_2 = BP/L_2$. Los tres posibles parámetros para definir la geometría de un eslabonamiento de cuatro barras simétrico en combinación con la ecuación 3.4 son entonces: L_1/L_2, L_3/L_2 y γ. Al tener sólo tres parámetros en lugar de cinco se simplifica en gran medida el análisis del comportamiento de la forma de curva de acoplador cuando se varía la geometría del eslabonamiento. En la figura 3-20 se muestran otras relaciones para el acoplador del triángulo isósceles. La longitud *AP* y el ángulo δ son necesarios para introducir la geometría del eslabonamiento en el programa FOURBAR.

Kota[9] realizó un estudio extensivo de las características de las curvas de acoplador de los eslabonamientos de cuatro barras simétricos y trazó la forma de curva de acoplador como una función de los tres parámetros de eslabonamientos definidos antes. Definió un

* Los nueve parámetros independientes de un eslabonamiento de cuatro barras son: cuatro longitudes de eslabón, dos coordenadas del punto de acoplador con respecto al eslabón de acoplamiento, y tres parámetros que definen la localización y orientación de un eslabón fijo en el sistema de coordenadas global.

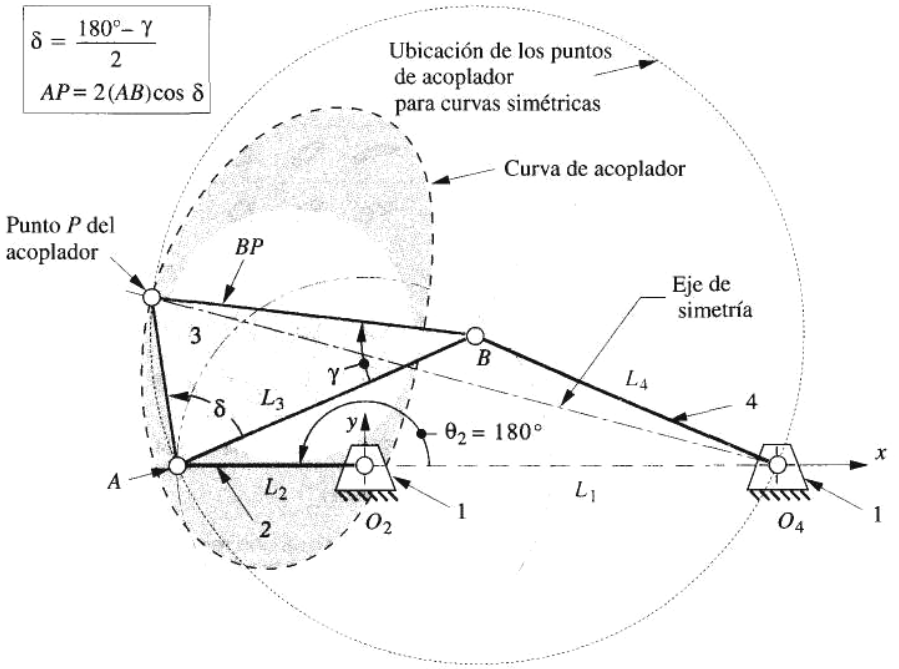


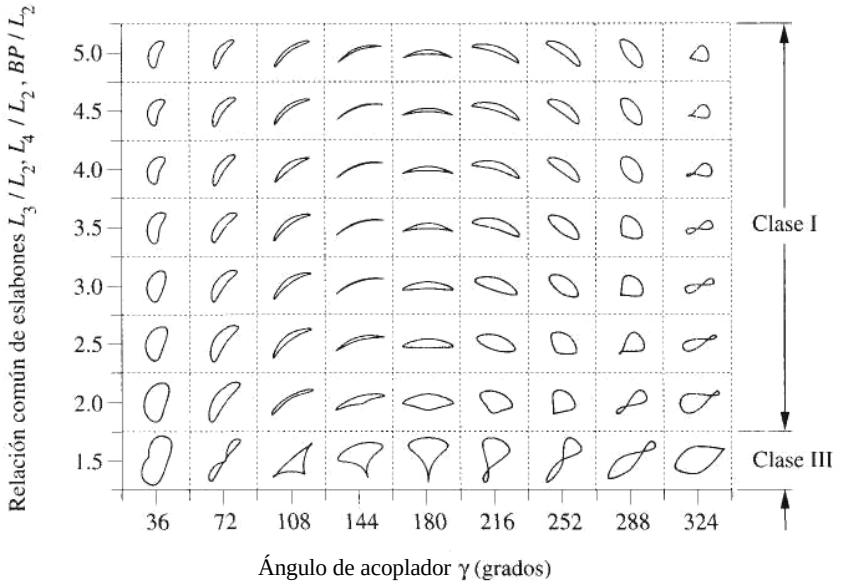
FIGURA 3-20

Eslabonamiento de cuatro barras con una curva de acoplador simétrica

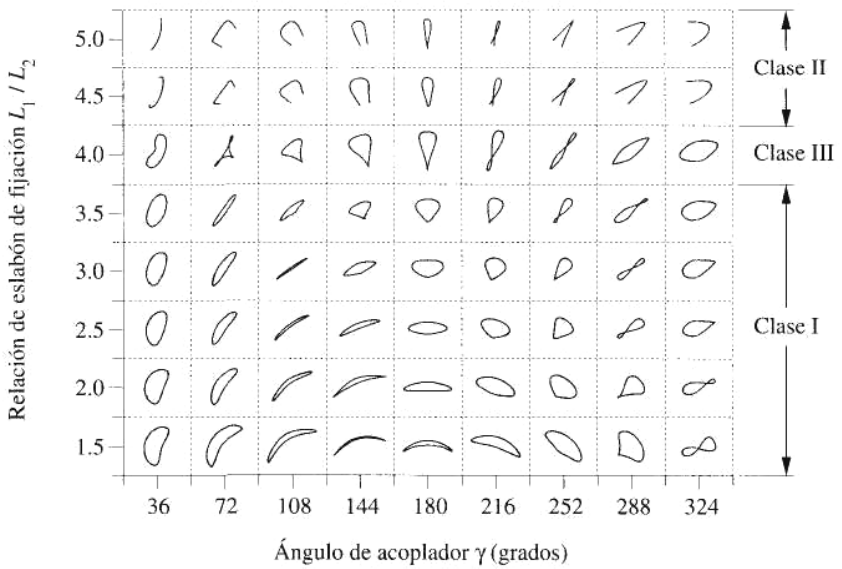
espacio de diseño tridimensional para trazar la forma de curva de acoplador. La figura 3-21 muestra dos secciones planas ortogonales tomadas a través de este espacio de diseño para valores particulares de relaciones de eslabón,* mientras que la figura 3-22 muestra un esquema del espacio de diseño. Si bien las dos secciones transversales de la figura 3-21 sólo muestran una pequeña fracción de la información en el diseño de espacio 3-D de la figura 3-22, dan una idea de la manera en que la variación de los parámetros de eslabonamiento afecta la forma de la curva de acoplador. Empleados en combinación con una herramienta de diseño de eslabonamientos como el programa FOURBAR, estas gráficas de diseño ayudan al diseñador a elegir los valores adecuados de los parámetros de eslabonamiento para completar la trayectoria de movimiento deseada.

CURVAS DE UN ACOPLADOR DE CINCO BARRAS CON ENGRANAJE (figura 3-23) Son más complejas que las de cuatro barras. Debido a que hay tres variables más de diseño independientes en la cadena de cinco barras con engranaje, en comparación con la de cuatro barras (una relación de eslabones adicional, la relación de engranes y el ángulo de fase entre los engranajes), las curvas de acoplador son de mayor grado que las del eslabonamiento de cuatro barras. Esto significa que las curvas pueden estar más convolucionadas y tienen más cúspides y crúnodas (lazos). De hecho, si la relación de engranes utilizada tiene un valor no entero, el eslabón de entrada tendrá que efectuar un número de revoluciones igual al factor necesario para convertir tal relación en un número entero,

* Adaptado a partir de los materiales proporcionados por el profesor Sridhar Kota de la Universidad de Michigan.



a) Variación de las formas de curvas de acoplador con una relación común de eslabones y un ángulo de acoplador para una relación de eslabón de fijación $L_1 / L_2 = 2.0$



fc>) Variación de las formas de curvas de acoplador con una relación de eslabón de fijación y ángulo de acoplador para una relación común de eslabones $L_3 / L_2 = L_4 / L_2 = BP / L_2 = 2.5$

FIGURA 3-21

Formas de curvas de acoplador de eslabonamientos simétricos de cuatro barras
Adaptado a partir de la referencia (9)

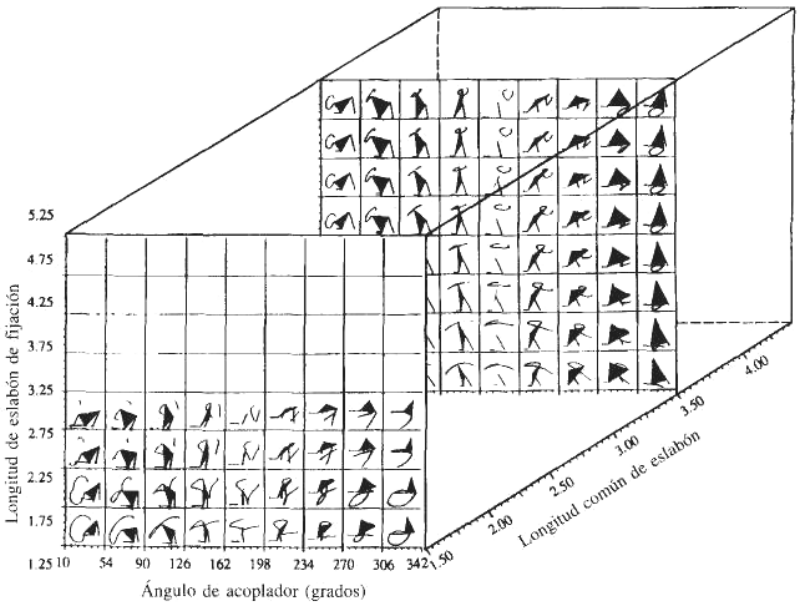


FIGURA 3-22

Mapa tridimensional de formas de curvas de acoplador de eslabonamientos simétricos de cuatro barras (9)

antes de que se repita el patrón de la curva de acoplador. En la obra *Atlas de mecanismos de cinco barras con engranaje* (GFBM por sus siglas en inglés),[110]! de Zhang, Norton, Hammond (ZNH), se muestran curvas de acoplador características para estos eslabonamientos limitados a una geometría simétrica (o sea, eslabón 2 = eslabón 5 y eslabón 3 = eslabón 4) y las relaciones de engranes de ±1 y +2. En la figura 3-23 se reproduce una página del atlas ZNH. En el apéndice E se tienen páginas adicionales. Cada una muestra la familia de curvas de acoplador obtenidas al variar el ángulo de fase, para un conjunto particular de relaciones de eslabones y relación de engranes. Una clave en la esquina superior derecha de cada pagina define las relaciones: α = eslabón 3/eslabón 2, β = eslabón 1/eslabón 2, λ = engrane 5/engrane 2. La simetría define los eslabones 4 y 5 como se indicó antes. El ángulo de fase ϕ se define sobre los ejes trazados para cada curva de acoplador y se ve que tiene un efecto significativo sobre la forma de la curva de acoplador resultante.

El atlas de referencia tiene el propósito de ser un punto de partida para un diseño de eslabonamiento de cinco barras con engranaje. Las relaciones de eslabones, la relación de engranes y el ángulo de fase se pueden introducir también en el programa FIVEBAR y luego variarse para observar los efectos sobre la forma de la curva de acoplador, las velocidades y las aceleraciones. Puede introducirse la asimetría de los eslabones y una localización de punto de acoplador distinta de la de junta de pasador entre los eslabones 3 y 4 que se define también en el programa FIVEBAR. Note que tal programa presupone que la relación de engranes está en la forma engrane 2/engrane 5, que es el inverso de la relación λ en el atlas ZNH.

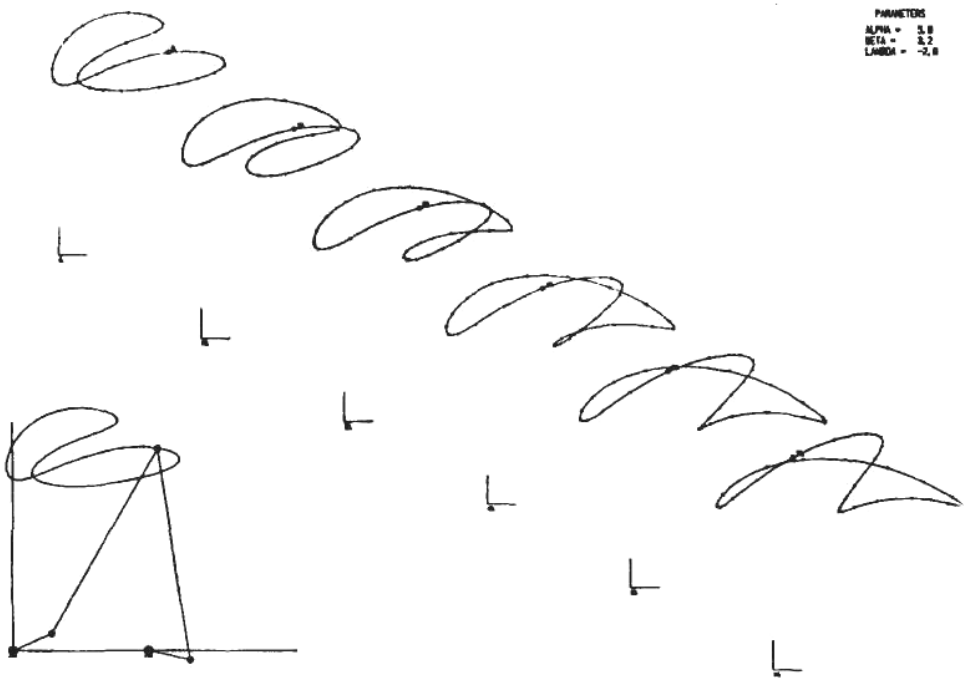


FIGURA 3-23

Una página del atlas de Zhang, Norton y Hammond, de curvas de acoplador para mecanismos de cinco barras con engranaje[10]

3.7 COGNADOS

En ocasiones se halla una buena solución para un problema de síntesis de eslabonamiento que satisface las restricciones de generación de trayectoria, pero la cual tiene los pivotes fijos en localizaciones impropias para la unión al plano de fijación disponible. En estos casos puede ser útil el empleo de un **cognado** del eslabonamiento. Hartenberg y Denavit[11] emplearon el término **cognado** para describir *un eslabonamiento, de geometría distinta, que genera la misma curva de acoplador.* Samuel Roberts (1875) y Chebyschev (1878) descubrieron independientemente el teorema que ahora lleva sus nombres:

Teorema de Roberts-Chebyschev

Tres diferentes eslabonamientos planos de cuatro barras articuladas describirán curvas de acoplador idénticas.

Hartenberg y Denavit[11] ampliaron este teorema para eslabonamientos manivela-corredera y para los de seis barras:

Dos diferentes eslabonamientos planos de manivela-corredera describirán curvas de acoplador idénticas.

La curva de un punto de acoplador de un eslabonamiento plano de cuatro barras también se describe mediante la junta de una diada de un eslabonamiento de seis barras apropiado.

La figura 3-24a) muestra un eslabonamiento de cuatro barras para el que se desea hallar los dos cognados. El primer paso es liberar los pivotes fijos O_A y O_B. Mientras se mantiene estacionario el acoplador los eslabones 2 y 4 se giran hasta la colinealidad con la línea de centros (A_1B_1) del eslabón 3, como se indica en la figura 3-24*b*). Ahora es posible trazar líneas paralelas a todos los lados de los eslabones en el eslabonamiento original a fin de crear el **diagrama de Cayley** en la figura 3-24c). En esta disposición esquemática se definen las longitudes y formas de los eslabones 5 a 10 que pertenecen a los cognados. Los tres eslabonamientos de cuatro barras comparten el punto de acoplador original *P* y generarán, por lo tanto, el mismo movimiento de trayectoria sobre sus curvas de acoplador.

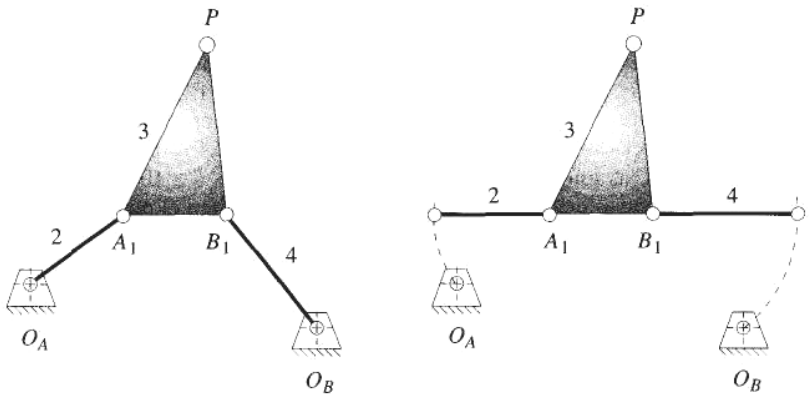
Para hallar la ubicación correcta del pivote fijo O_C del diagrama de Cayley, es necesario regresar los extremos de los eslabones 2 y 4 a las ubicaciones originales de los pivotes fijos O_A y O_B, según se muestra en la figura 3-25a). Los otros eslabones seguirán este movimiento y conservarán las relaciones de paralelogramo entre eslabones; el pivote fijo O_c estará entonces en su localización apropiada en el plano de fijación. A esta configuración, formada por tres cognados de eslabonamiento de cuatro barras que comparten la misma curva de acoplador, se le denomina **diagrama de Roberts.**

El diagrama de Roberts se puede trazar directamente a partir del eslabonamiento original, sin tener que recurrir al diagrama de Cayley, advirtiendo que los paralelogramos que forman los otros cognados también intervienen en el diagrama de Roberts y los tres acopladores forman triángulos semejantes. También es posible localizar directamente el pivote fijo O_c del eslabón original como se muestra en la figura 3-25a). Construya un triángulo similar al del acoplador localizando su base *(AB)* entre O_A y O_B. Su vértice estará en O_c.

La configuración de 10 eslabones de Roberts (nueve eslabones de Cayley más el de fijación) se puede articular ahora con cualquiera de las posiciones de agarrotamiento, y el punto *P* describirá la trayectoria original de acoplador, que es la misma para los tres cognados. El punto O_c no se moverá cuando se articule el eslabonamiento de Roberts, probando así que es un pivote fijo. Estos cognados se pueden separar como se muestra en la figura 3-25¿) y cualquiera de los tres eslabonamientos puede utilizarse para generar la misma curva de acoplador. Los eslabones correspondientes en los cognados tendrán la misma velocidad angular que el mecanismo original mostrado en la figura 3-25.

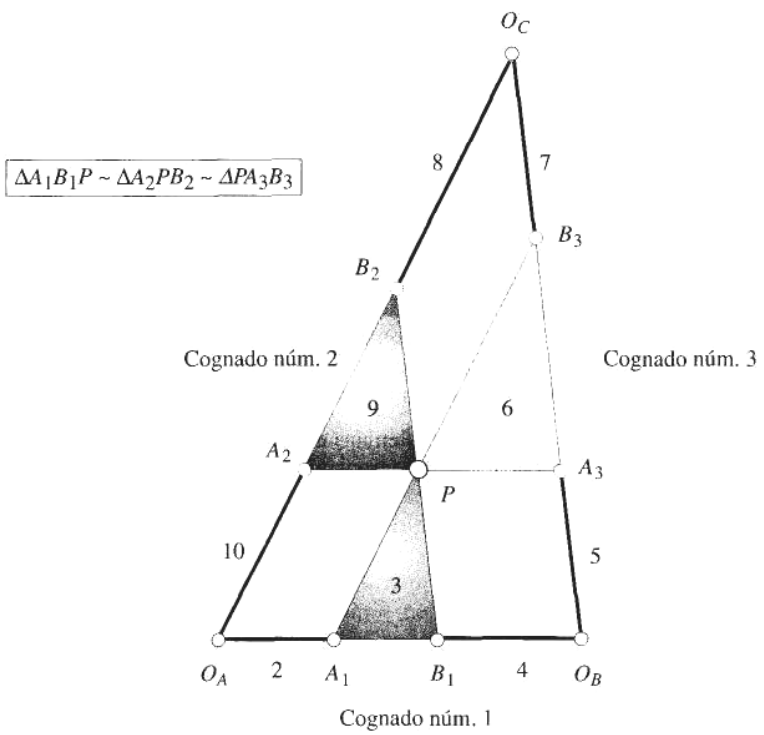
Nolle[ll2] cita un trabajo de Luck[13] (en alemán) en el que define el carácter de todos los cognados de cuatro barras y sus ángulos de transmisión. Si el eslabonamiento original es una manivela-balancín de Grashof, entonces un cognado será también una manivela-balancín y los otros serán un doble balancín de Grashof. El ángulo de transmisión mínimo del cognado de una manivela-balancín será el mismo que el de la manivela-balancín original. Si el eslabonamiento original es una doble manivela de Grashof (eslabón de arrastre), entonces ambos cognados también serán dobles manivelas y sus ángulos de transmisión mínimos serán iguales en los pares accionados por el mismo pivote fijo. Si el eslabonamiento original es un triple balancín de no Grashof, entonces ambos cognados serán también triples balancines.

Estas conclusiones indican que los cognados de los eslabonamientos de Grashof no ofrecen mejores ángulos de transmisión que el eslabonamiento original. Sus ventajas principales son la diferente localización del pivote fijo y las diferentes velocidades y aceleraciones de los otros puntos en el eslabonamiento. Mientras la trayectoria de acoplador sea la misma para todos los cognados, generalmente sus velocidades y aceleraciones no serán las mismas, puesto que la geometría total de cada cognado es diferente.



a) Eslabonamiento original de cuatro barras (cognado núm. 1)

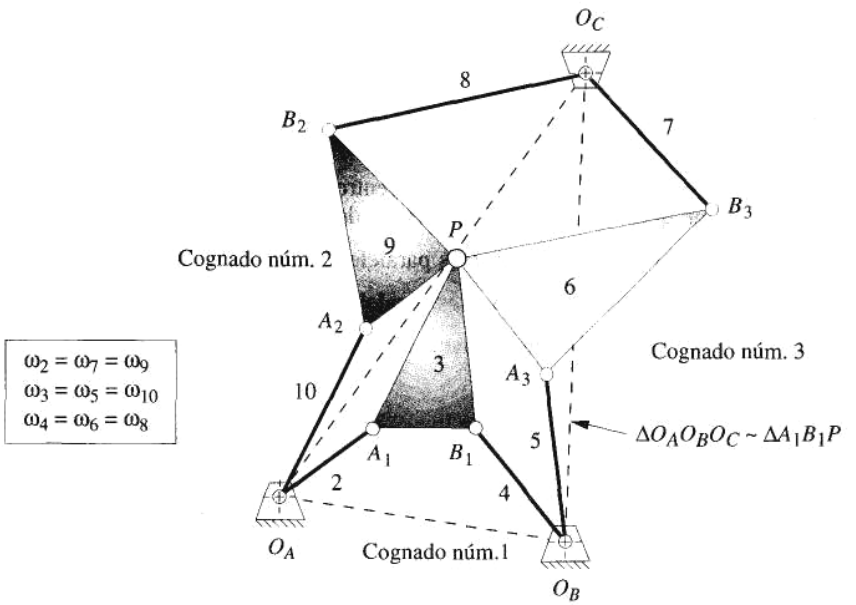
b) Se alinean los eslabones 2 y 4 con el acoplador



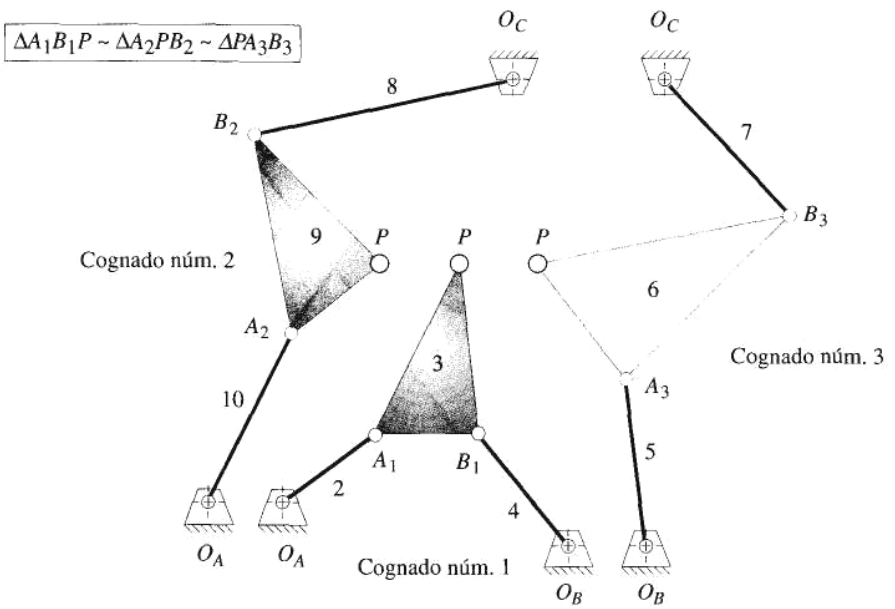
c) Se trazan líneas paralelas en todos los lados del eslabonamiento original de cuatro barras para crear los cognados

FIGURA 3-24

Diagrama de Cayley para encontrar cognados de un eslabonamiento de cuatro barras



o) Se regresan los eslabones 2 y 4 a sus pivotes fijos O_A y O_B. El punto O_C asumirá su posición apropiada



b) Se separan los tres cognados. El punto *P* tiene el mismo movimiento de trayectoria en cada cognado

FIGURA 3-25

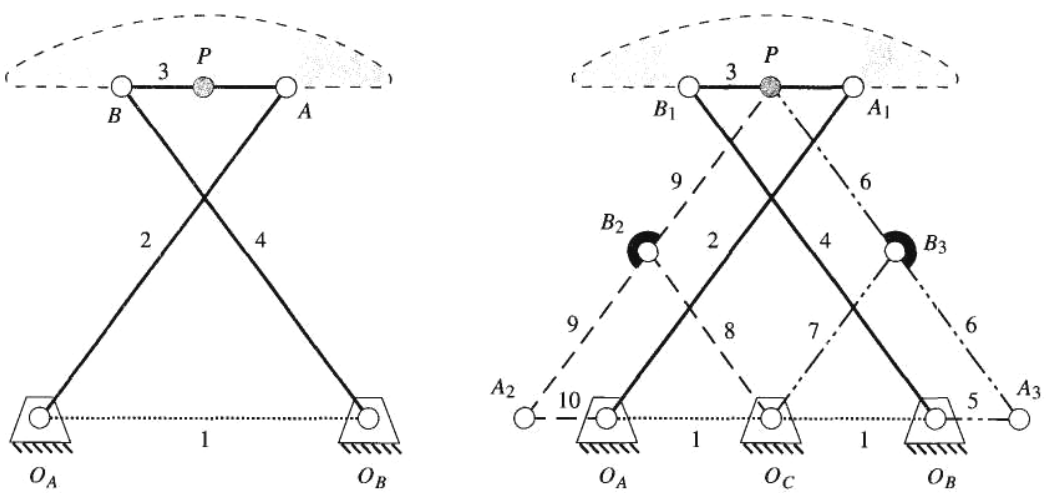
Diagrama de Roberts de tres cognados de cuatro barras

Cuando un punto de acoplador se encuentra en la línea de centros del eslabón 3, el diagrama de Cayley lo deforma hasta un grupo de líneas colineales. Se necesita de una aproximación diferente para determinar la geometría de los cognados. En este caso Hartenberg y Denavit[11] dan el siguiente conjunto de pasos para encontrar los cognados. La notación se refiere a la figura 3-26.

1. El pivote fijo O_C se encuentra en la línea de centros prolongada O_AO_B y la divide en la misma relación que el punto *P* divide *AB* (es decir, $O_C/O_A = PA/AB$).
2. La línea O_AA es paralela a A_1P, y A_2 es paralela a O_AA_1 en la localización A_2.
3. La línea O_BA es paralela a B_1P, y A_3 es paralela a O_BB_1 en la localización A_3.
4. La junta B_2 divide la línea A_2P en la misma relación que el punto *P* divide a *AB*. Esto define al primer cognado $O_AA_2B_2O_C$.
5. La junta B_3 divide la línea A_3P en la misma relación que el punto *P* divide a *AB*. Esto define al segundo cognado $O_BA_3B_3O_C$.

Entonces se separan los tres eslabonamientos y cada uno generará de manera independiente la misma curva de acoplador. En el ejemplo indicado en la figura 3-26 es inusual que los dos cognados del eslabonamiento original sean idénticos en imagen especular. Los casos especiales de eslabonamiento se analizarán más ampliamente en la siguiente sección.

El programa FOURBAR calculará automáticamente los otros dos cognados para cualquier configuración de eslabonamiento que se le proporcione. Las velocidades y acelera-



a) Un eslabonamiento de cuatro barras y su curva de acoplador

b) Cognados del eslabonamiento de cuatro barras

FIGURA 3-26

Localización de cognados de un eslabonamiento de cuatro barras cuando su punto de acoplador se encuentra en la línea de centros del acoplador.

ciones de cada cognado pueden entonces calcularse y compararse. El programa también dibuja el diagrama de Cayley para el conjunto de cognados. Introduzca el archivo de datos F03-24.4br en el programa FOURBAR para mostrar el diagrama de Cayley de la figura 3-24. Introduzca los archivos COGNATEl.4br, COGNATE2.4br y CoGNATE3.4br para animar y ver el movimiento de cada cognado que se muestra en la figura 3-25. Se observará que sus curvas de acoplador (al menos aquellas porciones que puede alcanzar cada cognado) son idénticas.

Movimiento paralelo

Es muy común querer que el eslabón de salida de un mecanismo siga una trayectoria particular sin que el eslabón gire mientras se mueve a lo largo de la trayectoria. Una vez que se ha encontrado la trayectoria de movimiento apropiada en la forma de una curva de acoplador y su eslabonamiento de cuatro barras, un cognado de ese eslabonamiento proporciona un medio conveniente para repetir la trayectoria de movimiento de acoplador y la traslación curvilínea (es decir, sin rotación) de un eslabón de salida nuevo, el cual sigue la trayectoria de acoplador. A esto se le denomina **movimiento paralelo.** Su diseño se describe mejor con un ejemplo, en el cual el resultado será un eslabonamiento de seis barras de Watt,* del tipo 1, que incorpora el eslabonamiento de cuatro barras original y las partes de uno de sus cognados. El método mostrado es el mismo que se describe en Sonü[14,]

EJEMPLO 3-11

Movimiento paralelo de la curva de acoplador de un eslabonamiento de cuatro barras.

Problema: Diseñe un eslabonamiento de seis barras para el movimiento paralelo sobre una trayectoria de acoplador de un eslabonamiento de cuatro barras.

Solución: (Véase la figura 3-27.)

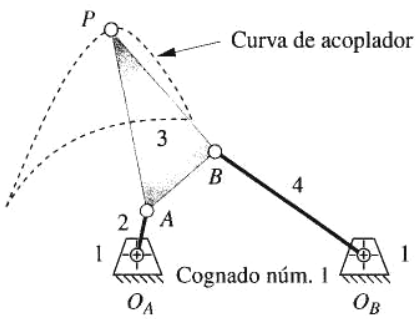
1 La figura 3-27a) muestra las opciones de eslabonamiento de cuatro barras de manivela-balancín de Grashof y su curva de acoplador. El primer paso es crear el diagrama de Roberts y encontrar sus cognados como se muestra en la figura 3-27¿). El eslabonamiento de Roberts se encuentra directamente, como se ya se describió, sin recurrir al diagrama de Cayley. Para hallar el centro fijo O_C se dibuja un triángulo similar al triángulo de acoplador A_1B_1P cuya base es O_AO_B.

2 Uno de los cognados del eslabonamiento de manivela-balancín será también una manivela-balancín (aquí cognado núm. 3) y el otro es un doble-balancín de Grashof (aquí cognado núm. 2). Ignore el doble balancín conservando los eslabones 2, 3, 4, 5, 6 y 7 de la figura 3-27¿>). Advierta que los eslabones 2 y 7 son las dos manivelas y ambas tienen la misma velocidad angular. La estrategia es unir estas dos manivelas en un centro común (O_A) y después combinarlas en un eslabón simple.

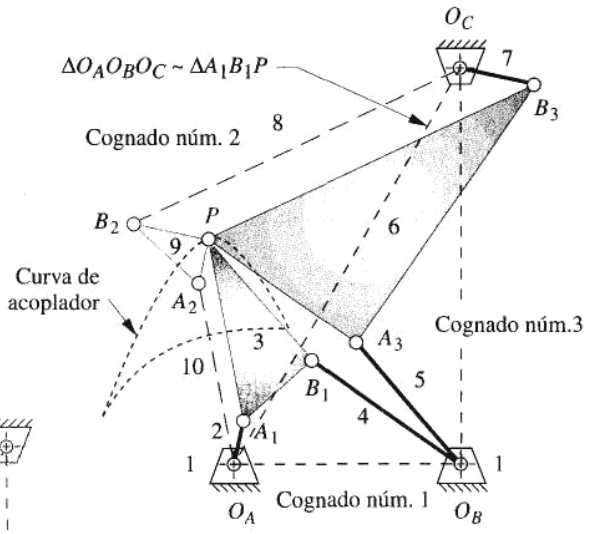
3 Dibuje la línea *qq* paralela a la línea O_AO que pase por el punto O según se muestra en la figura 3-27c).

4 Deslice los eslabones 5, 6 y 7 (sin que giren) como un ensamblaje a lo largo de las líneas O_AO_C y *qq* hasta que el extremo libre del eslabón 7 esté en el punto O_A. El extremo libre del eslabón 5 estará entonces en el punto O_B y el punto *P* del eslabón 6 estará en P'.

* Otro método común usado para obtener movimiento paralelo es duplicar el mismo eslabonamiento (es decir, el cognado idéntico), conectarlos con un ciclo en paralelogramo y quitar los dos eslabones redundantes. El resultado es un mecanismo de ocho eslabones. Véase la figura P3-7 para un ejemplo de tal mecanismo. El método que aquí se muestra usa un cognado diferente en un eslabonamiento más simple, sin embargo, se debe cumplir con el objetivo deseado con cualquier procedimiento.

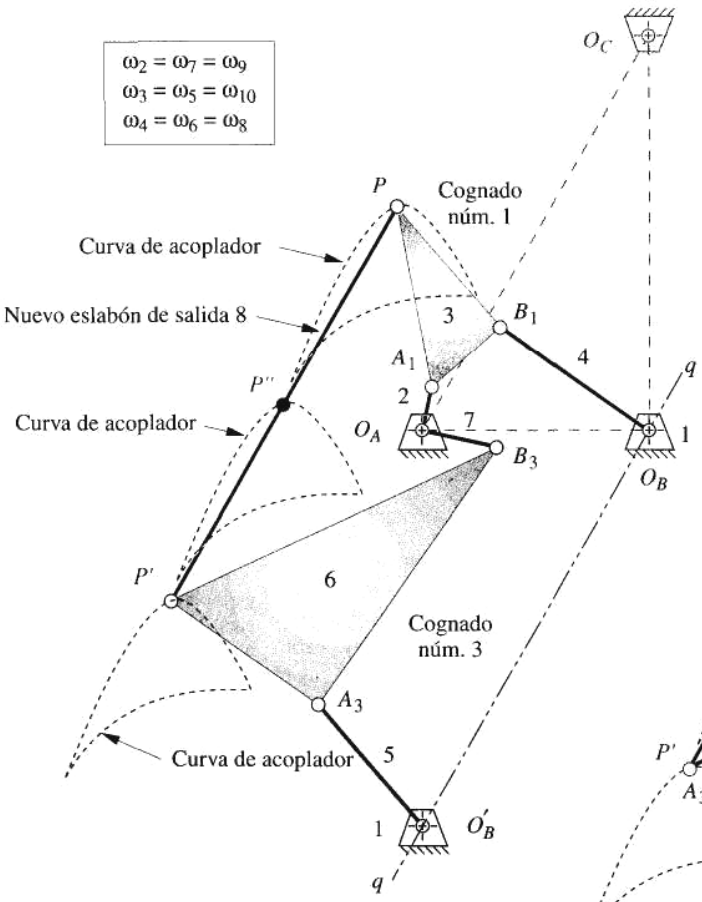


a) Eslabonamiento original de cuatro barras original con curva de acoplador

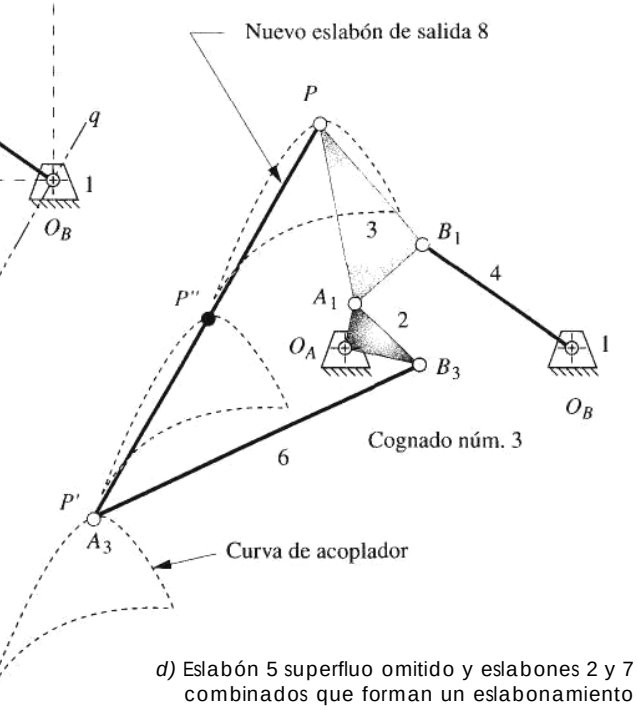


b) Diagrama de Roberts que muestra todos los cognados

$\omega_2 = \omega_7 = \omega_9$
$\omega_3 = \omega_5 = \omega_{10}$
$\omega_4 = \omega_6 = \omega_8$



c) Cognado núm. 3 desplazado con O_C hacia O_A



d) Eslabón 5 superfluo omitido y eslabones 2 y 7 combinados que forman un eslabonamiento de seis barras de Watt

FIGURA 3-27

Método de construcción de un eslabonamiento de seis barras de Watt, de tipo 1, que duplica una trayectoria de acoplador con traslación curvilínea (movimiento paralelo)[14]

5 Agregue un nuevo eslabón de longitud $O_A O_C$ entre P y P'. Éste es el *nuevo eslabón de salida* 8 y todos los puntos en él describen la curva de acoplador original como la descrita en los puntos P, P' y P'' en la figura 3-27c).

6 El mecanismo en la figura 3-27c) tiene 8 eslabones, 10 juntas giratorias y un GDL. Cuando pasan **tanto** por la manivela 2 como por la 7, todos los puntos en el eslabón 8 duplican la curva de acoplador del punto *P*.

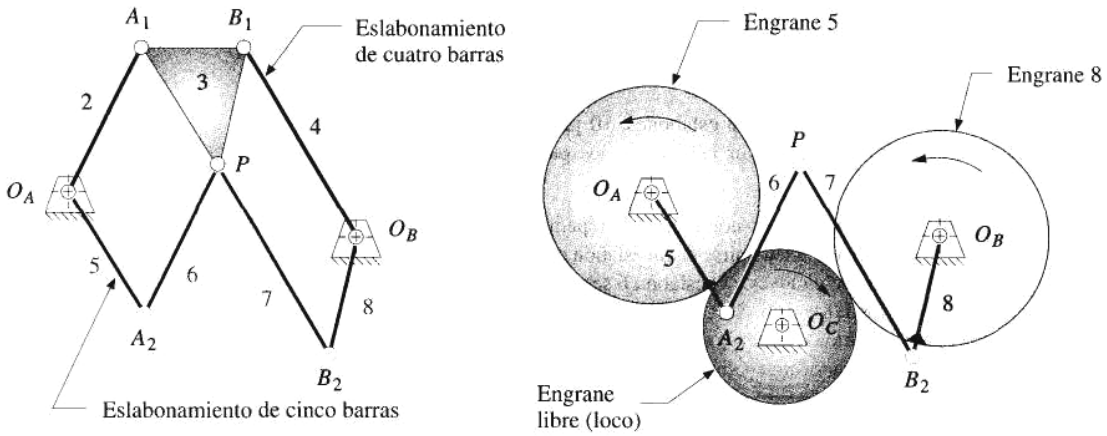
7 Esto es un *eslabonamiento sobrecerrado* con eslabones repetidos. Como los eslabones 2 y 7 tie nen la misma velocidad angular pueden unirse en un eslabón como se muestra en la figura 3-27rf). Entonces el eslabón 5 se vuelve a mover y el eslabón 6 se reduce a un eslabón binario soportado y cerrado como parte de los lazos 2, 6, 8, 3. El mecanismo resultante es uno de seis barras de Watt, del tipo I (véase la figura 2-14) con los eslabones numerados 1, 2, 3, 4, 6 y 8. El eslabón 8 se encuentra en *traslación curvilínea* y sigue la trayectoria de acoplador del punto original *P*.

Cognados de cinco barras con engranaje de un eslabonamiento de cuatro barras

Chebyschev descubrió también que cualquier curva de acoplador de cuatro barras puede reproducirse con un **mecanismo de cinco barras con engranaje cuya relación de engranes es igual a +1,** lo que significa que los engranes giran con la misma velocidad y dirección. Las longitudes de eslabón con engranaje de cinco barras serán diferentes de las del eslabonamiento de cuatro barras, pero se pueden determinar directamente con base en tal eslabonamiento. En la figura 3-28a) se indica el método de construcción descrito por Hall,![51] para obtener el eslabonamiento de cinco barras con engranaje que dará la misma curva de acoplador que el de cuatro barras. El eslabonamiento original de cuatro barras es $O_A A_1 B_1 O_B$ (eslabones 1, 2, 3, 4). El de cinco barras es $O_A A_2 P B_2 O_B$ (eslabones 1, 5, 6, 7, 8). Los dos eslabonamientos comparten sólo el punto de acoplador *P* y los pivotes fijos O_A y O_B. El de cinco barras se construye simplemente trazando el eslabón 6 paralelo al eslabón 2, el 7 paralelo al 4, el 5 paralelo a $A_1 P$ y el 8 paralelo a $B_1 P$.

Se necesita un sistema de tres engranes para acoplar los eslabones 5 y 8 con una relación igual a +1 (los engranes 5 y 8 tienen el mismo diámetro y el mismo sentido de rotación debido al engrane loco), como se muestra en la figura 3-28b). El eslabón 5 se une *al engrane 5, así como el eslabón 8 lo hace con el engrane 8. Esta técnica de construcción se aplica a cada uno de los tres cognados de cuatro barras, lo que origina tres eslabonamientos de cinco barras con engranaje (las cuales pueden o no ser de Grashof). Los tres cognados de cinco barras se ven en el diagrama de Roberts. Observe, en el ejemplo presentado, que un eslabonamiento de cuatro barras de triple balancín y de no Grashof origina uno de cinco barras de Grashof que puede impulsarse con un motor. Esta conversión a un eslabonamiento GFBM sería una ventaja cuando la curva de acoplador "correcta" se encontrara en un eslabonamiento de cuatro barras de no Grashof, pero se necesita la salida continua a través de las posiciones de agarrotamiento de un eslabonamiento de cuatro barras. Así, puede verse que hay por lo menos siete eslabonamientos que generarán la misma curva de acoplador, tres eslabonamientos de cuatro barras, tres GFBM y una o más de seis barras.

El programa FOURBAR calcula la configuración equivalente de cinco barras con engranaje para cualquier eslabonamiento de cuatro barras y entrega sus datos de salida a un archivo de disco que se introduce en el programa FIVEBAR para su análisis. El archivo



a) Construcción del eslabonamiento de cinco barras equivalente

b) Eslabonamiento resultante de cinco barras con engranaje

FIGURA 3-28

Un cognado de eslabonamiento de cinco barras con engranaje de una cadena de cuatro barras

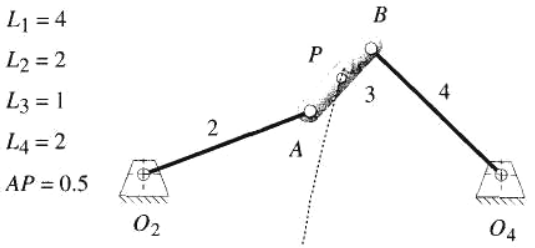
F03-28a.4br se introduce en FOURBAR para animar el eslabonamiento mostrado en la figura 3-28a). Luego se introduce también el archivo F03-28b.5br en el programa FIVEBAR para ver el movimiento del eslabonamiento equivalente de cinco barras con engranaje. Note que la cadena de cuatro barras original es un triple balancín, de modo que cuando sale de un balancín no alcanza todas las partes de la curva de acoplador. Sin embargo, el eslabonamiento equivalente de cinco barras con engranaje equivalente efectúa una revolución completa y recorre toda la trayectoria de acoplador. Para exportar un archivo de disco FIVEBAR para el GFBM equivalente de cualquier eslabonamiento de cuatro barras del programa FOURBAR, utilice la opción *Export* en el menú de *File*.

3.8 MECANISMOS PARA MOVIMIENTO RECTILÍNEO

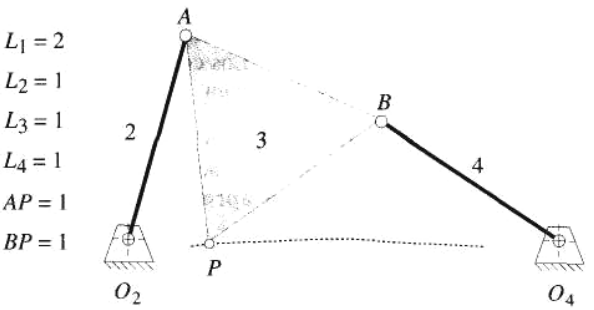
Una aplicación muy común de las curvas de acoplador es en la generación de líneas rectas aproximadas. Desde la época de James Watt, en el siglo XVIII, ya se conocían y usaban los eslabonamientos de línea recta. Hace más de un siglo muchos cinemáticos (Watt, Chebyschev, Peaucellier, Kempe, Evans, Hoeken y otros) descubrieron o desarrollaron los eslabonamientos de línea recta, aproximados o exactos, y hoy sus nombres están asociados con dichos dispositivos.

La primera aplicación de que se tiene noticia de una curva de acoplador en un problema de movimiento es el **eslabonamiento de línea recta de Watt,** el cual fue patentado en 1784 y se ilustró en la figura 3-29a). Watt inventó su eslabonamiento de línea recta para guiar el pistón de carrera larga de su motor de vapor en un tiempo en que aún no existía la maquinaria cortadora de metal que podría crear un camino guía largo y recto.* Este eslabonamiento de triple balancín se usa todavía en los sistemas de suspen-

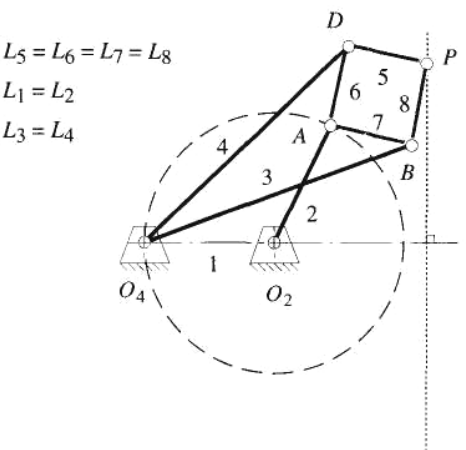
* En la época de Watt el movimiento en línea recta se conocía como "movimiento paralelo", un término que ahora se utiliza de manera un tanto diferente. Se dice que James Watt le dijo a su hijo, *"Si bien la fama no me inquieta demasiado, sí estoy muy orgulloso de mi invención al movimiento paralelo, más que de cualquier otro invento mecánico que haya hecho"*. Citado en Muirhead, J. P. (1854). *Origen y progreso de las invenciones mecánicas de James Watt*, vol. 3, p. 89, Londres.



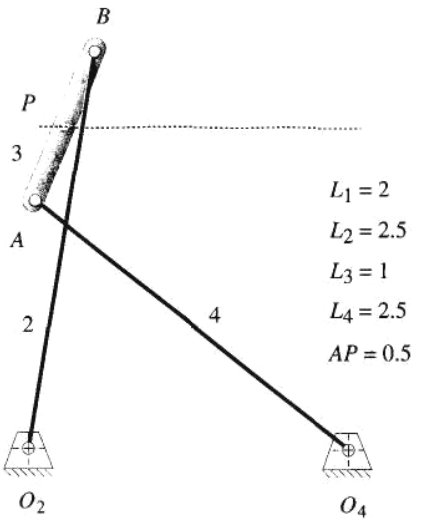
a) Eslabonamiento de línea recta de Watt



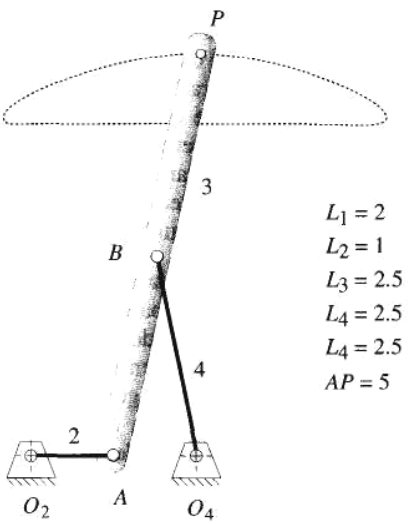
b) Eslabonamiento de línea recta de Roberts



e) Eslabonamiento de línea recta exacta de Peaucellier



c) Eslabonamiento de línea recta de Chebyschev



d) Eslabonamiento de línea recta de Hoeken

FIGURA 3-29

Algunos eslabones de línea recta aproximada, comunes y clásicos, y uno exacto

* Las relaciones de los eslabones del eslabonamiento de línea recta de Chebyschev fueron presentadas de diferentes maneras por diversos autores. Las relaciones empleadas aquí son las primeras presentadas (en inglés) por Kempe (1877). Pero Kennedy (1893) describe el mismo eslabonamiento, según se dice "como Chebyschev lo demostró en la Exhibición de Viena de 1893" como teniendo relaciones de eslabones 1, 3.25, 2.5, 3.25. Se tomará la primera referencia de Kempe para concordar con la lista de la figura.

sión de automóviles para guiar el eje trasero hacia arriba y hacia abajo en línea recta, así como en muchas otras aplicaciones.

Richard Roberts (1789-1864) (no debe confundirse con Samuel Roberts, creador de los cognados) descubrió el **eslabonamiento de línea recta de Roberts** que se muestra en la figura 3-2%). Éste es un triple balancín. **Chebyschev** (1821-1894) también diseñó el **eslabonamiento de línea recta** —un doble balancín de Grashof que aparece en la figura 3-29c)—.

El **eslabonamiento de Hoeken**[16] en la figura *3-29d)* es una manivela-balancín de Grashof, lo cual es una significativa ventaja práctica. Además, el eslabonamiento de Hoeken se caracteriza por tener una *velocidad prácticamente constante a lo largo de la parte central de su movimiento de línea recta.* Es interesante observar que los eslabonamientos de **Hoeken y** de **Chebyschev** son cognados entre sí.* Los cognados mostrados en la figura 3-26 son los eslabonamientos de Chebyschev y Hoeken.

Estos eslabonamientos de línea recta vienen como ejemplos en el programa FOURBAR. Un rápido vistazo al atlas de Hrones y Nelson de curvas de acoplador revelará un gran número de estas curvas con segmentos **de línea recta aproximados.** Son muy comunes.

Para generar una **línea recta exacta** usando sólo juntas de pasador se requiere de más de cuatro eslabones. Se necesitan por lo menos seis eslabones y siete juntas de pasador para generar una línea recta exacta con un eslabonamiento de junta de revoluta pura, es decir, un eslabonamiento de seis barras de Watt o de Stephenson. Un mecanismo de cinco barras con engranaje, cuya relación de engranes sea de -1 y su ángulo de fase de π radianes, generará una línea recta exacta en la junta entre los eslabones 3 y 4. Pero este eslabonamiento es tan sólo una cadena de seis barras de Watt transformada que se obtiene al remplazar un eslabón binario con una junta superior en la forma de un par de engranes. Este movimiento rectilíneo de un eslabonamiento de cinco barras con engranaje puede verse abriendo el archivo STRAIGHT.5br en el programa FIVEBAR, calculando y animando el eslabonamiento.

Peaucellier† (1864) descubrió el mecanismo con **línea recta exacta** de ocho barras y seis pasadores que se ilustra en la figura 3-29e). Los eslabones 5, 6, 7 y 8 forman un rombo de tamaño conveniente. Los eslabones 3 y 4 pueden ser de cualquier longitud conveniente, siempre y cuando sean iguales. Cuando O_2O_4 es exactamente igual a O_2A, el punto *C* genera un *arco de radio infinito,* es decir, **una línea recta exacta.** Al mover el pivote O_2 a la izquierda o a la derecha de la posición indicada, y al cambiar sólo la longitud del eslabón 1, este mecanismo *generará verdaderos arcos circulares con radios mucho mayores que las longitudes de eslabón.*

Diseño óptimo para eslabonamientos de cuatro barras en línea recta

Dado que una línea recta exacta se genera con seis o más eslabones usando sólo juntas de revolución, ¿por qué utilizar un eslabonamiento de línea recta aproximado de cuatro barras? Una razón es el deseo de simplicidad en el diseño de máquinas. El eslabonamiento de junta de pasador de cuatro barras es el mecanismo de un GDL posible más simple. Otra razón es que se obtiene una muy buena aproximación de una línea recta

*Hain[17](1967) cita como referencia a Hoecken[16]l (1926) para este eslabonamiento. Nolle™ (1974) muestra el mecanismo de Hoecken, pero se refiere a él como una manivela-balancín de Chebyschev sin advertir su relación de cognados con el doble balancín de Chebyschev, el cual también muestra. Es ciertamente concebible que Chebyschev, como uno de los creadores del teorema de los eslabonamientos cognados, haya descubierto el cognado de "Hoeken" en su propio doble balancín. Sin embargo, este autor no encontró mención alguna de su origen en la literatura inglesa además de las diferencias que aquí se citan.

† Peaucellier, un ingeniero militar y capitán de la armada francesa fue el primero en proponer una "composición de brújula" o *brújula compuesta* en 1864, por la que no recibió ningún reconocimiento inmediato. Según palabras del matemático inglés-estadunidense James Sylvester, quien la presentó en el *Atheneum Club* en Londres en 1874, *"El movimiento paralelo perfecto de Peaucellier parece tan simple* V *se mueve tan sencillamente que la gente que lo ve en funcionamiento expresa un asombro casi universal por ese movimiento que esperó tanto tiempo para ser descubierto'".* Al pasar un modelo del eslabonamiento de Peaucellier alrededor de la mesa, el famoso físico sir William Thomson (después Lord Kelvin) se rehusó a soltar el modelo declarando: *"No. No lo he tenido lo bastante cerca de mí. éste es el objeto más bello que he visto en mi vida."* Fuente: Strandh, S. (1979). *Historia de la máquina.* A&W Publishers, Nueva York, p. 67.

real con sólo cuatro eslabones y suele ser "bastante buena" para las necesidades de la máquina diseñada. Después de todo, las tolerancias en la fabricación provocarán que el rendimiento de cualquier mecanismo sea menor que el ideal. Conforme se incrementa el número de eslabones y juntas, la probabilidad de que un mecanismo de línea recta exacto cumpla en la práctica con su rendimiento teórico es obviamente menor.

Hay una necesidad real en la maquinaria de todo tipo de los movimientos de línea recta, especialmente en la producción de maquinaria automática. Muchos productos como cámaras, películas, artículos de tocador, máquinas de afeitar y botellas se fabrican, decoran o ensamblan en máquinas sofisticadas y complicadas que contienen innumerables sistemas de eslabonamientos y de leva-seguidor. Por lo común, la mayoría de este tipo de equipo de producción ha sido de la variedad del movimiento intermitente. Esto significa que el producto se lleva a través de la máquina sobre un transportador lineal o giratorio, el cual se detiene para realizar alguna operación en el producto y posteriormente el producto pasa a la siguiente sección de trabajo donde vuelve a detenerse para la realización de otra operación. Las fuerzas y la potencia requeridas para acelerar y desacelerar la gran masa del transportador (la cual es independiente de la masa del producto, y en general mayor que ésta) frecuentemente limitan las velocidades en que estas máquinas se pueden activar.

Las consideraciones económicas demandan continuamente mayores tasas de producción y requieren velocidades más altas o máquinas adicionales caras. Esta presión económica ha provocado que muchos fabricantes rediseñen su equipo de ensamblaje para un movimiento continuo del transportador. Cuando el producto se encuentra en movimiento continuo en línea recta y a una velocidad constante, cada cabezal que opera sobre el producto debe articularse para labrar el producto e igualar su trayectoria de línea recta y su velocidad constante mientras se realiza la labor. Estos factores han aumentado la necesidad de mecanismos de línea recta, inclusive de aquéllos capaces de alcanzar una velocidad constante aproximada sobre la trayectoria de línea recta.

Es fácil obtener un movimiento (casi) perfecto de línea recta con un mecanismo de cuatro barras de manivela-corredera. Los bujes de bolas (figura 2-26) y las zapatas de endurecimiento se encuentran disponibles comercialmente a un precio moderado y hacen de éste una solución razonable y de poca fricción para el problema de la dirección de la trayectoria en línea recta. Sin embargo, los problemas de costo y lubricación de un mecanismo apropiado guiado de manivela-corredera son aún mayores que los de los eslabonamientos de cuatro barras de junta de pasador. Es más, una manivela-corredera tiene un perfil de velocidad que es casi senoidal (con algún contenido armónico) y que está lejos de tener velocidad constante en cualquier parte de su movimiento.

El eslabonamiento de tipo Hoeken ofrece una combinación óptima de rectitud y de velocidad constante aproximada y es una manivela-balancín, así que puede ser una propulsión mecánica. Su geometría, dimensiones y trayectoria de acoplador se muestran en la figura 3-30. Éste es un eslabonamiento de cuatro barras simétrico. Puesto que se especifica el ángulo γ de la línea BP y $L_3 = L_4 = BP$, sólo se requieren dos relaciones de eslabones para definir su geometría, por ejemplo L_1/L_2 y L_3/L_2. Si la manivela L_2 se acciona a velocidad angular constante ω_2, la velocidad lineal V_x será casi constante a lo largo de la porción de línea recta Δx de la trayectoria de acoplador sobre una parte significativa de la rotación de manivela $\Delta\beta$.

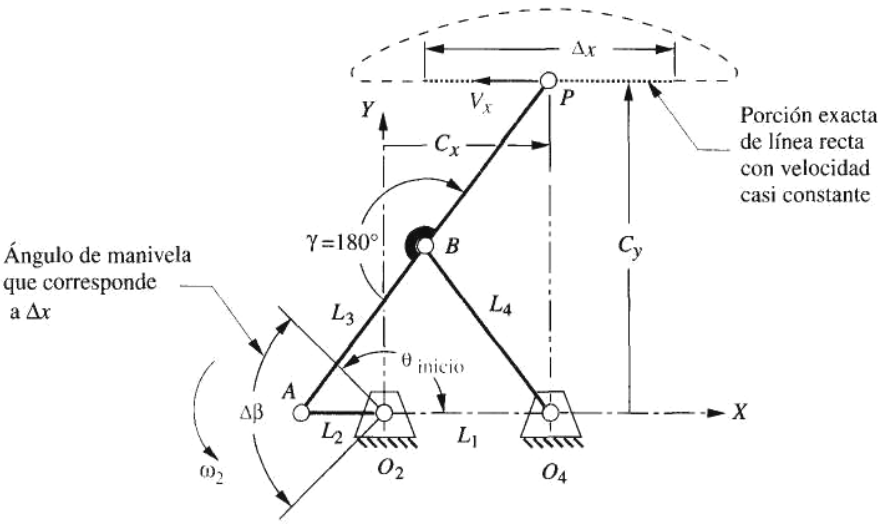


FIGURA 3-30

Geometría del eslabonamiento de Hoeken. Eslabonamiento mostrado con *P* en la parte central de la línea recta de la trayectoria.

Se realizó un estudio para determinar los errores en la rectitud y velocidad constante de un eslabonamiento de tipo Hoeken sobre diversas fracciones $\Delta\beta$ del ciclo de manivela como función de las relaciones de eslabones. [19] El error estructural en la posición (es decir, rectitud) ε_S y el error estructural en la velocidad e_v se definen utilizando la notación de la figura 3-29 como:

$$\varepsilon_S = \frac{MAX_{i=1}^{n}(C_{y_i}) - MIN_{i=1}^{n}(C_{y_i})}{\Delta x}$$

$$\varepsilon_V = \frac{MAX_{i=1}^{n}(V_{x_i}) - MIN_{i=1}^{n}(V_{x_i})}{\overline{V}_x} \qquad (3.5)^*$$

Los errores estructurales se calculan en forma independiente para cada uno de los nueve rangos de ángulos de manivela $\Delta\beta$ de 20° a 180°. La tabla 3-1 muestra las relaciones de eslabones que dan el menor error estructural posible, ya sea en la posición o en la velocidad sobre los valores de $\Delta\beta$ de 20° a 180°. Advierta que no es posible alcanzar una rectitud óptima y un error de velocidad mínimo en el mismo eslabonamiento. Sin embargo, pueden lograrse términos medios razonables entre los dos criterios, especialmente para los rangos pequeños del ángulo de manivela. Los errores en la rectitud y la velocidad aumentan conforme se empleen porciones mayores de la curva (mayores a $\Delta\beta$). Con un ejemplo se mostrará cómo se usa la tabla 3-1 para diseñar un eslabonamiento de línea recta.

* Véase la referencia [19] para la obtención de ecuaciones 3.5.

TABLA 3-1 Relaciones de eslabones para pequeños errores alcanzados en rectitud y velocidad de diversos rangos de ángulos de manivela de un eslabonamiento de línea recta aproximada de cuatro barras de tipo Hoeken

Rango de movimiento			Optimizado para rectitud						Optimizado para velocidad constante					
$\Delta\beta$ (grados)	θ_{inicio} (grados)	% de ciclo	Mínimo ΔC_y %	ΔV %	$\frac{V_x}{(L_2\omega_2)}$	Relaciones de eslabones L_1/L_2	L_3/L_2	$\Delta x/L_2$	Mínimo ΔV_x %	ΔC_y %	$\frac{V_x}{(L_2\omega_2)}$	Relaciones de eslabones L_1/L_2	L_3/L_2	$\Delta x/L_2$
20	170	5.6%	0.00001%	0.38%	1.436	2.975	3.963	0.601	0.006%	0.137%	1.045	2.075	2.613	0.480
40	160	11.1%	0.00004%	1.53%	0.504	2.950	3.925	1.193	0.038%	0.274%	1.124	2.050	2.575	0.950
60	150	16.7%	0.00027%	3.48%	1.565	2.900	3.850	1.763	0.106%	0.387%	1.178	2.025	2.538	1.411
80	140	22.2%	0.001%	6.27%	1.611	2.825	3.738	2.299	0.340%	0.503%	1.229	1.975	2.463	1.845
100	130	27.8%	0.004%	9.90%	1.646	2.725	3.588	2.790	0.910%	0.640%	1.275	1.900	2.350	2.237
120	120	33.3%	0.010%	14.68%	1.679	2.625	3.438	3.238	1.885%	0.752%	1.319	1.825	2.238	2.600
140	110	38.9%	0.023%	20.48%	1.702	2.500	3.250	3.623	3.327%	0.888%	1.347	1.750	2.125	2.932
160	100	44.4%	0.047%	27.15%	1.717	2.350	3.025	3.933	5.878%	1.067%	1.361	1.675	2.013	3.232
180	90	50.0%	0.096%	35.31%	1.725	2.200	2.800	4.181	9.299%	1.446%	1.374	1.575	1.863	3.456

EJEMPLO 3-12

Diseño de un eslabonamiento de línea recta de tipo Hoeken.

Problema: Se necesita un movimiento de 100 mm de longitud en línea recta sobre 1/3 del ciclo total (a 120° de la rotación de la manivela). Calcule las dimensiones de un eslabonamiento de tipo Hoeken que

a. Proporcionará una desviación mínima en línea recta. Determine su máxima desviación a velocidad constante.

b. Proporcionará una desviación mínima a velocidad constante. Determine su máxima desviación en línea recta.

Solución: (Véase la figura 3-30 y la tabla 3-1.)

El inciso a. requiere de la línea recta más exacta. La 6ª fila de la tabla 3-1 indica la duración de un ángulo de manivela $\Delta\beta$ a 120°. La 4ª columna muestra que la posible desviación mínima de la recta es 0.01% de la longitud de la porción de la línea recta empleada. Para una longitud de 100 mm la desviación absoluta será entonces de 0.01 mm (0.0004 pulgadas). La 5ª columna muestra que su error de velocidad será 14.68% de la velocidad promedio sobre la longitud de 100 mm. Claro que el valor absoluto de este error de velocidad depende de la velocidad de la manivela.

2 Las dimensiones del eslabonamiento del inciso (a) se encuentran a partir de las relaciones en las columnas 7, 8 y 9. La longitud de manivela necesaria para obtener la longitud de 100 mm de línea recta Δx es:

de la tabla 3-1: $$\frac{\Delta x}{L_2} = 3.238 \qquad \text{(a)}$$

$$L_2 = \frac{\Delta x}{3.238} = \frac{100 \text{ mm}}{3.23} = 30.88 \text{ mm}$$

Las otras longitudes de eslabones son entonces:

de la tabla 3-1: $$\frac{L_1}{L_2} = 2.625 \qquad \text{(b)}$$

$$L_1 = 2.625 L_2 = 2.625(30.88 \text{ mm}) = 81.07 \text{ mm}$$

de la tabla 3-1: $$\frac{L_3}{L_2} = 3.438 \qquad \text{(c)}$$

$$L_3 = 3.438 L_2 = 3.438(30.88 \text{ mm}) = 106.18 \text{ mm}$$

El eslabonamiento completo es entonces: $L_1 = 81.07$, $L_2 = 30.88$, $L_3 = L_4 = BP = 106.18$ mm. La velocidad nominal V_x del punto de acoplador en el centro de la línea recta $(\theta_2 = 180°)$ se encuentra a partir del factor en la sexta columna, que debe multiplicarse por la longitud de manivela L_2 y por la velocidad angular de manivela ω_2 en radianes por segundo (rad/s).

3 El inciso b. requiere de la velocidad más exacta. De nuevo la 6ª fila de la tabla 3-1 indica la duración de un ángulo de manivela $\Delta\beta$ a 120°. La 10ª columna muestra que la posible desviación mínima a velocidad constante es 1.885% de la velocidad promedio V_x sobre la longitud de la porción de la línea recta empleada. La 1 Iª columna muestra que la desviación de recta es 0.752% de la longitud de la porción de línea recta empleada. Para una longitud de 100 mm la desviación absoluta en rectitud en un eslabonamiento a velocidad óptima constante será entonces de 0.75 mm (0.030 pulgadas).

Las longitudes de eslabones para este mecanismo se encuentran de la misma manera que en el paso 2, sólo que ahora se usan las relaciones de eslabones 1.825, 2.238 y 2.600 de las columnas 13, 14 y 15. El resultado es $L_1 = 70.19$, $L_2 = 38.46$, $L_3 = L_4 = BP = 86.08$ mm. La velocidad nominal V_x del punto de acoplador en el centro de la línea recta $(\theta_2 = 180°)$ se encuentra a partir del factor en la 12ª columna, que debe multiplicarse por la longitud de manivela L_2 y por la velocidad angular de manivela ω_2 en rad/s.

4 La primera solución (paso 2) da una línea recta extremadamente exacta sobre una parte significativa del ciclo, pero su 15% de desviación en velocidad sería tal vez inaceptable si el factor se considerara importante. La segunda solución (paso 3) da menos de 2% de desviación en velocidad constante, lo cual puede ser viable para una aplicación de diseño. Su 3/4% de desviación de rectitud, mucho mayor que la del primer diseño, es aceptable en algunas situaciones.

3.9 MECANISMOS CON DETENIMIENTO

Un requisito común en los problemas de diseño de máquinas es la necesidad de una detención en el movimiento de salida. Un **detenimiento** se define como un *movimiento de salida nulo para cierto movimiento de entrada no nulo.* En otras palabras, el elemento motor no interrumpe su marcha, pero el eslabón de salida suspende su movimiento. Muchas máquinas de producción ejecutan una serie de operaciones que implican avanzar una pieza o herramienta a un espacio de trabajo, y mantenerla ahí (en un detenimiento) mientras se efectúa cierta operación. Después se debe retirar de ese espacio y tal vez mantenerla en un segundo paro mientras el resto de la máquina continúa efectuando otras tareas. Los mecanismos de leva-seguidor (capítulo 8) suelen emplearse para estas operaciones debido a que es muy fácil crear un detenimiento con una leva. Pero siempre hay una transacción en el diseño de ingeniería, y las levas tienen el inconveniente de ser costosas y desgastarse con rapidez, como se describió en la sección 2.15.

También es posible obtener detenimientos con eslabonamientos "puros" constituidos sólo por eslabones y juntas de pasador, que tienen sobre las levas la ventaja del bajo costo y alta confiabilidad. Los eslabonamientos con detenimiento son más difíciles de diseñar que las levas con detenimiento. Los eslabonamientos por lo común aportan sólo un detenimiento aproximado, pero serán mucho menos costosos de fabricar y mantener que los mecanismos de leva. Por lo tanto, es muy útil considerarlos.

Eslabonamientos con un solo detenimiento

Hay dos enfoques usuales para diseñar eslabonamientos con un detenimiento. Ambos dan por resultado **mecanismos de seis barras** y los dos requieren que se halle primero uno de cuatro eslabones con una curva de acoplador apropiada. Luego se agrega una **diada** para proporcionar un eslabón de salida con la característica de detenimiento deseada. El primer enfoque requiere para su análisis el diseño o definición de un eslabonamiento de cuatro barras con una curva de acoplador que contiene una parte de arco circular aproximado, en la cual el "arco" ocupa la porción deseada del ciclo del eslabón de entrada (manivela) que corresponde al detenimiento. Un atlas de curvas de acoplador es de gran ayuda en esta parte del trabajo. Las curvas de acoplador simétricas son también convenientes para este trabajo y se pueden encontrar con la información que proporciona la figura 3-21.



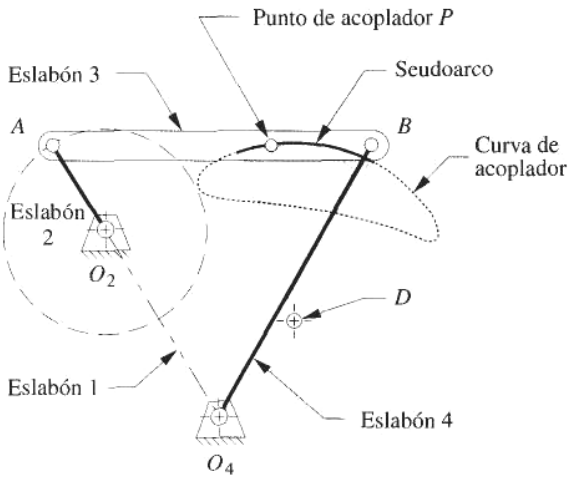
EJEMPLO 3-13

Mecanismo de un detenimiento con sólo juntas giratorias,

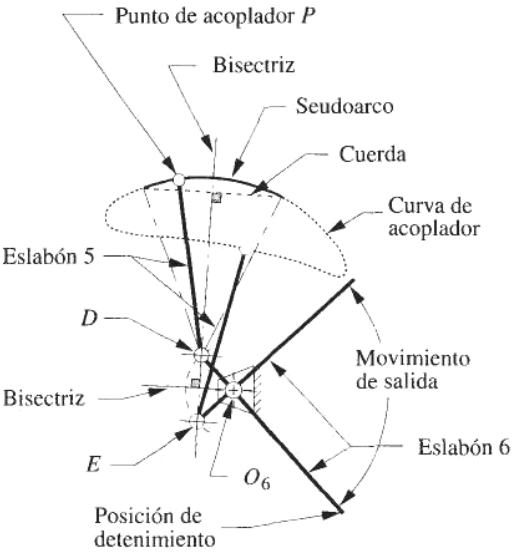
Problema: Diseñe un eslabonamiento de seis barras para movimiento de balancín de 90° sobre 300° de manivela, con detenimiento para los 60° restantes.

Solución: (Véase la figura 3-31.)

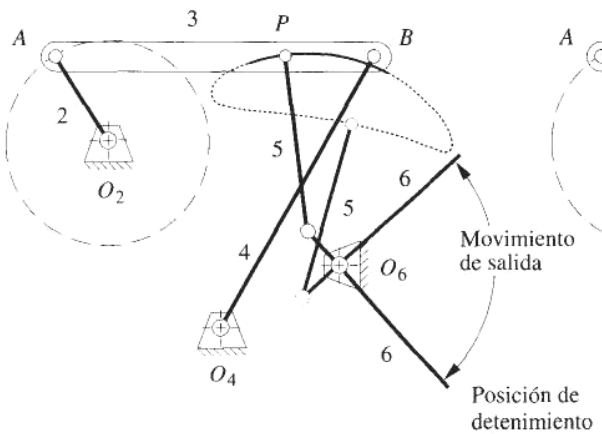
- Busque en el atlas H&N un eslabonamiento de cuatro barras con una curva de acoplador que tenga una porción aproximada de arco (seudocircular), la cual ocupe 60° del movimiento de manivela (12 rayas). En la figura 3-31a) se ilustra el mecanismo de cuatro barras seleccionado.



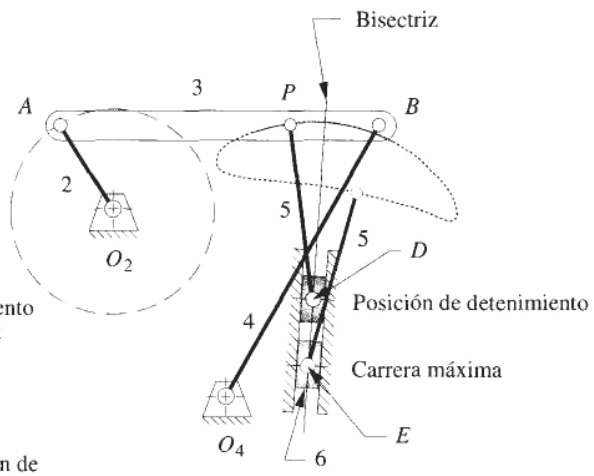
a) Eslabonamiento elegido de cuatro barras de manivela-balancín con sección de seudoarco para 60° de giro en el eslabón 2



b) Construcción de la diada de detenimiento de salida



c) Eslabonamiento de seis barras terminado con un detenimiento opción de salida de balancín



d) Eslabonamiento de seis barras terminado con un detenimiento opción con salida de corredera

FIGURA 3-31

Diseño de un mecanismo de seis barras con un detenimiento con balancín de salida o corredera de salida utilizando una curva de acoplador con seudoarco

2 Dibuje a escala este eslabonamiento, incluida la curva de acoplador, y determine el centro aproximado del seudoarco de la curva de acoplador elegido por medio de técnicas geométricas gráficas. Para ello trace la cuerda del arco y su mediatriz según se muestra en la figura 3-31b). El centro estará en tal mediatriz. Trace con la ayuda del compás arcos cada vez menores, mientras ajusta el radio para obtener el mejor ajuste de la curva de acoplador. Marque el centro del arco como *D.*

3 Ahora fije un compás al radio aproximado del arco de acoplador. Esto será la longitud del eslabón 5 que ha de unirse al punto de acoplador *P.*

4 Recorra la curva de acoplador con la punta libre del compás y mantenga la punta de trazo de éste en la mediatriz; determine la localización extrema a lo largo de la mediatriz que alcanzará la punta de trazo. Marque este punto como *E.*

5 El segmento *DE* representa el desplazamiento máximo que un eslabón de longitud *CD,* unido a *P,* alcanzará a lo largo de la mediatriz.

6 Trace la mediatriz del segmento *DE* y prolónguela en una dirección conveniente.

7 Ubique el pivote fijo O_6 en la mediatriz de *DE* de tal manera que las rectas O_6D y O_6E subtiendan el ángulo de salida deseado; en este ejemplo de 90°.

8 Trace el eslabón 6 a partir de *D* (o de *E*) a través de O_6 y prolónguelo hasta una longitud conveniente. Éste es el eslabón de salida, el cual quedará con detenimiento para la porción especificada del ciclo de manivela.

9 Verifique los ángulos de transmisión.

10 Elabore un modelo de cartulina del eslabonamiento y articúlelo para comprobar su funcionamiento.

En este eslabonamiento hay detenimientos porque, durante el tiempo que el punto de acoplador *P* recorre la porción del seudoarco de la curva de acoplador, el otro extremo del eslabón 5, unido a *P* y con la misma longitud que el radio del arco, es esencialmente estacionario en su otro extremo, el cual es el centro del arco. Sin embargo, el detenimiento en el punto *D* experimentará una "trepidación" u oscilación debido a que *D* es sólo un centro aproximado del seudoarco en la curva de acoplador de sexto grado. Cuando *P* sale de la porción de arco impulsa suavemente el eslabón 5 desde el punto *D* al *E,* el cual a su vez hace girar el eslabón 6 de salida a través de su arco como se muestra en la figura 3-3le). Note que es posible tener cualquier desplazamiento angular del eslabón 6 que se desee con los mismos eslabones 2 a 5, ya que éstos definen por completo el aspecto del detenimiento. El movimiento del pivote O_6 a la izquierda y a la derecha, a lo largo de la mediatriz de *DE,* cambiará el desplazamiento angular del eslabón 6, pero no sus tiempos. De hecho, el eslabón 6 podría sustituir una corredera según se indica en la figura 3-3 *Id),* y el resultado será la traslación lineal a lo largo de *DE* con la misma temporización y detenimiento. Introduzca el archivo F03-31c.6br en el programa SIXBAR y anímelo para ver en acción el eslabonamiento del ejemplo 3-13. El detenimiento en el movimiento del eslabón 6 se ve claramente en la animación, incluso la trepidación debida a su naturaleza aproximada.

Eslabonamientos con doble detenimiento

También es posible obtener un movimiento de salida con dos detenimientos mediante una curva de acoplador de un eslabonamiento de cuatro barras. Un primer enfoque es igual al usado en el caso del ejemplo 3-11, con un detenimiento. Ahora se necesita una curva de acoplador que tenga *dos* arcos de círculo aproximados, con el mismo radio pero centros distintos, ambos convexos o cóncavos. Se agregará un eslabón 5 con longitud igual al radio de los dos arcos, de tal forma que éste y el eslabón 6 permanecerán casi estacionarios en el centro de cada arco, mientras el punto de acoplador recorre las partes circulares de su trayecto. El movimiento del eslabón 6 de salida ocurrirá sólo cuando el punto de acoplador se halle entre aquellas porciones de arco. Los eslabonamientos de orden superior, como el de cinco barras con engranaje, se usan para crear salidas con detenimientos múltiples mediante una técnica similar, ya que poseen curvas de acoplador con múltiples arcos de círculo aproximados. Busque una demostración de este enfoque en el eslabonamiento de doble paro del ejemplo integrado en el programa SIXBAR.

En un segundo planteamiento se emplea una curva de acoplador con dos segmentos de línea recta aproximados de duración apropiada. Si una corredera pivotada (eslabón 5) se une al acoplador en este punto, y se permite que el eslabón 6 se deslice en el eslabón 5, sólo resta elegir un pivote *0¿en* la intersección de los segmentos de línea recta prolongados. El resultado se ilustra en la figura 3-32. Mientras la corredera 5 recorre los segmentos "rectilíneos" de la curva, no impartirá ningún movimiento angular al eslabón 6. La naturaleza aproximada del eslabonamiento de cuatro barras de línea recta ocasiona también una trepidación en estos detenimientos.

EJEMPLO 3-14

Mecanismo con doble detenimiento,

Problema: Diseñe un eslabonamiento de seis barras para un movimiento de salida con balancín de 80° sobre 20° de manivela, con detenimiento de 160°, movimiento de retorno sobre 140° y un segundo detenimiento de 40°.

Solución: (Véase la figura 3-32.)

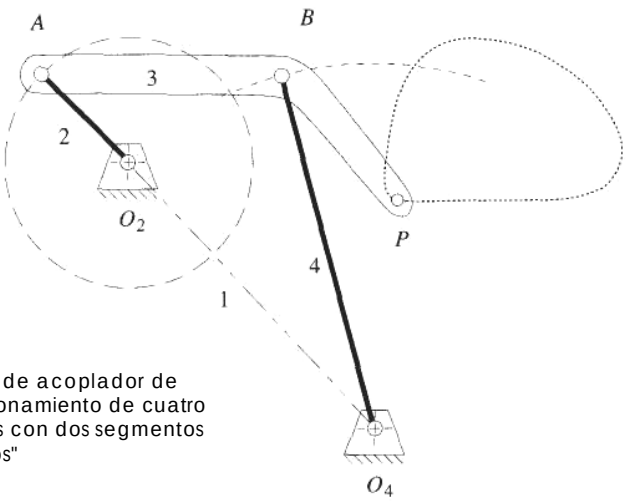
1 Busque en el atlas H&N un eslabonamiento de cuatro barras con una curva de acoplador que tenga dos porciones aproximadamente rectilíneas. Una debe ocupar 160° de movimiento de manivela (32 rayas) y la otra 40° de movimiento de manivela (8 rayas). Ésta es una curva con forma de cuña como se muestra en la figura 3-32a).

2 Trace este eslabonamiento a escala, incluida la curva del acoplador, y determine la intersección de dos rectas tangentes colineales con los segmentos rectos. Marque este punto como O_6.

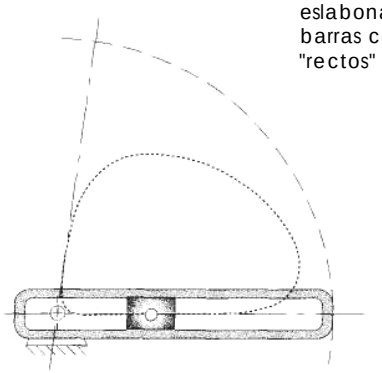
3 Diseñe el eslabón 6 para que permanezca a lo largo de estas tangentes rectas pivotado en O_6. Haga una ranura en el eslabón 6 para recibir la corredera 5 como se muestra en la figura *3-32b).*

4 Con una junta de pasador conecte la corredera 5 al punto del acoplador *P* en el eslabón 3. En la figura 3-32c) se ve la cadena de seis eslabones terminada.

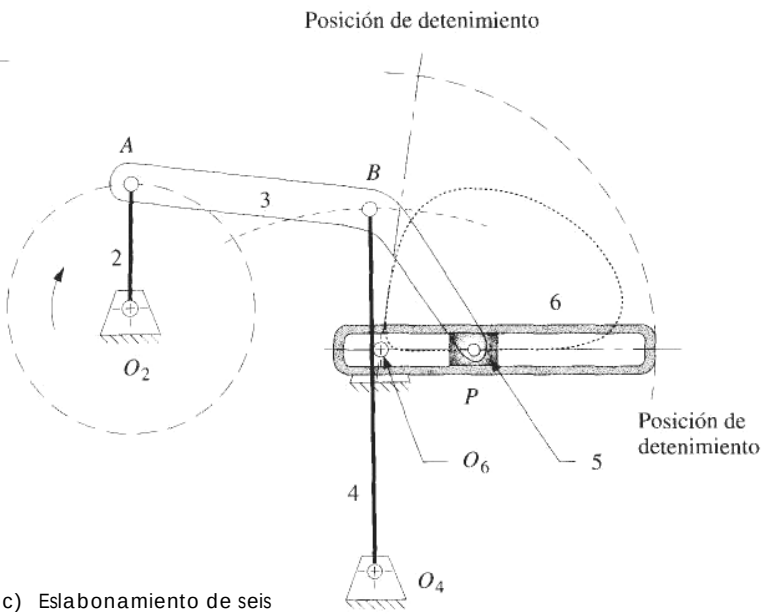
5 Verifique los ángulos de transmisión.



o) Curva de acoplador de eslabonamiento de cuatro barras con dos segmentos "rectos"



fc>) Diada de corredera para doble detenimiento



c) Eslabonamiento de seis barras con doble detenimiento terminado

FIGURA 3-32

Eslabonamiento de seis barras con doble detenimiento

Debe ser evidente que estos mecanismos con detenimiento tienen algunas desventajas. Además de ser difíciles de sintetizar, producen sólo detenimientos aproximados que entrañan trepidaciones. Asimismo, tienden a ser grandes para los movimientos de salida obtenidos, de modo que no se empacan bien. La aceleración del eslabón de salida puede ser también muy alta, como se ve en la figura 3-32, cuando la corredera 5 está cerca del pivote O_b. (Observe el gran desplazamiento angular del eslabón 6 resultante de un pequeño movimiento del eslabón 5.) No obstante, pueden ser muy valiosos en casos donde no se requiere un paro perfectamente estacionario; además, el bajo costo y la alta confiabi-lidad de un eslabonamiento son factores importantes. El programa SlXBAR tiene ejemplos de eslabonamiento con uno y dos detenimientos.

3.10 REFERENCIAS

1 **Erdman, A. G. y Gustafson, J.** E. (1977). "LINCAGES: Linkage Interactive Computer Analysis and Grap hically Enhan ced Synthesis". ASME Paper 77-DTC-5.

2 **Alt,** H. (1932). "Der Übetragungswinkel und seine Bedeutung für das Konstruieren periodischer Getriebe (The Transmission Angle and its Importance for the Design of Periodic Mechanisms)". *Werkstattstechnik,* núm. 26, pp. 61-64.

3 **Hall,** A. S. (1961). *Kinematics and Linkage Design,* Waveland Press: Prospect Heights, IL, p. 146.

4 **Sandor, G. N. y Erdman, A. G.** (1984). *Advanced Mechanism Design: Analysis and Synthesis,* vol. 2, Prentice-Hall: Upper Saddle River, NJ, pp. 177-187.

5 **Kaufman, R. E.** (1978). "Mechanism Design by Computer". *Machine Design,* 26 de octubre, pp. 94-100.

6 **Hall,** A. S. (1961). *Kinematics and Linkage Design.* Waveland Press: Prospect Heights, IL, pp. 33-34.

7a **Kempe, A. B.** (1876). "On a General Method of Describing Plañe Curves of the Nth Degree by Linkwork". *Proceedings London Mathematical Society,* vol. 7, pp. 213-216.

7b **Wunderlich, W.** (1963). "Hohere Koppelkurven". *Ósterreichisches Ingenieur Archiv,* vol. **XVII,** núm. 3, pp. 162-165.

8a **Hrones, J. A. y Nelson, G. L.** (1951). *Analysis of the Fourbar Linkage.* MIT Technology Press: Cambridge, Mass.

8b **Fichter, E. F. y Hunt K. H.** (1979). "The Variety, Cognate Relationships, Class, and Degeneration of the Coupler Curves of the Planar 4R Linkage". *Proc. Of 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms,* Montreal, pp. 1028-1031.

9 **Kota, S.** (1992). "Automatic Selection of Mechanism Designs from a Three-Dimensional Design Map". *Journal of Mechanical Design,* vol. **114,** núm. 3, pp. 359-367.

10 **Zhang, C, Norton, R. L. y Hammond, T.** (1984). "Optimizaron of Parameters for Specified Path Generation Using an Atlas of Coupler Curves of Geared Five-Bar Linkages". *Mechanism and Machine Theory,* vol. 19, núm. 6, pp. 459-466.

11 **Hartenberg, R. S. y Denavit, J.** (1959). "Cognate Linkages". *Machine Design,* 16 de abril, pp. 149-152.

12 **Nolle, H.** (1974). "Linkage Coupler Curve Synthesis: A Historical Review-II. Developments after 1875". *Mechanism and Machine Theory,* vol. 9, pp. 325-348.

13 **Luck, K.** (1959). "Zur Erzeugung von Koppelkurven viergliedriger Getriebe". *Maschinenbautechnik (Getriebetechnik),* vol. 8, núm. 2, pp. 97-104.

14 **Soni, A. H.** (1974). *Mechanism Synthesis and Analysis.* Scripta, McGraw-Hill: Nueva York, pp. 381-382.

15 **Hall,** A. S. (1961). *Kinematics and Linkage Design.* Waveland Press: Prospect Heights, IL, p. 51.

16 **Hoeken, K.** (1926). "Steigerung der Wirtschaftlichkeit durch zweckmaBige". *Anwendung der Getriebelehre Werkstattstechnik.*

17 **Hain, K.** (1967). Trad. Adams, D. P. *Applied Kinematics.* McGraw-Hill: Nueva York, pp. 308-309.

18 **Nolle, H.** (1974). "Linkage Coupler Curve Synthesis: A Historical Review-I. Developments up to 1875". *Mechanism and Machine Theory,* vol. **9,** pp. 147-168.

19 **Norton, R. L.** (1999). "In Search of the 'Perfect' Straight Line and Constant Velocity Too". *Proc, 6th. Applied Mechanisms and Robotics Conference, Cincinnati, OH.*

3.11 BIBLIOGRAFÍA

Para información adicional sobre síntesis de tipo, se recomiendan las siguientes obras:

Artobolevsky, I. I. (1975). Trad. Weinstein, N., *Mechanisms in Modern Engineering Design.* Vols. I al IV. MIR Publishers: Moscú.

Chironis, N. P. (1965). *Mechanisms, Linkages, and Mechanical Controls.* McGraw-Hill: Nueva York.

Chironis, N. P. (1966). *Machine Devices and Instrumentation.* McGraw-Hill: Nueva York.

Jensen, P. W. (1991). *Classical and Modern Mechanisms for Engineers and Inventors.* Marcel Dekker: Nueva York.

Jones, F., Horton, H. y Newell, J. (1967). *Ingenious Mechanisms for Engineers.* Vols. I al IV, Industrial Press: Nueva York.

Olson. D. G. y colaboradores. (1985). "A Systematic Procedure for Type Synthesis of Mechanisms with Literature Review". *Mechanism and Machine Theory,* vol. 20, núm. 4, pp. 285-295.

Tuttle, S. **B.** (1967). *Mechanisms for Engineering Design.* John Wiley & Sons: Nueva York.

Para información complementaria sobre síntesis *dimensional de eslabonamientos se recomiendan las siguientes obras:*

Djiksman, E. **A.** (1976). *Motion Geometry of Mechanisms.* Cambridge University Press: Londres.

Hain, K. (1967). Trad. Adams D. P. *Applied Kinematics.* McGraw-Hill: Nueva York, p. 399.

Hall, A. S. (1961). *Kinematics and Linkage Design.* Waveland Press: Prospect Heights, IL.

Hartenberg, R. S. y Denavit, J. (1964). *Kinematic Synthesis of Linkages.* McGraw-Hill: Nueva York.

Molian, S. (1982). *Mechanism Design: An Introductory Text.* Cambridge University Press: Cambridge.

Sandor, G. N. y Erdman, A. G. (1984). *Advanced Mechanism Design: Analysis and Synthesis.* Vol. 2, Prentice-Hall: Upper Saddle River, NJ.

Tao, D. C. (1964). *Applied Linkage Synthesis.* Addison Wesley: Reading, Mass.

Para información sobre eslabonamientos espaciales se recomiendan las siguientes obras:

Haug, E. J. (1989). *Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems.* Allyn and Bacon: Boston.

Nikravesh, P. E. (1988). *Computer Aided Analysis of Mechanical Systems.* Prentice-Hall: Upper Saddle River, NJ.

Suh, C. **H.** y **Radcliffe C. W.** (1978). *Kinematics and Mechanisms Design.* John Wiley & Sons Nueva York.

3

3.12 PROBLEMAS

*3-l Defina los siguientes ejemplos como casos de generación de trayectoria, movimiento o función.

a. Mecanismo de dirección de un telescopio (para localización de estrellas)
b. Mecanismo de control del cucharón de una retroexcavadora
c. Mecanismo de ajuste de un termostato
d. Mecanismo para el movimiento de la cabeza de una impresora
e. Mecanismo de control del trazador de una graneadora XY

3-2 Diseñe una manivela-balancín de Grashof de cuatro barras, para 90° de movimiento de balancín de salida, sin retorno rápido. (Véase el ejemplo 3-1.) Construya un modelo de cartulina y determine las posiciones de agarrotamiento y el ángulo de transmisión mínimo.

*3-3 Diseñe un mecanismo de cuatro barras que proporcione las dos posiciones mostradas en la figura P3-1 del movimiento de balancín de salida sin retorno rápido. (Véase el ejemplo 3-2.) Elabore un modelo de cartulina y determine las posiciones de agarrotamiento y el ángulo de transmisión mínimo.

3-4 Diseñe un mecanismo de cuatro barras que proporcione las dos posiciones mostradas en la figura P3-1 del movimiento del acoplador. (Véase el ejemplo 3-3.) Construya un modelo de cartulina y determine las posiciones de agarrotamiento y el ángulo de transmisión mínimo. Agregue una diada impulsora. (Véase el ejemplo 3-4.)

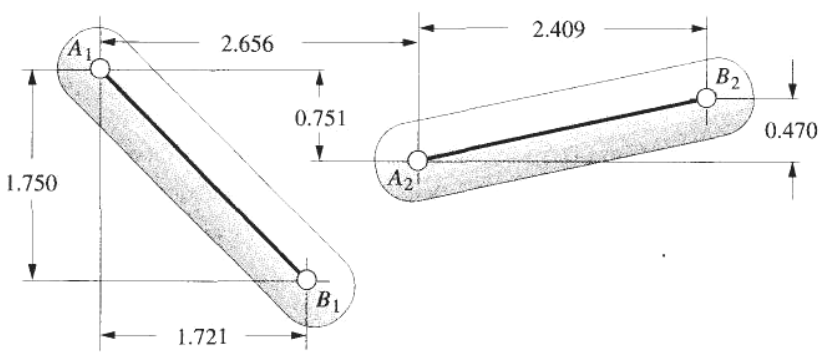


FIGURA P3-1
Problemas 3-3 y 3-4

* Respuestas en el apéndice F.

*3-5 Diseñe un mecanismo de cuatro barras que proporcione las tres posiciones de movimiento de acoplador sin retorno rápido, ilustrado en la figura P3-2. (Véase también el ejemplo 3-5.) No considere los puntos O_A y O_B que se indican. Elabore un modelo de cartulina y determine las posiciones de agarrotamiento, así como el ángulo de transmisión mínimo. Agregue una diada impulsora. (Véase el ejemplo 3-4.)

*3-6 Diseñe un mecanismo de cuatro barras que proporcione las tres posiciones mostradas en la figura P3-2 mediante los pivotes fijos O_A y O_B que se indican. Haga un modelo en cartulina y halle las posiciones de agarrotamiento y el ángulo de transmisión mínimo. Agregue una diada impulsora.

3-7 Repita el problema 3-2 con una relación de tiempos de retorno rápido de 1:1.4. (Véase el ejemplo 3-9.)

*3-8 Diseñe un eslabonamiento de seis barras de retorno rápido y eslabón de arrastre para una relación de tiempos de 1:2 y cuyo movimiento de balancín de salida sea de 60°.

3-9 Diseñe un mecanismo de retorno rápido y manivela de cepilladora con una relación de tiempos de 1:3. (Véase la figura 3-14.)

*3-10 Determine los dos cognados del eslabonamiento ilustrado en la figura 3-17. Trace los diagramas de Cayley y Roberts. Verifique sus resultados con el programa FOURBAR.

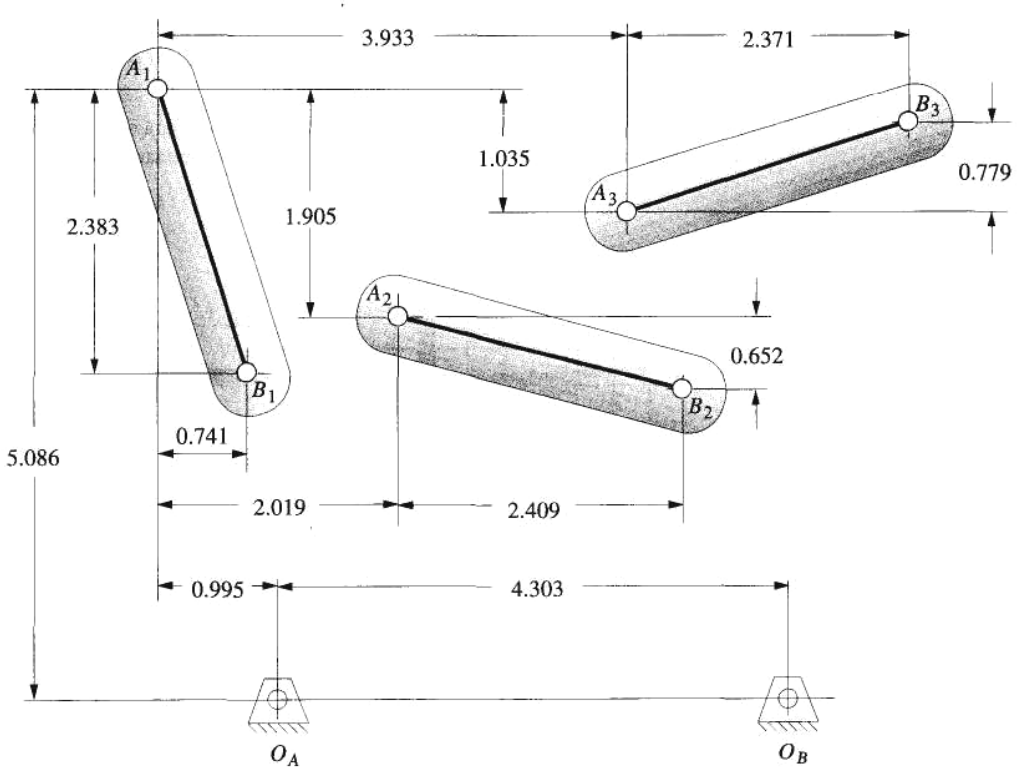


FIGURA P3-2

Problemas 3-5 a 3-7

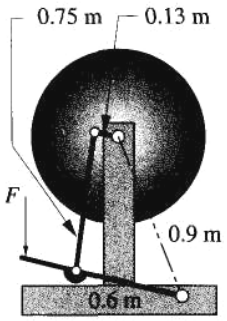


FIGURA P3-3
Problema 3-14. Pedal que acciona una rueda de afilar

3-11 Encuentre los tres eslabonamientos de cinco barras con engranaje equivalentes para los tres cognados de cuatro barras de la figura 3-25a). Compruebe sus resultados comparando las curvas de acoplador con los programas FOURBAR y FIVEBAR.

3-12 Diseñe un eslabonamiento de seis barras con un detenimiento para un paro de 90° de movimiento de manivela y con un movimiento de balancín de salida de 45°.

3-13 Diseñe un eslabonamiento de seis barras con doble detenimiento para un paro de 90° de movimiento de manivela y con un movimiento de balancín de salida de 60°, seguido por un segundo paro de aproximadamente 60° de movimiento de manivela.

3-14 La figura P3-3 muestra un pedal que acciona una rueda de afilar impulsada por un eslabonamiento de cuatro barras. Construya un modelo de cartulina del eslabonamiento a una escala conveniente. Halle sus ángulos de transmisión mínimos. Analice su operación. ¿Funcionará? Si es así explique cómo lo hace.

3-15 La figura P3-4 muestra un eslabonamiento de cuatro barras de no Grashof que se impulsa desde el eslabón O_2A. Todas sus dimensiones están en centímetros (cm).

a. Encuentre el ángulo de transmisión en la posición indicada.
b. Encuentre las posiciones de agarrotamiento en términos del ángulo AO_2O_4.
c. Encuentre los ángulos de transmisión máximo y mínimo sobre su rango de movimiento.
d. Trace la curva de acoplador del punto P sobre su rango de movimiento.

3-16 Trace el diagrama de Roberts para el eslabonamiento indicado en la figura P3-4 y encuentre sus dos cognados. ¿Son o no de Grashof?

3-17 Diseñe un eslabonamiento de seis barras de Watt, de tipo I, para dar movimiento paralelo a la trayectoria de acoplador que sigue el punto P del eslabonamiento en la figura P3-4.

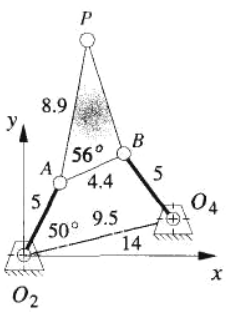


FIGURA P3-4
Problemas 3-15 a 3-18

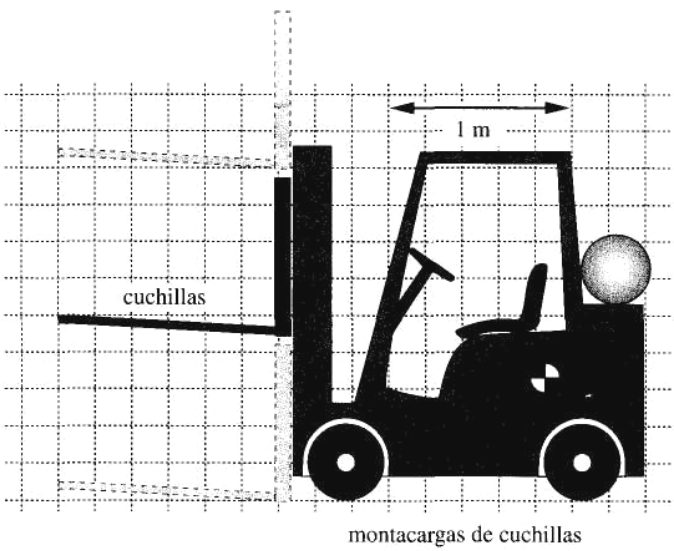


FIGURA P3-5
Problema 3-19

* Respuestas en el apéndice F.

3-18 Agregue una diada impulsora a la solución del problema 3-17 para impulsarla sobre su rango posible de movimiento sin retroceso rápido. (El resultado será un eslabonamiento de 8 barras.)

3-19 Diseñe un eslabonamiento con junta de pasador, el cual llevará hacia abajo y hacia arriba las horquillas del montacargas ilustrado en la figura P3-5 en una línea recta aproximada sobre el rango de movimiento indicado. Ordene los pivotes fijos de manera que se encuentren cerca de cierta parte del sistema existente o del cuerpo del montacargas.

3-20 La figura P3-6 muestra un mecanismo fuera de carga con eslabones en V de un transportador de rollos de papel. Diseñe un eslabonamiento con junta de pasador para remplazar el impulsor del cilindro neumático, el cual hace girar el brazo de balancín y los eslabones en V a través del movimiento indicado de 90°. Mantenga los pivotes fijos lo más cerca posible del sistema existente. El eslabonamiento de cuatro barras será de Grashof y cada posición extrema del brazo de balancín será de agarrotamiento.

3-21 La figura P3-7 muestra un mecanismo de transporte de viga viajera, el cual emplea una curva de acoplador de cuatro barras reproducido con un eslabonamiento de paralelogramo para movimiento paralelo. Advierta que la manivela y el acoplador duplicados, que se ilustran como imágenes fantasma en la parte derecha del mecanismo, son redundantes y se removieron del eslabonamiento de cuatro barras duplicado. Empleando el mismo impulsor de cuatro barras (eslabones L_1, L_2, L_3, L_4 con el punto de acoplador *P)* diseñe un eslabonamiento de seis barras de Watt, del tipo I, que impulse al eslabón 8 en el mismo movimiento paralelo utilizando sólo dos eslabones.

*3-22 Encuentre los ángulos de transmisión mínimo y máximo del impulsor de cuatro barras (eslabones L_1, L_2, L_3, L_4) ilustrado en la figura P3-7 (con exactitud gráfica).

*3-23 La figura P3-8 muestra un eslabonamiento de cuatro barras empleado en una tejedora para impulsar una lengüeta (en forma de peine) contra el hilo y "entretejerlo" en la tela. Determine con exactitud gráfica su condición de Grashof y sus ángulos de transmisión mínimo y máximo.

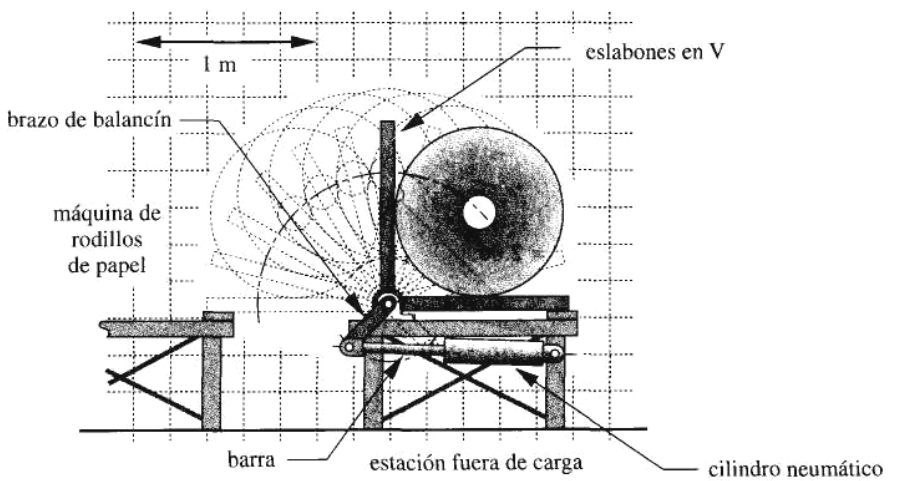


FIGURA P3-6
Problema 3-20

* Respuestas en el apéndice F.

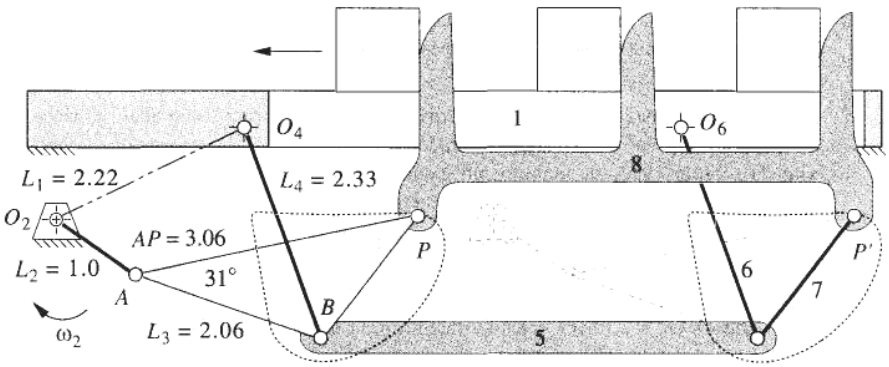


FIGURA P3-7

Problemas 3-21 y 3-22. Mecanismo de transporte de viga viajera en línea recta de ocho barras

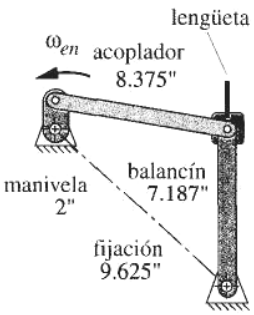


FIGURA P3-8

Problema 3-23. Transmisión de una tejedora de barras descubiertas

3-24 Trace el diagrama de Roberts y encuentre los cognados del eslabonamiento ilustrado en la figura P3-9.

3-25 Encuentre el mecanismo de cinco barras con engranaje equivalente al cognado del eslabonamiento de la figura P3-9.

3-26 Utilice el eslabonamiento en la figura P3-9 para diseñar un mecanismo de ocho barras con doble detenimiento que tenga un balancín de salida a 45°.

3-27 Utilice el eslabonamiento en la figura P3-9 para diseñar un mecanismo de ocho barras con doble detenimiento que tenga una corredera con arrastre de salida de 5 unidades de manivela.

3-28 Utilice dos de los cognados en la figura 3-26 para diseñar un mecanismo de seis barras de Watt, de tipo I, con movimiento paralelo que lleve un eslabón a través de la misma curva de acoplador en todos los puntos. Analice sus similitudes con el diagrama original de Roberts.

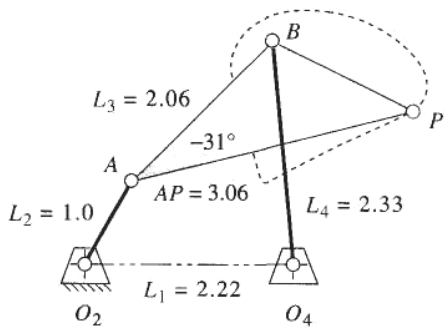


FIGURA P3-9

Problemas 3-24 a 3-27

3-29 Encuentre los cognados del mecanismo de línea recta de Watt en la figura *3-29a).* 3-

30 Encuentre los cognados del mecanismo de línea recta de Roberts en la figura 3-29¿>).

3-31 Diseñe un eslabonamiento de línea recta de Hoeken para obtener el mínimo error en la velocidad sobre el 22% del ciclo para un movimiento en línea recta de 15 cm de longitud. Especifique todos los parámetros del eslabonamiento.

3-32 Diseñe un eslabonamiento de línea recta de Hoeken para obtener el mínimo error en la rectitud sobre el 39% del ciclo para un movimiento en línea recta de 20 cm de longitud. Especifique todos los parámetros del eslabonamiento.

3-33 Diseñe un eslabonamiento que dé una curva de acoplador simétrica en forma de "habichuela" como se muestra en la figura 3-16. Utilice la información de la figura 3-21 para determinar las relaciones de eslabones necesarias y genere la curva de acoplador con el programa FOURBAR.

3-34 Repita el problema 3-33 para una curva de acoplador en "doble recta".

3-35 Repita el problema 3-33 para una curva de acoplador en forma de "cimitarra" con dos cúspides distintas. Muestre que existen (o que no existen) cúspides reales en la curva empleando el programa FOURBAR. (Sugerencia: Piense en la definición de una cúspide y cómo puede emplear la información del programa para demostrarlo.)

*3-36 Encuentre (con exactitud gráfica) la condición de Grashof, la inversión, las posiciones límite y los valores extremos del ángulo de transmisión del eslabonamiento en la figura P3-10.

3-37 Trace el diagrama de Roberts y encuentre los cognados del eslabonamiento en la figura P3-10.

3-38 Encuentre los tres cognados del eslabonamiento de cinco barras con engranaje en la figura P3-10.

3-39 Encuentre (con exactitud gráfica) la condición de Grashof, las posiciones límite y los valores extremos del ángulo de transmisión del eslabonamiento en la figura P3-11.

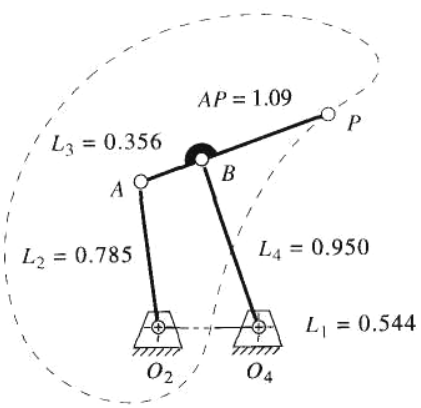


FIGURA P3-10
Problemas 3-36 a 3-38

* Respuestas en el apéndice F.

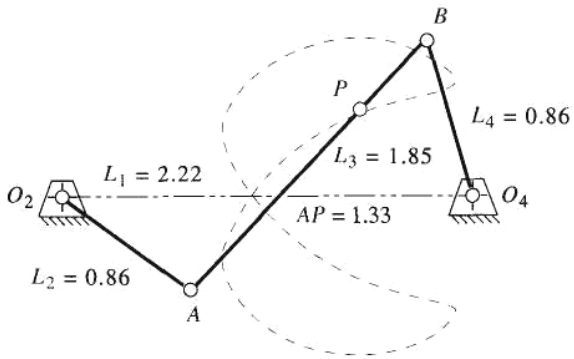


FIGURA P3-11

Problemas 3-39 a 3-41

3-40 Trace el diagrama de Roberts y encuentre los cognados del eslabonamiento en la figura P3-11.

3-41 Encuentre los tres cognados del eslabonamiento de cinco barras con engranaje en la figura P3-11.

*3-42 Encuentre (con exactitud gráfica) la condición de Grashof, las posiciones límite y los valores extremos del ángulo de transmisión del eslabonamiento en la figura P3-12.

3-43 Trace el diagrama de Roberts y encuentre los cognados del eslabonamiento ilustrado en la figura P3-12.

3-44 Encuentre los tres cognados del eslabonamiento de cinco barras con engranaje en la figura P3-12.

3-45 Pruebe que las relaciones entre las velocidades angulares de diversos eslabones en el diagrama de Roberts, ilustradas en la figura 3-25, son verdaderas.

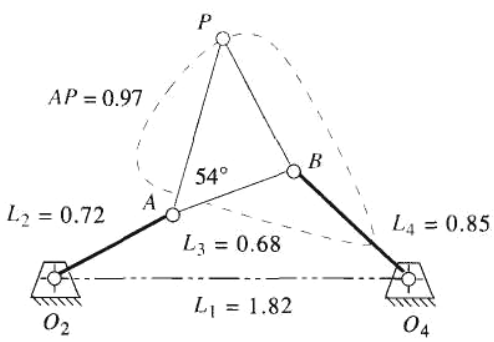


FIGURA P3-12

Problemas 3-42 a 3-44

* Respuestas en el apéndice F.

3-46 Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para mover el objeto en la figura P3-13 de la posición 1 a la 2 utilizando como acoplamiento los puntos *A* y *B.* Agregue una diada impulsora para limitar su movimiento hacia el rango de las posiciones indicadas convirtiéndolo en un eslabonamiento de seis barras. Todos los pivotes fijos deben estar en la base.

3-47 Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para mover el objeto en la figura P3-13 de la posición 2 a la 3 utilizando como acoplamiento los puntos *A* y *B.* Agregue una diada impulsora para limitar su movimiento hacia el rango de las posiciones indicadas convirtiéndolo en un eslabonamiento de seis barras. Todos los pivotes fijos deben estar en la base.

3-48 Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para mover el objeto en la figura P3-13 a través de las tres posiciones indicadas utilizando como acoplamiento los puntos *A y B.* Agregue una diada impulsora para limitar su movimiento hacia el rango de las posiciones indicadas convirtiéndolo en un eslabonamiento de seis barras. Todos los pivotes fijos deben estar en la base.

3-49 Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para mover el objeto en la figura P3-14 de la posición 1 a la 2 utilizando como acoplamiento los puntos *A* y *B.* Agregue una diada impulsora para limitar su movimiento hacia el rango de las posiciones indicadas convirtiéndolo en un eslabonamiento de seis barras. Todos los pivotes fijos deben estar en la base.

3-50 Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para mover el objeto en la figura P3-14 de la posición 2 a la 3 utilizando como acoplamiento los puntos *A y B.* Agregue una diada impulsora para limitar su movimiento hacia el rango de las posiciones indicadas convirtiéndolo en un eslabonamiento de seis barras. Todos los pivotes fijos deben estar en la base.

3-51 Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para mover el objeto en la figura P3-14 a través de las tres posiciones utilizando como acoplamiento los puntos *A* y *B.* Agregue una diada impulsora para limitar su movimiento hacia el rango de las posiciones indicadas convirtiéndolo en un eslabonamiento de seis barras. Todos los pivotes fijos deben estar en la base.

3-52 Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para mover el objeto en la figura P3-15 de la posición 1 a la 2 utilizando como acoplamiento los puntos *A y B.* Agregue una diada impulsora para limitar su movimiento hacia el rango de las posiciones indicadas convirtiéndolo en un eslabonamiento de seis barras. Todos los pivotes fijos deben estar en la base.

3-53 Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para mover el objeto en la figura P3-15 de la posición 2 a la 3 utilizando como acoplamiento los puntos *A y B.* Agregue una diada impulsora para limitar su movimiento hacia el rango de las posiciones indicadas convirtiéndolo en un eslabonamiento de seis barras. Todos los pivotes fijos deben estar en la base.

3-54 Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para mover el objeto en la figura P3-15 a través de las tres posiciones utilizando como acoplamiento los puntos A y *B.* Agregue una diada impulsora para limitar su movimiento hacia el rango de las posiciones indicadas convirtiéndolo en un eslabonamiento de seis barras. Todos los pivotes fijos deben estar en la base.

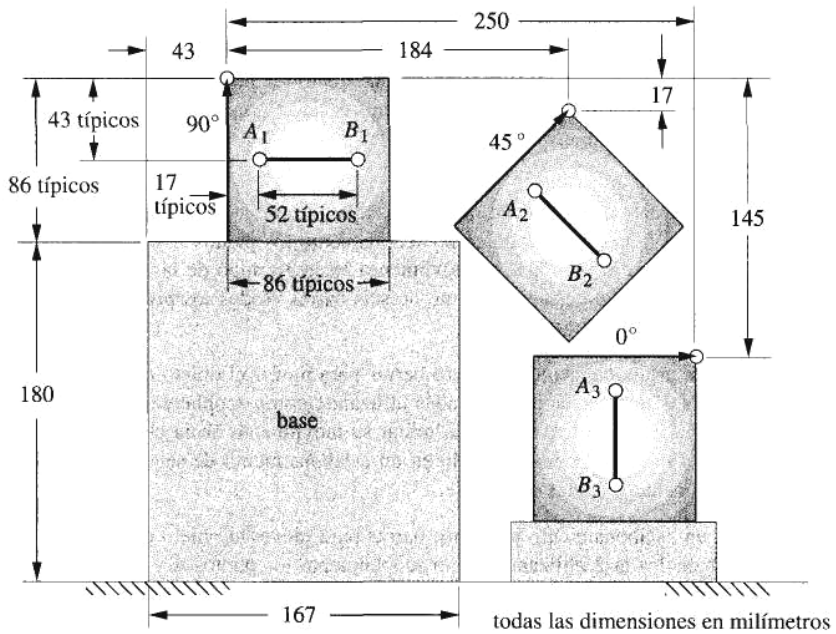


FIGURA P3-13

Problemas 3-46 a 3-48

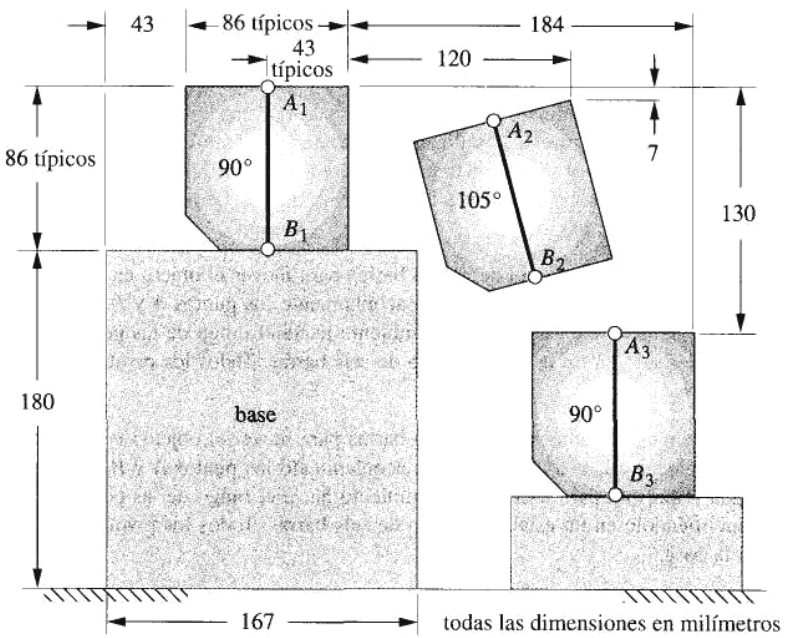


FIGURA P3-14

Problemas 3-49 a 3-51

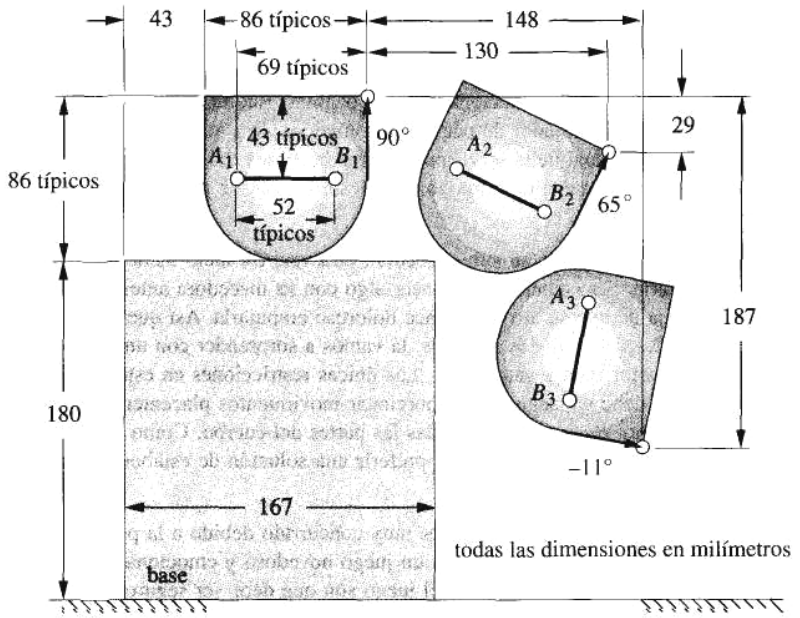


FIGURA P3-15

Problemas 3-52 a 3-54

3.13 PROYECTOS

Los siguientes enunciados de proyecto de gran escala carecen deliberadamente de detalles y estructura y están definidos sin mucha precisión. Por tanto, son similares a la clase de planteamiento de problema de "identificación de necesidad" que se encuentran comúnmente en ingeniería. Se deja al estudiante la tarea de estructurar el problema mediante investigación preliminar y crear un planteamiento de meta claro, así como un conjunto de especificaciones de tarea antes de intentar el diseño de una solución. Este proceso de diseño se expuso en forma detallada en el capítulo 1, y debe seguirse en todos estos ejemplos. Los proyectos se pueden realizar como ejercicio de síntesis de mecanismos o reconsiderarse y analizarse cabalmente por los métodos que se exponen en capítulos siguientes. Todos los resultados se deben documentar en un reporte técnico profesional.

P3-1 El entrenador de tenis necesita un mejor servidor de bolas para las prácticas. Tal dispositivo debe disparar una serie de pelotas de tenis desde un lado de una cancha hacia la red, de manera que caigan y reboten dentro de cada una de las tres áreas definidas por las líneas blancas de la cancha. El orden y la frecuencia de las caídas de las bolas en una de las tres áreas deben ser aleatorios. El sistema debe funcionar automáticamente y sin vigilancia, excepto para la reposición de pelotas, y debe lanzar 50 de ellas en cada descarga. Los tiempos de liberación de bolas son variables. Por sencillez se prefiere un diseño de eslabonamiento con juntas de pasador impulsado por motor.

P3-2 Una paciente parapléjica ha perdido todos sus movimientos excepto el de la cabeza. Lo único que puede hacer es mover una pequeña "varilla bucal" para cerrar un interruptor. Antes de su padecimiento era una ávida lectora, y le agradaría leer de nuevo libros sin que otra persona pase las páginas. Requiere entonces un eficaz, simple y barato cambiador de páginas automático. Un ayudante puede colocar el libro en el aparato, el cual debe servir para acomodar libros del mayor rango posible de tamaños. Con esto se evitará que los libros se dañen y se protegerá la seguridad del usuario.

P3-3 ¡La abuela está fuera de su silla mecedora otra vez! Su nieto menor corre hacia ella para abrazarla, pero tenemos que hacer algo con su mecedora antes de que regrese, ya que se queja de que su artritis le hace doloroso empujarla. Así que para su cumpleaños número 100, que es en dos semanas, la vamos a sorprender con una nueva silla mecedora motorizada y automática. Las únicas restricciones en este problema son que este aparato debe ser seguro y proporcionar movimientos placenteros, similares a los de su mecedora *Boston* actual a todas las partes del cuerpo. Como la sencillez es la marca de un buen diseño, se ha de preferir una solución de eslabonamiento con juntas de pasador completas.

P3-4 El parque de diversiones local no es muy concurrido debido a la proliferación de salas de juego de computadora. Necesita un juego novedoso y emocionante que atraiga a más visitantes. Las restricciones del juego son que debe ser seguro y emocionante y no debe someter a los ocupantes a velocidades o aceleraciones excesivas. También debe ser lo más compacto posible, ya que se dispone de poco espacio. Se prefieren una entrada de movimiento rotatorio continuo y juntas de pasador completas.

P3-5 La sección estudiantil de una sociedad americana de ingenieros mecánicos (ASME por sus siglas en inglés) patrocina un acto en una universidad. Sus integrantes necesitan un mecanismo para su aparato de cabina llamado "refresque a su profesor", el cual sumerge al infortunado voluntario a una tina de agua y luego lo saca. Los concursantes proporcionarán las entradas a un mecanismo con múltiples *GDL*. Si saben bastante cinemática podrán proporcionar una combinación de entradas que remojen a la víctima.

P3-6 La Asociación Nacional de Postres desea automatizar su producción de pasteles. Necesita un mecanismo que voltee automáticamente los productos "al vuelo" cuando viajan por la rejilla de un transportador de movimiento continuo. Este mecanismo debe ajustarse a la velocidad constante del transportador, tomar un pan, voltearlo y depositarlo de nuevo en el transportador.

P3-7 Existen ahora muchas variedades y formas de monitores para computadora. Su uso durante largas jornadas ocasiona fatiga ocular y del resto del cuerpo. Se necesita un soporte ajustable que sostenga al monitor y al teclado en posiciones cómodas. La unidad central (CPU) de la computadora puede estar a una distancia remota. Tal dispositivo deberá sostenerse solo, de modo que permita el uso de un mueble o silla cómodos. No debe requerir que éste adquiera la postura común de "bien sentado ante el escritorio", al utilizar la computadora. Debe mantenerse estable en todas las posiciones y sostener con seguridad el peso del equipo de cómputo.

P3-8 La mayoría de los remolques de auto para lanchas pequeñas deben sumergirse en el agua cuando meten o sacan un bote. Esto reduce mucho la duración del remolque, en especial cuando se trata de agua salada. Se necesita un remolque que permanezca en tierra firme seca cuando se ejecuten esas operaciones. Ninguna de sus partes debe

mojarse. La seguridad del usuario es de la mayor importancia, así como la protección contra daños del bote.

P3-9 La asociación "Salve un Pichón" solicita el diseño de un mejor lanzador de pichones para el tiro al blanco. Aunque no ha podido hacer que se legisle al respecto para evitar su muerte, le preocupan los aspectos inhumanos de las grandes aceleraciones que sufren estas aves al ser disparadas hacia el cielo para que un deportista les dispare. Se requiere entonces un lanzador mecánico que acelere suavemente tales animalillos en la trayectoria deseada.

P3-10 Los caballos mecánicos saltadores para niños que funcionan con monedas, como los que hay en el exterior de algunos establecimientos, generalmente proporcionan a su ocupante un movimiento de balanceo poco imaginativo. Se necesita mejorar el aparato de manera que proporcione sacudidas y oscilaciones más interesantes, pero que a la vez sea absolutamente seguro para los usuarios.

P3-11 Cabalgar es un deporte o un pasatiempo muy costoso. Se requiere un simulador ecuestre que permita entrenar a jinetes sin tener que recurrir a una costosa cabalgadura real. Tal dispositivo debe ofrecer movimientos similares a los verdaderos, de modo que el ocupante se afirme bien en la silla ante diversas acciones, como andar, trotar o galopar. Una versión más avanzada del corcel mecánico podría simular también los saltos a caballo. La seguridad del usuario es la principal consideración.

P3-12 Ante la actual afición por el ejercicio físico, se han ideado muchas máquinas "ejercitadoras" que requieren mejoramiento continuamente. Por lo común se diseñan para la persona atlética joven y fuerte, pero se necesita un ejercitador ergonómicamente óptimo especial para gente mayor que practica ejercicios suaves.

P3-13 Un paciente parapléjico requiere un aparato que le permita trasladarse solo sin ayuda de su silla de ruedas al *jacuzzi*- Posee suficiente fuerza en los brazos y el tronco. La principal condición es la seguridad.

P3-14 El ejército ha solicitado un andador mecánico que permita probar la durabilidad del calzado militar. Debe simular el movimiento de una persona al caminar y aportar fuerzas semejantes a las del pie de un soldado promedio que usará esas botas.

P3-15 La NASA desea una máquina de gravedad nula para el entrenamiento de astronautas. Debe tener capacidad para una persona y proporcionar una aceleración negativa de 1 - G el mayor tiempo posible.

P3-16 La Corporación de Juegos Mecánicos quiere un juego de "látigo" portátil que ofrezca un paseo estremecedor, aunque seguro, a dos o cuatro pasajeros y que se pueda remolcar de un lugar a otro en una camioneta *pick-up.*

P3-17 La fuerza aérea de un país solicita un simulador para adiestramiento de pilotos que dé a los aviadores potenciales una exposición a fuerzas de gravedad G semejantes a las que experimentarían en las maniobras de un severo combate aéreo.

P3-18 Un bar de Boston requiere un mejor simulador de toro mecánico para jinetes. Tiene que efectuar movimientos de bestia "muy bronca" de rodeo, pero a la vez brindar seguridad.

P3-19 A pesar de las mejoras para facilitar el acceso a personas discapacitadas en muchas calles la acera impide el paso a quienes usan silla de ruedas. Diseñe un aditamento para una silla de ruedas común que permita ascender fácilmente el borde de una banqueta.

P3-20 Una carpintera necesita un aparato de volteo adaptable a su camioneta de reparto, de modo que pueda descargar sus materiales de construcción, ya que no puede costear la compra de un camión de volteo.

P3-21 La carpintera del problema P3-20 requiere un montacargas de bajo costo que se adapte a su vehículo *pick-up* para subir y bajar carga pesada de la plataforma de la camioneta.

P3-22 La misma persona es muy exigente (y perezosa), así que también desea un dispositivo que levante lajas y las coloque contra un muro o techo donde se sostengan firmemente mientras las clava.

P3-23 Se necesita un mejor gato de transmisión para un taller mecánico. Este dispositivo deberá colocar una transmisión bajo un carro (en el punto de izaje) que se pueda mover de un lugar a otro de manera rápida y segura.

P3-24 Una persona parapléjica que era golfista antes de su lesión desea un aparato que le permita ponerse de pie en su silla de ruedas para volver a jugar golf. El aparato no debe interferir con el uso normal de la silla, y debe poder desmontarse de ésta cuando no esté jugando.

P3-25 Se requiere un elevador de silla de ruedas para levantar a uno de estos dispositivos y a su ocupante a una altura de tres pies desde un garaje hasta la planta baja de una casa. La seguridad, la confiabilidad y el costo son lo más importante.

P3-26 Una persona parapléjica necesita que se instale un mecanismo sobre una camioneta *pick-up* de tres puertas que levante la silla de ruedas detrás del asiento del conductor. Esta persona tiene una excelente resistencia en la parte superior de su cuerpo, por lo que con ayuda de la instalación de unas asas especiales sobre el camión podría entrar en la cabina desde la silla. Para que pueda hacerlo es necesario hacer algunas modificaciones a la camioneta. Por ejemplo, se podría agregar puntos de unión a su estructura y si fuera necesario remover el asiento trasero.

P3-27 Se requiere mejorar los dispositivos transportadores de bebés (carreólas o cochecitos) que ya se encuentran en el mercado. Algunos son convertibles para usos múltiples. Nuestra fuente de información revela que la mayoría de los consumidores busca portabilidad (es decir, plegabilidad), peso ligero, manejo con una mano, y ruedas largas. Algunos de los dispositivos existentes ya poseen una o más de estas características; pero se necesita un diseño que cubra más necesidades del consumidor. El dispositivo debe ser estable, efectivo y seguro para el bebé y para quien lo guía. Se prefieren las juntas completas a las semijuntas y la sencillez es la marca del buen diseño. Se desea una solución de los eslabonamientos con entrada manual.

P3-28 Se necesita un *dispositivo de inserción de láminas de mesa.* El dispositivo debe ser fácil de usar, de preferencia se debe utilizar un movimiento similar al de las mesas plegadizas. Esto es: al jalar la mesa para que se abra, el mecanismo diseñado debe impulsar la lámina restante al lugar adecuado, de manera que la superficie de la mesa se extienda.

P3-29 La dueña de un bote que pesa 1 000 Ib y mide 15 pies de largo ha pedido que se le diseñe un mecanismo de levantamiento para moverlo automáticamente, desde una base sobre el suelo hacia el agua. Una barda protege su patio, y la base del bote descansa sobre la barda. La variación de la marea es de 4 pies. El mecanismo estará fijo en tierra y moverá al bote desde su posición de almacenamiento sobre la base hacia el agua y lo regresará a su lugar. El dispositivo debe ser seguro y fácil de usar, y no demasiado caro.

P3-30 ¡Los vertederos de basura están llenos! ¡La basura nos llegará hasta el cuello! El mundo necesita un mejor mecanismo que compacte la basura. Debe ser simple, barato, silencioso, compacto y seguro. Puede ser mecánico o motorizado, pero se prefiere que funcione manualmente para mantener el precio bajo. El dispositivo debe ser estable, efectivo y seguro para el operador.

P3-31 Un pequeño contratista requiere del acoplamiento de un contenedor de basura para su camioneta *pick-up.* Ya ha construido diversos contenedores de basura que tienen 4 pies x 4 pies x 3.5 pies de alto. El contenedor vacío pesa 150 Ib. El contratista necesita un mecanismo que sujete las escuadras de sus camionetas *pick-up* (Chevrolet, Ford o Dodge). Este mecanismo debe recoger del suelo el contenedor lleno, levantarlo sobre la compuerta trasera cerrada del camión, vaciar su contenido dentro de la base de la camioneta, y regresarlo vacío al suelo. De preferencia la camioneta no debe volcarse durante el proceso. El mecanismo permanecerá sobre la camioneta de manera que se pueda usar normalmente en otras ocasiones. Se debe especificar cualquier medio de acoplamiento de su mecanismo al contenedor y a la camioneta.

Capítulo 4

ANÁLISIS DE POSICIÓN

La teoría es la esencia destilada de la práctica.
RANKINE

4.0 INTRODUCCIÓN

Una vez que se **ha sintetizado** un diseño de mecanismo tentativo se debe proceder a **analizarlo.** Una meta principal del análisis cinemático es la determinación de las aceleraciones de todas las partes móviles del conjunto. La segunda ley de Newton establece que una **fuerza dinámica** es proporcional a su aceleración. Para calcular los **esfuerzos** en los componentes es necesario conocer las fuerzas dinámicas. El ingeniero de diseño se debe asegurar de que el mecanismo o máquina propuesto no fallará en las condiciones reales de operación. De modo que los esfuerzos en los materiales deben mantenerse muy por debajo de los niveles admisibles. Para calcular los esfuerzos se necesita conocer las fuerzas estáticas y dinámicas en las partes, y con el fin de determinar tales fuerzas dinámicas es necesario conocer las **aceleraciones.** Para calcular éstas se deben encontrar las **posiciones** de todos los elementos del mecanismo (sus eslabones) para cada incremento en el movimiento de entrada, y luego derivar las ecuaciones de posición con respecto al tiempo para obtener las **velocidades;** las cuales también se derivan con el fin de obtener las expresiones de aceleración. Por ejemplo, es probable que en un eslabonamiento simple de cuatro barras de Grashof se desee calcular las posiciones, velocidades y aceleraciones de los eslabones de salida (acoplador y balancín), quizá para cada dos grados (180 posiciones) de la posición de entrada de la manivela hasta completar una revolución de dicha manivela.

Esto se puede efectuar por uno de varios métodos. Se podría usar un **procedimiento gráfico** para determinar la posición, velocidad y aceleración de los eslabones de salida para las 180 posiciones de interés, o bien se podrían **deducir las ecuaciones generales** de movimiento para una posición, derivar matemáticamente para determinar velocidad y aceleración, y después resolver estas **expresiones analíticas** para las 180 (o más) ubicaciones de la manivela. Una computadora hará esta última tarea mucho más fácilmente. Si se elige el método gráfico de análisis se tendrá que efectuar una resolución gráfica independiente para cada una de las posiciones de interés. Nada de la información obtenida

gráficamente para la primera posición será aplicable a la segunda o a cualesquiera otras. Por el contrario, una vez que se llega a la solución analítica para un mecanismo en particular, se puede resolver rápidamente (con una computadora) para todas las posiciones. Si se desea información para más de 180 de ellas, esto sólo significa que se tendrá que esperar más tiempo para que la computadora genere esos datos. Las ecuaciones deducidas son las mismas. De manera que puede servirse y tomar otra taza de café mientras la computadora ¡elabora los resultados! En este capítulo se presentarán y deducirán soluciones analíticas al problema de análisis de posición para diversos mecanismos planos. Se analizarán también las soluciones gráficas con las que se puede comprobar los resultados analíticos. Lo mismo se hará en los capítulos 6 y 7 para el análisis de velocidad y aceleración de mecanismos planos.

Es interesante observar que el **análisis gráfico de posiciones** en eslabonamientos es un ejercicio verdaderamente trivial, en tanto que el enfoque algebraico del análisis de posición es mucho más complicado. Si se puede dibujar a escala el eslabonamiento, entonces se habrá resuelto de modo gráfico el problema de análisis de posiciones. Sólo restaría medir los ángulos entre eslabones en el dibujo a escala con la precisión del transportador geométrico. Lo contrario es aplicable al análisis de velocidad y en especial al de la aceleración. Las soluciones analíticas para éstas son más fáciles de obtener que la solución analítica de posiciones. No obstante, el análisis gráfico de velocidad y aceleración se vuelve muy complejo y difícil. Además, se requiere volver a elaborar los diagramas vectoriales para cada una de las posiciones de interés del eslabonamiento. Éste es un ejercicio muy tedioso; pero era el único método práctico del que se disponía hasta la aparición de la computadora (lo cual no fue hace mucho tiempo). La proliferación de las microcomputadoras no muy costosas en años recientes ha revolucionado verdaderamente la práctica de la ingeniería. Como ingeniero graduado, usted nunca estará lejos de una computadora con la capacidad suficiente para resolver este tipo de problema. Por consiguiente, en este libro se consideran principalmente las expresiones analíticas que se pueden resolver con facilidad mediante una microcomputadora. Los programas de cómputo que se proporcionan con esta obra utilizan las mismas técnicas analíticas deducidas en el libro.



Caray, José. ¡Ahora quisiera haber tomado aquel curso de programación!

4.1 SISTEMAS DE COORDENADAS

Los sistemas de coordenadas y los marcos de referencia existen para comodidad y agrado del ingeniero que los define. En los siguientes capítulos se adornará los sistemas con múltiples sistemas de coordenadas, de la manera que más convenga para ayudar a entender y resolver el problema. Denotaremos a uno de éstos como sistema de coordenadas *global o absoluto,* y a los otros como sistemas de coordenadas *locales,* dentro del marco global. El sistema global suele considerarse unido a la Madre Tierra, aunque podría estarlo también a otro plano fijo arbitrario, como el armazón de un auto. Si nuestra meta es analizar el movimiento de la pluma de un limpiaparabrisas, podemos no incluir el movimiento total del automóvil en el análisis. En este caso sería útil un sistema de coordenadas global fijado al vehículo, y se podría considerar un sistema de coordenadas **absoluto.** Aun si se utilizara a nuestro planeta como un marco de referencia absoluto, debemos advertir que no es absolutamente estacionario, y como tal, no es de mucha utilidad como sistema de referencia para una sonda espacial. Aunque se hablará de posiciones, velocidades y aceleraciones absolutas, no hay que olvidar que, después de todo, y hasta que se descubra algún punto estacionario en el universo, en realidad todos los movimientos son relativos. El término **marco de referencia inercial** se usa para denotar *un sistema que en sí no tiene aceleración.* En este libro todos los ángulos se medirán de acuerdo con *la regla de la mano derecha.* Es decir, **los ángulos en sentido contrario a las manecillas del reloj,** así como las velocidades y aceleraciones angulares con tal sentido, *son de signo positivo.*

Los sistemas de coordenadas locales se unen por lo común a un eslabón en algún punto de interés. Éste podría ser una junta de pasador, un centro de gravedad, o una línea de centros de un eslabón. Estos sistemas de coordenadas locales pueden ser rotatorios o no rotatorios, según se desee. Si se quiere medir el ángulo de un eslabón cuando gira en el sistema global, probablemente se quiere unir un sistema coordenado no rotatorio a algún punto en el eslabón (por ejemplo, una junta de pasador). Este sistema sin rotación se moverá con su origen en el elemento pero permanece siempre paralelo al sistema global. Si se desea medir algunos parámetros dentro de un eslabón, independientemente de su rotación, entonces se querrá construir un sistema coordenado que gire a lo largo de una recta en el elemento cinemático. Este sistema se desplazará y girará junto con el eslabón en el sistema global. Muy a menudo se requerirá tener ambos tipos de sistemas de coordenadas locales en los eslabones móviles para efectuar un análisis completo. Es obvio que se debe definir las posiciones y ángulos de estos sistemas de coordenadas locales en movimiento, en el sistema global en todas las posiciones de interés.

4.2 POSICIÓN Y DESPLAZAMIENTO

Posición

La **posición** de un punto en el plano se puede definir mediante un **vector de posición,** como se indica en la figura 4-1. La elección de **ejes de referencia** es arbitraria y se escoge de modo que se adapte al observador. Un vector bidimensional tiene dos atributos, los cuales se pueden expresar en coordenadas *polares o cartesianas.* La **forma polar**

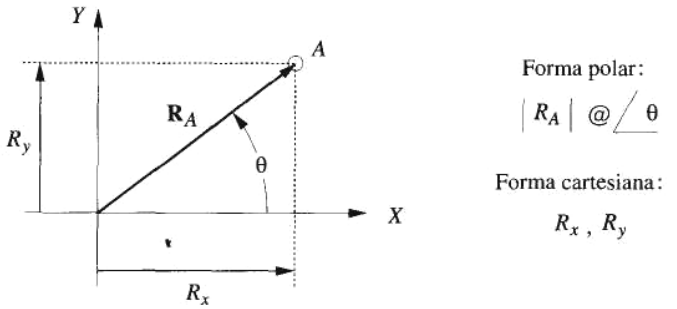


FIGURA 4-1
Un vector de posición en el plano

proporciona la magnitud y el ángulo del vector. La **forma cartesiana** aporta las componentes *X y Y* del mismo. Cada forma es directamente convertible en la otra como sigue:*

por el teorema de Pitágoras:

$$R_A = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \tag{4.0}$$

por trigonometría:

$$\theta = \arctan\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

Desplazamiento

El **desplazamiento** de un punto es el cambio en su posición y se puede definir como *la distancia rectilínea entre las posiciones inicial y final de un punto que se ha movido dentro del marco de referencia.* Observe que el desplazamiento no necesariamente es igual a la longitud del trayecto que el punto haya recorrido al ir de su posición inicial a la final. En la figura 4-2a) se muestra un punto en dos posiciones, *A* y *B.* La línea curva señala el recorrido del punto. El vector de posición $\mathbf{R}_{BA}$ representa el desplazamiento del punto *B* con respecto al punto *A.* En la figura 4-2¿>) se define esta situación más rigurosamente y en relación con un marco de referencia *XY.* El símbolo R denota siempre un vector de posición. Así, los vectores $\mathbf{R}_A$ y $\mathbf{R}_B$ señalan, respectivamente, las posiciones absolutas de los puntos *Ay B* con respecto a este marco de referencia *global XY.* El vector $\mathbf{R}_{BA}$ denota la diferencia de posición, o *desplazamiento,* entre *A* y *B.* Lo anterior se puede expresar como la *ecuación de diferencias de posición:*

$$\mathbf{R}_{BA} = \mathbf{R}_B - \mathbf{R}_A \tag{4.1a}$$

Esta expresión se lee: *La posición de B con respecto a A es igual a la posición (absoluta) de B menos la posición (absoluta) de A,* donde el calificativo *absoluta* indica que se expresan con respecto al origen del marco de referencia *global.* Esta expresión se podría escribir también como:

* Observe que debe usarse una función arco tangente de dos argumentos para obtener ángulos en los cuatro cuadrantes. La función de un argumento arco tangente de la que disponen la mayoría de las calculadoras y lenguajes de programación sólo obtiene los valores del ángulo en el primero y el cuarto cuadrante. Usted puede calcular muy fácilmente su propia función de arco tangente con dos argumentos, probando el signo de la componente *x* de los argumentos y, si *x* es negativa, agregándole π radianes o 180° al resultado obtenido de la función de arco tangente de un argumento disponible.

Por ejemplo (en Fortran):

```
FUNCTION Atan2(x, y)
IF x <> 0 THEN Q = y / x
Temp = ATAN(Q)
IF x < 0 THEN
   Atan2 = Temp + 3.14159
ELSE
   Atan2 = Temp
END IF
RETURN
END
```

El código anterior supone que el lenguaje usado tiene una función predefinida de un solo argumento llamada ATAN(x), la cual obtiene un ángulo entre $\pm \pi/2$ radianes cuando se le asigna un signo al valor del argumento que representa el valor de la tangente de este ángulo.

$$\mathbf{R}_{BA} = \mathbf{R}_{BO} - \mathbf{R}_{AO} \tag{4.1b}$$

donde el segundo subíndice *O* indica el origen del marco de referencia *XY*. Cuando un vector de posición está ligado al origen de ese marco, se acostumbra omitir el segundo subíndice. Se sobrentiende, en su ausencia, que es el origen. Asimismo, un vector referido al origen, tal como el $\mathbf{R}_A$, se denomina con frecuencia vector absoluto. Esto significa que se considera con respecto a un marco de referencia que se supone estacionario; por ejemplo el *de fijación*. Es importante advertir, sin embargo, que tal elemento fijo (como el suelo que pisamos) también se halla generalmente en movimiento en algún marco de referencia mayor. En la figura 4-2c) se presenta una solución gráfica a la ecuación 4.1.

En el ejemplo de la figura 4-2 se ha supuesto tácitamente hasta ahora, que el punto que primero está situado en A y luego en *B*, es, de hecho, la misma partícula que se desplaza dentro del marco de referencia. Podría ser, por ejemplo, un automóvil que se mueve a lo largo de un camino desde *A* hasta *B*. Con tal hipótesis es conveniente referirse al vector $\mathbf{R}_{BA}$ como una **diferencia de posición.** Sin embargo, hay otro caso que conduce al mismo diagrama y ecuación, pero requiere de un nombre distinto. Suponga ahora que los puntos *A* y *B* de la figura 4-2b) no representan la misma partícula sino otras dos partículas independientes que se mueven en el mismo marco de referencia, como pudieran ser dos automóviles que van por la misma carretera. Las ecuaciones vectoriales 4.1 y el diagrama de la figura 4-2b) aún son válidos, pero ahora se designa a $\mathbf{R}_{BA}$ como una

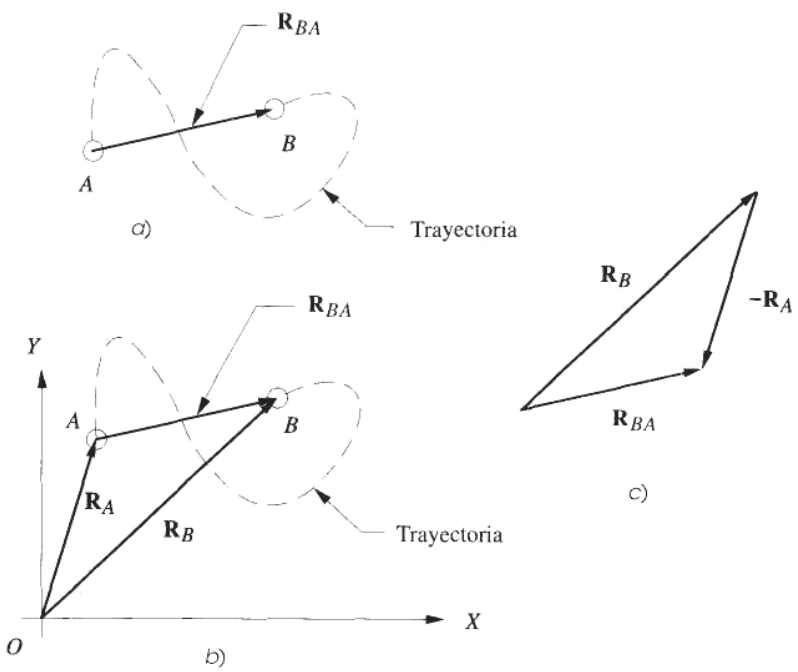


FIGURA 4-2

Diferencia de posición y posición relativa

posición relativa, o una **posición aparente.** En este libro se usará la primera expresión. Una manera más formal de distinguir entre estos dos casos es como sigue:

CASO 1. *Un cuerpo en dos posiciones sucesivas* => ***diferencia de posición***

CASO *2. Dos cuerpos en posiciones separadas simultáneamente* => ***posición relativa***

Esta distinción puede parecer muy fina, pero resultará útil cuando se analicen las velocidades y las aceleraciones; en especial cuando se encuentran situaciones en que los dos cuerpos ocupan la misma posición al mismo tiempo, pero tienen movimientos diferentes (tipo CASO 2).

4.3 TRASLACIÓN, ROTACIÓN Y MOVIMIENTO COMPLEJO

Hasta ahora se ha tratado con una partícula (o un punto) en movimiento plano, pero es más interesante considerar el movimiento de un **cuerpo rígido** o eslabón. En la figura 4-3a) se muestra un eslabón *AB* representado por un vector de posición R_{BA}. Se ha establecido un sistema de ejes en el principio (o punto origen) del vector, el A, por conveniencia.

Traslación

En la figura *4-3b)* se presenta el eslabón *AB* desplazado a una nueva posición $A'B'$ por traslación según los desplazamientos AA' o BB', que son iguales. Es decir, $\mathbf{R}_{A'A} = \mathbf{R}_{B'B}$.

Una definición de traslación es:

Todos los puntos del cuerpo tienen el mismo desplazamiento.

Como resultado, el eslabón retiene su orientación angular. Observe que la traslación no necesita efectuarse sobre una trayectoria recta. Las líneas curvas de *A* a *A'* y de *B* a B' son la trayectoria de traslación curvilínea del eslabón. No hay rotación del mismo si tales trayectos son paralelos. Si la trayectoria fuese recta, entonces se tendría el caso especial de traslación rectilínea, y la trayectoria y el desplazamiento serían iguales.

Rotación

En la figura 4-3c) se muestra el mismo eslabón AS movido desde su posición original en el origen del marco de referencia, por una rotación en un cierto ángulo. El punto A permanece en tal punto, pero el *B* se mueve según el vector de diferencia de posición $\mathbf{R}_{B'B} = \mathbf{R}_{B'A} - \mathbf{R}_{BA}$.

Una definición de rotación es:

Diferentes puntos del cuerpo experimentan distintos desplazamientos, por tanto, hay una diferencia de desplazamiento entre dos puntos cualesquiera seleccionados.

El eslabón cambia ahora su orientación angular en el marco de referencia, y todos los puntos tienen desplazamientos diferentes.

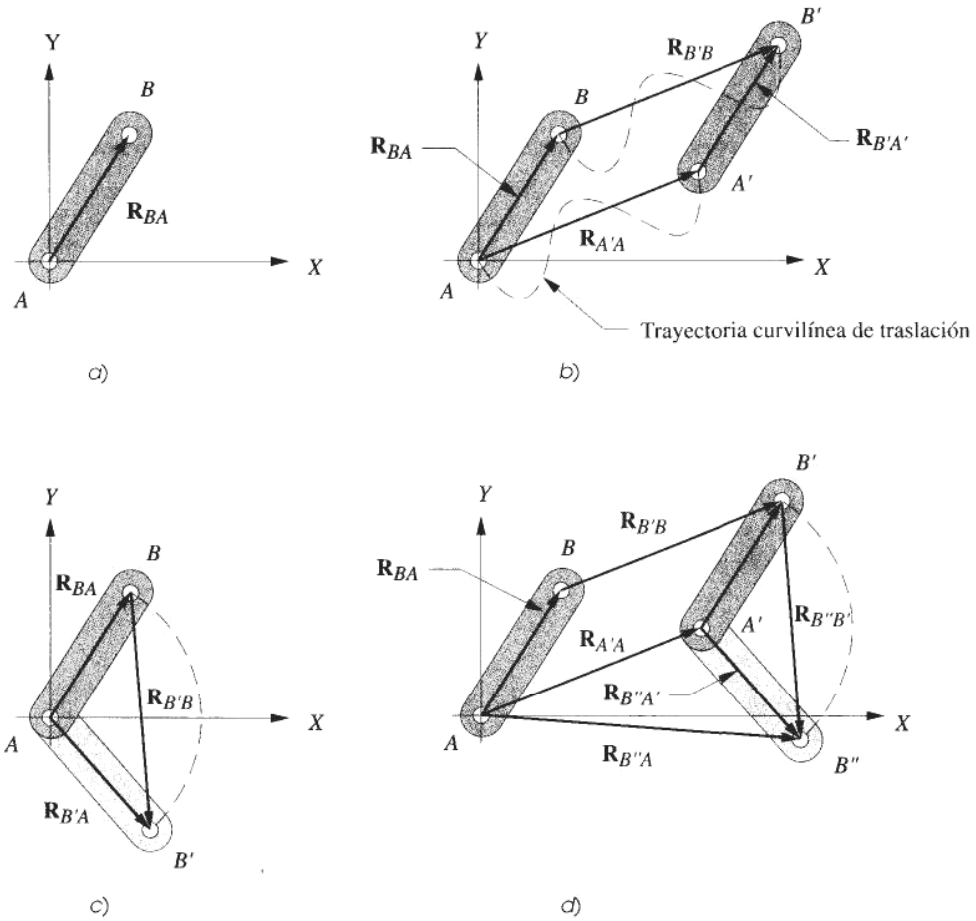


FIGURA 4-3

Traslación, rotación y movimiento complejo

Movimiento complejo

El caso general de **movimiento complejo** es la suma de las componentes de traslación y de rotación. En la figura *4-3d)* se muestra el mismo eslabón que se mueve por la traslación y la rotación aplicadas antes. Observe que el orden en que se suman estas dos componentes es indistinto. El desplazamiento complejo resultante será el mismo, ya sea que primero haya rotación y después traslación, o viceversa. Esto se debe a que los dos factores son independientes. El desplazamiento complejo total del punto *B* se define con la siguiente expresión:

Desplazamiento total = componente de traslación + componente de rotación

$$\mathbf{R}_{B''B} = \mathbf{R}_{B'B} + \mathbf{R}_{B''B'} \qquad (4.1c)$$

La nueva posición absoluta del punto *B* referida al origen en *A* es:

$$\mathbf{R}_{B''A} = \mathbf{R}_{A'A} + \mathbf{R}_{B''A'} \tag{4.1d}$$

Considere que las dos fórmulas anteriores son sólo aplicaciones de la ecuación de diferencia de posición 4.1a. Véase también en la sección 2.2 las definiciones y la descripción de *rotación, traslación* y *movimiento complejo.* Estos estados de movimiento se pueden expresar según los siguientes teoremas.

Teoremas

Teorema de Euler:

El desplazamiento general de un cuerpo rígido con uno de sus puntos fijo es una rotación alrededor de un eje.

Esto se aplica a una rotación pura, como antes se definió y como se expone en la sección 2.2. Chasles (1793-1880) proporcionó un corolario al teorema de Euler conocido ahora como:

Teorema de Chasles:

Cualquier desplazamiento de un cuerpo rígido es equivalente a la suma de una traslación de cualquier punto en el cuerpo y una rotación de éste alrededor de un eje que pasa por ese punto.

Esto describe un movimiento complejo, como antes se definió y como se explica en la sección 2.2. Nótese que la ecuación 4.1c es una expresión del teorema de Chasles.

4.4 ANÁLISIS GRÁFICO DE POSICIÓN DE ESLABONAMIENTOS

Para cualquier eslabonamiento con un *GDL*, tal como uno de cuatro barras, sólo se necesita un parámetro para definir completamente las posiciones de todos los eslabones. El parámetro que normalmente se escoge es el ángulo del eslabón de entrada. Este se muestra como θ_2 en la figura 4-4. Se quiere encontrar θ_3 y θ_4. Se conocen las longitudes de los eslabones. Observe que de manera consistente se numerará al eslabón de fijación como 1 y al eslabón impulsor como 2 en estos ejemplos.

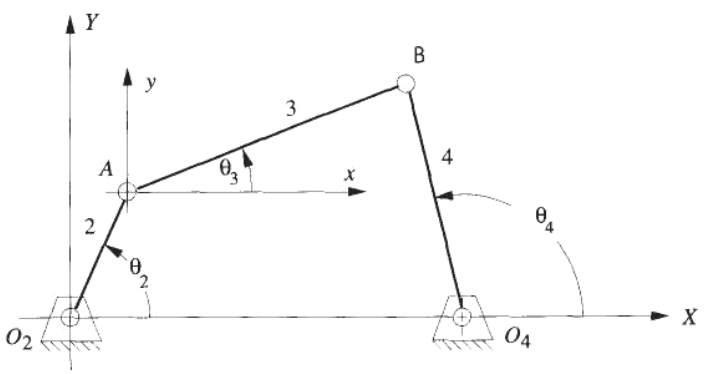


FIGURA 4-4
Medición de los ángulos en un eslabonamiento de cuatro barras

El análisis gráfico de este problema es trivial y puede hacerse usando sólo geometría de bachillerato. Si se dibuja el eslabonamiento cuidadosamente a escala, con regla, compás y transportador en una posición en particular (dada θ_2), entonces sólo es necesario medir los ángulos de los eslabones 3 y 4 con el transportador. Observe que todos los ángulos de los eslabones se miden a partir del eje *X* positivo. En la figura 4-4 se creó un sistema *local* de ejes *xy*, paralelo al sistema *global XY*, en el punto *A* para medir θ_3. La precisión de esta solución gráfica dependerá de su cuidado y habilidad para dibujar, y de la fineza del transportador usado. No obstante, se puede encontrar una solución rápida aproximada para cualquier posición.

La figura 4-5 muestra la construcción de la solución gráfica de posición. Las cuatro longitudes de eslabones *a, b, c, d y* el ángulo θ_2 del eslabón de entrada están dados. Primero, el eslabón de fijación (1) y el eslabón de entrada (2) están dibujados a una escala conveniente, de tal manera que se intersecan en el origen O_2 del sistema coordenado global *XY* con el eslabón 2 colocado en el ángulo de entrada θ_2. El eslabón 1 está dibujado a lo largo del eje *X* por conveniencia. El compás está puesto a la longitud a escala del eslabón 3, y un arco de ese radio se columpia del extremo del eslabón 2 (punto *A).* Después se pone el compás con una longitud a escala del eslabón 4, y un segundo arco se columpia del extremo del eslabón 1 (punto 0_4). Estos dos arcos tienen dos intersecciones en *B y B'* que definen las dos soluciones al problema de posición para un eslabonamiento de cuatro barras, el cual ha sido ensamblado en dos configuraciones llamadas circuitos, rotulados con la leyenda abierta y cruzada en la figura 4-5. Los circuitos en eslabonamientos se analizarán en la siguiente sección.

Los ángulos de los eslabones 3 y 4 se pueden medir con un transportador. Un circuito tiene ángulos θ_3 y θ_4, los otros $\theta_{3'}$ y $\theta_{4'}$. Una solución gráfica sólo es válida para el valor

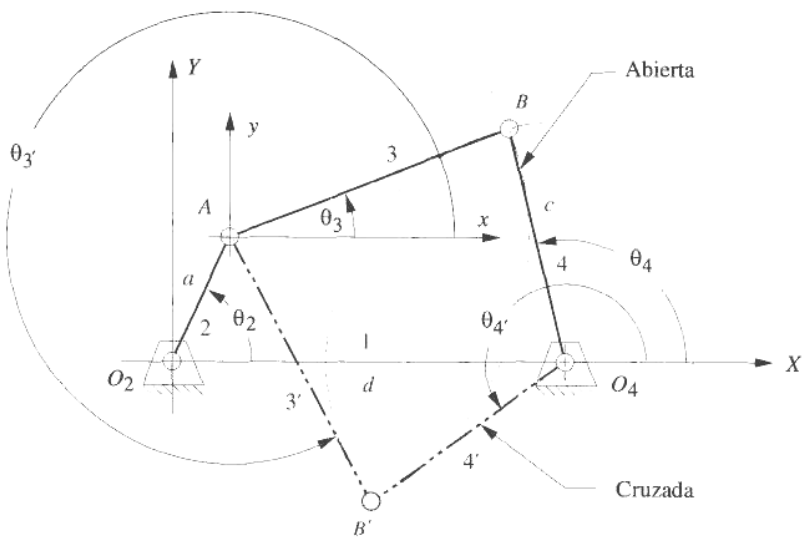


FIGURA 4-5

Solución gráfica de posición para las configuraciones abierta y cruzada del eslabonamiento de cuatro barras

particular del ángulo de entrada usado. Para cada análisis de posición adicional se deberá dibujar nuevamente al eslabonamiento. Esto puede ser pesado si se necesita un análisis completo en cada incremento en 1 o 2 grados de θ_2. En este caso será mejor deducir una solución analítica para θ_3 y θ_4 que se puede resolver con una computadora.

4.5 ANÁLISIS ALGEBRAICO DE POSICIÓN DE ESLABONAMIENTOS

El mismo procedimiento que se usó en la figura 4-5 para resolver geométricamente las intersecciones *B* y *B'*, y los ángulos de eslabones 3 y 4, se puede codificar en un algoritmo algebraico. Las coordenadas del punto *A* se encuentran de:

$$A_x = a\cos\theta_2 \qquad A_y = a\,\mathrm{sen}\,\theta_2 \tag{4.2a}$$

Las coordenadas del punto *B* se encuentran usando las ecuaciones de los círculos con respecto a A y O_4.

$$b^2 = (B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2 \tag{4.2b}$$

$$c^2 = (B_x - d)^2 + B_y^2 \tag{4.2c}$$

las cuales proporcionan un par de ecuaciones simultáneas en B_x y en B_y.

Restando la ecuación 4.2c de la 4.2b se obtiene una expresión para B_x.

$$B_x = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2(A_x - d)} - \frac{2A_yB_y}{2(A_x - d)} = S - \frac{2A_yB_y}{2(A_x - d)} \tag{4.2d}$$

Sustituyendo la ecuación 4.2d en la 4.2c se obtiene una ecuación cuadrática en B_y, la cual tiene dos soluciones que corresponden a las mostradas en la figura 4-5.

$$B_y^2 + \left(S - \frac{A_yB_y}{A_x - d} - d\right)^2 - c^2 = 0 \tag{4.2e}$$

Ésta se puede resolver con la expresión conocida para encontrar las raíces de una ecuación cuadrática.

$$B_y = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P} \tag{4.2f}$$

donde:

$$P = \frac{A_y^2}{(A_x - d)^2} + 1 \qquad Q = \frac{2A_y(d - S)}{A_x - d}$$

$$R = (d - S)^2 - c^2 \qquad S = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2(A_x - d)}$$

Observe que las soluciones de esta ecuación pueden ser reales o imaginarias. Si fueran imaginarias indicaría que los eslabones no se pueden conectar al ángulo dado de entrada o a ninguno. Una vez encontrados los dos valores de B_y (y si son reales), se pueden sustituir en la ecuación 4.2d para encontrar sus correspondientes componentes *x*. Los ángulos de los eslabones para esta posición se pueden encontrar a partir de

$$\theta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{B_y - A_y}{B_x - A_x}\right)$$

$$\theta_4 = \tan^{-1}\left(\frac{B_y}{B_x - d}\right) \qquad (4.2g)$$

Para resolver las ecuaciones 4.2g se puede usar una función con dos argumentos (arco tangente), ya que los ángulos pueden estar en cualquier cuadrante. Las ecuaciones 4.2 se codifican en cualquier lenguaje de computadora o en un resolvedor de ecuaciones, se puede usar el valor de 9_2 variado sobre el rango del eslabonamiento para encontrar todos los valores correspondientes de los otros dos ángulos entre eslabones.

Representación del lazo vectorial de eslabonamientos

Un enfoque alternativo de análisis para la posición de eslabonamientos es crear un lazo vectorial (o lazos) alrededor del eslabonamiento.* Este enfoque ofrece algunas ventajas en la síntesis de eslabonamientos, la cual se tratará en el capítulo 5. Los eslabones se representan como vectores de posición. La figura 4-6 muestra el mismo eslabonamiento de cuatro barras de la figura 4-4, pero ahora los eslabones están dibujados como los vectores de posición del lazo vectorial. Este lazo se cierra en sí mismo haciendo que la suma de los vectores con respecto al lazo sea cero. Las longitudes de los vectores son las longitudes de los eslabones, las cuales se conocen. La posición actual de eslabonamiento está definida por el ángulo de entrada θ_2 como un mecanismo de un GDL. Se quieren determinar los ángulos desconocidos θ_3 y θ_4. Para hacer esto se necesita representar los vectores una notación conveniente.

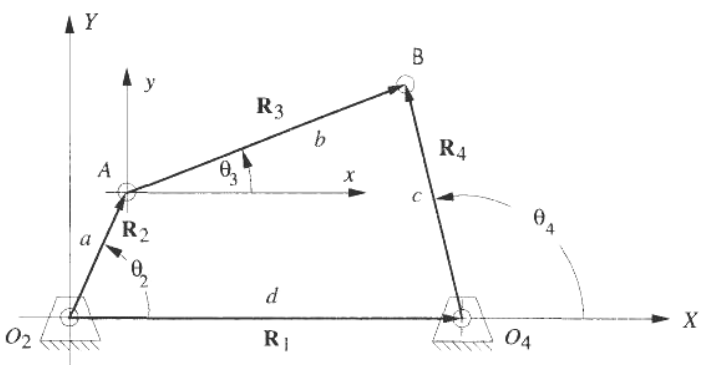


FIGURA 4-6
Lazo vectorial de posición para un eslabonamiento de cuatro barras

* Este método fue creado por el profesor F.H. Raven en "Velocity and Acceleration Analysis of Plañe and Space Mechanisms by Means of Independent Position Equations", *Trans.* ASME, vol. 25, 1958, pp. 1-6.

Los números complejos como vectores

Hay muchos modos de representar vectores. Éstos se pueden definir en coordenadas polares, por su *magnitud* y su *ángulo*, o en coordenadas cartesianas, mediante las componentes *x* y *y*. Estas formas, desde luego, se pueden convertir fácilmente de una a la otra utilizando las ecuaciones 4.0. Los vectores de posición en la figura 4-6 pueden representarse con cualquiera de las siguientes expresiones:

Forma polar	Forma cartesiana	
$R@\angle\theta$	$r\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + r\,\text{sen}\,\theta\,\hat{\mathbf{j}}$	(4.3a)
$re^{j\theta}$	$r\cos\theta + jr\,\text{sen}\,\theta$	(4.3b)

La ecuación 4.3a emplea **vectores unitarios** para representar las direcciones de las componentes *x* y y de un vector en forma cartesiana. En la figura 4-7 se ilustra la notación con vectores unitarios en el caso de un vector de posición. En la ecuación 4.3b se usa la **notación de números complejos;** en este caso la componente en la dirección *X* se denomina *parte real,* y la componente en la dirección *Y, parte imaginaria.* El poco afortunado término "imaginaria" proviene del uso del símbolo *j* para representar la raíz cuadrada del número -1, que, por supuesto, no puede evaluarse numéricamente. Sin embargo, este número *imaginario* se usa en un **número complejo** como un **operador,** y *no como un valor.* En la figura 4-8a) se muestra el **plano complejo** en el que el eje *real* representa la dirección de la componente *X* del vector en el plano, y el eje imaginario representa la dirección de la componente *Y* del mismo vector. De manera que cualquier término en un número complejo que no tenga el operador *j,* es una componente *x;* y una y indica una componente *y.*

Advierta en la figura 4-8¿>) que cada multiplicación del vector $\mathbf{R}_A$ por el operador *j* resulta en *una rotación en sentido contrario de las manecillas del reloj* del vector, en un ángulo de 90°. El vector $\mathbf{R}_B = j\mathbf{R}_A$ está dirigido a lo largo de la *parte positiva del eje imaginario,* o eje *j*. El vector $\mathbf{R}_C = j^2\mathbf{R}_A$ está dirigido a lo largo de la *parte negativa* del eje real, porque $j^2 = -1$, por lo tanto, $\mathbf{R}_C = -\mathbf{R}_A$. De modo semejante $\mathbf{R}_D = j^3\mathbf{R}_A = -j\mathbf{R}_A$, y esta componente se dirige a lo largo de la parte *negativa del eje j.*

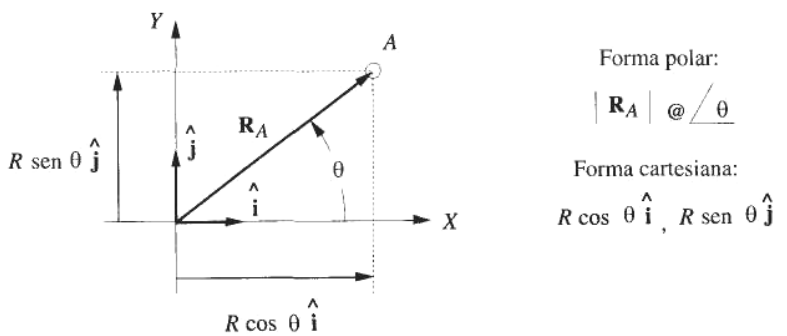
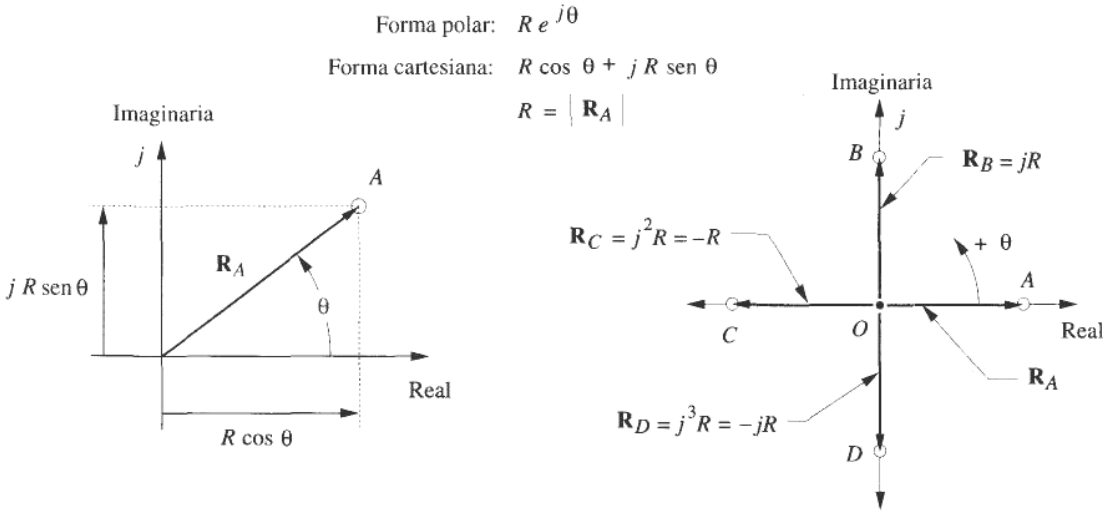


FIGURA 4-7
Notación de vectores unitarios para vectores de posición



a) Representación con números complejos de un vector de posición

b) Rotaciones vectoriales en el plano complejo

FIGURA 4-8

Representación con números complejos de vectores en el plano

Una ventaja de utilizar esta notación de números complejos para representar vectores en el plano proviene de la **identidad de Euler:**

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\,\text{sen}\,\theta \tag{4.4a}$$

Cualquier vector bidimensional se puede representar mediante la notación polar compacta que figura en el lado izquierdo de la ecuación 4.4a. No hay alguna función más fácil de diferenciar o integrar, ya que tal función es igual a su propia derivada:

$$\frac{de^{j\theta}}{d\theta} = je^{j\theta} \tag{4.4b}$$

Utilizaremos esta **notación de números complejos** para los vectores, con el fin de desarrollar y deducir las ecuaciones para la posición, la velocidad y la aceleración de eslabonamientos.

La ecuación de lazo vectorial para un eslabonamiento de cuatro barras

Las direcciones de los vectores de posición en la figura 4-6 se eligen a modo de definir los ángulos donde se desean medir. Por definición, *el ángulo de un vector siempre se mide desde su raíz, no desde su punta.* Si se desea medir el ángulo θ_4 desde el pivote fijo O_4, se debe colocar al vector $\mathbf{R}_4$ de manera que su raíz esté en ese punto. Conviene medir **el ángulo** θ_3 en el punto donde se unen los eslabones 2 y 3, ya que el vector $\mathbf{R}_3$ se rota ahí.

Una lógica similar dicta los arreglos de los vectores $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$. Observe que el eje *(real) X* se toma por conveniencia a lo largo del eslabón 1, y el origen del sistema de coordenadas global se toma en el punto O_2, la raíz del vector del eslabón de entrada, $\mathbf{R}_2$. Estas elecciones de las direcciones de los vectores y del sentido, como se indican por sus puntas de flecha, conducen a esta ecuación de lazo vectorial:

$$\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1 = 0 \tag{4.5a}$$

Una **notación alternativa** que se puede usar para estos vectores de posición son las etiquetas de los puntos en las **puntas y raíces** del vector *(en ese orden)* como subíndices. El segundo subíndice por convención se omite si es el origen del sistema de coordenadas global (punto O_2):

$$\mathbf{R}_A + \mathbf{R}_{BA} - \mathbf{R}_{BO_4} - \mathbf{R}_{O_4} = 0 \tag{4.5b}$$

En seguida, se sustituye la notación de números complejos para cada vector de posición. Para simplificar la notación y minimizar el uso de los subíndices se denotan las longitudes escalares de los cuatro eslabones por *a, b, c y d.* Así están rotulados en la figura 4-6. La ecuación será entonces:

$$ae^{j\theta_2} + be^{j\theta_3} - ce^{j\theta_4} - de^{j\theta_1} = 0 \tag{4.5c}$$

Éstas son tres formas de la misma ecuación vectorial, y se pueden resolver para dos incógnitas. Hay cuatro variables en esta ecuación, a saber los cuatro ángulos de los eslabones. Las longitudes de los eslabones son todas constantes en este eslabonamiento particular. El valor del ángulo del eslabón 1 también está fijo (en cero), ya que éste es el eslabón de fijación. La *variable independiente* es θ_2, la cual será controlada con un motor u otro dispositivo impulsor. Esto permite encontrar los ángulos del eslabón 3 y 4. Se necesitan expresiones algebraicas que definan a θ_3 y θ_4 como funciones sólo de las longitudes constantes de los eslabones y de un ángulo de entrada, θ_2. Estas expresiones serán de la forma:

$$\begin{aligned} \theta_3 &= f\{a,b,c,d,\theta_2\} \\ \theta_4 &= g\{a,b,c,d,\theta_2\} \end{aligned} \tag{4.5d}$$

Para resolver la forma polar, ecuación vectorial 4.5c, se deben sustituir las *equivalentes de Euler* (ecuación 4.4a) para los términos $e^{j\theta}$ y después separar la ecuación vectorial en forma cartesiana en dos ecuaciones escalares que se pueden resolver simultáneamente para θ_3 y θ_4. Sustituyendo la ecuación 4.4a en la ecuación 4.5c:

$$a(\cos\theta_2 + j\,\mathrm{sen}\,\theta_2) + b(\cos\theta_3 + j\,\mathrm{sen}\,\theta_3) - c(\cos\theta_4 + j\,\mathrm{sen}\,\theta_4) - d(\cos\theta_1 + j\,\mathrm{sen}\,\theta_1) = 0 \tag{4.5e}$$

Ahora se puede separar esta ecuación en sus partes reales e imaginarias haciendo cada parte igual a cero.

parte real (componente *x):*

$$a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d\cos\theta_1 = 0$$

pero $\theta_1 = 0$, así: (4.6a)

$$a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d = 0$$

parte imaginaria (componente *y):*

$$ja\,\text{sen}\,\theta_2 + jb\,\text{sen}\,\theta_3 - jc\,\text{sen}\,\theta_4 - jd\,\text{sen}\,\theta_1 = 0$$

pero: $\theta_1 = 0$, y eliminando a las *j* se obtiene: (4.6b)

$$a\,\text{sen}\,\theta_2 + b\,\text{sen}\,\theta_3 - c\,\text{sen}\,\theta_4 = 0$$

Las ecuaciones escalares 4.6a y 4.6b ahora se pueden resolver simultáneamente para θ_3 y θ_4. Resolver este conjunto de dos ecuaciones trigonométricas simultáneas es directo pero tedioso. La sustitución de algunas identidades trigonométricas simplificará las expresiones. El primer paso es reescnbir las ecuaciones 4.6a y 4.6b de manera que se despeje una de las dos incógnitas en el lado izquierdo de la ecuación. Se despejará θ_3 y se determinará θ_4 en este ejemplo.

$$b\cos\theta_3 = -a\cos\theta_2 + c\cos\theta_4 + d \tag{4.6c}$$

$$b\,\text{sen}\,\theta_3 = -a\,\text{sen}\,\theta_2 + c\,\text{sen}\,\theta_4 \tag{4.6d}$$

Después se elevan al cuadrado ambos lados de las ecuaciones 4.6c y 4.6d y se suman:

$$b^2\left(\text{sen}^2\,\theta_3 + \cos^2\theta_3\right) = \left(-a\,\text{sen}\,\theta_2 + c\,\text{sen}\,\theta_4\right)^2 + \left(-a\cos\theta_2 + c\cos\theta_4 + d\right)^2 \tag{4.7a}$$

Observe que la cantidad entre paréntesis en el lado izquierdo es igual a 1, eliminando θ_3 de la ecuación queda sólo por encontrar θ_4.

$$b^2 = \left(-a\,\text{sen}\,\theta_2 + c\,\text{sen}\,\theta_4\right)^2 + \left(-a\cos\theta_2 + c\cos\theta_4 + d\right)^2 \tag{4.7b}$$

Ahora se debe desarrollar el lado derecho de esta expresión y agrupar sus términos.

$$b^2 = a^2 + c^2 + d^2 - 2ad\cos\theta_2 + 2cd\cos\theta_4 - 2ac\left(\text{sen}\,\theta_2\,\text{sen}\,\theta_4 + \cos\theta_2\cos\theta_4\right) \tag{4.7c}$$

Para simplificar aún más esta expresión se define a las constantes K_1, K_2 y K_3 en términos de las longitudes constantes de los eslabones en la ecuación 4.7c:

$$K_1 = \frac{d}{a} \qquad K_2 = \frac{d}{c} \qquad K_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ac} \tag{4.8a}$$

y:

$$K_1\cos\theta_4 - K_2\cos\theta_2 + K_3 = \cos\theta_2\cos\theta_4 + \text{sen}\,\theta_2\,\text{sen}\,\theta_4 \tag{4.8b}$$

Si ahora se sustituye la identidad $\cos(\theta_2 - \theta_4) = \cos\theta_2\cos\theta_4 + \text{sen}\,\theta_2\,\text{sen}\,\theta_4$, se obtiene la conocida ecuación de Freudenstein.

$$K_1\cos\theta_4 - K_2\cos\theta_2 + K_3 = \cos(\theta_2 - \theta_4) \tag{4.8c}$$

Para reducir la ecuación 4.8b a una forma más fácil de solucionar, es útil sustituir las *identidades de ángulo medio* que expresarán los términos $\text{sen}\,\theta_4$ y $\cos\theta_4$ en función de an θ_4:

$$\text{sen}\,\theta_4 = \frac{2\tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}; \qquad \cos\theta_4 = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)} \tag{4.9}$$

Esto da como resultado la siguiente forma simplificada, donde las longitudes de los eslabones y los términos conocidos del valor de entrada (θ_2) se agruparon como las constantes A, *B, C.*

$$A\tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)+B\tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)+C=0 \qquad (4.10a)$$

donde:

$$A=\cos\theta_2-K_1-K_2\cos\theta_2+K_3$$

$$B=-2\operatorname{sen}\theta_2$$

$$C=K_1-(K_2+1)\cos\theta_2+K_3$$

Observe que la ecuación 4.10a tiene forma cuadrática, y la solución es:

$$\tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

$$\theta_{4_{1,2}}=2\arctan\left(\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}\right) \qquad (4.10b)$$

La ecuación 4.10b tiene dos soluciones, obtenidas de los signos ± del radical. Estas dos soluciones, como en cualquier ecuación cuadrática, pueden ser de tres tipos: *reales e iguales, reales y desiguales, complejas conjugadas.* Si el discriminante en el radical es negativo, entonces la solución es conjugada compleja, lo cual significa simplemente que no se pueden unir las longitudes elegidas de los eslabones para el valor escogido del ángulo de entrada 8_2. Esto puede ocurrir, ya sea cuando las longitudes de los eslabones son incapaces de conectar en cualquier posición o, en un eslabón de no Grashof, cuando el ángulo de entrada está más allá de una posición de agarrotamiento. Hay entonces una solución no real para ese valor del ángulo de entrada θ_2. Exceptuando esta situación, la solución usualmente será real y desigual, lo que significa que hay dos valores de θ_4 que corresponden a cualquiera de los valores de θ_2. A éstas se les llama configuraciones **cruzada y abierta** del eslabonamiento, y también se les conoce como los dos **circuitos** del eslabonamiento. En el eslabonamiento de cuatro barras la solución negativa da θ_4 para la configuración abierta, y la solución positiva da θ_4 para la configuración cruzada.

La figura 4-5 muestra las soluciones cruzada y abierta para un eslabonamiento de Grashof de manivela-balancín. Los términos cruzado y abierto están basados en la suposición de que el eslabón de entrada 2, para el cual está definido θ_2, está colocado en el primer cuadrante (es decir, $0 < \theta_2 < \pi/2$). Entonces un eslabonamiento de Grashof se define como **cruzado** si los dos eslabones adyacentes al eslabón más corto se cruzan entre sí, y como **abierto** si no se cruzan uno y otro en esta posición. Observe que la configuración del eslabonamiento, ya sea cruzada o abierta, depende solamente de la manera en que se ensamblan los eslabones. No se puede predecir sólo con base en las longitudes de los eslabonamientos cuál solución será la deseada. En otras palabras, ya se puede obtener cualquier solución con el mismo eslabonamiento con sólo considerar separado al pasador que conecta a los eslabones 3 y 4 en la figura 4-5, y mover estos eslabones a otra de las posiciones en las cuales el pasador los conecta nuevamente. Al hacer esto, se estará cambiando de una solución de posición, o **circuito,** a la otra.

La solución para el ángulo θ_3 es esencialmente similar a la de θ_4. Regresando a las ecuaciones 4.6 se pueden reordenar los términos para despejar θ_4 en el lado izquierdo.

$$c\cos\theta_4 = a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - d \tag{4.6e}$$

$$c\,\text{sen}\,\theta_4 = a\,\text{sen}\,\theta_2 + b\,\text{sen}\,\theta_3 \tag{4.6f}$$

Elevando al cuadrado estas ecuaciones y sumándolas se elimina θ_4. De la ecuación resultante se puede encontrar θ_3, como ya se hizo con θ_4, con lo que se obtiene la expresión:

$$K_1\cos\theta_3 + K_4\cos\theta_2 + K_5 = \cos\theta_2\cos\theta_3 + \text{sen}\theta_2\text{sen}\theta_3 \tag{4.11a}$$

La constante K es la misma que se definió en la ecuación 4.8b. K_4 y K_5 son:

$$K_4 = \frac{d}{b}; \qquad K_5 = \frac{c^2 - d^2 - a^2 - b^2}{2ab} \tag{4.11b}$$

Ésta también se reduce a una forma cuadrática:

$$D\tan^2\left(\frac{\theta_3}{2}\right) + E\tan\left(\frac{\theta_3}{2}\right) + F = 0s \tag{4.12}$$

donde:

$$D = \cos\theta_2 - K_1 + K_4\cos\theta_2 + K_5$$

$$E = -2\,\text{sen}\,\theta_2$$

$$F = K_1 + (K_4 - 1)\cos\theta_2 + K_5$$

y la solución es:

$$\theta_{3_{1,2}} = 2\arctan\left(\frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4DF}}{2D}\right) \tag{4.13}$$

Como el ángulo θ_4, éste también tiene dos soluciones que corresponden a los circuitos cruzados y abiertos del eslabonamiento, como se muestra en la figura 4-5.

4.6 LA SOLUCIÓN DE POSICIÓN EN EL ESLABONAMIENTO DE LA MANIVELA-CORREDERA DE CUATRO BARRAS

El mismo enfoque de lazo vectorial utilizado anteriormente se puede aplicar a un eslabonamiento que contiene correderas. La figura 4-9 muestra un eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera con corrimiento, inversión núm 1. El término **corrimiento** indica que *el eje de corredera prolongado no pasa por el pivote de la manivela.* Éste es el caso general. (Los eslabonamientos de manivela-corredera sin corrimiento ilustrados en la figura 2-13 son los casos especiales.) Este eslabonamiento podría representarse por sólo tres vectores de posición: $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$ y $\mathbf{R}_s$, pero uno de ellos (el $\mathbf{R}_s$) será un vector de magnitud y ángulo variables. Es más fácil utilizar cuatro vectores: $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$ y $\mathbf{R}_4$ con $\mathbf{R}_1$ dispuesto paralelamente al eje de deslizamiento y $\mathbf{R}_4$ perpendicular a él. En efecto, el par de vectores $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_4$ son componentes ortogonales del vector de posición $\mathbf{R}_s$ desde el origen hasta la corredera.

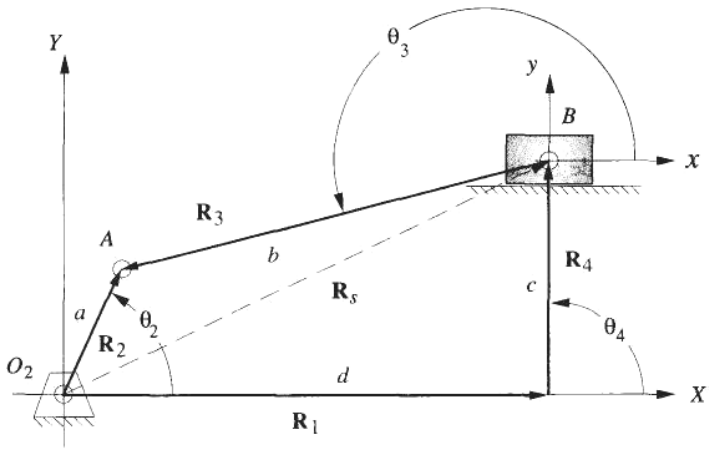


FIGURA 4-9

Lazo vectorial de vectores de posición para un eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera

El análisis se simplifica al disponer de un eje coordenado paralelo al eje de deslizamiento. El vector $\mathbf{R}_1$ de longitud variable y dirección constante representa entonces la posición de la corredera con magnitud *d*. El vector $\mathbf{R}_4$ es ortogonal a $\mathbf{R}_1$ y define la magnitud constante del **corrimiento** del eslabonamiento. Advierta que para el caso especial, la versión sin corrimiento, el vector $\mathbf{R}_4$ será igual a cero y $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_s$. Los vectores $\mathbf{R}_2$ y $\mathbf{R}_3$ completan el lazo vectorial. El vector de posición del acoplador $\mathbf{R}_3$ se coloca con su principio en la corredera, la cual define entonces su ángulo θ_3 en el punto *B*. Esta configuración particular de vectores de posición conduce a una ecuación de lazo vectorial semejante al ejemplo de eslabonamiento de cuatro barras con juntas de pasador:

$$\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1 = 0 \tag{4.14a}$$

Compare la ecuación 4.14a con la 4.5a y observe que la única diferencia es el signo de $\mathbf{R}_3$. Esto se debe sólo a la elección algo arbitraria del sentido del vector de posición $\mathbf{R}_3$ en cada caso. El ángulo θ_3 siempre debe medirse en el principio del vector de posición $\mathbf{R}_3$, y en este ejemplo será conveniente tener tal ángulo θ_3 en la junta marcada con *B*. Una vez que se han hecho estas elecciones arbitrarias, es crucial que en las ecuaciones se observen cuidadosamente los signos algebraicos resultantes, de lo contrario los resultados serán erróneos. Si las magnitudes de los vectores (longitudes de eslabón) se representan por a, *b, c, d* como se indica, los vectores de posición se sustituyen por sus equivalentes de números complejos.

$$ae^{j\theta_2} - be^{j\theta_3} - ce^{j\theta_4} - de^{j\theta_1} = 0 \tag{4.14b}$$

Se sustituyen los equivalentes de Euler:

$$a(\cos\theta_2 + j\,\mathrm{sen}\,\theta_2) - b(\cos\theta_3 + j\,\mathrm{sen}\,\theta_3)$$

$$-c(\cos\theta_4 + j\,\mathrm{sen}\,\theta_4) - d(\cos\theta_1 + j\,\mathrm{sen}\,\theta_1) = 0 \tag{4.14c}$$

Se separan las componentes real e imaginario:

parte real (componente *x):*

$$a\cos\theta_2 - b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d\cos\theta_1 = 0$$

pero $\theta_1 = 0$, de modo que: (4.15a)

$$a\cos\theta_2 - b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d = 0$$

parte imaginaria (componente *y):*

$$ja\,\text{sen}\,\theta_2 - jb\,\text{sen}\,\theta_3 - jc\,\text{sen}\,\theta_4 - jd\,\text{sen}\,\theta_1 = 0$$

pero: $\theta_1 = 0$, y las *j* se eliminan, de modo que: (4.15b)

$$a\,\text{sen}\,\theta_2 - b\,\text{sen}\,\theta_3 - c\,\text{sen}\,\theta_4 = 0$$

Se desea resolver las ecuaciones 4.15 simultáneamente para evaluar las dos incógnitas, longitud de eslabón *d* y ángulo de eslabón θ_3. La variable independiente es el ángulo de manivela θ_2. Se conocen las longitudes de eslabón *a* y *b,* el corrimiento c y el ángulo θ_4. Pero observe que como se establece el sistema de coordenadas paralelo y perpendicular al eje de la corredera, el ángulo θ_1 vale cero y θ_4 es de 90°. La ecuación 4.15b se resuelve para evaluar θ_3 y el resultado se sustituye en la ecuación 4.15a para despejar *d.* La solución es:

$$\theta_{3_1} = \text{arcsen}\left(\frac{a\,\text{sen}\,\theta_2 - c}{b}\right) \tag{4.16a}$$

$$d = a\cos\theta_2 - b\cos\theta_3 \tag{4.16b}$$

Observe que hay de nuevo dos soluciones válidas correspondientes a los dos circuitos del eslabonamiento. La función inversa del seno (o arco seno) está multivaluada. Su determinación dará un valor entre ±90°, y ello representa sólo un circuito del eslabonamiento. El valor de *d* depende del valor calculado de θ_3. Dicho valor de θ_3 para el segundo circuito del eslabonamiento se obtiene de:

$$\theta_{3_2} = \text{arcsen}\left(-\frac{a\,\text{sen}\,\theta_2 - c}{b}\right) + \pi \tag{4.17}$$

4.7 SOLUCIÓN DE POSICIÓN CON MANIVELA-CORREDERA INVERTIDA

En la figura 4-10a) se muestra la inversión núm. 3 del eslabonamiento de manivela-corredera de cuatro barras común, en el que la junta deslizante se halla entre los eslabones 3 y 4 en el punto *B.* Esto se muestra como un mecanismo de manivela-corredera con **corrimiento.** La corredera tiene rotación pura con su centro corrido desde el eje de deslizamiento. (En la figura 2-13c) se presenta la versión sin corrimiento de este eslabonamiento, en el que el vector $\mathbf{R}_4$ vale cero.)

El sistema coordenado global se toma de nuevo con su origen en el pivote de la manivela de entrada O_2, y el eje positivo A a lo largo del eslabón 1, el de fijación. En el punto *B* se colocó un sistema de eje local con el fin de definir θ_3. Considere que hay un ángulo fijo γ dentro del eslabón 4, el cual define el ángulo de ranura con respecto a ese eslabón.

En la figura 4-102») los eslabones están representados como vectores de posición que tienen sentidos congruentes con los sistemas de coordenadas elegidos por conveniencia al definir los ángulos de los eslabones. Esta disposición particular de vectores de posición conduce a la misma ecuación de lazo vectorial que el ejemplo anterior de manivela-corredera. Las ecuaciones 4.14 y 4.15 se aplican también a esta inversión. Observe que la posición absoluta del punto *B* se define por el vector $\mathbf{R}_B$, el cual varía en magnitud y dirección a medida que se mueve el eslabonamiento. Se elige representar $\mathbf{R}_B$ como la diferencia vectorial $\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3$ para utilizar los eslabones reales como los vectores de posición en la ecuación de lazo.

Todos los eslabonamientos de corredera tendrán por lo menos un eslabón cuya longitud efectiva entre las juntas variará conforme se mueva el eslabonamiento. En este ejemplo la longitud del eslabón 3 entre los puntos *A* y *B,* designada como *b,* cambiará cuando pase por la corredera en el eslabón 4. Por lo tanto, el valor de *b* será una de las variables por determinar en esta inversión. Otra variable será θ_4, el ángulo del eslabón 4. Sin embargo, observe que también se tiene una incógnita en θ_3, el ángulo del eslabón 3. Esto da un total de tres incógnitas. Las ecuaciones 4.15 se resuelven para evaluar sólo dos incógnitas. Así que se requiere otra ecuación para resolver el sistema. Hay una relación fija entre los ángulos θ_3 y θ_4, que se muestra como γ en la figura 4-10, lo cual da la ecuación:

$$\theta_3 = \theta_4 \pm \gamma \tag{4.18}$$

donde el signo + se usa para la configuración abierta y el signo — para la cerrada.

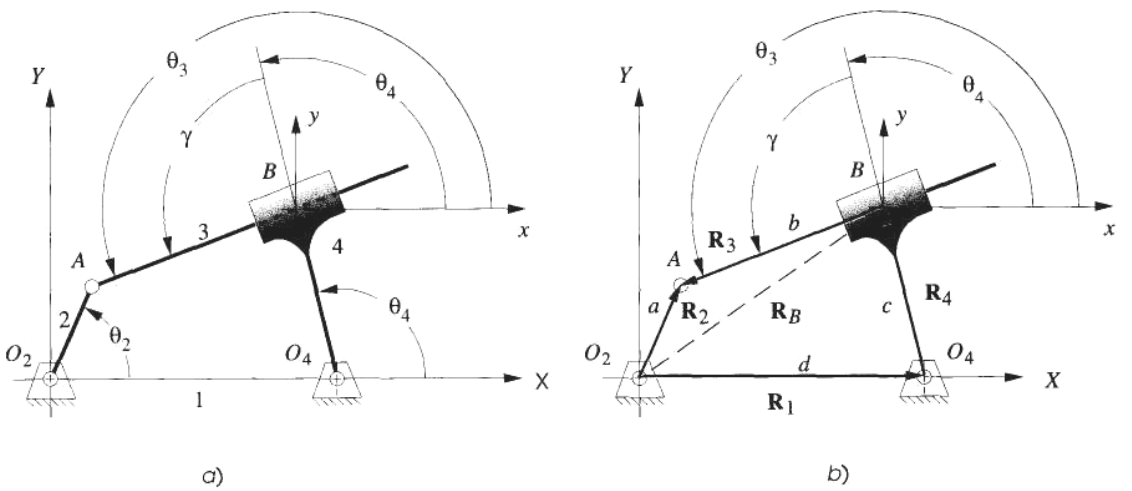


FIGURA 4-10

Inversión núm. 3 de eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera

Al sustituir la ecuación 4.18 en las ecuaciones 4.15 se obtiene:

$$a\cos\theta_2 - b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d = 0 \tag{4.19a}$$

$$a\,\text{sen}\,\theta_2 - b\,\text{sen}\,\theta_3 - c\,\text{sen}\,\theta_4 = 0 \tag{4.19b}$$

Éstas tienen sólo dos incógnitas y se pueden resolver simultáneamente para determinar θ_4 y b. En la ecuación 4.19b se despeja la longitud de eslabón b y se sustituye en la ecuación 4.19a.

$$b = \frac{a\,\text{sen}\,\theta_2 - c\,\text{sen}\,\theta_4}{\text{sen}\,\theta_3} \tag{4.20a}$$

$$a\cos\theta_2 - \frac{a\,\text{sen}\,\theta_2 - c\,\text{sen}\,\theta_4}{\text{sen}\,\theta_3}\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d = 0 \tag{4.20b}$$

Al sustituir la ecuación 4.18, y después de alguna manipulación algebraica, la ecuación 4.20 se reduce a:

$$P\,\text{sen}\,\theta_4 + Q\cos\theta_4 + R = 0 \tag{4.21}$$

donde:

$$P = a\,\text{sen}\,\theta_2\,\text{sen}\,\gamma + (a\cos\theta_2 - d)\cos\gamma$$

$$Q = -a\,\text{sen}\,\theta_2\cos\gamma + (a\cos\theta_2 - d)\,\text{sen}\,\gamma$$

$$R = -c\,\text{sen}\,\gamma$$

Observe que los factores P, Q, R son constantes para cualquier valor de entrada de θ_2. Para despejar de ahí a θ_4 conviene sustituir las identidades de la tangente del ángulo medio (ec. 4.9) por los términos en $\text{sen}\,\theta_4$ y $\cos\theta_4$. Esto dará como resultado una ecuación cuadrática en $\tan(\theta_4/2)$ que se puede resolver para determinar los dos valores de θ_4.

$$P\frac{2\tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)} + Q\frac{1-\tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right)} + R = 0 \tag{4.22a}$$

Esto se reduce a:

$$(R-Q)\tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right) + 2P\tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right) + (Q+R) = 0$$

sea:

$$S = R - Q; \qquad T = 2P; \qquad U = Q + R$$

luego:

$$S\tan^2\left(\frac{\theta_4}{2}\right) + T\tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right) + U = 0 \tag{4.22b}$$

y la solución es:

$$\theta_{4_{1,2}} = 2\arctan\left(\frac{-T \pm \sqrt{T^2 - 4SU}}{2S}\right) \tag{4.22c}$$

Como fue el caso del ejemplo anterior, éste también tiene una solución cruzada y una abierta, indicadas respectivamente por los signos + y - del radical. Observe que también se deben calcular los valores de longitud del eslabón *b* para cada θ_4 usando la ecuación 4.20a. El ángulo de acoplador θ_3 se obtiene de la ecuación 4.18.

4.8 ESLABONAMIENTOS CON MÁS DE CUATRO BARRAS

Con algunas excepciones,* el mismo enfoque que se planteó aquí para el eslabonamiento de cuatro barras se puede utilizar para cualquier número de eslabones en una configuración de lazo cerrado. Eslabonamientos más complicados pueden tener lazos múltiples, lo cual conducirá a que se resuelva simultáneamente un mayor número de ecuaciones y posiblemente a que se requiera una solución iterativa.

El eslabonamiento de cinco barras con engranaje

Otro ejemplo que se puede reducir a dos ecuaciones con dos incógnitas es el **eslabonamiento de cinco barras con engranaje** que se presentó en la sección 2.13, y que se muestra en la figura 4-lla) y en el de archivo de disco F04-11.5br del programa FIVEBAR. El lazo vectorial para este eslabonamiento se muestra en la figura 4-11b). Obviamente tiene un vector de posición más que el de cuatro barras. Su ecuación de lazo vectorial es:

$$\mathbf{R_2} + \mathbf{R_3} - \mathbf{R_4} - \mathbf{R_5} - \mathbf{R_1} = 0 \tag{4.23a}$$

Considere que los sentidos de los vectores se eligen de nuevo para adaptarse a los deseos del analista, con el fin de obtener los ángulos de vector definidos en un extremo conveniente del eslabón respectivo. La ecuación 4.23b sustituye la notación polar compleja para los vectores de posición en la ecuación 4.23a, y se utilizan *a, b, c, d, f* para representar las longitudes escalares de los eslabones, como se muestra en la figura 4-11.

$$ae^{j\theta_2} + be^{j\theta_3} - ce^{j\theta_4} - de^{j\theta_5} - fe^{j\theta_1} = 0 \tag{4.23b}$$

Advierta también que esta ecuación de lazo vectorial contiene tres variables desconocidas, a saber, los ángulos de los eslabones 3, 4 y 5. (El ángulo del eslabón 2 es la variable de entrada, o independiente, y el eslabón 1 es fijo, con ángulo constante.) Puesto que una ecuación vectorial bidimensional sólo se resuelve para dos incógnitas, se necesitará otra ecuación para resolver este sistema. Debido a que se trata de un eslabonamiento de cinco barras con engranaje hay una relación entre los dos eslabones engranados, en este caso los eslabones 2 y 5. Dos factores determinan cómo se comporta el eslabón 5 con respecto al eslabón 2, a saber: la relación de engranes λ y el ángulo de fase ϕ. La relación es:

$$\theta_5 = \lambda\theta_2 + \phi \tag{4.23c}$$

* Waldron y Sreenivasan[1] reportan que los métodos de solución común para análisis de posición no son generales, es decir, no aplican para mecanismos de n eslabones. Los métodos de análisis de posición convencionales, como los que aquí se usan, son confiables cuando se tiene un lazo de cuatro barras en el mecanismo que se resuelve primero, después los eslabones restantes se descomponen en una serie de diadas. No todos los mecanismos contienen lazos de cuatro barras. (Un eslabonamiento de ocho barras y un *GDL* no contiene lazos de cuatro barras.) Aun si las tiene, los pivotes de los lazos de cuatro barras pudieran no estar unidos a una fijación, requiriendo que se invierta el eslabonamiento para comenzar la solución. Además, si la junta impulsora no está en el lazo de cuatro barras se necesita interpolación para determinar las posiciones del eslabón.

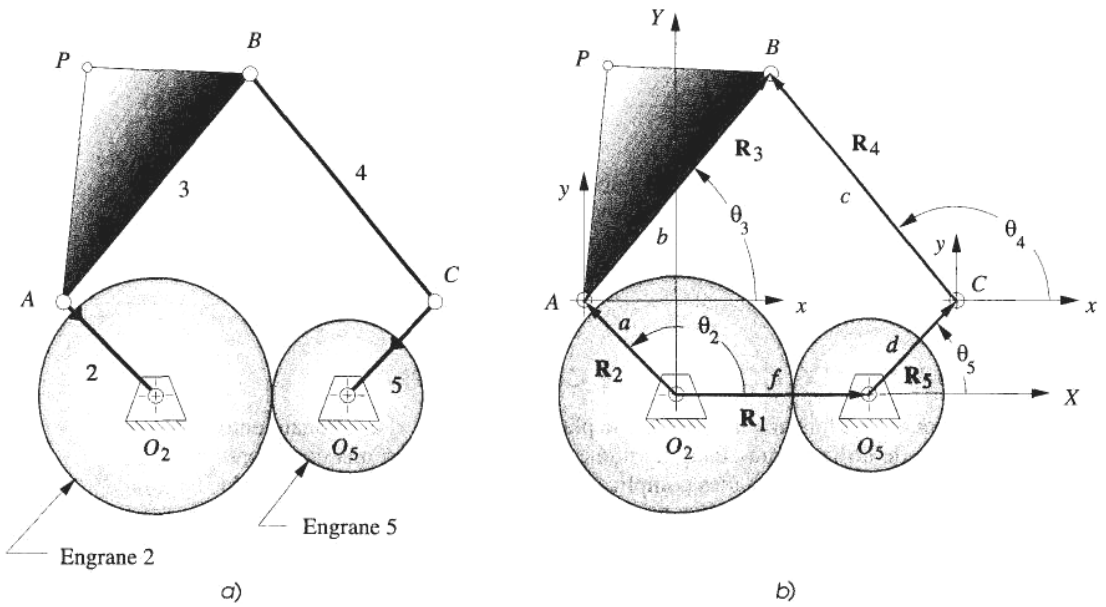


FIGURA 4-11
Eslabonamiento de cinco barras con engranaje y su lazo vectorial

Esto permite expresar θ_5 en función de θ_2 en la ecuación 4.23b, y reducir las incógnitas a dos al sustituir la ecuación 4.23c en la 4.23b.

$$ae^{j\theta_2} + be^{j\theta_3} - ce^{j\theta_4} - de^{j(\lambda\theta_2+\phi)} - fe^{j\theta_1} = 0 \qquad (4.24a)$$

Observe que la relación de engranes λ es el cociente de los diámetros de las ruedas dentadas que unen los dos eslabones ($\lambda = diám_2/diám_5$) y el ángulo de fase ϕ es el *ángulo inicial* del eslabón 5 con respecto al eslabón 2. Cuando dicho eslabón 2 está en cero grados, el eslabón 5 está en el ángulo de fase ϕ. La ecuación 4.23c define la relación entre θ_2 y θ_5. Tanto λ como ϕ son parámetros de diseño seleccionados por el ingeniero de diseño, junto con las longitudes de eslabón. Una vez definidos estos parámetros en la ecuación 4.24 las únicas incógnitas que quedan son θ_3 y θ_4.

El comportamiento del eslabonamiento de cinco barras con engranaje se puede modificar cambiando las longitudes de eslabón, la relación de engranes o el ángulo de fase. Este ángulo se puede cambiar sacando de conexión los engranes, girando un engrane respecto del otro y acomodándolos de nuevo. Puesto que los eslabones 2 y 5 están sujetos con rigidez a los engranes 2 y 5, respectivamente, sus rotaciones angulares relativas también cambiarán. Es de este hecho que resultan posiciones diferentes de los eslabones 3 y 4, con cualquier cambio en el ángulo de fase. Las formas de las curvas de acoplador también cambiarán con la variación en cualquiera de estos parámetros, como se ve en la figura 3-23 y en el apéndice E.

El procedimiento para resolver esta ecuación de lazo vectorial es el mismo que se utilizó antes para el eslabonamiento de cuatro barras:

1 Sustituya el equivalente de Euler (ecuación 4.4a) en cada término de la ecuación 4.24a de lazo vectorial.

$$a(\cos\theta_2 + j\,\mathrm{sen}\,\theta_2) + b(\cos\theta_3 + j\,\mathrm{sen}\,\theta_3) - c(\cos\theta_4 + j\,\mathrm{sen}\,\theta_4)$$
$$-d\left[\cos(\lambda\theta_2 + \phi) + j\,\mathrm{sen}(\lambda\theta_2 + \phi)\right] - f(\cos\theta_1 + j\,\mathrm{sen}\,\theta_1) = 0 \qquad (4.24b)$$

2 Separe las partes real e imaginaria de la forma cartesiana de la ecuación de lazo vectorial.

$$a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d\cos(\lambda\theta_2 + \phi) - f\cos\theta_1 = 0 \qquad (4.24c)$$

$$a\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + b\,\mathrm{sen}\,\theta_3 - c\,\mathrm{sen}\,\theta_4 - d\,\mathrm{sen}(\lambda\theta_2 + \phi) - f\,\mathrm{sen}\,\theta_1 = 0 \qquad (4.24d)$$

3 Reacomode los términos para despejar una incógnita **(ya sea θ_3 o θ_4)** en cada ecuación escalar. Observe que θ_1 vale cero.

$$b\cos\theta_3 = -a\cos\theta_2 + c\cos\theta_4 + d\cos(\lambda\theta_2 + \phi) + f \qquad (4.24e)$$

$$b\,\mathrm{sen}\,\theta_3 = -a\,\mathrm{sen}\,\theta_2 + c\,\mathrm{sen}\,\theta_4 + d\,\mathrm{sen}(\lambda\theta_2 + \phi) \qquad (4.24f)$$

4 Eleve al cuadrado ambas ecuaciones y súmelas para eliminar una incógnita, por ejemplo θ_3.

$$b^2 = 2c\left[d\cos(\lambda\theta_2 + \phi) - a\cos\theta_2 + f\right]\cos\theta_4$$
$$+2c\left[d\,\mathrm{sen}(\lambda\theta_2 + \phi) - a\,\mathrm{sen}\,\theta_2\right]\mathrm{sen}\,\theta_4$$
$$+a^2 + c^2 + d^2 + f^2 - 2af\cos\theta_2$$
$$-2d(a\cos\theta_2 - f)\cos(\lambda\theta_2 + \phi)$$
$$-2ad\,\mathrm{sen}\,\theta_2\,\mathrm{sen}(\lambda\theta_2 + \phi) \qquad (4.24g)$$

5 Sustituya las identidades de la tangente del ángulo medio (ecuación 4.9) en lugar de los términos seno y coseno, y maneje la ecuación resultante en la misma forma que se hizo para el eslabonamiento de cuatro barras con el fin de despejar θ_4.

$$A = 2c\left[d\cos(\lambda\theta_2 + \phi) - a\cos\theta_2 + f\right]$$
$$B = 2c\left[d\,\mathrm{sen}(\lambda\theta_2 + \phi) - a\,\mathrm{sen}\,\theta_2\right]$$
$$C = a^2 - b^2 + c^2 + d^2 + f^2 - 2af\cos\theta_2$$
$$-2d(a\cos\theta_2 - f)\cos(\lambda\theta_2 + \phi)$$
$$-2ad\,\mathrm{sen}\,\theta_2\,\mathrm{sen}(\lambda\theta_2 + \phi)$$
$$D = C - A; \qquad E = 2B; \qquad F = A + C$$

$$\theta_{4_{1,2}} = 2\arctan\left(\frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4DF}}{2D}\right) \qquad (4.24h)$$

6 Repita los pasos 3 a 5 para el otro ángulo desconocido θ_3.

$$G = 2b\left[a\cos\theta_2 - d\cos(\lambda\theta_2 + \phi) - f\right]$$

$$H = 2b\left[a\,\text{sen}\,\theta_2 - d\,\text{sen}(\lambda\theta_2 + \phi)\right] \leq$$

$$K = a^2 + b^2 - c^2 + d^2 + f^2 - 2af\cos\theta_2$$

$$-2d(a\cos\theta_2 - f)\cos(\lambda\theta_2 + \phi)$$

$$-2ad\,\text{sen}\,\theta_2\,\text{sen}(\lambda\theta_2 + \phi)$$

$$L = K - G; \qquad M = 2H; \qquad N = G + K$$

$$\theta_{3_{1,2}} = 2\arctan\left(\frac{-M \pm \sqrt{M^2 - 4LN}}{2L}\right) \tag{4.24i}$$

Observe que estos pasos de deducción son esencialmente idénticos a los del eslabonamiento de cuatro barras con juntas de pasador una vez que se sustituye θ_2 por θ_5 al aplicar la ecuación 4.23c.

Eslabonamientos de seis barras

SEIS BARRAS DE **WATT** consiste esencialmente en dos eslabonamientos de cuatro barras en serie como se indica en la figura 4-12a), y puede analizarse como tal. Se trazan dos lazos vectoriales como se ve en la figura *4-l2b),* estas ecuaciones de lazo vectorial se pueden resolver en sucesión con los resultados del primer lazo aplicados como entrada al segundo. Considere que hay una relación angular constante entre los vectores $\mathbf{R}_4$ y $\mathbf{R}_5$ dentro del eslabón 4. La solución para el eslabonamiento de cuatro barras (ecuaciones 4.10 y 4.13) se aplica dos veces en este caso. Según la inversión del eslabonamiento de

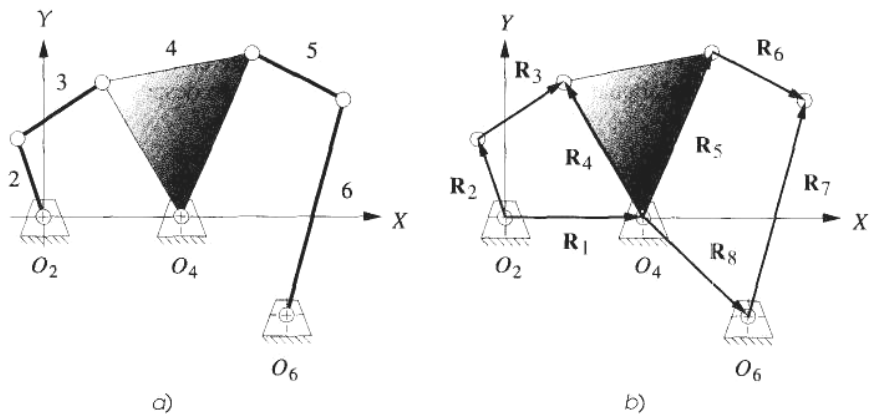


FIGURA 4-12

Eslabonamiento de seis barras de Watt y el lazo vectorial

Watt que se analiza puede haber dos lazos de cuatro eslabones, o uno de cuatro y uno de cinco (véase la figura 2-14). En uno u otro caso, si se analiza primero el lazo de cuatro eslabones, sólo habrá dos ángulos de eslabón desconocidos por determinar cada vez.

SEIS BARRAS DE STEPHENSON es un mecanismo más complicado de analizar. Pueden trazarse dos lazos vectoriales, pero según la inversión que se analiza, ya sea uno o ambos lazos tendrán cinco eslabones* y, en consecuencia, tres ángulos desconocidos, como se muestra en la figura 4-13a) y *b)*. Sin embargo, los dos lazos tendrán en común por lo menos un eslabón no fijo, de manera que es posible hallar una solución. En los otros casos se debe utilizar una solución iterativa, como el método de Newton-Raphson, para hallar las raíces de las ecuaciones. El programa SIXBAR se limita a las inversiones que permiten una solución de forma cerrada, una de las cuales se ilustra en la figura 4-13. El programa SIXBAR no efectúa la solución iterativa.

4.9 POSICIÓN DE UN PUNTO CUALQUIERA EN UN ESLABONAMIENTO

Una vez que se obtienen los ángulos de todos los eslabones es sencillo y directo definir y calcular la posición de cualquier punto en algún eslabón para una posición de entrada del eslabonamiento. En la figura 4-14 se muestra un eslabonamiento de cuatro barras cuyo acoplador, el eslabón 3, se ha agrandado para contener un punto de acoplador *P*. La manivela y el balancín también se han agrandado para mostrar los puntos *S y U* que representarían los centros de gravedad de tales eslabones. Se desea desarrollar expresiones algebraicas para las posiciones de éstos (o de cualesquiera) puntos en los eslabones.

Para obtener la posición del punto 5 trace un vector de posición desde el pivote fijo O_2 hasta el punto S. Este vector $\mathbf{R}_{SO2}$ forma un ángulo δ_2 con el vector $\mathbf{R}_{AO2}$. Este ángulo δ_2 está completamente definido por la geometría del eslabón 2 y es constante. El vector de posición para el punto S es, por consiguiente,

$$\mathbf{R}_{SO_2} = \mathbf{R}_S = se^{j(\theta_2+\delta_2)} = s\left[\cos(\theta_2+\delta_2)+j\,\text{sen}(\theta_2+\delta_2)\right] \tag{4.25}$$

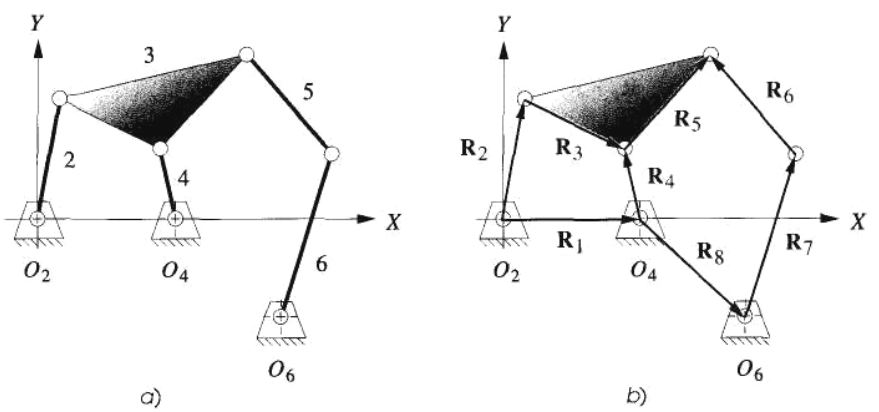


FIGURA 4-13
Eslabonamiento de seis barras de Stephenson y el lazo vectorial

* Véase nota al pie, p. 179.

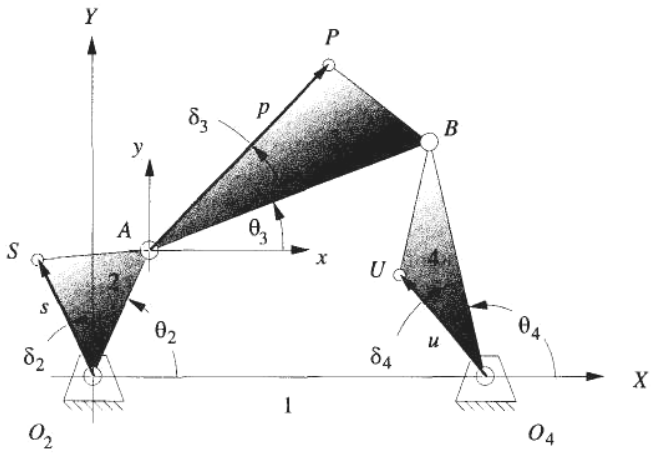


FIGURA 4-14
Posiciones de puntos en los eslabones

La posición del punto *U* en el eslabón 4 se obtiene en la misma forma, mediante el ángulo δ_4 que es un corrimiento angular constante dentro del eslabón. La expresión es:

$$\mathbf{R}_{UO4} = ue^{j(\theta_4+\delta_4)} = u\left[\cos(\theta_4+\delta_4)+j\,\mathrm{sen}(\theta_4+\delta_4)\right] \tag{4.26}$$

La posición del punto *P* en el eslabón 3 se halla a partir de la suma de dos vectores de posición $\mathbf{R}_A$ y $\mathbf{R}_{PA}$. El $\mathbf{R}_A$ ya está definido a partir del análisis de los ángulos de eslabón en la ecuación 4.5. El $\mathbf{R}_{PA}$ es la posición relativa de *P* con respecto al punto *A*. El $\mathbf{R}_{PA}$ se define del mismo modo que $\mathbf{R}_s$ o $\mathbf{R}_U$, mediante el ángulo de corrimiento de eslabón interno δ_3 y el ángulo de posición del eslabón 3, o sea θ_3.

$$\mathbf{R}_{PA} = pe^{j(\theta_3+\delta_3)} = p\left[\cos(\theta_3+\delta_3)+j\,\mathrm{sen}(\theta_3+\delta_3)\right] \tag{4.27a}$$

$$\mathbf{R}_P = \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_{PA} \tag{4.27b}$$

Compare la ecuación 4.27 con la 4.1. Ésta es también la ecuación de diferencia de posición.

4.10 ÁNGULOS DE TRANSMISIÓN

El ángulo de transmisión se definió en la sección 3.3 para un eslabonamiento de cuatro barras. Esa definición se repite ahora por conveniencia.

El ángulo de transmisión m se muestra en la figura 3-3a) y se define como el *ángulo entre el eslabón de salida y el acoplador.* Generalmente se toma como el valor absoluto del ángulo agudo del par de ángulos en la intersección de los dos eslabones; y varía continuamente desde un valor mínimo hasta un máximo, a medida que el eslabonamiento pasa por su intervalo de movimiento. Es una medida de la calidad de la transmisión de fuerza en la junta.*

* El ángulo de transmisión tiene aplicaciones limitadas. Sólo predice la calidad de la fuerza o par de torsión de transmisión si los eslabones de entrada y salida están pivoteados a la fijación. Si se toma la fuerza de salida desde un eslabón flotante (acoplador), entonces el ángulo de transmisión no tiene valor. En el capítulo 11 se presenta otro índice de mérito denominado índice de fuerza de junta (JFI, por sus siglas en inglés), que analiza el análisis de fuerza en eslabonamientos. (Véase la sección 11.12.) El JFI es útil en situaciones en que el eslabón de salida es flotante y arroja el mismo tipo de información cuando la salida se toma desde un eslabón que gira contra la fijación. Sin embargo, el JFI requiere un análisis completo de fuerza sobre el eslabonamiento, mientras que el ángulo de transmisión sólo se determina de la geometría del eslabonamiento.

Esa definición se extenderá ahora para representar el ángulo entre dos eslabones de un eslabonamiento, ya que éste puede tener muchos ángulos de transmisión. El ángulo entre un eslabón de salida y el acoplador que lo impulsa es un ángulo de transmisión. Una vez que se desarrollaron las expresiones analíticas para los ángulos de todos los eslabones en un mecanismo es fácil definir algebraicamente el ángulo de transmisión. Es la diferencia entre los ángulos de los dos eslabones unidos, a través de los cuales se desea pasar una fuerza o una velocidad. Para el ejemplo del eslabonamiento de cuatro barras será la diferencia entre θ_3 y θ_4. Por convención se toma el valor absoluto de la diferencia y se fuerza a que sea un ángulo agudo.

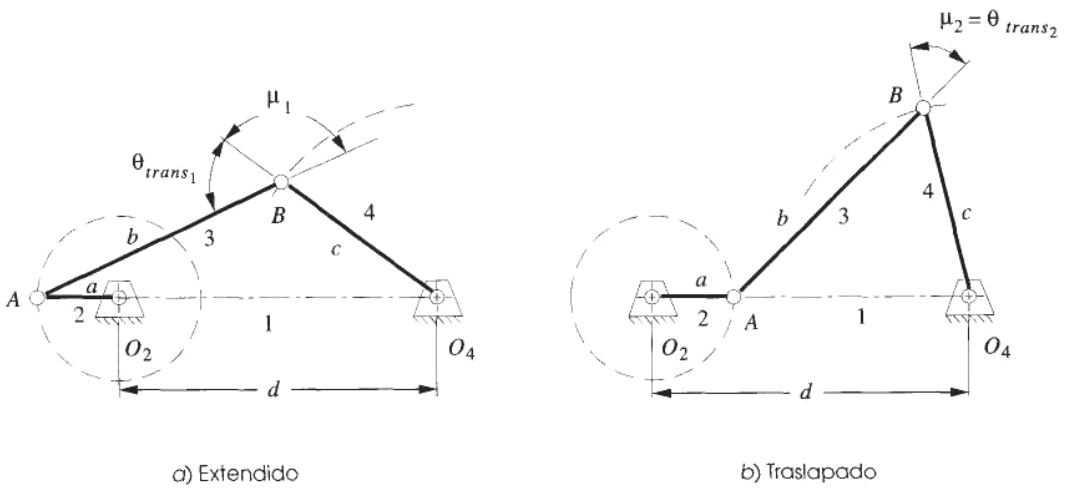
$$\theta_{trans} = |\theta_3 - \theta_4|$$

$$\text{si} \qquad \theta_{trans} > \frac{\pi}{2} \qquad \text{entonces} \quad \theta_{trans} = \pi - \theta_{trans} \tag{4.28}$$

Este cálculo es aplicable a cualquier junta en un eslabonamiento, mediante los ángulos de eslabón apropiados.

Valores extremos del ángulo de transmisión

Para un eslabonamiento de cuatro barras de manivela-balancín de Grashof, los valores extremos del ángulo de transmisión ocurrirán cuando la manivela sea colineal con el eslabón de fijación, como se muestra en la figura 4-15. Los valores del ángulo de transmisión en estas posiciones se calculan fácilmente usando la ley de los cosenos, puesto que el eslabonamiento tiene entonces una configuración triangular. Los lados de los dos triángulos son el eslabón 3, el eslabón 4 y la suma o diferencia de los eslabones 1 y 2. Un valor extremo del ángulo de transmisión se tiene cuando dichos eslabones son *colímales y no traslapados* como se muestra en la figura 4-15a). El otro ángulo de transmisión



a) Extendido b) Traslapado

FIGURA 4-15

Ángulos de transmisión extremos en el eslabonamiento de cuatro barras de Grashof

extremo ocurre cuando los eslabones 1 y 2 son *colímales y traslapados* como se ilustra en la figura 4-15¿>). Para utilizar una notación consistente con la sección 4.5 y la figura 4-7 se marcarán los eslabones como sigue:

a = eslabón 2; b = eslabón 3; c = eslabón 4; d = eslabón 1

Para un ángulo de transmisión extremo la ley de los cosenos da:

$$\mu_1 = \arccos\left[\frac{b^2 + c^2 - (d+a)^2}{2bc}\right] \tag{4.29a}$$

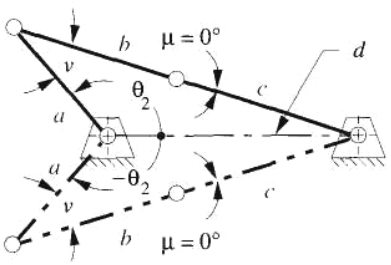
y para el otro ángulo de transmisión extremo

$$\mu_2 = \arccos\left[\frac{b^2 + c^2 - (d-a)^2}{2bc}\right] \tag{4.29b}$$

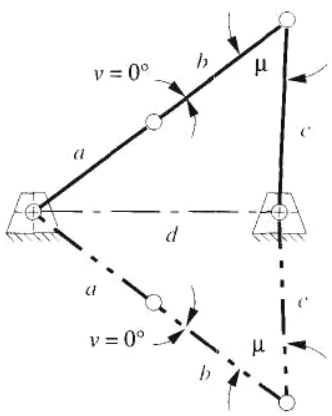
En el caso de un eslabonamiento de **doble balancín de Grashof** el ángulo de transmisión puede variar de 0 a 90 grados, debido a que el acoplador puede realizar una revolución completa con respecto a los otros eslabones. Para un eslabonamiento **de triple balancín de no Grashof** el ángulo de transmisión será de cero grados en las posiciones de agarrotamiento que ocurren cuando el balancín de salida *c* y el acoplador *b* son colineales, como se muestra en la figura 4-16a). En las otras posiciones de agarrotamiento, cuando el balancín de entrada a y el acoplador *b* son colineales (figura 4-16*b*)), el ángulo de transmisión se puede calcular a partir de la ley de los cosenos como:

cuando $v = 0$,

$$\mu = \arccos\left[\frac{(a+b)^2 + c^2 - d^2}{2c(a+b)}\right] \tag{4.30}$$



a) Posiciones de agarrotamiento para los eslabones b y c



b) Posiciones de agarrotamiento para los eslabones a y b

FIGURA 4-16

Eslabonamientos de triple balancín de no Grashof en posición de agarrotamiento

Éste no es el valor más pequeño que puede tener el ángulo de transmisión μ en un triple balancín, ya que obviamente será cero. Desde luego, cuando se analiza un eslabonamiento cualquiera, los ángulos de transmisión se calculan fácilmente y se trazan para todas las posiciones por medio de la ecuación 4.28. Esto se hace mediante los programas FOURBAR, FIVEBAR y SIXBAR. El estudiante debe investigar la variación en el ángulo de transmisión para los eslabonamientos de ejemplo en esos programas. El archivo de disco F04-15.4br puede leerse en el programa FOURBAR para observar en acción el eslabonamiento de esa figura.

4.11 POSICIONES DE AGARROTAMIENTO

Los ángulos de eslabón de entrada que corresponden a las posiciones de agarrotamiento (configuraciones estacionarias) del **triple balancín de no Grashof** se calculan mediante la trigonometría. En la figura 4-17 se ilustra un eslabonamiento de cuatro barras de no Grashof en una posición general. Se trazó una línea de construcción *h* entre los puntos *A* y O_4. Esto divide el lazo tetragonal en dos triángulos O_2AO_4 y ABO_4. En la ecuación 4.31 se utiliza la ley de los cosenos para expresar el ángulo de transmisión μ en función de las longitudes del eslabón y el ángulo de eslabón de entrada θ_2.

$$h^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta_2$$

también:

$$h^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\mu$$

así que:

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta_2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\mu$$

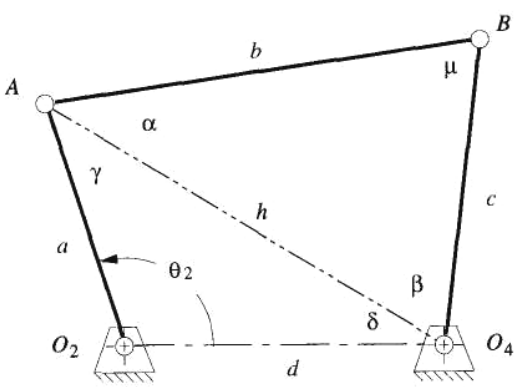


FIGURA 4-17

Determinación del ángulo de manivela correspondiente a las posiciones de agarrotamiento

por tanto:

$$\cos\mu = \frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2bc} + \frac{ad}{bc}\cos\theta_2 \tag{4.31}$$

Para hallar los valores máximo y mínimo del ángulo de entrada θ_2 se puede diferenciar la ecuación 4.31, obtener la derivada de θ_2 con respecto a μ y hacerla igual a cero:

$$\frac{d\theta_2}{d\mu} = \frac{bc}{ad}\frac{\operatorname{sen}\mu}{\operatorname{sen}\theta_2} = 0 \tag{4.32}$$

Las longitudes de eslabón *a, b, c, d* nunca son iguales a cero, de modo que esta expresión sólo será nula cuando sen μ sea cero. Esto ocurrirá cuando el ángulo μ en la figura 4-17 sea de 0° o 180°. Lo anterior es consistente con la definición de agarrotamiento que se dio en la sección 3.3. Si μ es cero o 180°, entonces cos μ sera ±1. Al sustituir estos dos valores para cos μ en la ecuación 4.31 se obtendrá una solución para el valor de θ_2 entre 0° y 180°, lo que corresponde a la posición de agarrotamiento de un eslabonamiento de triple balancín cuando se le impulsa desde uno de ellos.

$$\cos\mu = \frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2bc} + \frac{ad}{bc}\cos\theta_2 = \pm 1$$

o bien:

$$\cos\theta_2 = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad} \pm \frac{bc}{ad} \tag{4.33}$$

y:

$$\theta_{2_{agarrotamiento}} = \arccos\left(\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2ad} \pm \frac{bc}{ad}\right); \qquad 0 \le \theta_{2_{agarrotamiento}} \le \pi s$$

Uno de estos casos ± producirá un argumento para la función coseno inverso, o arco coseno, que está entre ±1. El ángulo de agarrotamiento que se halla en el primero o en el segundo cuadrantes se determina a partir de este valor. El otro ángulo de agarrotamiento será, entonces, el negativo del ángulo obtenido, debido a la simetría especular de las dos posiciones de agarrotamiento respecto del eslabón de fijación, como se muestra en la figura 4-16. El programa FOURBAR calcula los valores de estos ángulos de agarrotamiento para un eslabonamiento de no Grashof.

4.12 CIRCUITOS Y RAMAS EN ESLABONAMIENTOS

En la sección 4.5 se indicó que el problema de posición para un eslabonamiento de cuatro barras tiene dos soluciones que corresponden a los dos circuitos del eslabonamiento. Esta sección explorará con más detalle los temas de circuitos y ramas en eslabonamientos.

Chase y Mirth [2] definen un **circuito** en un eslabonamiento como *"todas las orientaciones posibles de los eslabones que puedan realizarse sin desconectar ninguna de las juntas"* y una **rama** como *"una serie continua de posiciones del mecanismo en un circuito entre dos configuraciones estacionarias . . . Las configuraciones estacionarias dividen*

un circuito en una serie de ramas". Un eslabonamiento puede tener uno o más circuitos, cada uno de los cuales contiene una o más ramas. El número de circuitos corresponde al número de soluciones posibles de las ecuaciones de posición para el eslabonamiento.

Los defectos en circuitos son de serias consecuencias en la operación del eslabonamiento, pero no lo son para las ramas. Un mecanismo que debe cambiar circuitos para moverse de una posición deseada a otra (conocida como un **defecto del circuito)** no es útil, ya que no se puede hacer esto sin desensamblarlo y reensamblarlo. Dependiendo de la intención del diseñador se puede utilizar o no un mecanismo que cambia su rama cuando se mueve de un circuito a otro (se conoce como un **defecto de la rama).**

El eslabonamiento de la puerta trasera mostrado en la figura 3-2 es un ejemplo de eslabonamiento con defecto de rama deliberado en su rango de movimiento (de hecho en el límite de su rango de movimiento). La posición de agarrotamiento (configuración estacionaria) que alcanza con la puerta trasera completamente abierta sirve para mantenerla abierta. Pero el usuario puede sacarla de su configuración estacionaria al girar uno de los eslabones agarrotados. Las sillas y mesas plegadizas a menudo usan un esquema similar al de los automóviles y camionetas con asientos abatibles (que se disparan al frenar).

Otro ejemplo de un eslabonamiento común con defecto de rama es el eslabonamiento de corredera-manivela (cigüeñal, biela, pistón) que se usa en motores de pistones y se muestra en la figura 3-13. Este eslabonamiento tiene dos posiciones de agarrotamiento (punto muerto superior e inferior) dando dos ramas con una revolución de su cigüeñal. Sin embargo, funciona debido a que pasa por esas configuraciones estacionarias mediante la cantidad de movimiento angular de la rotación del cigüeñal y su volante acoplado. Una sanción es que el motor debe girarse al inicio con el fin de que se construya suficiente momento para llevar a éste por todas las posiciones de agarrotamiento.

El eslabonamiento de seis barras de Watt puede tener cuatro circuitos, y el de seis barras de Stephenson puede tener cuatro o seis circuitos dependiendo de qué eslabonamiento esté impulsando. Los eslabonamientos de ocho barras pueden tener 16 o 18 circuitos, sin embargo, no todos son reales.[2]

El número de circuitos y ramas en el eslabonamiento de cuatro barras depende de su condición de Grashof y la inversión usada. Un eslabonamiento de cuatro barras de triple balancín, de no Grashof, tiene sólo un circuito, pero tiene dos barras. Todos los eslabonamientos de cuatro barras de Grashof tienen dos circuitos, pero el número de ramas por circuito difiere con la inversión. La manivela-balancín y la doble manivela tienen sólo una rama dentro de cada circuito. El doble balancín y la manivela-balancín tienen dos ramas por cada circuito. La tabla 4-1 resume estas relaciones.[21]

Cualquier solución para la posición de un eslabonamiento debe tomar en cuenta el número de posibles circuitos que éste contiene. Si se dispone de una solución de forma cerrada, ésta contendrá todos los circuitos. Una solución iterativa, tal como se describe en la siguiente sección, sólo dará los datos de posición para un circuito y esto quizá no sea lo que usted espera.

TABLA 4-1
Circuitos y ramas
En el eslabonamiento de cuatro barras

Tipo de eslabonamiento de cuatro barras	Número de circuitos	Ramas por circuito
Triple balancín de no Grashof	1	2
Manivela-balancín de Grashof*	2	1
Doble manivela de Grashof*	2	1
Doble balancín de Grashof*	2	2
Manivela-balancín de Grashof*	2	2

* Válido sólo en casos no especiales de eslabonamientos de Grashof.

4.13 MÉTODO DE SOLUCIÓN DE NEWTON-RAPHSON

Todos los métodos de solución para el análisis de posición que se muestran en este capítulo son de "forma cerrada", lo que significa que proporcionan la solución con un

enfoque directo y no iterativo.* En algunas situaciones, particularmente con mecanismos multicíclicos, una solución de forma cerrada puede no ser conveniente. Entonces resulta necesario un enfoque alternativo y el método de Newton-Raphson (algunas veces llamado sólo método de Newton) proporciona un camino para resolver conjuntos de ecuaciones simultáneas no lineales. Cualquier método de solución iterativa requiere que se proporcionen al inicio del cálculo uno o más valores iniciales. Se usan los valores iniciales para obtener una nueva solución más cercana a la correcta. El proceso se repite hasta que converja en una solución muy próxima a la correcta para propósitos prácticos. Sin embargo, no hay garantía de que un método iterativo converja del todo. Puede divergir, tomando soluciones sucesivas además de la correcta, especialmente si el valor de inicio no resulta suficientemente cercano a la solución real.

Aunque será necesario usar el método multidimensional (versión Newton-Raphson) para estos problemas de eslabonamientos, es más fácil entender primero cómo funciona el algoritmo en el análisis del método de Newton para determinar raíces de una sola función no lineal de una variable independiente. Después se analizará el método multidimensional de Newton-Raphson.

Determinación unidimensional de raíces (método de Newton)

Una función no lineal puede tener múltiples raíces, de las cuales una se define como la intersección de la función con cualquier línea recta. Normalmente el eje cero de la variable independiente es la línea recta para la cual se desea obtener las raíces. Tome, por ejemplo, un polinomio cúbico con tres raíces de las que al menos una o todas serán reales.

$$y = f(x) = -x^3 - 2x^2 + 50x + 60 \tag{4.34}$$

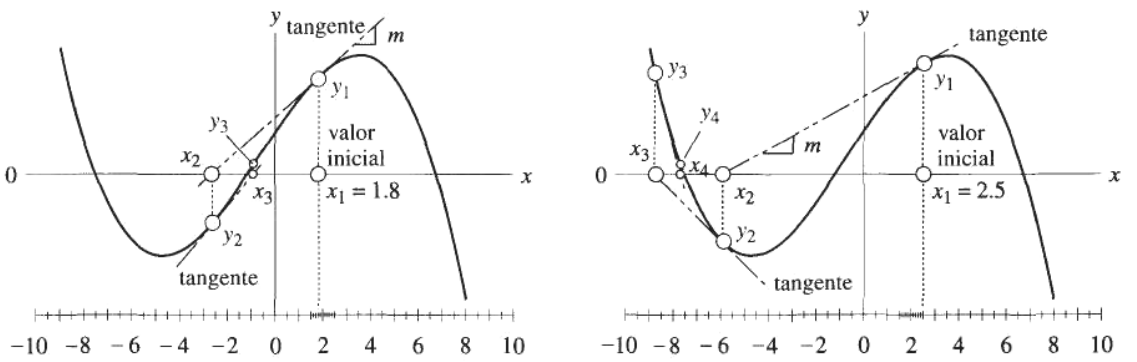
Una solución de forma cerrada para las raíces de una función cúbica † permite visualizar que todas las raíces de este tipo particular de función cúbica son reales y $x = -7.562$, -1.777 y 6.740.

La figura 4-18 muestra esta función graneada sobre un rango de x. En la figura 4-18a) se elige un valor inicial de $x_1 = 1.8$. El algoritmo de Newton evalúa la función para este valor inicial encontrando y_1. El valor de y_1 se compara con la tolerancia seleccionada por el usuario (por ejemplo 0.001) para comprobar si ésta resulta bastante cercana a cero e indicar que x_1 es la raíz. Si no es así, entonces la pendiente *(ni)* de la función en x_1, y_1 se calcula usando una expresión analítica para la derivada de la función o con una derivación numérica (lo que resulta menos aconsejable). La ecuación de la recta tangente se evalúa al encontrar su intersección en x_2, la cual se usa como un nuevo valor inicial. El proceso anterior se repite, encontrando y_2, y probándolo contra la tolerancia seleccionada, si éste es todavía muy grande se calcula otra recta tangente cuya intersección con el eje x se usa como un nuevo valor inicial. Este proceso se repite hasta que el valor de la función y_i en el último x_i sea bastante cercano a cero para satisfacer el uso de la tolerancia.

El algoritmo de Newton antes descrito se expresa algebraicamente (en seudocódigo) como se muestra en la ecuación 4.35. La función para la cual se desea encontrar las raíces es $f(x)$ y su derivada es $f'(x)$. La pendiente m de la recta tangente es igual a $f'(x)$ en el punto actual (x_i, y_i).

* Kramer[13]! estableció que: "En teoría cualquier sistema algebraico de ecuaciones no lineales puede manipularse en la forma de un solo polinomio con una incógnita. Las raíces de este polinomio se usan entonces para determinar todas las incógnitas del sistema. Sin embargo, si el polinomio derivado es más grande que de cuarto grado es necesario factorizar o usar alguna forma de iteración para obtener las raíces. En general, los sistemas que tengan más de un polinomio de cuarto grado asociado con la eliminación de todas las variables, menos una, deben resolverse mediante iteración. Sin embargo, si se factoriza un polinomio de cuarto grado, o de grado menor si es posible, todas las raíces se determinan sin iteración. Por lo tanto, las únicas soluciones simbólicas verdaderas son aquellas que se pueden factorizar en términos de polinomios de cuarto grado o menor. Ésta es la definición formal de una solución de forma cerrada."

† Tomado del método de Viete "De Emendatione", de Francis Viete (1615) como se describe en la referencia [4].



a) Un valor inicial de $x = 1.8$ converge a la raíz en $x = -1.777$

b) Un valor inicial de $x = 2.5$ converge a la raíz en $x = -7.562$

FIGURA 4-18

Método de Newton-Raphson para la solución de raíces de funciones no lineales

paso 1 $y_i = f(x_i)$

paso 2 IF $y_i \leq$ *tolerancia* THEN STOP

paso 3 $m = f'(x_i)$

paso 4 $x_{i+1} = x_i - \dfrac{y_i}{m}$

paso 5 $y_{i+1} = f(x_{i+1})$

paso 6 IF $y_{i+1} \leq$ *tolerancia* THEN STOP

$$\text{ELSE } x_i = x_{i+1} \quad : \quad y_i = y_{i+1} \quad : \quad \text{GOTO paso 1} \tag{4.35}$$

Si el valor inicial está cercano a una raíz, este algoritmo converge rápidamente en la solución. Sin embargo, es bastante sensible al valor del valor inicial. La figura 4-18*b*) muestra el resultado de un ligero cambio del valor inicial de $x_1 = 1.8$ a $x_1 = 2.5$. Con dicho valor inicial ligeramente diferente converge en otra raíz. Observe también que si se elige un valor inicial de $x_1 = 3.579$, correspondiente a un máximo local de esta función, la recta tangente será horizontal y no se intersecará con el eje *x*. El método satisface esta situación. ; Puede usted sugerir un valor de x_1 que cause que converja en la raíz en x = 6.74?

Por lo tanto, este método tiene sus inconvenientes. Puede que no converja. Puede comportarse caóticamente.* Es sensible al valor inicial. También es incapaz de la distinción entre múltiples circuitos en un eslabonamiento. La solución del circuito que encuentra depende del valor inicial. Requiere que la función sea diferenciable, y tanto la derivada como la función deben evaluarse en cada paso. No obstante, constituye el método de elección de funciones cuyas derivadas se evalúan eficientemente y son continuas en la región de la raíz. Es más, representa casi la única opción para sistemas de ecuaciones no lineales.

* Kramer[3] señaló que "el algoritmo de Newton-Raphson exhibe un comportamiento caótico cuando hay soluciones múltiples a las ecuaciones con restricciones cinemáticas . . . Newton-Raphson no tiene un mecanismo para distinguir entre las dos soluciones" (circuitos). Kramer realizó un experimento con sólo dos eslabones, exactamente análogos, para encontrar los ángulos del acoplador y balancín en el problema de posición del eslabonamiento de cuatro barras y encontró que los valores de inicio necesitaban estar muy cerca de la solución deseada (uno de los dos posibles circuitos) para evitar divergencia u oscilación caótica entre las dos soluciones.

Determinación multidimensional de raíces (método de Newton-Raphson)

El método de Newton unidimensional puede extenderse fácilmente a sistemas de ecuaciones no lineales, múltiples y simultáneas, por ello se denomina método de Newton-Raphson. Se generalizará primero la expresión desarrollada para el caso unidimensional en el paso 4 de la ecuación 4-35. Véase también la figura 4-18.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{y_i}{m} \qquad \text{o} \qquad m(x_{i+1} - x_i) = -y_i$$

pero: $y_i = f(x_i) \qquad m = f'(x_i) \qquad x_{i+1} - x_i = \Delta x$

al sustituir:
$$f'(x_i) \cdot \Delta x = -f(x_i) \tag{4.36}$$

Se introduce aquí un término Δx que tiende a cero cuando la solución converge. El término Δx más que y_i se debe probar contra la tolerancia seleccionada en este caso. Observe que esta forma de la ecuación evita la operación de división, la cual se acepta en una ecuación escalar pero resulta imposible con una ecuación matricial.

Un problema multidimensional tendrá un conjunto de ecuaciones de la forma

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ \text{M} \qquad\qquad \text{M} \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \end{bmatrix} = \mathbf{B} \tag{4.37}$$

donde el conjunto de ecuaciones constituye un vector que aquí se ha llamado B.

Se requieren derivadas parciales para obtener los términos de la pendiente

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \tag{4.38}$$

con los cuales se forma la *matriz jacobiana* del sistema, que aquí se ha llamado A.

Los términos de error constituyen también un vector, que aquí se ha llamado X.

$$\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = \mathbf{X} \tag{4.39}$$

La ecuación 4.36 será entonces una ecuación matricial para el caso multidimensional.

$$\mathbf{AX} = -\mathbf{B} \tag{4.40}$$

La ecuación 4.40 se puede resolver para X por una inversión matricial o por eliminación gaussiana. Los valores de los elementos A y B se calculan para cualquier valor supuesto

(inicial) de las variables. Un criterio de convergencia se toma como la suma de los vectores de error X en cada iteración, en la cual la suma tiende a cero en una raíz.

A continuación se realizará este método de solución de Newton-Raphson para un eslabonamiento de cuatro barras.

Solución de Newton-Raphson para un eslabonamiento de cuatro barras

La ecuación de lazo vectorial del eslabonamiento de cuatro barras, separada en su parte real (ecuación 4.6a) e imaginaria (ecuación 4.6b) proporciona el conjunto de funciones que define los dos ángulos de eslabón desconocidos θ_3 y θ_4. Las longitudes de eslabón, *a, b, c, d* y el ángulo de entrada θ_2 están dados.

$$f_1 = a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d = 0$$
$$f_2 = a\operatorname{sen}\theta_2 + b\operatorname{sen}\theta_3 - c\operatorname{sen}\theta_4 = 0 \tag{4.41a}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d \\ a\operatorname{sen}\theta_2 + b\operatorname{sen}\theta_3 - c\operatorname{sen}\theta_4 \end{bmatrix} \tag{4.41b}$$

El vector de error es:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Delta\theta_3 \\ \Delta\theta_4 \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

Las derivadas parciales son:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b\operatorname{sen}\theta_3 & c\operatorname{sen}\theta_4 \\ b\cos\theta_3 & -c\cos\theta_4 \end{bmatrix} \tag{4.43}$$

Esta matriz se conoce como el **jacobiano** del sistema, y además de ser útil en el método de solución también proporciona alguna información acerca de la solución del sistema. El sistema de ecuaciones para la posición, velocidad y aceleración (en la cual el jacobiano se encuentra) se resuelve sólo si el valor del determinante del jacobiano es distinto de cero.

Al sustituir las ecuaciones 4.41b, 4.42 y 4.43 en la ecuación 4.40 se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -b\operatorname{sen}\theta_3 & c\operatorname{sen}\theta_4 \\ b\cos\theta_3 & -c\cos\theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_3 \\ \Delta\theta_4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a\cos\theta_2 + b\cos\theta_3 - c\cos\theta_4 - d \\ a\operatorname{sen}\theta_2 + b\operatorname{sen}\theta_3 - c\operatorname{sen}\theta_4 \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

Para resolver esta ecuación matricial se proporcionarán los valores iniciales para θ_3 y θ_4, y las dos ecuaciones se resolverán simultáneamente para $\Delta\theta_3$ y $\Delta\theta_4$. Para un gran sistema de ecuaciones se necesita un algoritmo de reducción de matrices. En este sistema simple con dos incógnitas las dos ecuaciones se resuelven por combinación y reducción. La prueba antes descrita, que compara la suma de los valores de $\Delta\theta_3$ y $\Delta\theta_4$ con una tolerancia seleccionada, debe aplicarse después de cada iteración para determinar si se ha encontrado una raíz.

Resolvedores de ecuaciones

Algunos paquetes computacionales de solución de ecuaciones disponibles comercialmente incluyen la solución iterativa de Newton-Raphson de un conjunto de ecuaciones simultáneas no lineales. Por ejemplo *TkSolver** y *Mathcad*†. *TkSolver* automáticamente muestra su solución de Newton-Raphson cuando no puede resolver directamente el conjunto de ecuaciones presentado, suponiendo que se han proporcionado suficientes valores iniciales para las incógnitas. Estas herramientas resolvedoras de ecuaciones resultan muy convenientes puesto que el usuario solamente necesita proporcionar las ecuaciones para el sistema en forma "pura", como la ecuación 4.41a. No es necesario ordenarlas en el algoritmo de Newton-Raphson como se indicó en la sección anterior. Debido a la carencia de un resolvedor comercial de ecuaciones tendrá que escribir su propio código de computadora para programar la solución como se describió anteriormente. La referencia [5] es una ayuda útil en este tema. El CD-ROM que este texto incluye contiene ejemplos de archivos *TKSolver* para la solución de este problema de posición de cuatro barras, y de otros.

4.14 REFERENCIAS

1 **Waldron, K. J. y Sreenivasan, S. V.** (1996). "A study of the Solvability of the Position Problem for Multi-Circuit Mechanisms by Way of Example of the Double Butterfly Linkage". *Journal of Mechanical Design,* **118(3), p.** 390.

2 **Chase, T. R. y Mirth, J. A.** (1993). "Circuits and Branches of Single-Degree-of-Freedom Planar Linkages". *Journal of Mechanical Design,* **115,** p. 223.

3 **Kramer, G.** (1992). *Solving Geometric Constraint Systems: A Case Study in Kinematics.* MIT Press: Cambridge, pp. 155-158.

4 **Press, W. H. y colaboradores** (1986). *Numerical Recipes: The Art of Scientiflc Computing.* Cambridge University Press: Cambridge, pp. 145-146.

5 *Ibid.,* pp. 254-273.

4.15 PROBLEMAS

4-1 Suponga que un vector de posición se define con una longitud igual a la estatura de usted en pulgadas (o en centímetros). La tangente de su ángulo se define como el valor numérico del peso de usted en libras (o kilogramos) dividido entre su propia edad en años. Calcule los datos para este vector y:

a. Trace el vector de posición a escala en un plano cartesiano.
b. Escriba una expresión para el vector de posición en la que se utilice la notación de vectores unitarios.
c. Formule una expresión para el vector de posición mediante la notación de número complejo, en las formas polar y cartesiana.

4-2 Una partícula se mueve a lo largo de un arco de 6.5 pulgadas de radio. El centro del citado arco está en el origen de un sistema de coordenadas. Cuando la partícula se encuentra en la posición *A* su vector de posición establece un ángulo de 45° con el eje *X.* En la posición *B* su vector forma un ángulo de 75° con el eje *X.* Trace este sistema a alguna escala conveniente y:

* Universal Technical Systems, 1220 Rock St. Rockford, IL 61101, USA. (800) 435-7887

† Mathsoft, 201 Broadway, Cambridge, MA 02139 (800) 628-4223

a. Escriba una expresión para el vector de posición de la partícula en la posición *A* por medio de la notación de número complejo en las formas polar y cartesiana.
b. Formule una expresión para el vector de posición de la partícula en la posición *B* mediante la notación de número complejo en las formas polar y cartesiana.
c. Escriba una ecuación vectorial para la diferencia de posición entre los puntos *B y A*. Introduzca la notación de número complejo para los vectores en esta ecuación, y resuélvala para evaluar numéricamente la diferencia de posición.
d. Compruebe el resultado de la parte c mediante un método gráfico.

4-3 Repita el problema 4-2, considere que los puntos *A* y *B* representan partículas separadas y obtenga su posición relativa.

4-4 Repita el problema 4-2 con la trayectoria de partícula definida como la recta cuya ecuación es y = -2x + 10.

4-5 Repita el problema 4-3 con la trayectoria de la partícula definida como la curva de ecuación $y = -2x^2 - 2x + 10$.

*4-6 Las longitudes de eslabón y el valor de θ_2 para algunos eslabonamientos de cuatro barras se definen en la tabla P4-1. La configuración y terminología del eslabonamiento se muestran en la figura P4-1. Para los renglones asignados trace el eslabonamiento a escala y obtenga gráficamente todas las soluciones posibles (tanto abiertas como cruzadas) para los ángulos θ_3 y θ_4. Determine la condición de Grashof.

*†4-7 Repita el problema 4-6 resolviéndolos por el método de lazo vectorial.

4-8 Desarrolle la ecuación 4.7b y pruebe que se reduce a la ecuación 4.7c.

*4-9 Las longitudes de eslabón y el valor de θ_2, así como el corrimiento para algunos eslabonamientos de cuatro barras de manivela-corredera se definen en la tabla P4-2. La configuración y terminología de eslabonamientos se ilustran en la figura P4-2. Para las filas asignadas trace el eslabonamiento a escala y obtenga gráficamente todas las soluciones posibles (abiertas y cruzadas) para el ángulo θ_3 y la posición de corredera d.

*†4-10 Repita el problema 4-9 pero resolviéndolo por el método de lazo vectorial.

*4-l 1 Las longitudes de eslabón y el valor de θ_2, y γ para algunos eslabonamientos de cuatro barras de manivela-corredera invertidos se definen en la tabla P4-3. La configuración y terminología de eslabonamientos se muestran en la figura P4-3. Para los renglones asignados trace el eslabonamiento a escala y obtenga gráficamente soluciones abiertas y cruzadas para los ángulos θ_3 y θ_4 y el vector $\mathbf{R}_B$.

*†4-12 Repita el problema 4-11 resolviéndolo por el método de lazo vectorial.

*†4-13 Obtenga los ángulos de transmisión de los eslabonamientos en las filas asignadas en la tabla P4-1.

*†4-14 Obtenga los valores máximo y mínimo del ángulo de transmisión para todos los eslabonamientos de manivela-balancín de Grashof de la tabla P4-1.

*†4-15 Determine los ángulos de entrada correspondientes a las posiciones de agarrotamiento de los eslabonamientos de no Grashof de la tabla P4-1. (Para este problema no considere los valores de θ_2 dados en la tabla.)

* Respuestas en el apéndice F.

† En estos problemas son adecuados los programas resolvedores de ecuaciones como Mathcad, Mathlab o TKSolver. En muchos casos su solución puede comprobarse con los programas FOURBAR, SLIDER O SIXBAR.

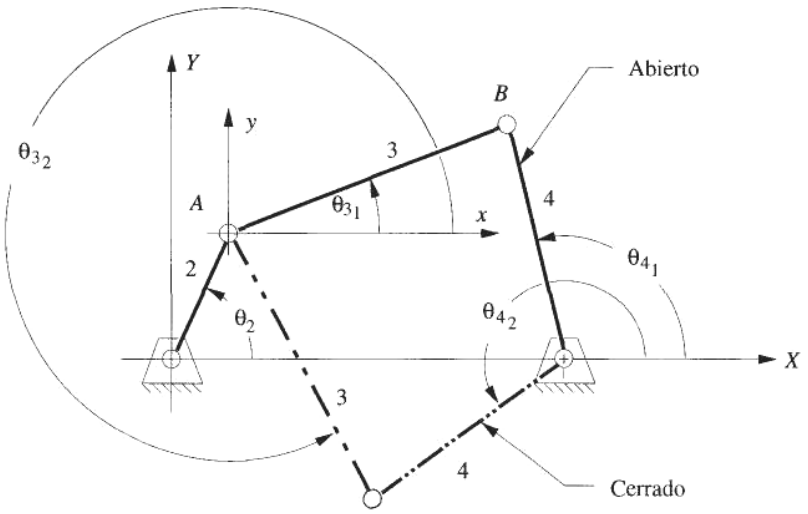


FIGURA P4-1

Problemas 4-6 a 4-7. Configuración general y terminología para el eslabonamiento de cuatro barras

*4-16 Las longitudes de eslabón, relación de engranes (λ), ángulo de fase (ϕ) y el valor de θ_2 para algunos eslabonamientos de cinco barras con engranaje se definen en la tabla P4-4. La configuración y terminología de eslabonamientos se muestran en la figura P4-4. En el caso de los renglones asignados trace el eslabonamiento a escala y obtenga gráficamente todas las soluciones posibles para los ángulos θ_3 y θ_4.

*†4-17 Repita el problema 4-16 resolviéndolo por el método de lazo vectorial.

TABLA P4-1 Datos para los problemas 4-6, 4-7 y del 4-13 al 4-15

Renglón	Eslabón 1	Eslabón 2	Eslabón 3	Eslabón 4	θ_2
a	6	2	7	9	30
b	7	9	3	8	85
c	3	10	6	8	45
d	8	5	7	6	25
e	8	5	8	6	75
f	5	8	8	9	15
g	6	8	8	9	25
h	20	10	10	10	50
i	4	5	2	5	80
j	20	10	5	10	33
k	4	6	10	7	88
l	9	7	10	7	60
m	9	7	11	8	50
n	9	7	11	6	120

* Respuestas en el apéndice F.

† En estos problemas son adecuados los programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad, Mathlab* o *TKSolver.* En muchos casos su solución puede comprobarse con los programas FOURBAR, SLIDER O SIXBAR.

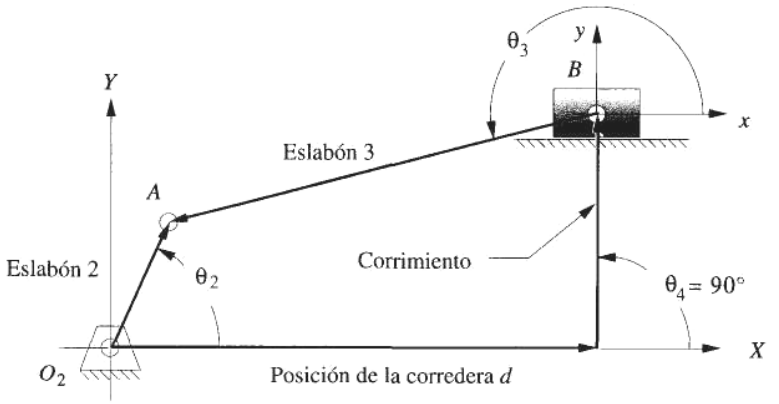


FIGURA P4-2

Problemas 4-9 y 4-10. Configuración abierta y terminología para un eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera

4-18 Escale la figura P4-5 para obtener las dimensiones en los siguientes problemas, cada uno de los cuales se refiere a la parte de la figura con la misma letra. Todas las referencias de las medidas angulares se toman respecto a la línea del centro.

a. Encuentre el desplazamiento angular del eslabón *CD* cuando el eslabón *AB* gira en sentido de las manecillas del reloj a partir de la posición que se muestra como horizontal. ¿Cuál es el ángulo más pequeño de transmisión entre estas dos posiciones? Encuentre las posiciones de agarrotamiento de este eslabonamiento en función del ángulo de eslabón *AB*.

TABLA P4-2 Datos para los problemas 4-9 y 4-10

Renglón	Eslabón 2	Eslabón 3	Corrimiento	θ_2
a	1.4	4	1	45
b	2	6	-3	60
c	3	8	2	-30
d	3.5	10	1	120
e	5	20	-5	225
f	3	13	0	100
g	7	25	10	330

TABLA P4-3 Datos para los problemas 4-11 y 4-12

Renglón	Eslabón 1	Eslabón 2	Eslabón 4	γ	θ_2
a	6	2	4	90	30
b	7	9	3	75	85
c	3	10	6	45	45
d	8	5	3	60	25
e	8	4	2	30	75
f	5	8	8	90	150

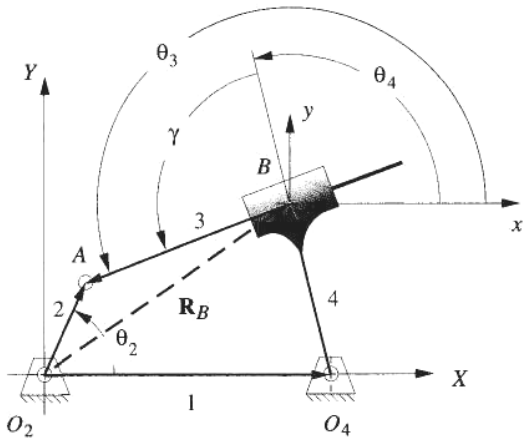


FIGURA P4-3

Problemas 4-11 y 4-12. Terminología para la inversión núm. 3 del eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera

b. Encuentre y grafique las posiciones angulares de los eslabones *BC y CD y* el ángulo de transmisión como una función del ángulo de la rueda *W* cuando ésta gira una revolución.

c. Encuentre y grafique la posición de cualquiera de los pistones como una función del ángulo de la manivela *AB* cuando ésta gira una revolución. Una vez que se ha definido el movimiento del pistón encuentre los movimientos de los otros dos pistones y su relación de fase con respecto al primer pistón.

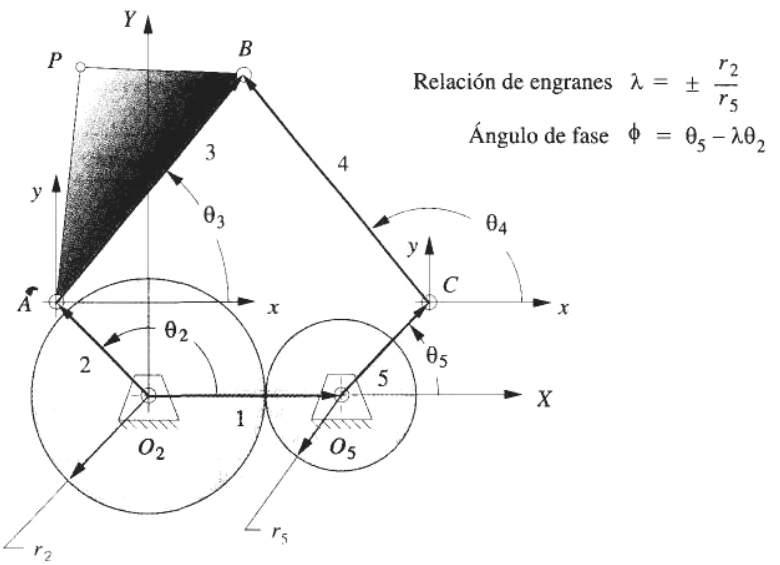


FIGURA P4-4

Problemas 4-16 y 4-17. Configuración abierta y terminología para el eslabonamiento de cinco barras con engranaje

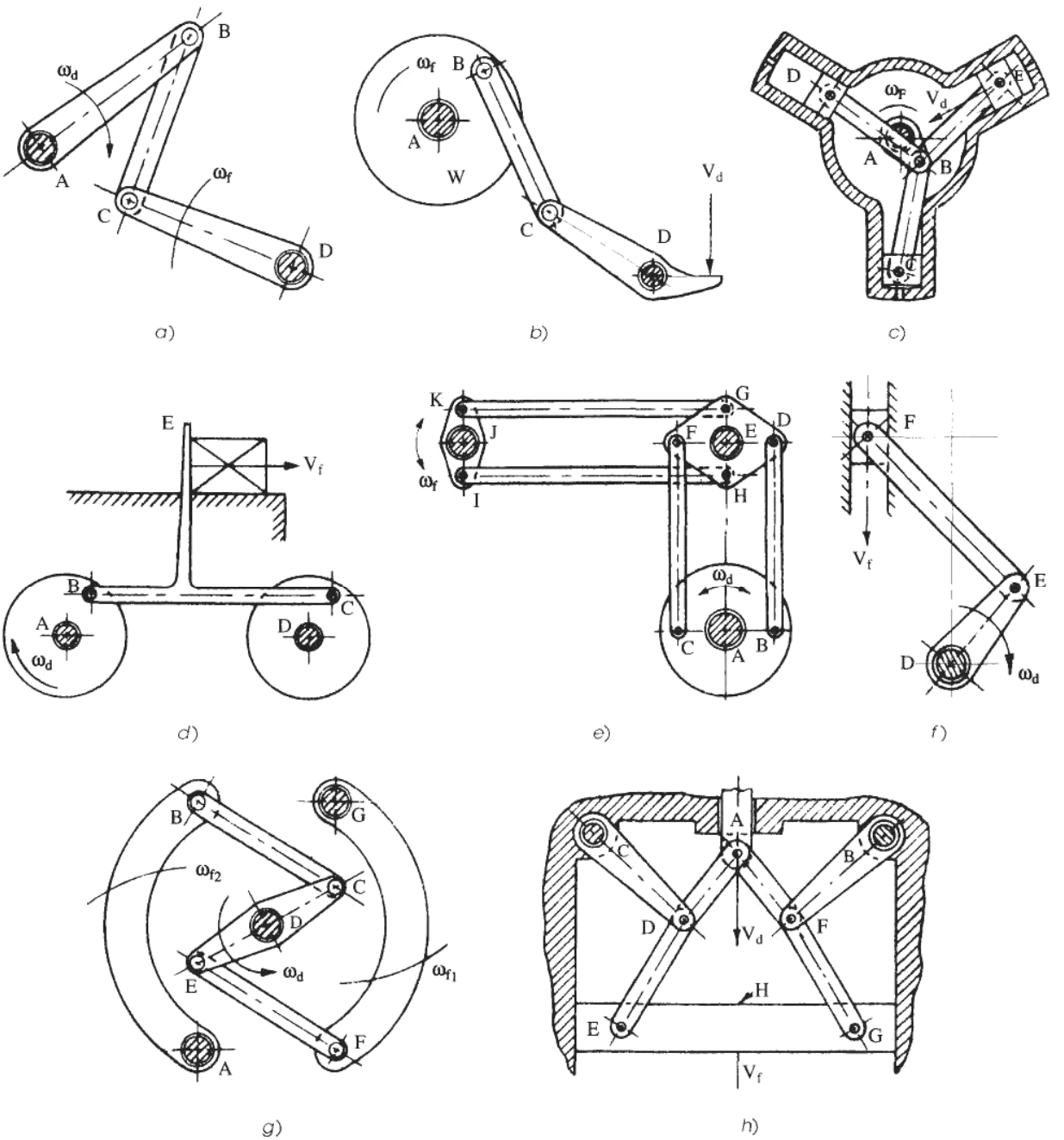


FIGURA P4-5

Mecanismos para el problema 4-18, *Adaptado de P H. Hill y W. R Rule. (1960)*
Mechanisms: Analysis and Design con la autorización correspondiente

TABLA P4-4 Datos para los problemas 4-16 y 4-17

Renglón	Eslabón 1	Eslabón 2	Eslabón 3	Eslabón 4	Eslabón 5	λ	ϕ	θ_2
a	6	1	7	9	4	2	30	60
b	6	5	7	8	4	–2.5	60	30
c	3	5	7	8	4	–0.5	0	45
d	4	5	7	8	4	–1	120	75
e	5	9	11	8	8	3.2	–50	–39
f	10	2	7	5	3	1.5	30	120
g	15	7	9	11	4	2.5	–90	75
h	12	8	7	9	4	–2.5	60	55
i	9	7	8	9	4	–4	120	100

d. Encuentre el desplazamiento angular total del eslabón *BC* cuando el eslabón *AB* completa una revolución. Determine la carrera total de la caja en el punto *E* cuando el eslabón *AB completa* una revolución.

e. Determine la relación de desplazamiento angular entre el eslabón *AB* y *JK* como una función del desplazamiento angular de la manivela de entrada *JK*. Trace el ángulo de transmisión en el punto *G* para una revolución de la manivela *JK*. Comen te el comportamiento de este eslabonamiento.

f. Encuentre y grafique el desplazamiento del pistón *F* y el desplazamiento angular del eslabón *EF* como una función del desplazamiento angular de la manivela *DE*.

g. Encuentre y grafique el desplazamiento del eslabón *AB* en relación con el ángulo del eslabón de entrada *DC* cuando esté rota desde la posición mostrada a una posi ción vertical. Encuentre las posiciones de agarrotamiento de este eslabonamiento en términos del ángulo de eslabón *DC*.

h. Encuentre los puntos *G* de máximo desplazamiento vertical hacia abajo de la posición mostrada. ¿Cuál es el ángulo del eslabón de entrada *BF* en esta posición?

·4-19 Para una revolución de la rueda impulsora *W* del mecanismo empujador puesto en lugar de la figura P4-6 encuentre la carrera horizontal de los empujadores para la parte de su movimiento en la que sus puntas estén por arriba de la banda superior. Exprese la carrera como un porcentaje de la longitud de la manivela *AB*. ¿Qué parte de una revolución de la manivela impulsora *AB* corresponde a esta carrera? También determine el desplazamiento angular total del eslabón *DE* para una revolución de la rueda *W*. Dibuje a escala todas las dimensiones necesarias.

†4-20 Para una revolución de la rueda impulsora *W* del mecanismo de la sierra en la carrera de corte que se ilustra en la figura P4-7 encuentre y trace la carrera horizontal de la segueta como una función del ángulo de entrada de la manivela *AB*.

*†4-21 Para el eslabonamiento mostrado en la figura P4-8 encuentre sus posiciones límite (agarrotamiento) en términos del ángulo del eslabón O_2A relacionadas con la línea de centros O_2O_4 cuando se impulsan desde el eslabón O_2A. Después calcule y trace las coordenadas xy del acoplador en el punto *P* entre esos límites, con referencia a la línea de centros O_2O_4.

* Respuestas en el apéndice F.

† En estos problemas son adecuados los programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad, Mathlab* o *TKSolver*. En muchos casos su solución puede comprobarse con los programas FOURBAR, SLIDER O SIXBAR.

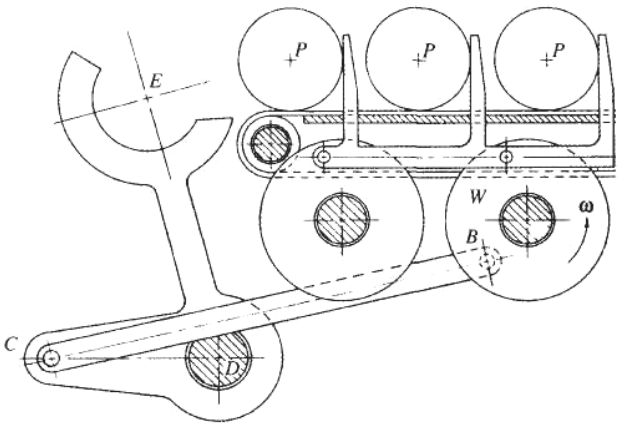


FIGURA P4-6

Mecanismo empujador y de colocación en lugar para el problema 4-19
Adaptado de R H. Hill y W. R Rule. (1960). Mechanisms: Analysis and Design, con la autorización correspondiente

†4-22 Para el mecanismo de viga viajera de la figura P4-9 calcule y trace las componentes *x* y *y* de la posición del acoplador en el punto *P* para una revolución completa de la manivela *O2A*. Sugerencia: calcúlelas primero con respecto al eslabón de fijación O2O4 y después transfórmelas en el sistema de coordenadas global *XY* (es decir, horizontal y vertical en la figura). Dibuje a escala la figura para cualquier información adicional necesaria.

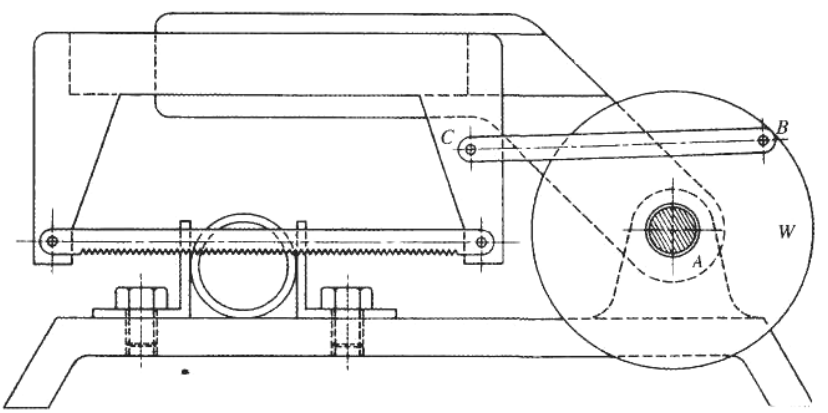


FIGURA P4-7

Cortadora de potencia para el problema 4-20. *Adaptado de R H. Hill y W. R Rule. (1960) Mechanisms: Analysis and Design con la autorización correspondiente*

† En estos problemas son adecuados los programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad, Mathlab* o *TKSolver*. En muchos casos su solución puede comprobarse con los programas FOURBAR, SLIDER O SIXBAR.

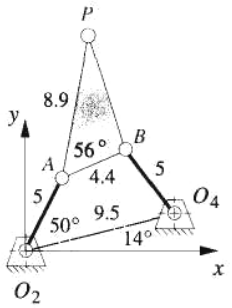


FIGURA P4-8
Problema 4-21

*†4-23 Para el eslabonamiento de la figura P4-10 calcule y trace los desplazamientos angulares de los eslabones 3 y 4, y las coordenadas de trayectoria del punto *P* con respecto al ángulo de la manivela de entrada O_2A para una revolución.

†4-24 Para el eslabonamiento de la figura P4-11 calcule y trace el desplazamiento angular de los eslabones 3 y 4 con respecto al ángulo de la manivela de entrada O_2A para una revolución.

*†4-25 Para el eslabonamiento de la figura P4-12 encuentre sus posiciones límite (agarrotamiento) en términos del ángulo del eslabón O_2A relacionado con la línea de centros *O2O4* cuando se impulsa del eslabón O_2A. Después calcule y trace el desplazamiento angular de los eslabones 3 y 4, y las coordenadas de trayectoria del punto *P* con respecto al ángulo de la manivela de entrada O_2A sobre su rango posible de movimiento en relación con la línea de centros O_2O_4.

*†4-26 Para el eslabonamiento de la figura P4-13 encuentre sus posiciones límite (agarrotamiento) en términos del ángulo del eslabón O_2A relacionado con la línea de centros O_2O_4 cuando se impulsa del eslabón O_2A. Después calcule y trace el desplazamiento angular de los eslabones 3 y 4, y las coordenadas de trayectoria del punto *P* entre esos límites, con respecto al ángulo de la manivela de entrada O_2A sobre su posible rango de movimiento con respecto a la línea de centros O_2O_4.

*†4-27 Para el eslabonamiento de la figura P4-13 encuentre sus posiciones límite (agarrotamiento) en términos del ángulo del eslabón O_4B relacionado con la línea de centros O_4O_2 cuando se impulsa desde el eslabón O_4B. Después calcule y grafique el desplazamiento angular de los eslabones 2 y 3, y la trayectoria de coordenadas del punto *P* entre estos límites, con respecto al ángulo de entrada de la manivela O_4B, sobre un posible rango de movimiento relacionado con la línea de centros O_4O_2.

*†4-28 Para el eslabonamiento de manivela-balancín de la figura P4-14 encuentre el máximo desplazamiento angular posible para el eslabón de pedal (en el cual se aplica la fuerza *F*). Determine las posiciones de agarrotamiento. ¿Cómo funciona? Explique por qué la

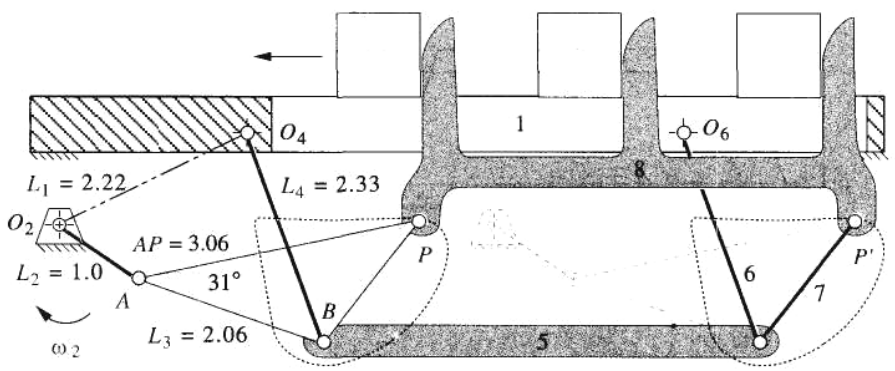


FIGURA P4-9
Problema 4-22. Viga viajera rectilínea con mecanismo de transporte de ocho barras

* Respuestas en el apéndice F.

† En estos problemas son adecuados los programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad, Mathlab* o *TKSolver.* En muchos casos su solución puede comprobarse con los programas FOURBAR, SLIDER O SIXBAR.

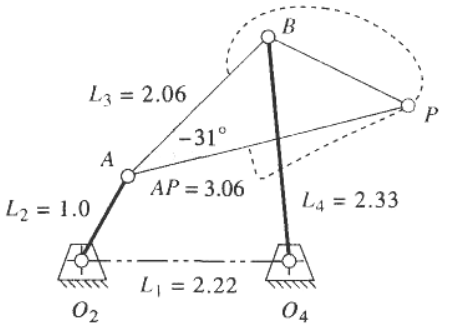


FIGURA P4-10

Problema 4-23

rueda de afilado rota completamente a pesar de la presencia de las posiciones de agarrotamiento cuando se impulsa desde el pedal. ¿Cómo la arrancaría si estaba en una posición de agarrotamiento?

*†4-29 Para el eslabonamiento de la figura P4-15 encuentre sus posiciones de agarrotamiento en términos del ángulo del eslabón O_2A relacionado con la línea de centros O_2O_4 cuando se impulsa desde el eslabón O_2A. Después calcule y grafique el desplazamiento angular de los eslabones 3 y 4, y la trayectoria de coordenadas del punto *P* dentro de esos límites, con respecto al ángulo de entrada de la manivela O_2A sobre su posible rango de movimiento en relación con la línea de centros O_2O_4.

*†4-30 Para el eslabonamiento de la figura P4-15 determine sus posiciones límite (agarrotamiento) en términos del ángulo del eslabón O_4B relacionado con la línea de centros O_4O_2 cuando se impulsa del eslabón O_4B. Después calcule y grafique el desplazamiento angular de los eslabones 3 y 4 y las coordenadas de trayectoria del punto *P* entre

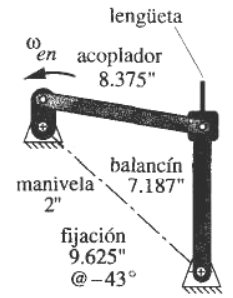


FIGURA P4-11

Problema 4-24

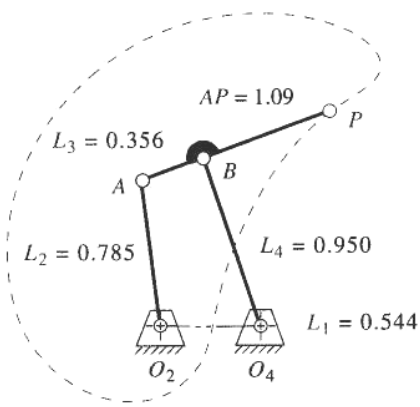


FIGURA P4-12

Problema 4-25

* Respuestas en el apéndice F.

† En estos problemas son adecuados los programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad, Mathlab* o *TKSolver.* En muchos casos su solución puede comprobarse con los programas FOURBAR, SLIDER O SIXBAR.

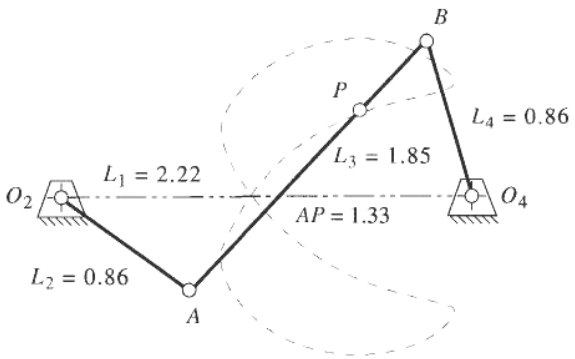


FIGURA P4-13

Problemas 4-26 y 4-27

esos límites, con respecto al ángulo de la manivela de entrada O_4B sobre su posible rango de movimiento relacionado con la línea de centros O_4O_2.

†4-31 Escriba un programa de cómputo (o use un resolvedor de ecuaciones tal como *Mathcad*, *Mathlab* o *TKSolver*) para encontrar las raíces de $y = 9x^2 + 50x - 40$. Sugerencia: grafique la función para determinar buenos valores iniciales.

†4-32 Escriba un programa de cómputo (o use un resolvedor de ecuaciones tal como *Mathcad*, *Mathlab* o *TKSolver*) para encontrar las raíces de $y = -x^3 - 4x^2 + 80x - 40$. Sugerencia: grafique la función para determinar buenos valores iniciales.

†4-33 La figura 4-18 es la gráfica de la función cúbica de la ecuación 4.34. Escriba un programa de cómputo (o use un resolvedor de ecuaciones tal como *Mathcad, Mathlab* o *TKSolver* para resolver la ecuación matricial) para investigar el comportamiento del algoritmo de Newton-Raphson conforme el valor inicial varía de $x = 1.8$ a 2.5 en incrementos de paso de 0.1. Determine el valor inicial para el cual la convergencia cambia de raíces. Explique este fenómeno de cambio de raíces con base en sus observaciones de este ejercicio.

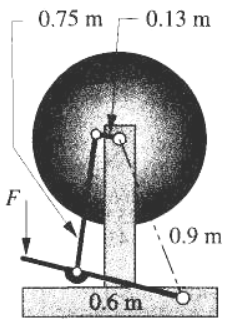


FIGURA P4-14

Problema 4-28

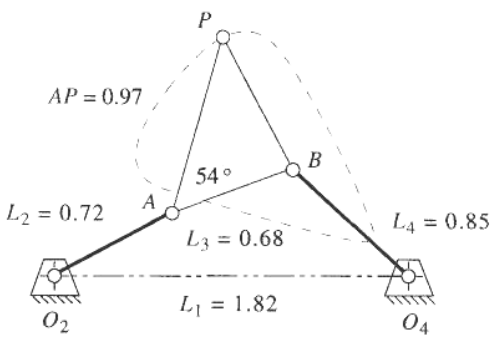


FIGURA P4-15

Problemas 4-29 y 4-30

† En estos problemas son adecuados los programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad, Mathlab* o *TKSolver*. En muchos casos su solución puede comprobarse con los programas FOURBAR, SLIDER o SIXBAR.



Capítulo 5

SÍNTESIS ANALÍTICA DE ESLABONAMIENTOS

La imaginación es más importante que el conocimiento.
ALBERT EINSTEIN

5.0 INTRODUCCIÓN

Una vez establecidas las bases del análisis de posición se podrá usar estas técnicas para **sintetizar eslabonamientos analíticamente** para posiciones de salida especificadas. Las técnicas de síntesis presentadas en el capítulo 3 fueron estrictamente gráficas y de alguna forma intuitivas. El procedimiento de **síntesis analítica** es más algebraico que gráfico y menos intuitivo. Sin embargo, su naturaleza algebraica lo hace más adecuado para el trabajo en computadora. Sandor[1] creó estos métodos de síntesis analítica y posteriormente sus discípulos Erdman,[2] Kaufman,[3] y Loerch y colaboradores[4,51] los desarrollaron.

5.1 TIPOS DE SÍNTESIS CINEMÁTICA

Erdman y Sandor[161] definen tres tipos de síntesis cinemática: **generación de función, de trayectoria y de movimiento,** las cuales se presentaron en la sección 3.2. Aquí se repiten breves definiciones para su comodidad.

GENERACIÓN DE FUNCIÓN Se define como *la correlación entre una* ***función de entrada y*** *una* ***función de salida*** *en un mecanismo.* Generalmente el resultado es un doble balancín o una manivela-balancín con entrada y salida de rotación puras. Un eslabonamiento de manivela-corredera también puede ser un generador de función impulsado desde uno u otro extremo, es decir, entrada de rotación y salida de traslación, o viceversa.

GENERACIÓN DE TRAYECTORIA Se define como *el control de un* ***punto*** *en el plano tal que siga alguna trayectoria prescrita.* Normalmente esto se realiza con un eslabonamiento de cuatro barras de manivela-balancín o de doble balancín, en donde un

punto del acoplador describe la trayectoria de salida deseada. En la generación de trayectoria no se intenta tener control de orientación del eslabón que contiene el punto de interés. La curva del acoplador se pasa por un conjunto de puntos de salida deseados. Sin embargo, resulta común que se definan los tiempos de llegada del punto de acoplador en sitios particulares a lo largo de la trayectoria. Este caso se denomina *generación de trayectoria con tiempos prescritos* y es análoga a la generación de función en que se especifica una función de salida particular.

GENERACIÓN DE MOVIMIENTO Se define como *el control de una* ***recta*** *en el plano, tal que asume un conjunto secuencial de posiciones prescritas.* Aquí es importante la orientación del eslabón que contiene la línea. Normalmente esto se realiza con un eslabonamiento de cuatro barras de manivela-balancín o de doble balancín, en donde un punto en el acoplador describe la trayectoria de salida deseada, y el eslabonamiento también controla la orientación angular del eslabón acoplador que contiene la recta de salida de interés.

5.2 PUNTOS DE PRECISIÓN

Los *puntos o posiciones prescritos para ubicaciones sucesivas del eslabón de salida (acoplador o balancín) en el plano,* generalmente se denominan **puntos de precisión** o **posiciones de precisión.** El número de puntos de precisión que pueden sintetizarse está limitado por el número de ecuaciones disponibles para su solución. El eslabonamiento de cuatro barras se sintetiza por métodos de forma de cierre hasta para cinco puntos de posición en el caso de generación de movimiento o trayectoria (salida de acoplador) y hasta para siete puntos de generación de función (salida de balancín). La síntesis para dos o tres puntos de precisión es relativamente sencilla, y cada uno de estos casos se puede reducir a un sistema de ecuaciones lineales simultáneas fácilmente resolubles con calculadora. Los cuatro o más problemas de síntesis de posición suponen la resolución de sistemas de ecuaciones simultáneas no lineales que requieren una computadora, ya que son más difíciles de resolver.

Observe que estos procedimientos de síntesis analítica proporcionan una solución capaz de "estar en" los puntos de precisión especificados, pero no garantizan la operación del eslabonamiento entre dichos puntos de precisión. Es posible que el eslabonamiento resultante sea incapaz de moverse de un punto de precisión a otro debido a la presencia de una posición de agarrotamiento u otra restricción. La situación realmente no difiere de la de los casos de síntesis gráfica presentados en el capítulo 3, en los cuales también existía la posibilidad de tal posición entre puntos de diseño. De hecho, estos métodos de síntesis analítica representan sólo una forma alterna de resolver los mismos problemas de síntesis multiposicional. Se podría construir un modelo simple en cartulina del eslabonamiento sintetizado para observar su operación e investigar la presencia de problemas, incluso si la síntesis se realiza con un método analítico muy particular.

5.3 GENERACIÓN DE MOVIMIENTO DE DOS POSICIONES POR SÍNTESIS ANALÍTICA

En la figura 5-1 se muestra un eslabonamiento de cuatro barras en una posición con un punto de acoplador en el primer punto de precisión P_1. También se indica un segundo punto de precisión (**punto** P_2) que la rotación del balancín de entrada, eslabón 2, debe alcanzar de acuerdo con un todavía no especificado ángulo β_2. Considere también que el

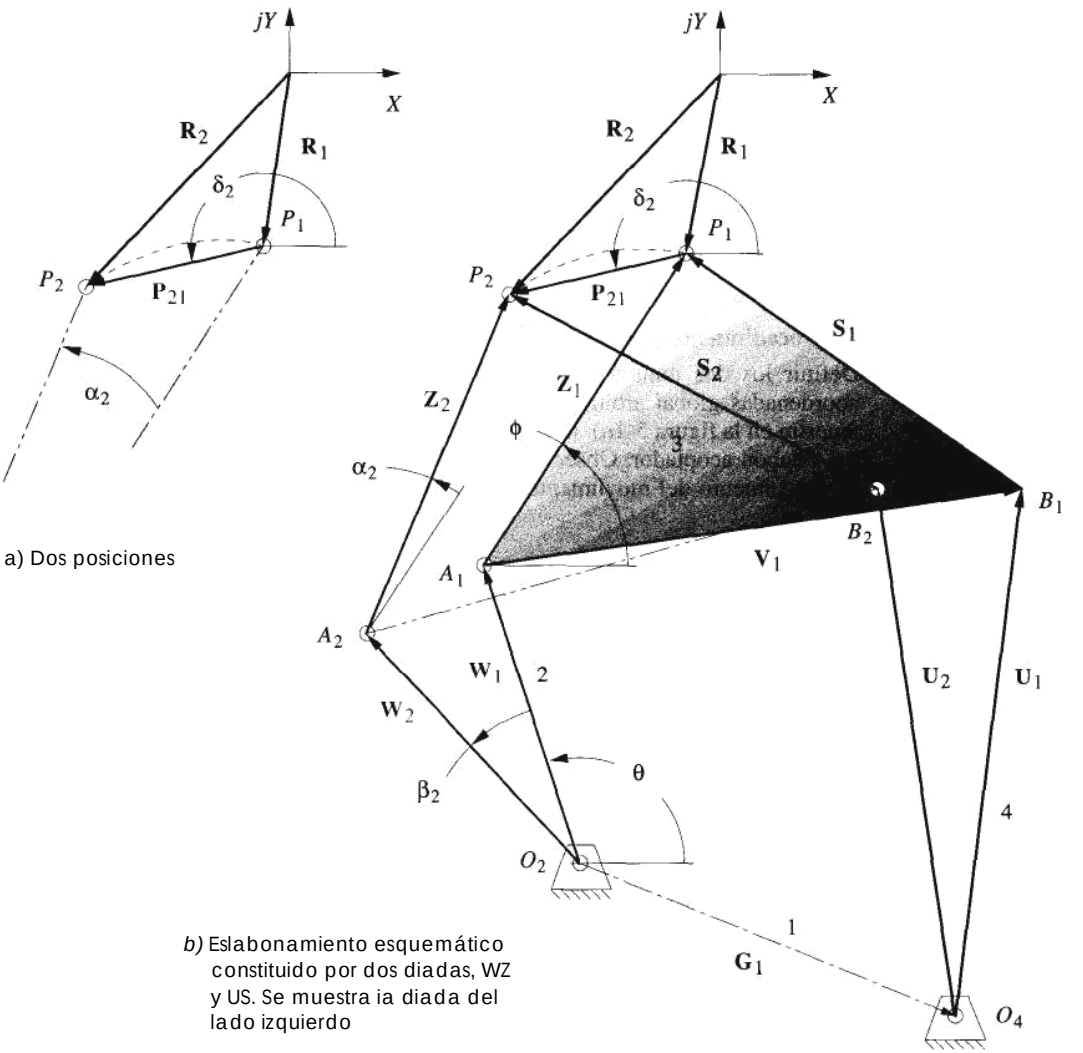


FIGURA 5-1

Síntesis analítica para dos posiciones

ángulo del eslabón 3 (acoplador) en cada uno de los puntos de precisión, está definido por les ángulos de los vectores de posición $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$. El ángulo ϕ corresponde al ángulo θ_3 del eslabón 3 en su primera posición. Este ángulo se desconoce al principio de la síntesis y debe determinarse. El ángulo α_2 representa el cambio angular del eslabón 3, de la posición uno a la posición dos. Este ángulo se define en el planteamiento del problema.

Es importante advertir que el eslabonamiento es esquemático como se muestra en la figura. Al principio se desconocen sus dimensiones y deben determinarse mediante esta

técnica de síntesis. Así, por ejemplo, la longitud del vector de posición $\mathbf{Z}_1$, como se muestra, no es indicativa de la longitud final de ese borde del eslabón 3; ni tampoco las longitudes (W, Z, U, V) o los ángulos $(\theta, \phi, \sigma, \psi)$ de cualquier eslabón mostrado, como predicciones del resultado final.

El planteamiento del problema es:

Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras que moverá una recta en su eslabón acoplador, tal que un punto P de esa línea estará primero en P_1 y luego en P_2 y que hará girar la recta por un ángulo α_2 entre dos puntos de precisión. Determine las longitudes y los ángulos de los cuatro eslabones y las dimensiones del eslabón acoplador A_1P_1 y B_1P_1 como se muestra en la figura 5-1.

El procedimiento para la síntesis analítica de movimiento de dos posiciones es:

Definir los dos puntos de precisión deseados en el plano respecto a un sistema de coordenadas global arbitrario XY mediante los vectores de posición $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$, como se muestra en la figura 5-1*a*). El cambio en el ángulo α_2 del vector $\mathbf{Z}$ es la rotación requerida del eslabón acoplador. Observe que la diferencia de posición del vector $\mathbf{P}_{21}$ determina el desplazamiento del movimiento de salida del punto P y se define como:

$$\mathbf{P}_{21} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 \tag{5.1}$$

La diada $\mathbf{W}_1\mathbf{Z}_1$ define la mitad izquierda del eslabonamiento. La diada $\mathbf{U}_1\mathbf{S}_1$ define la mitad derecha. Observe que $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{S}_1$ están incrustados en el acoplador rígido (eslabón 3) y los dos vectores experimentarán la misma rotación por un ángulo α_2, de la posición 1 a la posición 2. La longitud entre pasadores y el ángulo del eslabón 3 (vector $\mathbf{V}_1$) se define en términos de los vectores $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{S}_1$.

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{Z}_1 - \mathbf{S}_1 \tag{5.2a}$$

El eslabón de fijación 1 se define también en términos de las dos diadas.

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{W}_1 + \mathbf{V}_1 - \mathbf{U}_1 \tag{5.2b}$$

Por lo tanto, si se pueden definir las dos diadas $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{Z}_1$, y $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{S}_1$, se podrá determinar el eslabonamiento que cumple con las especificaciones del problema.

Primero se resolverá para la parte izquierda del eslabonamiento (vectores $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{Z}_1$) y luego se empleará el mismo procedimiento para resolver la parte derecha (vectores $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{S}_1$). Para $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{Z}_1$ se necesita solamente escribir una ecuación de lazo vectorial alrededor del lazo, el cual incluye tanto la posición P_1 como la P_2 para la diada del lado izquierdo. Se seguirá el sentido de las manecillas del reloj alrededor de dicho lazo comenzando con $\mathbf{W}_2$:

$$\mathbf{W}_2 + \mathbf{Z}_2 - \mathbf{P}_{21} - \mathbf{Z}_1 - \mathbf{W}_1 = 0 \tag{5.3}$$

Ahora se introducen los equivalentes de números complejos para los vectores.

$$we^{j(\theta+\beta_2)} + ze^{j(\phi+\alpha_2)} - p_{21}e^{j\delta_2} - ze^{j\phi} - we^{j\theta} = 0 \tag{5.4}$$

Las sumas de ángulos en los exponentes se expresan como productos de términos:

$$we^{j\theta}e^{j\beta_2} + ze^{j\phi}e^{j\alpha_2} - p_{21}e^{j\delta_2} - ze^{j\phi} - we^{j\theta} = 0 \tag{5.5a}$$

Se simplifica y reordena:

$$we^{j\theta}\left(e^{j\beta_2} - 1\right) + ze^{j\phi}\left(e^{j\alpha_2} - 1\right) = p_{21}e^{j\delta_2} \tag{5.5b}$$

Considere que las longitudes de los vectores $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ tienen el mismo valor *w,* ya que representan el mismo eslabón rígido en dos posiciones diferentes. Igual puede decirse de los vectores $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{Z}_2$, cuya magnitud común es *z.*

Las ecuaciones 5.5 son ecuaciones vectoriales, cada una de las cuales contiene dos ecuaciones escalares, por lo tanto, se resuelven para dos incógnitas. Las dos ecuaciones escalares se desarrollan por sustitución de la identidad de Euler (ecuación 4.4a) y al separar los términos real e imaginario como se hizo en la sección 4.5.

parte real:

$$[w\cos\theta](\cos\beta_2 - 1) - [w\,\mathrm{sen}\,\theta]\mathrm{sen}\,\beta_2$$

$$+[z\cos\phi](\cos\alpha_2 - 1) - [z\,\mathrm{sen}\,\phi]\mathrm{sen}\,\alpha_2 = p_{21}\cos\delta_2 \qquad (5.6a)$$

parte imaginaria (con el operador complejo j eliminado mediante división):

$$[w\,\mathrm{sen}\,\theta](\cos\beta_2 - 1) + [w\cos\theta]\mathrm{sen}\,\beta_2$$

$$+[z\,\mathrm{sen}\,\phi](\cos\alpha_2 - 1) + [z\cos\phi]\mathrm{sen}\,\alpha_2 = p_{21}\,\mathrm{sen}\,\delta_2 \qquad (5.6b)$$

En estas dos ecuaciones se presentan ocho variables: w, θ, β_2, z, ϕ, α_2, p_{21} y δ_2. Se pueden resolver solamente dos. Tres de las ocho se definieron en el planteamiento del problema: α_2, p_{21} y δ_2. De las cinco restantes, w, θ, β_2, z, ϕ, se tiene que elegir tres como "opciones libres" (valores supuestos) con el fin de resolver las otras dos.

Una estrategia consiste en suponer valores para los tres ángulos: θ, β_2, ϕ, según la premisa de que se desea especificar la orientación θ, ϕ de los dos vectores de eslabón $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{Z}_1$ para que se adapten a las restricciones de empaque, así como la desviación angular β_2 del eslabón 2 para que se adapten a alguna restricción de impulso. Esta elección presenta además la ventaja de conducir a un conjunto de ecuaciones con incógnitas lineales y que de esta forma resultan más fáciles de resolver. Para esta solución, las ecuaciones se simplifican al igualar algunas constantes con los términos supuestos y especificados.

En las ecuaciones 5.6a, sean:

$$A = \cos\theta(\cos\beta_2 - 1) - \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\beta_2$$

$$B = \cos\phi(\cos\alpha_2 - 1) - \mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 \qquad (5.7a)$$

$$C = p_{21}\cos\delta_2$$

y en las ecuaciones 5.6b sean:

$$D = \mathrm{sen}\,\theta(\cos\beta_2 - 1) + \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\beta_2$$

$$E = \mathrm{sen}\,\phi(\cos\alpha_2 - 1) + \cos\phi\,\mathrm{sen}\,\alpha_2 \qquad (5.7b)$$

$$F = p_{21}\,\mathrm{sen}\,\delta_2$$

entonces:

$$Aw + Bz = C$$

$$Dw + Ez = F \qquad (5.7c)$$

y al resolver simultáneamente,

$$w = \frac{CE - BF}{AE - BD}; \qquad z = \frac{AF - CD}{AE - BD} \tag{5.7d}$$

Una segunda estrategia consiste en suponer una longitud z, un ángulo ϕ para el vector $\mathbf{Z}_1$ y la desviación angular β_2 del eslabón 2, y luego resolverla para evaluar el vector $\mathbf{W}_1$. Generalmente se utiliza este enfoque. Observe que los términos entre corchetes en cada una de las ecuaciones 5.6 son las componentes x y y de los vectores $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{Z}_1$, respectivamente.

$$W_{1x} = w\cos\theta; \qquad Z_{1x} = z\cos\phi$$

$$W_{1y} = w\,\text{sen}\,\theta; \qquad Z_{1y} = z\,\text{sen}\,\phi; \tag{5.8a}$$

Se sustituye en la ecuación 5.6

$$W_{1x}(\cos\beta_2 - 1) - W_{1y}\,\text{sen}\,\beta_2 + Z_{1x}(\cos\alpha_2 - 1) - Z_{1y}\,\text{sen}\,\alpha_2 = p_{21}\cos\delta_2$$

$$W_{1y}(\cos\beta_2 - 1) - W_{1x}\,\text{sen}\,\beta_2 + Z_{1y}(\cos\alpha_2 - 1) - Z_{1x}\,\text{sen}\,\alpha_2 = p_{21}\,\text{sen}\,\delta_2 \tag{5.8b}$$

Z_{1x} y Z_{1y} son valores conocidos de la ecuación 5.8a, en la que se considera a z y ϕ como opciones libres. Para simplificar más la expresión, combine otros términos conocidos como:

$$A = \cos\beta_2 - 1; \qquad B = \text{sen}\,\beta_2; \qquad C = \cos\alpha_2 - 1$$

$$D = \text{sen}\,\alpha_2; \qquad E = p_{21}\cos\delta_2; \qquad F = p_{21}\,\text{sen}\,\delta_2 \tag{5.8c}$$

sustituyendo,

$$AW_{1x} - BW_{1y} + CZ_{1x} - DZ_{1y} = E$$

$$AW_{1y} + BW_{1x} + CZ_{1y} + DZ_{1x} = F \tag{5.8d}$$

y la solución es:

$$W_{1x} = \frac{A\left(-CZ_{1x} + DZ_{1y} + E\right) + B\left(-CZ_{1y} - DZ_{1x} + F\right)}{-2A}$$

$$W_{1y} = \frac{A\left(-CZ_{1y} - DZ_{1x} + F\right) + B\left(CZ_{1x} - DZ_{1y} - E\right)}{-2A} \tag{5.8e}$$

Cualquiera de estas estrategias resulta en la definición de la díada izquierda $\mathbf{W}_1\mathbf{Z}_1$ y sus localizaciones de pivote, lo cual proporciona la generación de movimiento especificada.

Ahora se debe repetir el proceso para la díada de la derecha $\mathbf{U}_1\mathbf{S}_1$. La figura 5-2 destaca las dos posiciones $\mathbf{U}_1\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{U}_2\mathbf{S}_2$ de la díada del lado derecho. El vector $\mathbf{U}_1$ se

encuentra inicialmente en un ángulo σ y se mueve por un ángulo γ_2 de la posición 1 a la 2. El vector $\mathbf{S}_1$ está inicialmente en el ángulo ψ. Observe que la rotación del vector $\mathbf{S}$ de $\mathbf{S}_1$ a $\mathbf{S}_2$ se da en el mismo ángulo α_2 que el vector $\mathbf{Z}$, ya que ambos están en el mismo eslabón. Para esta díada se puede escribir una ecuación de lazo vectorial parecida a la ecuación 5.3.

$$\mathbf{U}_2 + \mathbf{S}_2 - \mathbf{P}_{21} - \mathbf{S}_1 - \mathbf{U}_1 = 0 \tag{5.9a}$$

Reexprese en forma de variable compleja y reúna los términos:

$$ue^{j\sigma}\left(e^{j\gamma_2} - 1\right) + se^{j\psi}\left(e^{j\alpha_2} - 1\right) = p_{21}e^{j\delta_2} \tag{5.9b}$$

Cuando esto se desarrolla y se introducen los ángulos apropiados, las ecuaciones de las componentes *x* y *y* serán:

parte real:

$$u\cos\sigma(\cos\gamma_2 - 1) - u\,\text{sen}\,\sigma\,\text{sen}\,\gamma_2$$

$$+s\cos\psi(\cos\alpha_2 - 1) - s\,\text{sen}\,\psi\,\text{sen}\,\alpha_2 = p_{21}\cos\delta_2 \tag{5.10a}$$

parte imaginaria (con el operador complejo *j* eliminado mediante división):

$$u\,\text{sen}\,\sigma(\cos\gamma_2 - 1) + u\cos\sigma\,\text{sen}\,\gamma_2$$

$$+s\,\text{sen}\,\psi(\cos\alpha_2 - 1) + s\cos\psi\,\text{sen}\,\alpha_2 = p_{21}\,\text{sen}\,\delta_2 \tag{5.10b}$$

Compare las ecuaciones 5.10 con las ecuaciones 5.6.

La misma primera estrategia puede aplicarse a las ecuaciones 5.10, como se hizo para las ecuaciones 5.6, con la finalidad de determinar las magnitudes de los vectores U y $\mathbf{S}$ suponiendo los valores para los ángulos σ, ψ y γ_2. Como antes, las cantidades p_{21}, δ_2 y α_2 se definen a partir del planteamiento del problema.

En las ecuaciones 5.10a sean:

$$A = \cos\sigma(\cos\gamma_2 - 1) - \text{sen}\,\sigma\,\text{sen}\,\gamma_2$$

$$B = \cos\psi(\cos\alpha_2 - 1) - \text{sen}\,\psi\,\text{sen}\,\alpha_2 \tag{5.11a}$$

$$C = p_{21}\cos\delta_2$$

y en las ecuaciones 5.10b sean:

$$D = \text{sen}\,\sigma(\cos\gamma_2 - 1) + \cos\sigma\,\text{sen}\,\gamma_2$$

$$E = \text{sen}\,\psi(\cos\alpha_2 - 1) + \cos\psi\,\text{sen}\,\alpha_2 \tag{5.11b}$$

$$F = p_{21}\,\text{sen}\,\delta_2$$

entonces:

$$Au + Bs = C$$

$$Du + Es = F \tag{5.11c}$$

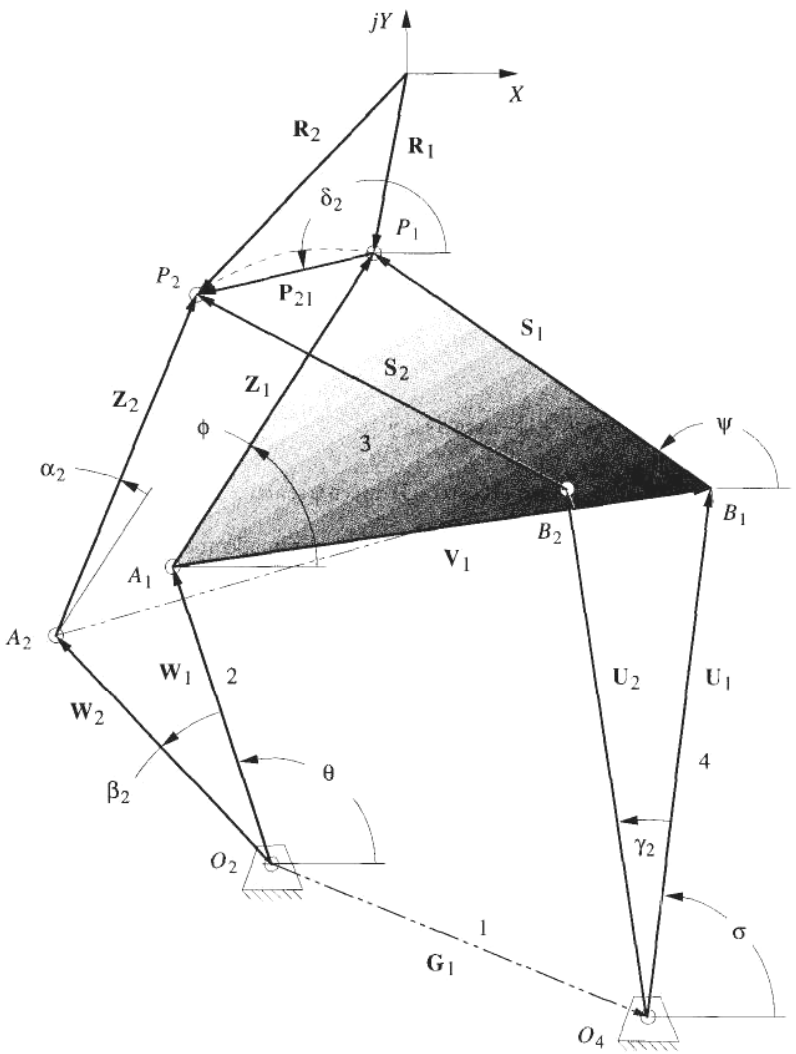


FIGURA 5-2

Díada del lado derecho mostrada en dos posiciones

y al resolver simultáneamente,

$$u = \frac{CE - BF}{AE - BD}; \qquad s = \frac{AF - CD}{AE - BD} \tag{5.11d}$$

Si se emplea la segunda estrategia, suponiendo el ángulo γ_2 y la magnitud y dirección del vector $\mathbf{S}_1$ (que definirá al eslabón 3) el resultado será:

$$U_{1x} = u\cos\sigma; \qquad U_{1x} = s\cos\psi$$

$$S_{1y} = u\,\text{sen}\,\sigma; \qquad S_{1y} = s\,\text{sen}\,\psi \tag{5.12a}$$

Sustituya en la ecuación 5.10:

$$U_{1x}(\cos\gamma_2 - 1) - U_{1y}\operatorname{sen}\gamma_2 + S_{1x}(\cos\alpha_2 - 1) - S_{1y}\operatorname{sen}\alpha_2 = p_{21}\cos\delta_2$$

$$U_{1y}(\cos\gamma_2 - 1) + U_{1x}\operatorname{sen}\gamma_2 + S_{1y}(\cos\alpha_2 - 1) - S_{1x}\operatorname{sen}\alpha_2 = p_{21}\operatorname{sen}\delta_2 \qquad (5.12b)$$

Sea: $A = \cos\gamma_2 - 1;$ $B = \operatorname{sen}\gamma_2;$ $C = \cos\alpha_2 - 1$

$$D = \operatorname{sen}\alpha_2; \quad E = p_{21}\cos\delta_2; \quad F = p_{21}\operatorname{sen}\delta_2 \qquad (5.12c)$$

Sustituya en la ecuación 5.12b,

$$AU_{1x} - BU_{1y} + CS_{1x} - DS_{1y} = E$$

$$AU_{1y} + BU_{1x} + CS_{1y} + DS_{1x} = F \qquad (5.12d)$$

y la solución es:

$$U_{1x} = \frac{A\left(-CS_{1x} + DS_{1y} + E\right) + B\left(-CS_{1y} - DS_{1x} + F\right)}{-2A}$$

$$U_{1y} = \frac{A\left(-CS_{1y} - DS_{1x} + F\right) + B\left(CS_{1x} - DS_{1y} + E\right)}{-2A} \qquad (5.12e)$$

Observe que existe una infinidad de soluciones posibles a este problema porque se puede elegir cualquier conjunto de valores para las tres opciones libres de las variables, en este caso de dos posiciones. Técnicamente hay una infinidad de soluciones para cada opción libre. ¡Tres opciones proporcionan una infinidad elevada al cubo de soluciones! Pero como la infinidad o infinito se define como un número más grande que el mayor número en el que se pueda pensar, la infinidad al cubo no es más impresionante que el simple infinito. Aunque matemáticamente no sea del todo correcto, por simplificación se hará referencia a todos estos casos como los que tienen "una infinidad de soluciones", sin tomar en cuenta la potencia a la que tal infinidad pueda elevarse como resultado de la deducción. Existen muchas soluciones entre las cuales elegir en cualquier proporción. *Desgraciadamente, no todas funcionarán.* Algunas tendrán defectos de circuito, de rama o de orden (CBO, por sus siglas en inglés) como posiciones de agarrotamiento entre los puntos de precisión. Otras tendrán ángulos de transmisión o pivotes de posición deficientes, o eslabones exagerados. El juicio de diseño es aún más importante al seleccionar los valores supuestos para las opciones libres. A pesar de su nombre, más adelante se pagarán las consecuencias por dichas "opciones libres". ¡Elabore un modelo!

5.4 COMPARACIÓN DE SÍNTESIS DE DOS POSICIONES ANALÍTICA Y GRÁFICA

Condidere que en la **solución gráfica** a estos problemas de síntesis de dos posiciones (en el ejemplo 3-3 y la figura 3-6) también se debieron elegir *tres opciones libres* para resolver el problema. El mismo problema de síntesis de dos posiciones de la figura 3-6 se

reproduce en la figura 5-3. El planteamiento aplicado en el ejemplo 3-3 utilizó los puntos *A* y *B* como uniones para los pivotes móviles. La figura 5-3a) muestra la construcción gráfica utilizada para encontrar los pivotes fijos O_2 y O_4. Para la solución analítica se usarán tales puntos *Ay B* como las juntas de las dos díadas WZ y US. Estas díadas se encuentran en el punto *P,* que es el punto de precisión. El vector de posición relativa P_{21} define el desplazamiento del punto de precisión.

Observe que en la solución gráfica se define implícitamente el vector Z de la díada izquierda al localizar los puntos de unión *A* y *B* en el eslabón 3, como se muestra en la figura 5-3a). Esto definió las dos variables, z y ϕ. También se elige implícitamente el valor de w al seleccionar una posición arbitraria para el pivote O_2 sobre la bisectriz perpendicular. Cuando se eligió la tercera opción, las dos incógnitas restantes, los ángulos β_2 y θ, se determinaron gráficamente al mismo tiempo, porque la construcción geométrica fue de hecho un "cálculo" gráfico para la solución de las dos ecuaciones simultáneas 5.8.

Los métodos gráfico y analítico representan dos soluciones alternas al mismo problema. Todos estos problemas se pueden resolver analítica y gráficamente. Un método puede ser una buena comprobación del otro. Se resolverá ahora este problema analíticamente y se correlacionará el resultado con la solución gráfica del capítulo 3.

EJEMPLO 5-1

Síntesis analítica de movimiento de dos posiciones.

Problema: Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para mover el eslabón *APB* mostrado, de la posición $A_1P_1B_1$ a la $A_2P_2B_2$.

Solución (Véase la figura 5-3.)

1 Trace el eslabón *APB* en las dos posiciones deseadas $A_1P_1B_1$ y $A_2P_2B_2$, a escala en el plano como se muestra.

2 Mida o calcule los valores de la magnitud y el ángulo del vector $\mathbf{P}_{21}$ es decir, p_{21} y δ_2. En este ejemplo son:

$$p_{21} = 2.416; \qquad \delta_2 = 165.2°$$

3 Mida o calcule el valor del cambio en el ángulo α_2, del vector Z de la posición 1 a la posición 2. En este ejemplo es:

$$\alpha_2 = 43.3°$$

4 Los tres valores de los pasos 2 y 3 son los únicos definidos en el planteamiento del problema. Se tienen que suponer tres "opciones libres" adicionales para resolverlo. El método dos (véase las ecuaciones 5.8) elige la longitud z y el ángulo ϕ del vector $\mathbf{Z}$ y β_2, el cambio en el ángulo del vector W. Con el fin de obtener la misma solución que el método gráfico producido en la figura 5-3a) (de las infinitas soluciones posibles) se eligirá aquellos valores consistentes con la solución gráfica:

$$z = 1.298; \qquad \phi = 26.5°; \qquad \beta_2 = 38.4°$$

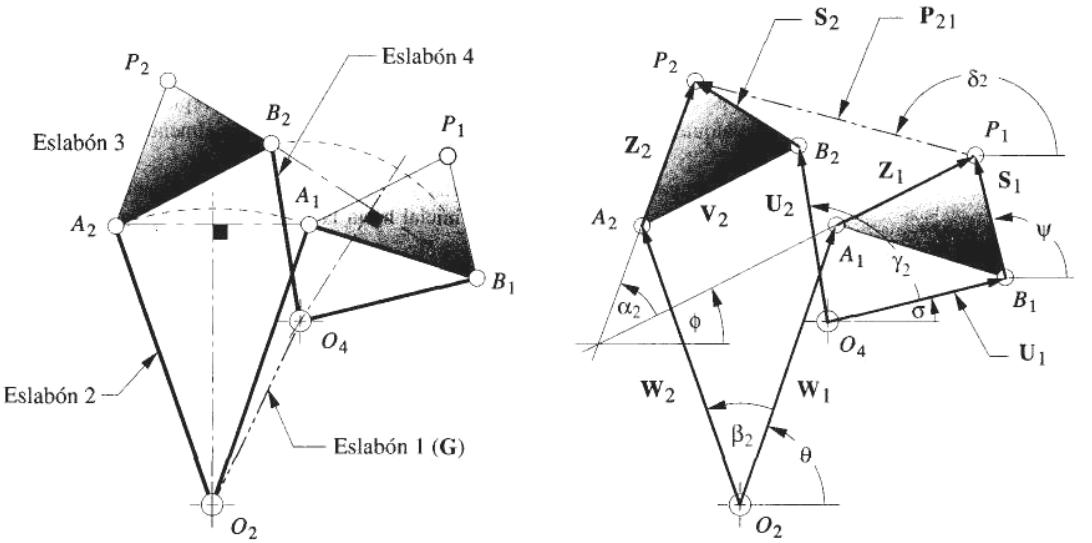


FIGURA 5-3

Síntesis de movimiento de dos posiciones con salida de acoplador

5 Sustituya estos seis valores en las ecuaciones 5.8 y obtenga:

$$w = 2.467 \qquad \theta = 71.6°$$

6 Compare esto con la solución gráfica:

$$w = 2.48 \qquad \theta = 71°$$

lo cual es una correspondencia razonable dada la exactitud gráfica. Este vector $\mathbf{W}_1$ es el eslabón 2 del eslabonamiento de cuatro barras.

7 Repita el procedimiento para el eslabón lateral 4. Las opciones libres serán ahora:

$$s = 1.035; \qquad \psi = 104.1°; \qquad \gamma_2 = 85.6°$$

8 Sustituya estos tres valores junto con los tres valores originales de los pasos 2 y 3 en las ecuaciones 5.8 y obtenga:

$$u = 1.486 \qquad \sigma = 15.4°$$

9 Compare esto con la solución gráfica:

$$u = 1.53 \qquad \sigma = 14°$$

Esto es una correspondencia razonable dada la exactitud gráfica. Este vector $\mathbf{U}_1$ es el eslabón 4 del eslabonamiento de cuatro barras.

10 La línea A_1B_1, es el eslabón 3 y se puede determinar por la ecuación 5.2a. La línea O_2O_4 es el eslabón 1 y se puede determinar con la ecuación 5.2b.

11 Si no está satisfecho, verifique la condición de Grashof y repita los pasos 4 al 7. Advierta que cualquier condición de Grashof es, en este caso, potencialmente aceptable.

12 Construya un modelo en cartulina y compruebe su funcionamiento para estar seguro de que puede pasar desde la posición inicial hasta la final sin encontrar posiciones límite (agarrotamiento).

13 Compruebe los ángulos de transmisión.

Ingrese el archivo E05-01.4br al programa FOURBAR para ver el ejemplo 5-1.

5

5.5 SOLUCIÓN POR ECUACIONES SIMULTÁNEAS

Estos métodos de síntesis analítica conducen a sistemas de ecuaciones lineales simultáneas. El problema de síntesis de dos posiciones resulta en dos ecuaciones simultáneas que se resuelven por sustitución directa. El problema de síntesis de tres posiciones conducirá a un sistema de cuatro ecuaciones lineales simultáneas y requerirá de un método de resolución más complicado. Un planteamiento conveniente para la resolución de conjuntos de ecuaciones lineales simultáneas consiste en ponerlos en forma de matriz estándar y utilizar un resolvedor de matrices numéricas para obtener las respuestas. Los resolvedores de matrices están integrados en la mayoría de las calculadoras de bolsillo de ingeniería y científicas. Algunos paquetes de hoja de cálculo y resolvedores de ecuaciones también resuelven matrices.

Como un ejemplo de este enfoque general considere el siguiente conjunto de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} -2_{x1} - x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 3_{x1} + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned} \tag{5.13a}$$

Un sistema tan pequeño como éste se resuelve de modo extenso por el método de eliminación, pero se pondrá en forma matricial para mostrar el enfoque general, el cual funcionará sin que importe el número de ecuaciones. Las ecuaciones 5.13a se expresan como el producto de un conjunto de dos matrices igualado a una tercera matriz:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{5.13b}$$

Se hará referencia a estas matrices como A, B y C,

$$[\mathbf{A}] \times [\mathbf{B}] = [\mathbf{C}] \tag{5.13c}$$

donde A es la matriz de coeficientes de las incógnitas, B es un vector columna de las incógnitas y C es un vector columna de los términos constantes. Cuando la matriz A se multiplica por la B el resultado será igual a los lados izquierdos de la ecuación 5.13a. Véase en cualquier texto de álgebra lineal, como la referencia 7, una descripción del procedimiento para multiplicación de matrices.

Si la ecuación 5.13c fuese una ecuación escalar,

$$ab = c \tag{5.14a}$$

en vez de una ecuación vectorial (matricial), sería muy fácil resolverla para determinar la incógnita *b* cuando se conoce *a* y *c.* Simplemente se dividiría c entre *a* para encontrar *b.*

$$b = \frac{c}{a} \tag{5.14b}$$

Por desgracia la división no está definida para las matrices, por lo que se debe usar otro método. Advierta que también puede expresarse la división en la ecuación 5.14b como:

$$b = a^{-1}c \tag{5.14c}$$

Si las ecuaciones por resolver son linealmente independientes se puede encontrar la inversa de la matriz A y multiplicarla por la matriz C para encontrar B. La inversa de una matriz se define como una matriz, la cual, cuando se multiplica por la matriz original, produce la matriz neutra o de identidad. La **matriz de identidad** es una matriz cuadrada con números uno en la diagonal principal y cero en todo lo demás. La inversa de una matriz se indica al agregar un superíndice -1 al símbolo de la matriz original:

$$[\mathbf{A}]^{-1} \times [\mathbf{A}] = [\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

No todas las matrices tendrán inversa. Para que exista una inversa el determinante de la matriz debe ser distinto de cero. La clase de problemas que aquí se tratan tendrán matrices con inversa cuando todos los datos se calculen correctamente para entrar en la matriz y representen un sistema físico real. El cálculo de los términos de la inversa de una matriz es un proceso numérico complejo que requiere una computadora o una calculadora de bolsillo preprogramada para invertir una matriz de tamaño significativo. Para montar una inversa se emplea generalmente el método numérico de eliminación de Gauss-Jordán. Para el ejemplo simple de la ecuación 5.13 se encuentra que la inversa de la matriz A es:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 1.0 \\ -2.0 & 0.5 & -1.5 \\ 1.0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

Si se puede obtener la inversa de la matriz A, entonces se resolverá la ecuación 5.13 para determinar las incógnitas B al multiplicar ambos lados de la ecuación por la inversa de A. Considere que, a diferencia de la multiplicación escalar, la multiplicación matricial no es conmutativa; es decir, A x B no es igual a B x A. Se premultiplicará cada lado de la ecuación por la inversa:

$$[\mathbf{A}]^{-1} \times [\mathbf{A}] \times [\mathbf{B}] = [\mathbf{A}]^{-1} \times [\mathbf{C}]$$

pero:

$$[\mathbf{A}]^{-1} \times [\mathbf{A}] = [\mathbf{I}] \tag{5.17}$$

así:

$$[\mathbf{B}] = [\mathbf{A}]^{-1} \times [\mathbf{C}]$$

El producto de A y su inversa en el lado izquierdo de la ecuación es igual a la matriz de identidad I. Multiplicar por la matriz de identidad es equivalente, en términos escalares, a multiplicar por 1, por lo que no se tiene efectos en el resultado. Así las incógnitas se pueden despejar al premultiplicar la inversa de la matriz A de coeficientes por la matriz C de los términos constantes.

Este método de solución funciona sin importar el número de ecuaciones presentes mientras se obtenga la inversa de A, suficiente memoria en la computadora y tiempo disponible para hacer el cálculo. Observe que en realidad no es necesario hallar la inversa de la matriz A para resolver el sistema de ecuaciones. El algoritmo de Gauss-Jordan, el cual obtiene la inversa, también se utiliza directamente para despejar las incógnitas B al reunir las matrices **A** y **C** en una **matriz aumentada** de n filas y $n + 1$ columnas. La columna agregada es el vector C. Este enfoque requiere menos cálculo, por lo que es más rápido y más exacto. La matriz aumentada para ese ejemplo es:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & \vdots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 6 \\ 3 & 1 & -1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \tag{5.18a}$$

El algoritmo de Gauss-Jordan manipula esta matriz aumentada hasta que esté en la forma que se muestra en seguida, en la cual la porción cuadrada izquierda se ha reducido a la matriz de identidad, y la columna más a la derecha contiene los valores del vector columna de las incógnitas. En este caso los resultados son $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 3$, los cuales representan la solución correcta a las ecuaciones originales 5.13.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \tag{5.18b}$$

El programa MATRIX, que se proporciona con este libro, resuelve estos problemas por el método de eliminación de Gauss-Jordan y opera sobre la matriz aumentada sin encontrar realmente la inversa de A en forma explícita. Véase en el apéndice A las intrucciones para correr el programa MATRIX. Para un repaso del álgebra matricial véase la referencia 7.

5.6 GENERACIÓN DE MOVIMIENTO DE TRES POSICIONES POR SÍNTESIS ANALÍTICA

El mismo planteamiento de definir dos díadas, una en cada extremo del eslabonamiento de cuatro barras, que se usó en la síntesis de movimiento de dos posiciones puede ser extendido a tres, cuatro y cinco posiciones en el plano. Ahora se analiza el problema de la síntesis de movimiento de tres posiciones. En la figura 5-4 se muestra un eslabonamiento de cuatro barras en una posición general con un punto de acoplador localizado en su primer punto de precisión P_1. También se muestran posiciones de segundo y tercer punto de precisión (puntos P_2 y P_3). Éstas se lograrán por la rotación del balancín de

entrada, eslabón 2, a través de ángulos aún no especificados β_2 y β_3. Observe también que los ángulos del eslabón 3 del acoplador en cada punto de precisión se definen por los ángulos de los vectores de posición $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$. El eslabonamiento mostrado en la figura es esquemático. Al principio se desconocen sus dimensiones y deben encontrarse por esta técnica de síntesis. Así, por ejemplo, la longitud del vector de posición Z_l como se muestra no indica la longitud final de ese borde del eslabón 3; tampoco las longitudes o ángulos de cualquiera de los eslabones mostrados predicen el resultado final.

El planteamiento del problema es:

Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras que moverá una línea en su eslabón acoplador, de tal manera que un punto *P* en esa línea estará primero en P_1, luego en P_2 y después en P_3, y también girará la línea por un ángulo α_2 entre las primeras dos posiciones de precisión y por un ángulo α_3 entre la primera y tercera posición de precisión. Encuentre las longitudes y ángulos de los cuatro eslabones y las dimensiones del eslabón acoplador A_1P_1 y B_1P_1 como se muestra en la figura 5-4.

El procedimiento de la síntesis analítica de movimiento de tres posiciones es el siguiente:

Por conveniencia se localizará el sistema de coordenadas global *XY* en el primer punto de precisión P_1. Se definen los otros dos puntos de precisión deseados en el plano con respecto a este sistema global como se muestra en la figura 5-4. Los vectores de diferencia de posición $\mathbf{P}_{21}$, trazados de P_1 a P_2 y $\mathbf{P}_{31}$, trazados de P_1 a P_3, tienen ángulos δ_2 y δ_3, respectivamente. Los vectores de diferencia de posición $\mathbf{P}_{21}$ y $\mathbf{P}_{31}$ definen los desplazamientos del movimiento de salida del punto $\mathbf{P}$ desde el punto 1 al 2 y desde el 1 al 3, respectivamente.

La diada $\mathbf{W}_1\mathbf{Z}_1$ define la mitad izquierda del eslabonamiento. La diada $\mathbf{U}_1\mathbf{S}_1$ define la mitad derecha del eslabonamiento. Los vectores $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{S}_1$ están incrustados en el acoplador rígido (eslabón 3) y ambos experimentarán las mismas rotaciones por un ángulo α_2 de la posición 1 a la posición 2, y por un ángulo α_3 de la posición 1 a la posición 3. La longitud de pasador a pasador y el ángulo del eslabón 3 (vector $\mathbf{V}_1$) se define en términos de los vectores $\mathbf{Z}_1$ y $\mathbf{S}_1$ como en la ecuación 5.2a. El eslabón de fijación se define como antes por la ecuación 5.2b.

Como se hizo en el caso de dos posiciones, primero se resolverá la parte izquierda del eslabonamiento (vectores $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{Z}_1$) y después se usará el mismo procedimiento para resolver la parte derecha (vectores $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{S}_1$). Al resolver $\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{Z}_1$ se necesita escribir **dos ecuaciones de lazo vectorial,** una alrededor del lazo que incluye las posiciones P_1 y P_2, otra alrededor del lazo que incluye las posiciones P_1 y P_3 (véase la figura 5-4). Se seguirá el sentido de las manecillas del reloj en el primer lazo para el movimiento de la posición 1 a la 2 comenzando con $\mathbf{W}_2$, y luego se escribirá la segunda ecuación de lazo para el movimiento de la posición 1 a la 3 comenzando con $\mathbf{W}_3$.

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_2 + \mathbf{Z}_2 - \mathbf{P}_{21} - \mathbf{Z}_1 - \mathbf{W}_1 = 0 \\ \mathbf{W}_3 + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{P}_{31} - \mathbf{Z}_1 - \mathbf{W}_1 = 0 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Se sustituyen los equivalentes de número complejo para los vectores.

$$\begin{aligned} we^{j(\theta+\beta_2)} + ze^{j(\phi+\alpha_2)} - p_{21}e^{j\delta_2} - ze^{j\phi} - we^{j\theta} = 0 \\ we^{j(\theta+\beta_3)} + ze^{j(\phi+\alpha_3)} - p_{31}e^{j\delta_2} - ze^{j\phi} - we^{j\theta} = 0 \end{aligned} \tag{5.20}$$

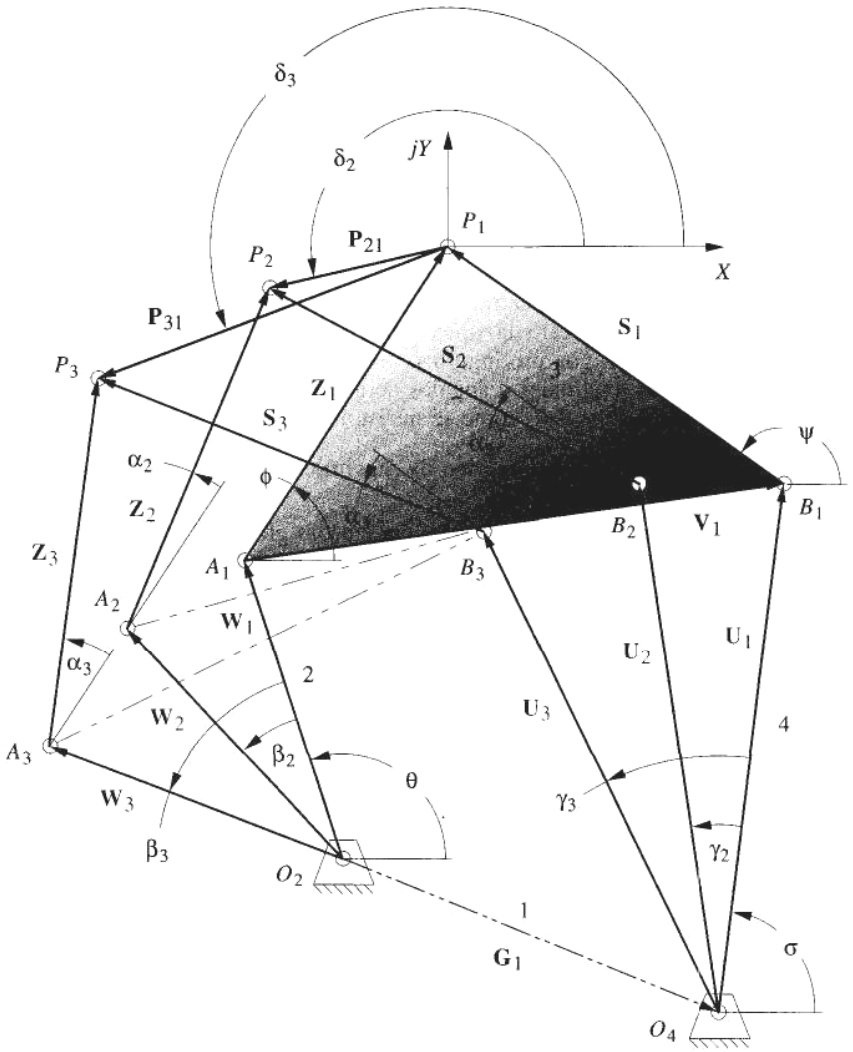


FIGURA 5-4
Síntesis analítica de tres posiciones

Se reescriben las sumas de los ángulos en los exponentes como producto de términos.

$$we^{j\theta}e^{j\beta_2} + ze^{j\phi}e^{j\alpha_2} - p_{21}e^{j\delta_2} - ze^{j\phi} - we^{j\theta} = 0$$
$$we^{j\theta}e^{j\beta_3} + ze^{j\phi}e^{j\alpha_3} - p_{31}e^{j\delta_3} - ze^{j\phi} - we^{j\theta} = 0 \qquad (5.21a)$$

Se simplifica y reordena:

$$we^{j\theta}\left(e^{j\beta_2}-1\right)+ze^{j\phi}\left(e^{j\alpha_2}-1\right)=p_{21}e^{j\delta_2}$$
$$we^{j\theta}\left(e^{j\beta_3}-1\right)+ze^{j\phi}\left(e^{j\alpha_3}-1\right)=p_{31}e^{j\delta_3} \tag{5.21b}$$

La magnitud w de los vectores $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$ y $\mathbf{W}_3$ es la misma en las tres posiciones debido a que representa la misma línea en un eslabón rígido. Lo mismo puede decirse de los vectores $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$ y $\mathbf{Z}_3$, cuya magnitud común es *z*.

Las ecuaciones 5.21 constituyen un sistema de dos ecuaciones vectoriales, cada una de las cuales contiene dos ecuaciones escalares. Ese sistema de cuatro ecuaciones puede resolverse para cuatro incógnitas. Las ecuaciones escalares pueden desarrollarse sustituyendo la identidad de Euler (ecuación 4.4a) y separando los términos reales e imaginarios, como se hizo antes, en el siguiente ejemplo de dos posiciones.

parte real:

$$w\cos\theta(\cos\beta_2-1)-w\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\beta_2$$
$$+z\cos\phi(\cos\alpha_2-1)-z\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\alpha_2=p_{21}\cos\delta_2 \tag{5.22a}$$
$$w\cos\theta(\cos\beta_3-1)-w\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\beta_3$$
$$+z\cos\phi(\cos\alpha_3-1)-z\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\alpha_3=p_{31}\cos\delta_3 \tag{5.22b}$$

parte imaginaria (con el operador complejo j eliminado por división):

$$w\,\mathrm{sen}\,\theta(\cos\beta_2-1)+w\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\beta_2$$
$$+z\,\mathrm{sen}\,\phi(\cos\alpha_2-1)+z\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\alpha_2=p_{21}\,\mathrm{sen}\,\delta_2 \tag{5.22c}$$
$$w\,\mathrm{sen}\,\theta(\cos\beta_3-1)+w\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\beta_3$$
$$+z\,\mathrm{sen}\,\phi(\cos\alpha_3-1)+z\cos\phi\,\mathrm{sen}\,\alpha_3=p_{31}\,\mathrm{sen}\,\delta_3 \tag{5.22d}$$

Hay **doce variables** en estas cuatro ecuaciones 5.22: w, θ, β_2, β_3, z, ϕ, α_2, α_3, p_{21}, p_{31}, δ_2 y δ_3. **Se pueden resolver solamente para cuatro.** Seis de ellas están definidas en el planteamiento del problema: α_2, α_3, p_{21}, p_{31}, δ_2 y δ_3. De las seis restantes w, θ, β_2, β_3, z y ϕ **dos se deben elegir como opciones libres** (valores supuestos) para resolver las otras cuatro. Una estrategia consiste en suponer valores para los dos ángulos β_2 y β_3, con la premisa de que es deseable especificar las desviaciones angulares del eslabón 2 de acuerdo con una cierta restricción. (Esta opción tiene también la ventaja de conducir a un sistema de ecuaciones lineales de solución simultánea.)

Esto deja por hallar las magnitudes y los ángulos de los vectores $\mathbf{W}$ y $\mathbf{Z}$ (w, θ, z, ϕ). Para simplificar la solución se sustituyen las siguientes relaciones con lo que se obtienen los componentes x y *y* de los dos vectores desconocidos W y Z, en lugar de sus coordenadas polares.

$$W_{1x} = w\cos\theta; \qquad Z_{1x} = z\cos\phi$$
$$W_{1y} = w\,\text{sen}\,\theta; \qquad Z_{1y} = z\,\text{sen}\,\phi \tag{5.23}$$

Se sustituyen las ecuaciones 5.23 en las 5.22 y se obtiene:

$$W_{1x}(\cos\beta_2 - 1) - W_{1y}\,\text{sen}\,\beta_2 + Z_{1x}(\cos\alpha_2 - 1) - Z_{1y}\,\text{sen}\,\alpha_2 = p_{21}\cos\delta_2 \tag{5.24a}$$

$$W_{1x}(\cos\beta_3 - 1) - W_{1y}\,\text{sen}\,\beta_3 + Z_{1x}(\cos\alpha_3 - 1) - Z_{1y}\,\text{sen}\,\alpha_3 = p_{31}\cos\delta_3 \tag{5.24b}$$

$$W_{1y}(\cos\beta_2 - 1) + W_{1y}\,\text{sen}\,\beta_2 + Z_{1y}(\cos\alpha_2 - 1) - Z_{1x}\,\text{sen}\,\alpha_2 = p_{21}\,\text{sen}\,\delta_2 \tag{5.24c}$$

$$W_{1y}(\cos\beta_3 - 1) + W_{1x}\,\text{sen}\,\beta_3 + Z_{1y}(\cos\alpha_3 - 1) + Z_{1x}\,\text{sen}\,\alpha_3 = p_{31}\,\text{sen}\,\delta_3 \tag{5.24d}$$

Éstas son cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas W_{1x}, W_{1y}, Z_{1x} y Z_{1y}. Al establecer los coeficientes que contienen los términos supuestos y especificados iguales a algunas constantes se puede simplificar la notación y obtener las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned} &A = \cos\beta_2 - 1; && B = \text{sen}\,\beta_2; && C = \cos\alpha_2 - 1 \\ &D = \text{sen}\,\alpha_2; && E = p_{21}\cos\delta_2; && F = \cos\beta_3 - 1 \\ &G = \text{sen}\,\beta_3; && H = \cos\alpha_3 - 1; && K = \text{sen}\,\alpha_3 \\ &L = p_{31}\cos\delta_3; && M = p_{21}\,\text{sen}\,\delta_2; && N = p_{31}\,\text{sen}\,\delta_3 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Se sustituyen las ecuaciones 5.25 en 5.24 para simplificar:

$$AW_{1x} - BW_{1y} + CZ_{1x} - DZ_{1y} = E \tag{5.26a}$$

$$FW_{1x} - GW_{1y} + HZ_{1x} - KZ_{1y} = L \tag{5.26b}$$

$$BW_{1x} + AW_{1y} + DZ_{1x} + CZ_{1y} = M \tag{5.26c}$$

$$GW_{1x} + FW_{1y} + KZ_{1x} + HZ_{1y} = N \tag{5.26d}$$

Este sistema puede ponerse en forma de matriz estándar:

$$\begin{bmatrix} A & -B & C & -D \\ F & -G & H & -K \\ B & A & D & C \\ G & F & K & H \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} W_{1x} \\ W_{1y} \\ Z_{1x} \\ Z_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ L \\ M \\ N \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

Ésta es la forma general de la ecuación 5.13c. El vector de incógnitas B se puede resolver al premultiplicar la inversa de la matriz de coeficientes A por el vector constante C, o al formar la matriz aumentada como en la ecuación 5.18. Para cualquier problema numérico la inversa de una matriz de 4 x 4 puede determinarse con diversas calculadoras de bolsillo. El programa de computadora MATRIX, que se incluye en el texto, resolverá también la ecuación de matriz aumentada.

Las ecuaciones 5.25 y 5.26 resuelven el problema de la síntesis de tres posiciones para el lado izquierdo del eslabonamiento utilizando un par de valores supuestos para β_2 y β_3. Se debe repetir el proceso anterior en el lado derecho del eslabonamiento para encontrar los vectores **U** y **S**. La figura 5-4 también muestra las tres posiciones de la díada **US** y los ángulos σ, γ_2, γ_3, ψ, α_2 y α_3, los cuales definen las rotaciones vectoriales para las tres posiciones. La deducción de la solución para la díada del lado derecho, US, es idéntica a la recién efectuada para la díada izquierda WZ. Las indicaciones de ángulos y vectores son la única diferencia. Las ecuaciones de lazo vectorial son:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_2 + \mathbf{S}_2 - \mathbf{P}_{21} - \mathbf{S}_1 - \mathbf{U}_1 = 0 \\ \mathbf{U}_3 + \mathbf{S}_3 - \mathbf{P}_{31} - \mathbf{S}_1 - \mathbf{U}_1 = 0 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Se sustituye, simplifica y reordena:

$$\begin{aligned} ue^{j\sigma}\left(e^{j\gamma_2} - 1\right) + se^{j\psi}\left(e^{j\alpha_2} - 1\right) = p_{21}e^{j\delta_2} \\ ue^{j\sigma}\left(e^{j\gamma_3} - 1\right) + se^{j\psi}\left(e^{j\alpha_3} - 1\right) = p_{31}e^{j\delta_3} \end{aligned} \tag{5.29}$$

La solución requiere que se realicen dos opciones libres. Se supondrán valores para los ángulos γ_2 y γ_3. Observe que α_2 y α_3 son los mismos que para la díada WZ. En efecto, se resolverá para los ángulos σ y ψ al encontrar las componentes *x* y *y* de los vectores U y S. La solución es:

$$\begin{aligned} &A = \cos\gamma_2 - 1; \quad &&B = \operatorname{sen}\gamma_2; \quad &&C = \cos\alpha_2 - 1 \\ &D = \operatorname{sen}\alpha_2; \quad &&E = p_{21}\cos\delta_2; \quad &&F = \cos\gamma_3 - 1 \\ &G = \operatorname{sen}\gamma_3; \quad &&H = \cos\alpha_3 - 1; \quad &&K = \operatorname{sen}\alpha_3 \\ &L = p_{31}\cos\delta_3; \quad &&M = p_{21}\operatorname{sen}\delta_2; \quad &&N = p_{31}\operatorname{sen}\delta_3 \end{aligned} \tag{5.30}$$

$$AU_{1x} - BU_{1y} + CS_{1x} - DS_{1y} = E \tag{5.31a}$$

$$FU_{1x} - GU_{1y} + HS_{1x} - KS_{1y} = L \tag{5.31b}$$

$$BU_{1x} + AU_{1y} + DS_{1x} + CS_{1y} = M \tag{5.31c}$$

$$GU_{1x} + FU_{1y} + KS_{1x} + HS_{1y} = N \tag{5.31d}$$

Las ecuaciones 5.31 se resuelven utilizando el método de las ecuaciones 5.27 y 5.18 al cambiar *W a U y Z a S,* y al emplear las definiciones de las constantes dadas en la ecuación 5.30 en la ecuación 5.27.

También es evidente que hay infinidad de soluciones para este problema de síntesis de tres posiciones. Una selección inapropiada de las dos opciones libres podría llevar a una

solución con problemas de circuitos, de rama o de orden al moverse en todas las posiciones especificadas. Por lo tanto, se debe comprobar la función de la solución sintetizada por éste o cualquier otro método. La verificación más rápida es un modelo simple.

5.7 COMPARACIÓN DE SÍNTESIS ANALÍTICA Y GRÁFICA PARA TRES POSICIONES

La figura 5-5 muestra el mismo problema de síntesis de tres posiciones como se resolvió gráficamente en el ejemplo 3-6 de la sección 3.4. Compare esta figura con la figura 3-9. La identificación se cambió para que sea consistente con la notación de este capítulo. Los puntos P_1, P_2 y P_3 corresponden a los tres puntos indicados como *D* en la figura anterior. Los puntos A_1, A_2 y A_3 corresponden a los puntos *E;* los puntos B_1, B_2 y B_3 corresponden a los puntos *F*. La línea anterior *AP* es ahora el vector Z. El punto *P* es el punto acoplador que pasará por los puntos de precisión específicos P_1, P_2 y P_3. Los puntos *A* y *B* son los puntos de unión para los balancines (eslabones 2 y 4, respectivamente) en el acoplador (eslabón 3). Se desea resolver para las coordenadas de los vectores W, Z, U y S, los cuales no solamente definen las longitudes de esos eslabones, sino también las localizaciones de los pivotes fijos O_2 y O_4 en el plano, y las longitudes de los eslabones 3 y 1. El eslabón 1 se define como el vector G en la figura 5-4 y se puede determinar a partir de la ecuación 5.2b. El eslabón 3 es el vector V que se obtuvo de la ecuación 5.2a.

Deben realizarse cuatro opciones libres para restringir el problema a una solución particular entre las infinitas soluciones posibles. En este caso los valores de los ángulos de eslabón β_2, β_3, γ_2 y γ_3 se eligieron para ser los mismos valores que los encontrados en la solución gráfica del ejemplo 3-6, con el fin de obtener la misma solución como una comprobación y comparación. Recuerde que de hecho se usan cuatro opciones libres al realizar la solución del mismo problema de síntesis de tres posiciones en forma gráfica. Éstas fueron las coordenadas *x,y* de las ubicaciones de los pivotes móviles *E* y *F* en la figura 3-9, las cuales corresponden en concepto a las cuatro opciones libres de ángulos de eslabón.

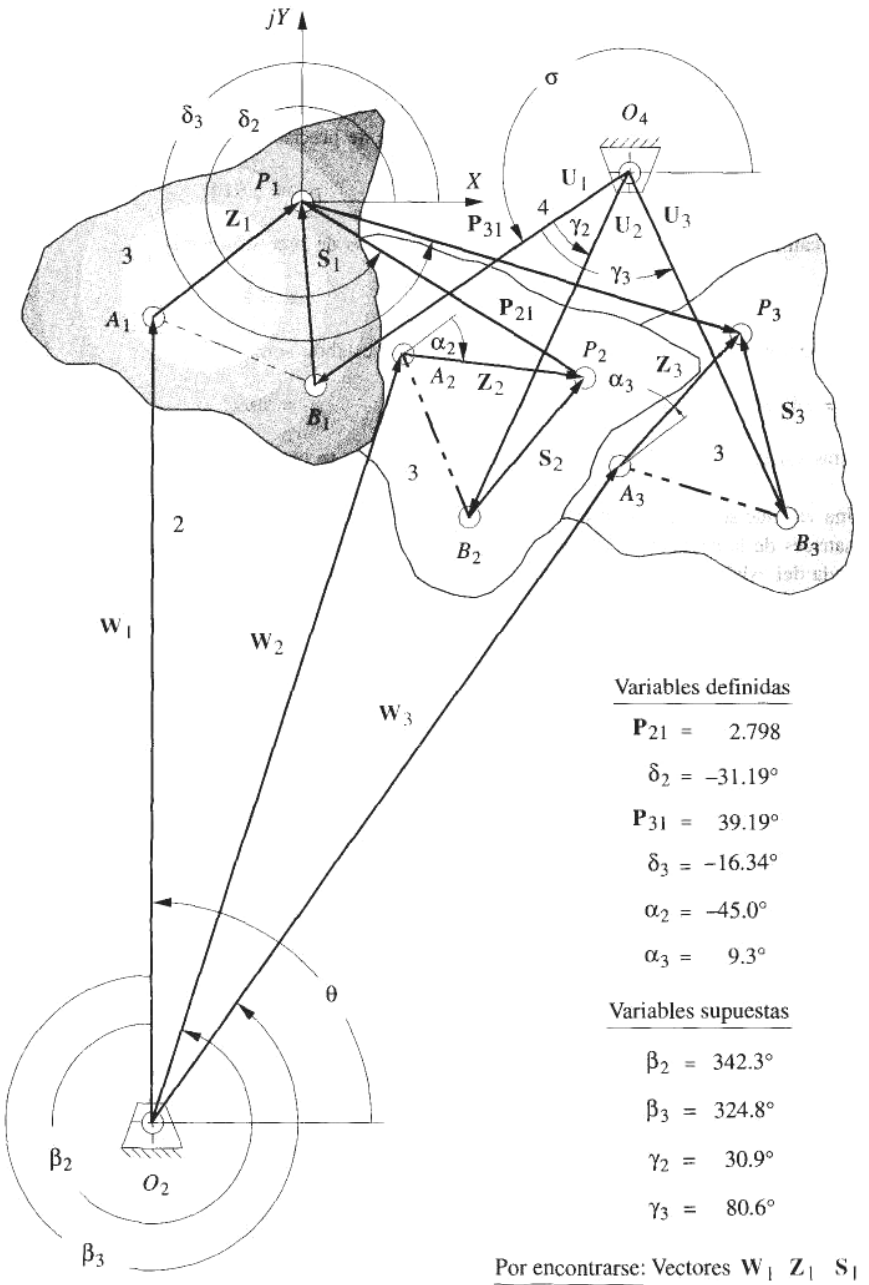
El ejemplo 3-5 también muestra una solución gráfica para este mismo problema como resultado de la libre elección de las coordenadas *x,y* de los puntos *C* y *D* en el acoplador para los pivotes móviles (véase la figura 3-8 y el ejemplo 3-5). Se determinaron ciertos problemas con posiciones de agarrotamiento en esa solución y se rehicieron utilizando los puntos *E* y *F* como pivotes móviles en el ejemplo 3-6 y la figura 3-9. En efecto, la solución de síntesis gráfica de tres posiciones presentada en el capítulo 3 es directamente análoga a la solución analítica presentada aquí. Para este enfoque analítico se opta por seleccionar los ángulos de eslabón β_2, β_3, γ_2 y γ_3, en lugar de las posiciones *E* y *F* de pivote móvil para forzar que las ecuaciones resultantes sean lineales en las incógnitas. La solución gráfica del ejemplo anterior es en realidad una solución de ecuaciones no lineales.

EJEMPLO 5-2

Síntesis analítica de movimiento de tres posiciones.

Problema: Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para mover el eslabón *APB* de la posición $A_1P_1B_1$ a la $A_2P_2B_2$ y luego a la posición $A_3P_3B_3$.

Solución: (Véase la figura 5-5.)



Variables definidas

$\mathbf{P}_{21} = 2.798$

$\delta_2 = -31.19°$

$\mathbf{P}_{31} = 39.19°$

$\delta_3 = -16.34°$

$\alpha_2 = -45.0°$

$\alpha_3 = 9.3°$

Variables supuestas

$\beta_2 = 342.3°$

$\beta_3 = 324.8°$

$\gamma_2 = 30.9°$

$\gamma_3 = 80.6°$

Por encontrarse: Vectores $\mathbf{W}_1$ $\mathbf{Z}_1$ $\mathbf{S}_1$ $\mathbf{U}_1$

FIGURA 5-5

Datos necesarios para la síntesis analítica de tres posiciones

1 Dibuje a escala en el plano el eslabón *APB* en sus tres posiciones deseadas: $A_1P_1B_1$, $A_2P_2B_2$ y $A_3P_3B_3$ como se muestra en la figura.

2 Las tres posiciones se definen entonces con respecto a un origen global localizado en el primer punto de precisión P_1. Los datos dados son las magnitudes y los ángulos de los vectores de diferencia de posición entre los puntos de precisión:

$p_{21} = 2.798$ $\delta_{21} = -31.19°$ $p_{31} = 3.919$ $\delta_{31} = -16.34°$

3 Los cambios de ángulo del acoplador entre los puntos de precisión son:

$\alpha_2 = -45°$ $\alpha_3 = 9.3°$

4 Las opciones libres supuestas para los ángulos del eslabón son:

$\beta_2 = 342.3°$ $\beta_3 = 324.8°$ $\gamma_2 = 30.9°$ $\gamma_3 = 80.6°$

Estas variables definidas y las opciones libres también se presentan en una lista en la figura.

5 Una vez que se realizaron las opciones libres de los ángulos de eslabón, los términos para las matrices de la ecuación 5.27 se definen cuando se resuelve la ecuación 5.25 para la primera díada del eslabonamiento y la ecuación 5.30 para la segunda díada del eslabonamiento. Para este ejemplo se evalúa a:

Primera díada (**WZ**):

$A = -0.0473$ $B = -0.3040$ $C = -0.2929$ $D = -0.7071$

$E = -2.3936$ $F = -0.1829$ $G = -0.5764$ $H = -0.0131$

$K = -0.1616$ $L = 3.7607$ $M = -1.4490$ $N = -1.1026$

Segunda díada (**US**):

$A = -0.1419$ $B = 0.5135$ $C = -0.2929$ $D = -0.7071$

$E = 2.3936$ $F = -0.8367$ $G = 0.9866$ $H = -0.0131$

$K = 0.1616$ $L = 3.7607$ $M = -1.4490$ $N = -1.1026$

6 Se utiliza el programa MATRIX en la solución de esta ecuación matricial una vez insertados los valores de la ecuación 5.25 para obtener las coordenadas de los vectores W y Z, y una segunda vez con los valores de la ecuación 5.31 en la matriz para obtener las coordenadas de los vectores U y S. Las coordenadas calculadas de los vectores de eslabón a partir de las ecuaciones 5.25 a 5.31 son:

$W_x = 0.055$ $W_y = 6.832$ $Z_x = 1.179$ $Z_y = 0.940$

Eslabón 2 = $w = 6.832$

$U_x = -2.628$ $U_y = -1.825$ $S_x = -0.109$ $S_y = 1.487$

Eslabón 4 = $u = 3.2$

7 Se usa la ecuación 5.2a para encontrar el eslabón 3:

$$V_x = Z_x - S_x = 1.179 - (-0.109) = 1.288$$

$$V_y = Z_y - S_y = 0.940 - 1.487 = -0.547$$

Eslabón $3 = v = 1.399$

8 El eslabón de fijación se encuentra a partir de la ecuación 5.2b

$$G_x = W_x + V_x - U_x = 0.055 + 1.288 - (-2.628) = 3.971$$

$$G_y = W_y + V_y - U_y = 6.832 - 0.547 - (-1.825) = 8.110$$

Eslabón $1 = g = 9.03$

9 Las componentes de vector apropiadas se suman para obtener las localizaciones de los pivotes fijos O_2 y O_4 con respecto al origen global en el punto de precisión P_1. Véase las figuras 5-4 y 5-5.

$$O_{2x} = -Z_x - W_x = -1.179 - 0.055 = -1.234$$

$$O_{2y} = -Z_y - W_y = -0.940 - 6.832 = -7.772$$

$$O_{4x} = -S_x - U_x = -(-0.109) - (-2.628) = 2.737$$

$$O_{4y} = -S_y - U_y = -1.487 - (-1.825) = 0.338$$

La tabla 5-1 muestra cómo se sintetizan los parámetros de eslabonamiento por este método. Éstos concuerdan con la solución encontrada en el ejemplo 3-6 en su exactitud gráfica. Léase los archivos de disco E05-02a.mat y E05-02b.mat en el programa MATRIX para calcular estos resultados.

Este problema también se resuelve con el programa FOURBAR mediante el mismo método derivado de la sección 5.6. Aunque la deducción se realizó en términos de las coordenadas polares de los vectores de diferencia de posición $\mathbf{P}_{21}$ y $\mathbf{P}_{31}$ se consideró más conveniente proporcionar las coordenadas cartesianas de estos vectores al programa FOURBAR. (Generalmente es más exacto medir las coordenadas *x,y* a partir de un esquema de las posiciones deseadas que medir los ángulos con un transportador.) Por consiguiente, el programa requiere las coordenadas rectangulares de $\mathbf{P}_{21}$ y $\mathbf{P}_{31}$. Para este ejemplo son:

$p_{21x} = 2.394$ $\quad p_{21y} = -1.449$ $\quad p_{31x} = 3.761$ $\quad p_{31y} = -1.103$

Los ángulos α_2 y α_3 deben medirse del diagrama y presentarse en grados. Estos seis elementos constituyen un conjunto de "datos". **Advierta que todos estos datos son *información relativa* que asocia la segunda y la tercera posiciones con la primera.** No se necesita ninguna información acerca de sus localizaciones absolutas. El sistema de referencia global se puede colocar en cualquier parte del plano. Por conveniencia se tomó para estar en el primer punto de precisión P_1. Las opciones libres β_2 y β_3 para la primera díada, y γ_2, γ_3 para la segunda díada deben introducirse también en el programa FOURBAR como se hizo en el programa MATRIX.

TABLA 5-1 Resultados de síntesis analítica para el ejemplo 5-2

Número de eslabón	Solución analítica (longitud calculada, pulgadas)	Solución gráfica (longitud a partir de la figura 3-9, pulgadas)
1	9.03	8.9
2	6.83	6.7
3	1.40	1.5
4	3.20	3.2
Punto de acoplador =	1.51 @ 61.31 grados	1.51 @ 61 grados
Abierta/Cruzada =	CRUZADA	CRUZADA
Inicio Alpha2 =	0 rad/seg^2	
Inicio Omega2 =	1 rad/seg	
Inicio Theta2 =	29 grados	
Final Theta2 =	11 grados	
Delta Theta2 =	–9 grados	

El programa FOURBAR resuelve entonces la ecuación matricial 5.27, una vez que se introducen los valores de la ecuación 5.25 para obtener las coordenadas de los vectores W y Z; posteriormente se introducen los valores de la ecuación 5.31 en la matriz para obtener las coordenadas de los vectores U y S. Se resuelven entonces las ecuaciones 5.2 para determinar los eslabones 1 y 3, y se suman las componentes de vector apropiadas para determinar las localizaciones de los pivotes fijos O_2 y O_4. Las longitudes de eslabón se regresan a la parte principal del programa FOURBAR para que se calculen otros parámetros de eslabonamiento y se anime el eslabonamiento.

Observe que existen dos formas de ensamblar cualquier eslabonamiento de cuatro barras: la abierta y la cruzada (véase figura 4-8) y esta técnica de síntesis analítica no da información acerca de la forma de ensamblaje que se necesita para lograr la solución deseada. Así usted habrá ensayado con ambas formas de ensamblaje en el programa FOURBAR y llegará a la solución correcta después de determinar las longitudes apropiadas de eslabón con este método. Advierta también que el programa FOURBAR siempre traza el eslabonamiento con el eslabón fijo horizontal. Por consiguiente, la animación de la solución se orienta de manera diferente que en la figura 5-5.

El eslabonamiento terminado es el mismo que el de la figura 3-8c), el cual muestra una diada impulsora agregada para mover los eslabones 2, 3 y 4 por los tres puntos de precisión. Introduzca el archivo E05-02.4br al programa FOURBAR para ver los movimientos de la solución de cuatro barras analíticamente sintetizada. El eslabonamiento se moverá a través de las tres posiciones definidas en el planteamiento del problema. El archivo F03-09c.6br puede abrirse también en el programa SIXBAR para apreciar el movimiento completo del eslabonamiento de seis barras terminado.

5.8 SÍNTESIS PARA UNA LOCALIZACIÓN ESPECÍFICA DE PIVOTE FIJO

En el ejemplo 3-8 se emplearon las técnicas de síntesis gráfica y la inversión con el objetivo de crear un eslabonamiento de cuatro barras que genere un movimiento de tres

posiciones con localizaciones de pivote fijo preespecificadas. Éste constituye un problema frecuente debido a que las ubicaciones disponibles para pivotes fijos en la mayoría de las máquinas son muy limitadas. Loerch y colaboradores[41] muestran cómo se emplean estas técnicas de síntesis analítica con la finalidad de encontrar un eslabonamiento con pivotes fijos especificados y tres posiciones de salida para generación de movimiento. En efecto, se tomarán ahora como cuatro opciones libres las coordenadas x y y de los dos pivotes fijos en vez de los ángulos de los eslabones. Este enfoque se dirigirá a un sistema de ecuaciones no lineales que contienen funciones trascendentes de los ángulos desconocidos.

La figura 5-6 muestra la díada WZ en tres posiciones. Puesto que se desea relacionar los pivotes fijos de los vectores WyU con los puntos de precisión se colocará el origen del sistema de ejes global en el punto de precisión P_1. Un vector de posición $\mathbf{R}_1$ se traza desde el principio del vector $\mathbf{W}_1$ al origen global en P_1, el $\mathbf{R}_2$ a P_2 y el $\mathbf{R}_3$ a P_3. El vector $-\mathbf{R}_1$ define la localización del pivote fijo en el plano con respecto al origen global en P_1.

Subsecuentemente se repetirá este proceso para las tres posiciones del vector U en el extremo derecho del eslabonamiento, como se hizo en la solución de tres posiciones en la sección 5.7. El procedimiento se presenta aquí en detalle sólo para el extremo izquierdo del eslabonamiento (vectores W, Z). Se deja al lector sustituir a U por W y S por Z en las ecuaciones 5.32 para generar la solución del lado derecho.

Se puede escribir la ecuación de lazo vectorial para cada punto de precisión:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1 + \mathbf{Z}_1 &= \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{W}_2 + \mathbf{Z}_2 &= \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{W}_3 + \mathbf{Z}_3 &= \mathbf{R}_3 \end{aligned} \tag{5.32a}$$

Se sustituyen los equivalentes de número complejo para los vectores $\mathbf{W}_i$ y $\mathbf{Z}_i$:

$$\begin{aligned} we^{j\theta} + ze^{j\phi} &= \mathbf{R}_1 \\ we^{j(\theta+\beta_2)} + ze^{j(\phi+\alpha_2)} &= \mathbf{R}_2 \\ we^{j(\theta+\beta_3)} + ze^{j(\phi+\alpha_3)} &= \mathbf{R}_3 \end{aligned} \tag{5.32b}$$

Se desarrolla:

$$\begin{aligned} we^{j\theta} + ze^{j\phi} &= \mathbf{R}_1 \\ we^{j\theta}e^{j\beta_2} + ze^{j\phi}e^{j\alpha_2} &= \mathbf{R}_2 \\ we^{j\theta}e^{j\beta_3} + ze^{j\phi}e^{j\alpha_3} &= \mathbf{R}_3 \end{aligned} \tag{5.32c}$$

Observe que:

$$\mathbf{W} = we^{j\theta}; \qquad \mathbf{Z} = ze^{j\phi} \tag{5.32d}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{W} + \mathbf{Z} &= \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{W}e^{j\beta_2} + \mathbf{Z}e^{j\alpha_2} &= \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{W}e^{j\beta_3} + \mathbf{Z}e^{j\alpha_3} &= \mathbf{R}_3 \end{aligned} \tag{5.32e}$$

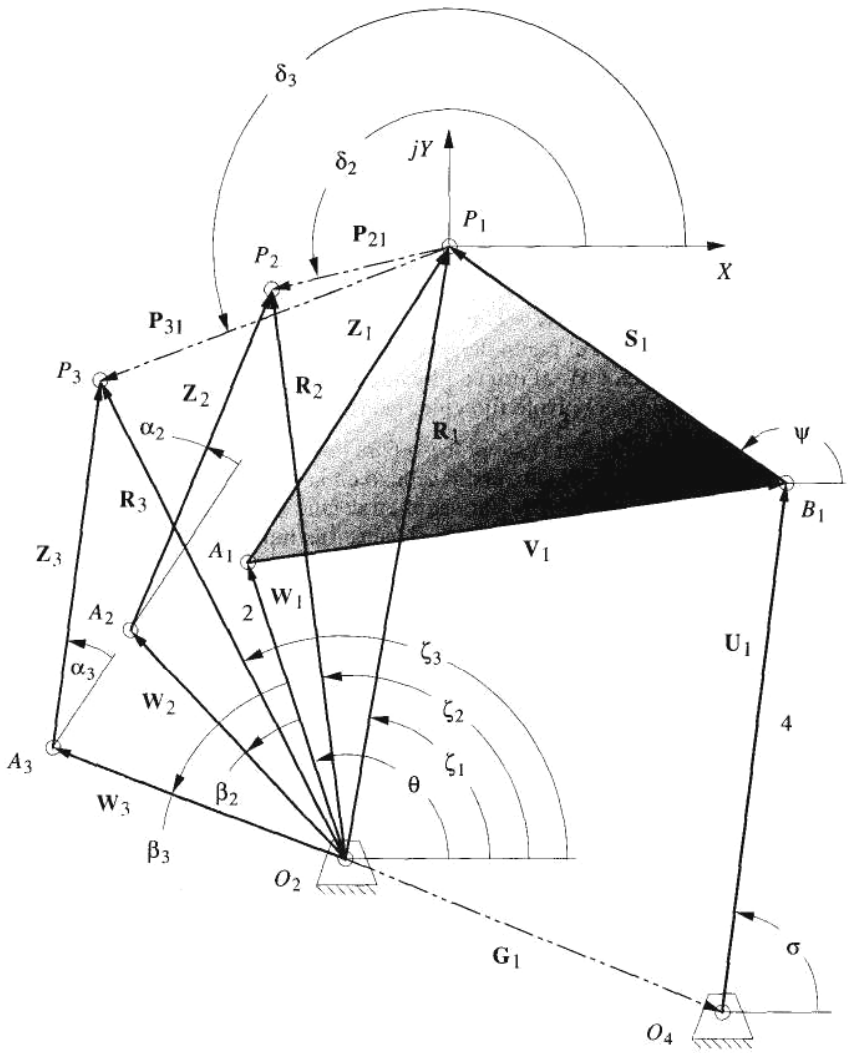


FIGURA 5-6

Síntesis de tres posiciones de un eslabonamiento con localizaciones de pivote fijo especificadas

Previamente se eligen b_2 y b_3 y se resuelven para los vectores W y Z. Ahora se desea, en efecto, especificar las componentes x,y del pivote fijo O_2 $(-R_{1x}, -R_{1y})$ como dos opciones libres. Esto deja por resolver a b_2 y b_3. Tales ángulos están contenidos en expresiones trascendentes en las ecuaciones. Advierta que si se suponen los valores para b_2 y b_3 como antes, sólo habría una solución para **W** y **Z** cuando la determinante de la matriz de coeficientes aumentada de las ecuaciones 5.32e fuera igual a cero.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{R}_1 \\ e^{j\beta_2} & e^{j\alpha_2} & \mathbf{R}_2 \\ e^{j\beta_3} & e^{j\alpha_3} & \mathbf{R}_3 \end{bmatrix} = 0 \tag{5.33a}$$

Se desarrolla esta determinante en relación con la primera columna que contiene las incógnitas presentes β_2 y β_3:

$$\left(\mathbf{R}_3 e^{j\alpha_2} - \mathbf{R}_2 e^{j\alpha_3}\right) + e^{j\beta_2}\left(\mathbf{R}_1 e^{j\alpha_3} - \mathbf{R}_3\right) + e^{j\beta_3}\left(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 e^{j\alpha_2}\right) = 0 \tag{5.33b}$$

Para simplificar, sean:

$$A = \mathbf{R}_3 e^{j\alpha_2} - \mathbf{R}_2 e^{j\alpha_3}$$

$$B = \mathbf{R}_1 e^{j\alpha_3} - \mathbf{R}_3 \tag{5.33c}$$

$$C = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 e^{j\alpha_2}$$

entonces:

$$A + Be^{j\beta_2} + Ce^{j\beta_3} = 0 \tag{5.33d}$$

La ecuación 5.33d expresa la suma de vectores en relación con un polígono cerrado. Los ángulos β_2 y β_3 están contenidos en expresiones trascendentales que vuelven demasiado laboriosa su solución. El procedimiento es similar al empleado para el análisis del eslabonamiento de cuatro barras en la sección 4.5. Se sustituyen los equivalentes en números complejos por todos los vectores en la ecuación 5.33d. Se desarrollan empleando la identidad de Euler (ecuación 4.4a). Se separan los términos reales e imaginarios para obtener dos ecuaciones simultáneas en las dos incógnitas β_2 y β_3. Se elevan al cuadrado las expresiones y se suman para eliminar una incógnita. Se simplifica el resultado y se sustituye por las identidades de la tangente del ángulo medio para eliminar la mezcla de senos y cosenos. Finalmente, esto se reduce a una ecuación cuadrática en la tangente de la mitad del ángulo buscado. Los resultados son los siguientes:*

$$\beta_3 = 2\arctan\left(\frac{K_2 \pm \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_3^2}}{K_1 + K_3}\right)$$

y:

$$\beta_2 = 2\arccos\left(\frac{A_5 \operatorname{sen}\beta_3 + A_3 \cos\beta_3 + A_6}{A_1}\right) \tag{5.34a}$$

o:

$$\beta_2 = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{A_3 \operatorname{sen}\beta_3 + A_2 \cos\beta_3 + A_4}{A_1}\right)$$

donde:

$$K_1 = A_2A_4 + A_3A_6$$

$$K_2 = A_3A_4 + A_5A_6 \tag{5.34b}$$

$$K_3 = \frac{A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 - A_4^2 - A_6^2}{2}$$

* Observe que también debe emplearse una función arcotangente de dos argumentos para obtener el cuadrante propio para el ángulo β_3. La función arcocoseno estima solamente ángulos en el primer y segundo cuadrantes. La función arcoseno estima solamente los ángulos en el primer y cuarto cuadrantes. Al calcular ambos resultados para β_2, se determina en qué cuadrante se encuentra el ángulo real.

y:
$$A_1 = -C_3^2 - C_4^2; \qquad A_2 = C_3C_6 - C_4C_5$$
$$A_3 = -C_4C_6 - C_3C_5; \qquad A_4 = C_2C_3 + C_1C_4 \tag{5.34c}$$
$$A_5 = C_4C_5 - C_3C_6; \qquad A_6 = C_1C_3 - C_2C_4$$

$$C_1 = R_3\cos(\alpha_2 + \zeta_3) - R_2\cos(\alpha_3 + \zeta_2)$$
$$C_2 = R_3\,\text{sen}(\alpha_2 + \zeta_3) - R_2\,\text{sen}(\alpha_3 + \zeta_2)$$
$$C_3 = R_1\cos(\alpha_3 + \zeta_1) - R_3\cos\zeta_3$$
$$C_4 = R_1\,\text{sen}(\alpha_3 + \zeta_1) + R_3\,\text{sen}\,\zeta_3 \tag{5.34d}$$
$$C_5 = R_1\cos(\alpha_2 + \zeta_1) - R_2\cos\zeta_2$$
$$C_6 = -R_1\,\text{sen}(\alpha_2 + \zeta_1) + R_2\,\text{sen}\,\zeta_2$$

Las diez variables en estas ecuaciones son: α_2, α_3, β_2, β_3, ζ_1, ζ_2, ζ_3, R_1, R_2 y R_3. Las constantes C_1 a C_6 se definen en términos de las ocho variables conocidas: R_1, R_2, R_3, ζ_1, ζ_2 y ζ_3 (las cuales son las magnitudes y ángulos de los vectores de posición $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ y $\mathbf{R}_3$) y los ángulos α_2 y α_3 que definen el cambio en el ángulo del acoplador. Véase la figura 5-6 para la descripción de estas variables.

Advierta en la ecuación 5.34a que existen dos soluciones para cada ángulo (igual que para el análisis de posición del eslabonamiento de cuatro barras en la sección 4.5 y la figura 4-8). En este caso una solución será trivial, una en la que $\beta_2 = \alpha_2$ y $\beta_3 = \alpha_3$. La solución no trivial es la deseada.

Este procedimiento se repite, entonces, resolviendo las ecuaciones 5.34 del extremo derecho del eslabonamiento mediante la localización deseada del pivote fijo O_4 para calcular los ángulos necesarios γ_2 y γ_3 del eslabón 4.

Ahora se ha reducido el problema al de la síntesis de tres posiciones sin pivotes especificados, como se describe en la sección 5.6 y el ejemplo 5-2. En efecto, se han encontrado los valores particulares de β_2, β_3, γ_2 y γ_3 que corresponden a la solución que usa los pivotes fijos deseados. La tarea restante consiste en determinar los valores de W_x, W_y, Z_x, Z_y, de las ecuaciones 5.25 a la 5.31.

EJEMPLO 5-3

Síntesis analítica de tres posiciones con pivotes fijos especificados.

Problema: Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para mover la línea AP de la posición A_1P_1 a la A_2P_2 y luego a la posición A_3P_3 utilizando los pivotes fijos O_2 y O_4 en las localizaciones específicas.

Solución: (Véase la figura 5-7.)

1 Dibuje el eslabón AP a escala en sus tres posiciones deseadas, A_1P_1, A_2P_2 y A_3P_3 en el plano, como se muestra en la figura 5-7. Las tres posiciones se definen con respecto a un origen

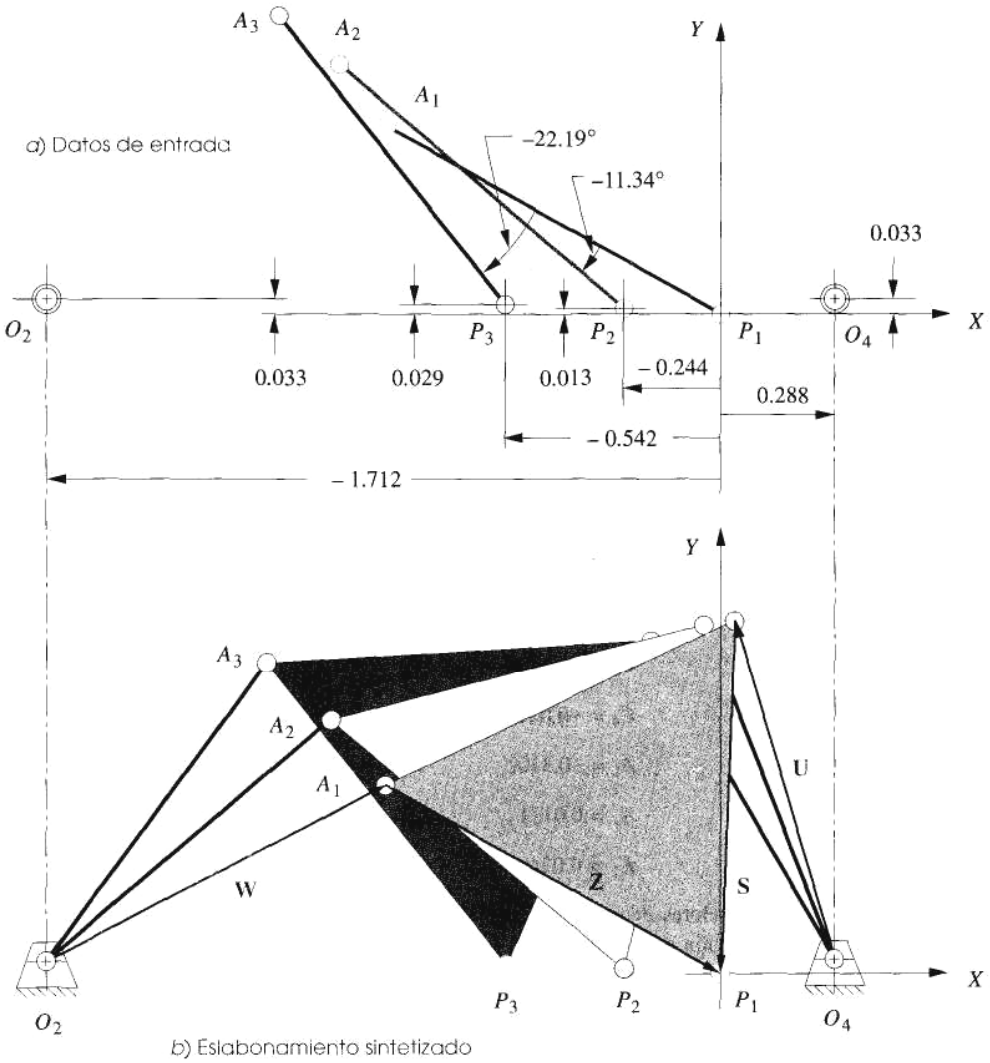


FIGURA 5-7
Ejemplo de síntesis de tres posiciones para pivotes fijos especificados

global localizado en el primer punto de precisión P_1. Los datos proporcionados se especifican en los puntos 2 a 4 de abajo.

2 Los vectores de diferencia de posición entre los puntos de precisión son:

$P_{21x} = -0.244$ $P_{21y} = 0.013$ $P_{31x} = -0.542$ $P_{31y} = 0.029$

3 Los cambios angulares del acoplador entre los puntos de precisión son:

$$\alpha_2 = -11.34° \qquad \alpha_3 = -22.19°$$

4 Las opciones libres supuestas son las ubicaciones deseadas de los pivotes fijos.

$$O_{2x} = -1.712 \qquad O_{2y} = 0.033 \qquad O_{4x} = 0.288 \qquad O_{4y} = 0.033$$

5 Resuelva las ecuaciones 5.34 dos veces, en una utilice las coordenadas de localización del pivote O_2 y en la otra las coordenadas de la ubicación del pivote O_4:

Para el pivote O_2:

$$C_1 = -0.205 \qquad C_2 = 0.3390 \qquad C_3 = 0.4028$$
$$C_4 = 0.6131 \qquad C_5 = 0.2041 \qquad C_6 = 0.3490$$
$$A_1 = -0.6152 \qquad A_2 = 0.0032 \qquad A_3 = -0.3171$$
$$A_4 = -0.0017 \qquad A_5 = -0.0032 \qquad A_6 = -0.3108$$
$$K_1 = 0.0986 \qquad K_2 = 0.0015 \qquad K_3 = 0.0907$$

Los valores hallados para los ángulos de eslabón según esta elección de ubicación del pivote fijo O_2 son:

$$\beta_2 = 11.96° \qquad \beta_3 = 23.96°$$

Para el pivote O_4:

$$C_1 = -0.3144 \qquad C_2 = -0.0231 \qquad C_3 = 0.5508$$
$$C_4 = -0.0822 \qquad C_5 = 0.2431 \qquad C_6 = -0.0443$$
$$A_1 = -0.3102 \qquad A_2 = -0.0044 \qquad A_3 = -0.1376$$
$$A_4 = 0.0131 \qquad A_5 = 0.0044 \qquad A_6 = -0.1751$$
$$K_1 = 0.0240 \qquad K_2 = -0.0026 \qquad K_3 = 0.0232$$

Los valores determinados para los ángulos de eslabón, de acuerdo con esta elección de la ubicación del pivote fijo O_4 son:

$$\gamma_2 = 2.78° \qquad \gamma_3 = 9.96°$$

6 En esta etapa el problema se redujo al mismo de la sección anterior, es decir, a encontrar el eslabonamiento dadas las tres opciones libres de los ángulos antes expuestos β_2, β_3, γ_2, γ_3, por medio de las ecuaciones 5.25 a la 5.31. Los datos necesarios para los cálculos restantes son los dados en los pasos 2, 3 y 5 de este ejemplo, es decir:

para la díada 1:

$$P_{21x} \quad P_{21y} \quad P_{31x} \quad P_{31y} \quad a_2 \quad a_3 \quad b_2 \quad b_3$$

para la díada 2:

$$P_{21x} \quad P_{21y} \quad P_{31x} \quad P_{31y} \quad a_2 \quad a_3 \quad g_2 \quad g_3$$

Véase el procedimiento en el ejemplo 5-2 y la sección 5.6. Una calculadora que resuelve matrices; los paquetes Mathcad, TKSolver y Mathlab; el programa MATRIX o el programa FOURBAR pueden resolver esto y calcular las coordenadas de los vectores de eslabón:

$W_x = 0.866$ $W_y = 0.500$ $Z_x = 0.846$ $Z_y = -0.533$

$U_x = -0.253$ $U_y = 0.973$ $S_x = -0.035$ $S_y = -1.006$

7 Las longitudes de eslabón se calculan como se hizo en el ejemplo 5-2 y se muestran en la tabla 5-2.

TABLA 5-2 Resultados del ejemplo 5-3

Eslabón 1 = 2.00 pulg
Eslabón 2 = 1.00 pulg
Eslabón 3 = 1.00 pulg
Eslabón 4 = 1.01 pulg
Punto de acoplador = 1.0 pulg @ –60.73°
Circuito = Abierto
Inicio Theta2 = 30°
Final Theta2 = 54°
Delta Theta2 = 12°

Este ejemplo puede leerse en el programa FOURBAR del archivo de disco E05-03.4br y luego ser animado.

5.9 CÍRCULOS DE PUNTO CENTRAL Y DE PUNTO CIRCUNFERENCIAL

Sería muy conveniente que se pudieran encontrar las ubicaciones geométricas de todas las soluciones posibles para el problema de síntesis de tres posiciones, puesto que entonces se tendría un panorama de las ubicaciones potenciales de los extremos de los vectores W, Z, U y S. Loerch[5] demuestra que si una de las opciones libres (por ejemplo β_2) se mantiene en un valor arbitrario y después se resuelven las ecuaciones 5.25 y 5.26 mientras se itera la otra opción libre (β_3) a través de todos los valores posibles, desde 0 hasta 2π, entonces se genera un círculo. Este círculo es la ubicación geométrica de todas las posibles localizaciones del inicio del vector W (para el valor particular empleado de β_2). El inicio del vector W es la localización del pivote fijo o *centro* O_2. Por consiguiente, esta circunferencia se denomina **círculo de *punto central.*** El vector N en la figura 5-8 define los puntos en el círculo *de punto central* con respecto al sistema de coordenadas global, el cual por conveniencia se localiza en el punto de precisión P_1.

Si se hace lo mismo para el vector Z y se mantiene constante α_2 en un valor arbitrario e iterando α_3 desde 0 hasta 2π, se generará otro círculo. Este círculo es el lugar geométrico de todas las posibles localizaciones del origen del vector Z para el valor elegido de α_2. Como el origen del vector Z está unido a la terminación o punta del vector W y su extremo describe una circunferencia alrededor del pivote O_2 en el eslabonamiento terminado, este lugar geométrico se denomina **círculo *de punto circunferencial.*** El vector (—Z) define los puntos en el círculo *de punto circunferencial* con respecto al sistema de coordenadas global.

Las componentes *x* y y de los vectores W y Z están definidas por las ecuaciones 5.25 y 5.26. Al negativizar las componentes *x, y* de Z se obtendrán las coordenadas de los puntos en el círculo de punto circunferencial para cualquier valor supuesto de α_2, conforme el ángulo α_3 se itera desde 0 hasta 2π. Las componentes *x, y* de $\mathbf{N = -Z - W}$, definen los puntos en el círculo de punto central O_2 para cualquier valor supuesto de β_2, conforme β_3 se itera desde 0 hasta 2π. El vector W se calcula al utilizar los ángulos β_2 y β_3, y el vector Z con los ángulos α_2 y α_3, ambos de las ecuaciones 5.25 y 5.26.

Para la díada de la derecha habrá también círculos de punto central y círculos de punto circunferencial separados. Las componentes *x, y* de M = — S — U definen los puntos en el círculo de punto central O_4 para cualquier valor supuesto de γ_2, conforme γ_3 se itera desde 0 hasta 2π. (Véase la figura 5-8 y también la figura 5-4.) Al negativizar las componentes *x, y* de S se darán las coordenadas de los puntos en el círculo de punto circunferencial para cualquier valor supuesto de ψ_2 conforme ψ_3 se itera desde 0 hasta 2π. El vector U se calcula al utilizar los ángulos γ_2, γ_3, y el vector S mediante el uso de los ángulos ψ_2 y ψ_3 ambos de las ecuaciones 5.30 y 5.31.

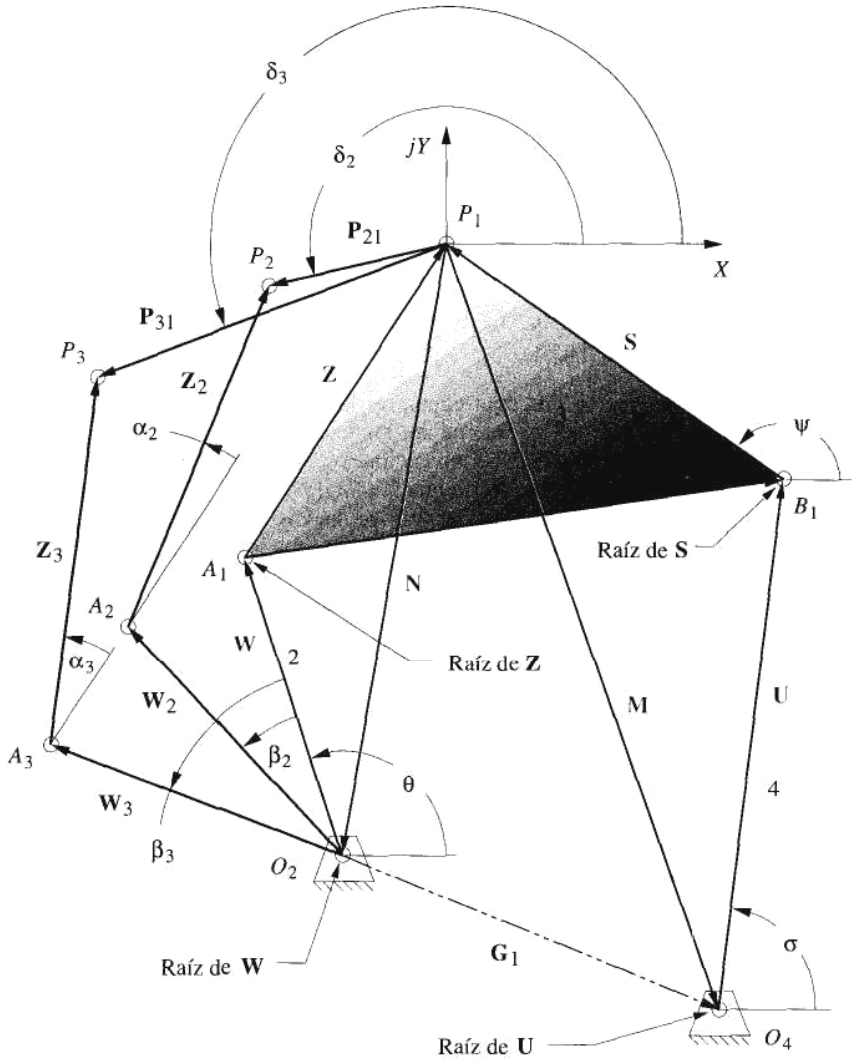


FIGURA 5-8

Definición de los vectores para definir los círculos de punto central y de punto circunferencial

Observe que todavía existe una infinidad de soluciones porque se ha elegido arbitrariamente el valor de un ángulo. Por consiguiente, habrá un **número infinito de conjuntos de círculos *de punto central* y de *círculos de punto circunferencial.*** Un programa de computadora es un auxiliar en la elección de un diseño de eslabonamiento que tenga pivotes en localizaciones convenientes. El programa FOURBAR que se incluye en este libro calculará las soluciones para las ecuaciones de síntesis analítica deducidas en esta sección, de los valores seleccionados por el usuario de todas las opciones libres necesa-

rías para la síntesis de tres posiciones, ambas con y sin especificación de localizaciones de pivotes fijos. Los programas de computadora FOURBAR, FIVEBAR y SIXBAR y su uso se describirán detalladamente en el apéndice A.

La figura 5-9 muestra los círculos de punto circunferencial y de punto central del eslabonamiento de línea recta de Chebyschev correspondientes a las opciones de $\beta_2 = 26°$, $\alpha_2 = 97.41°$, $\alpha_3 = 158.18°$ para la díada izquierda, y $\gamma_2 = 36°$, $\psi_2 = 97.41°$, $\psi_3 = 158.18°$ para la díada derecha. En este ejemplo, los dos círculos mayores son los círculos de punto central, los cuales definen los lugares geométricos de posibles localizaciones de pivote fijo O_2 y O_4. Los dos círculos más pequeños definen los lugares geométricos de posibles localizaciones de pivote móvil I_{23} e I_{34}. Advierta que el sistema de coordenadas se origina en el punto de precisión de referencia, en este caso, P_1, desde el cual se miden todos los parámetros empleados en el análisis. Estos círculos definen los lugares geométricos de pivotes para todos los eslabonamientos posibles que alcanzarán los tres puntos de precisión P_1, P_2 y P_3 especificados para opciones particulares de los ángulos β_2, γ_2 y α_2. Un ejemplo de eslabonamiento se traza en el diagrama para ilustrar una solución posible.

5.10 SÍNTESIS ANALÍTICA DE CUATRO Y CINCO POSICIONES

Las mismas técnicas deducidas anteriormente para la síntesis de dos y tres posiciones se extienden a cuatro y cinco posiciones al expresar más ecuaciones de lazo vectorial, una para cada punto de precisión. Para facilitar esto ahora se expresarán las ecuaciones de

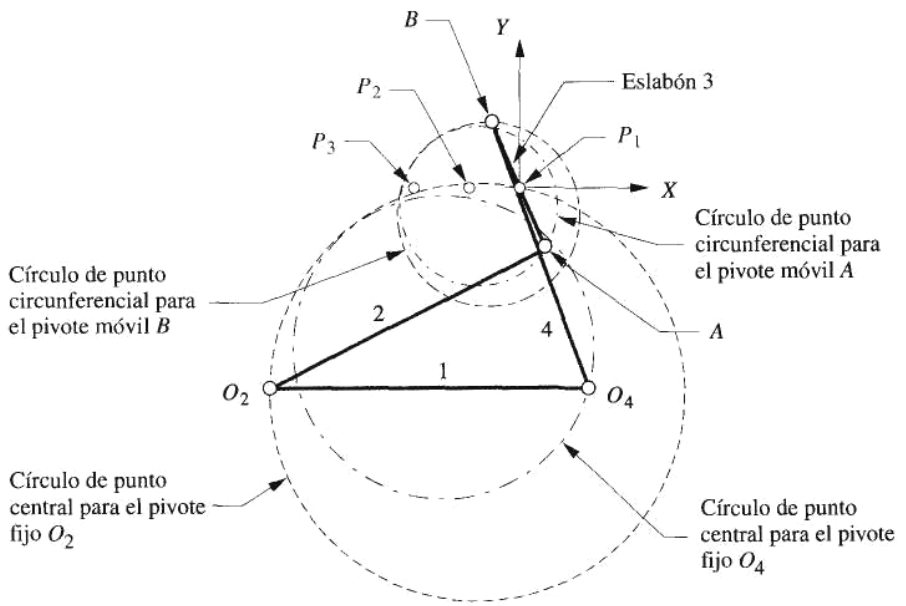


FIGURA 5-9

Círculos de punto central y de punto circunferencial y un eslabonamiento que alcanza los puntos de precisión

lazo en una forma más general, aplicable a cualquier número de posiciones de precisión. La figura 5-4 ilustrará la notación de la solución general. Los ángulos α_2, α_3, β_2, β_3, γ_2 y γ_3 se designarán ahora como α_k, β_k y γ_k, $k = 2$ a n, donde k representa la posición de precisión y $n = 2, 3, 4$ o 5 representa el número total de posiciones por resolver. El sistema de ecuaciones general de lazo vectorial entonces se convierte en:

$$\mathbf{W}_k + \mathbf{Z}_k - \mathbf{P}_{k1} - \mathbf{Z}_1 - \mathbf{W}_1 = 0, \qquad k = 2 \text{ a } n \tag{5.35a}$$

Lo cual, después de sustituir las formas numéricas complejas y simplificar, será:

$$we^{j\theta}\left(e^{j\beta k} - 1\right) + ze^{j\phi}\left(e^{j\alpha k} - 1\right) = p_{k1}e^{j\delta k}, \qquad k = 2 \text{ a } n \tag{5.35b}$$

Esto se expresa en una forma más compacta al sustituir la notación vectorial para los términos a los cuales se aplica, sean:

$$\mathbf{W} = we^{j\theta}; \qquad \mathbf{Z} = we^{j\phi}; \qquad \mathbf{P}_{k1} = p_{k1}e^{j\delta k} \tag{5.35c}$$

entonces:

$$\mathbf{W}\left(e^{j\beta k} - 1\right) + \mathbf{Z}\left(e^{j\alpha k} - 1\right) = \mathbf{P}_{k1}e^{j\delta k}, \qquad k = 2 \text{ a } n \tag{5.35d}$$

Erdman y Sandor[6] denominan a la ecuación 5.35d ***ecuación de forma estándar.*** **Al** sustituir los valores de α_k, β_k y δ_k en la ecuación 5.35d para todas las posiciones de precisión deseadas, el sistema requerido de ecuaciones simultaneas se expresa para la diada izquierda del eslabonamiento. La ecuación de forma estándar se aplica también a la diada derecha US, con cambios apropiados a los nombres de las variables conforme se requiere.

$$\mathbf{U}\left(e^{j\beta k} - 1\right) + \mathbf{S}\left(e^{j\alpha k} - 1\right) = \mathbf{P}_{k1}e^{j\delta k}, \qquad k = 2 \text{ a } n \tag{5.35e}$$

El número de ecuaciones resultantes, variables y opciones libres de cada valor de n se muestra en la tabla 5-3 (según Erdman y Sandor). Ésta proporciona soluciones para problemas de cuatro y cinco posiciones en la referencia 6. El círculo de punto circunferencial y los círculos de punto central del problema de tres posiciones serán curvas cúbicas, denominadas **curvas de Burmester** en el problema de cuatro posiciones. El programa para computadora de Erdman, comercialmente disponible, LINCAGES[8] resuelve el **problema de cuatro posiciones** de manera interactiva, ya que permite al usuario seleccionar las localizaciones del pivote central y circunferencial en sus lugares geométricos de curvas de Burmester, las cuales se trazan en la pantalla de gráficos de la computadora.

5.11 SÍNTESIS ANALÍTICA DE UN GENERADOR DE TRAYECTORIA CON TEMPORIZACIÓN PRESCRITA

El enfoque deducido anteriormente para la síntesis de generación de movimientos también se aplica al caso de la **generación de trayectoria con temporización prescrita.** En la generación de trayectoria deben alcanzarse los puntos de precisión, pero el ángulo de una línea en el acoplador no resulta de interés. En cambio, se especifica el tiempo en el cual el acoplador alcanza el punto de precisión en términos del ángulo del balancín de entrada (3_2. En el problema de generación de movimiento de tres posiciones se especifican los ángulos oc_2 y oc_3 del vector Z con el objetivo de controlar el ángulo del acoplador. En lugar de eso, aquí se desea especificar los ángulos β_2 y β_3 del balancín de entrada para definir los tiempos. Anteriormente las opciones libres fueron β_2 y β_3. Ahora serán α_2 y

α_3. En cualquier caso, los cuatro ángulos se especifican o consideran como opciones libres y la solución es idéntica. La figura 5-4 y las ecuaciones 5.25, 5.26, 5.30 y 5.31 se aplican también a este caso. Asimismo éste se amplía hasta cinco puntos de precisión como se muestra en la tabla 5-3.

5.12 SÍNTESIS ANALÍTICA DE UN GENERADOR DE FUNCIÓN PARA UN ESLABONAMIENTO DE CUATRO BARRAS

Puede aplicarse un proceso similar al empleado para la síntesis de generación de trayectoria con temporización prescrita al problema de generación de función. En este caso no se toma en cuenta el movimiento del acoplador. En un generador de función para eslabonamiento de cuatro barras el acoplador sirve solamente para **acoplar** el eslabón de entrada al eslabón de salida. En la figura 5-10 se muestra un eslabonamiento de cuatro barras en tres posiciones. Observe que el acoplador, eslabón 3, es meramente una línea desde el punto A al punto *P*. El punto *P* puede considerarse como un punto del acoplador que coincide con la junta de pasador entre los eslabones 3 y 4. Como tal tendrá un movimiento de arco simple pivotado alrededor de O_4 en lugar de, por ejemplo, el movimiento de trayectoria de orden superior del punto del acoplador P_1 en la figura 5-4.

Este **generador de función** utiliza el *eslabón 2 como eslabón de entrada y toma la salida del eslabón 4.* La **"función"** generada es la **relación entre los ángulos de los eslabones** 2 y 4 para las posiciones especificadas de tres posiciones, P_1, P_2 y P_3. Éstas se localizan en el plano con respecto a un sistema de coordenadas global arbitrario por los vectores de posición $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ y $\mathbf{R}_3$. La función es:

$$\gamma_k = f(\beta_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n; \qquad n \leq 7 \tag{5.36}$$

Ésta *no* **es una función continua.** La relación se cumple solamente para los puntos discretos especificados *(k).*

Para sintetizar las longitudes de los eslabones necesarios que satisfacen la ecuación 5.36 se expresarán las ecuaciones de lazo vectorial alrededor del eslabonamiento en pares de posiciones, como se hizo en los ejemplos anteriores. Sin embargo, ahora se desea incluir los eslabones 2 y 4 en el lazo debido a que el eslabón 4 es el de salida. Véase la figura 5-10.

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_2 + \mathbf{Z}_2 - \mathbf{U}_2 + \mathbf{U}_1 - \mathbf{Z}_1 - \mathbf{W}_1 &= 0 \\ \mathbf{W}_3 + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_1 - \mathbf{Z}_1 - \mathbf{W}_1 &= 0 \end{aligned} \tag{5.37a}$$

TABLA 5-3 Número de variables y opciones libres para síntesis analítica de movimiento de puntos de precisión y trayectoria temporizada

Núm. de posiciones (n)	Núm. de variables escalares	Núm. de ecuaciones escalares	Núm. de variables prescritas	Núm. de opciones libres	Núm. de soluciones disponibles
2	8	2	3	3	∞^3
3	12	4	6	2	∞^2
4	16	6	9	1	∞^1
5	20	8	12	0	Finito

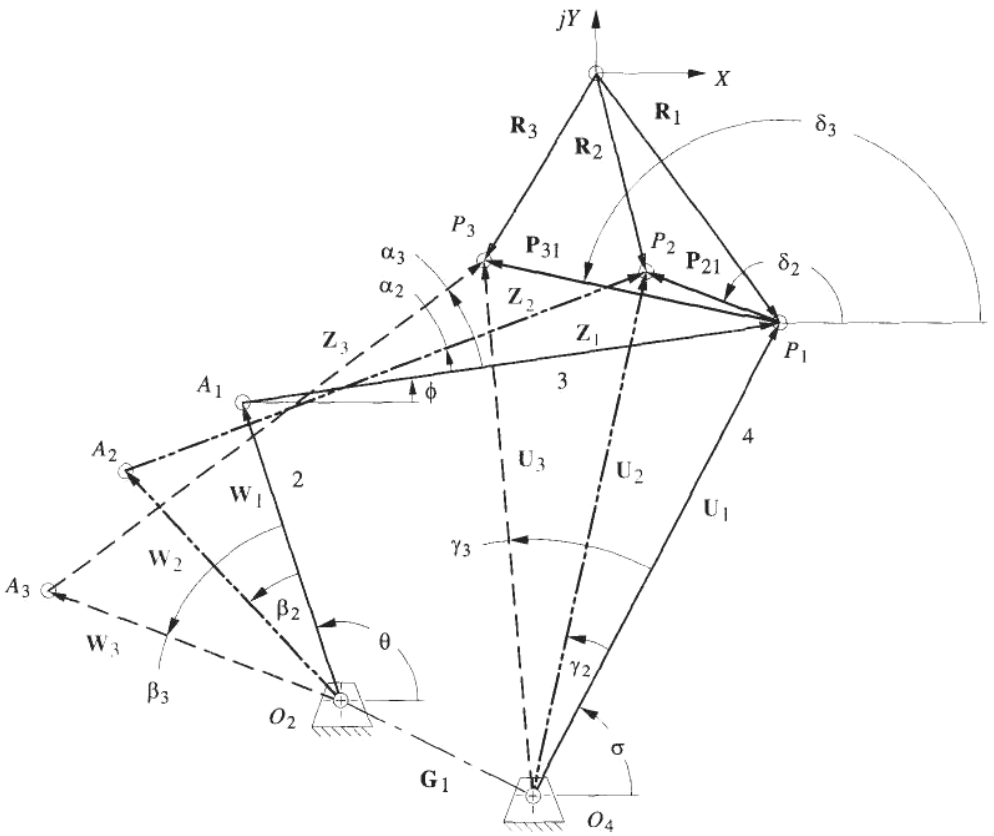


FIGURA 5-10

Síntesis analítica de un generador de función de eslabonamiento de cuatro barras

se reordena:

$$\mathbf{W}_2 + \mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_1 - \mathbf{W}_1 = \mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1$$
$$\mathbf{W}_3 + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_1 - \mathbf{W}_1 = \mathbf{U}_3 - \mathbf{U}_1 \qquad (5.37b)$$

pero,

$$\mathbf{P}_{21} = \mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1$$
$$\mathbf{P}_{31} = \mathbf{U}_3 - \mathbf{U}_1 \qquad (5.37c)$$

se sustituye:

$$\mathbf{W}_2 + \mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_1 - \mathbf{W}_1 = \mathbf{P}_{21}$$
$$\mathbf{W}_3 + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_1 - \mathbf{W}_1 = \mathbf{P}_{31} \qquad (5.37d)$$

$$we^{j(\theta+\beta_2)} + ze^{j(\phi+\alpha_2)} - ze^{j\phi} - we^{j\theta} = p_{21}e^{j\delta_2}$$
$$we^{j(\theta+\beta_3)} + ze^{j(\phi+\alpha_3)} - ze^{j\phi} - we^{j\theta} = p_{31}e^{j\delta_3} \quad (5.37e)$$

Advierta que las ecuaciones 5.37d y 5.37e son idénticas a las ecuaciones 5.19 y 5.20 deducidas para el caso de la generación de movimiento de tres posiciones, y también pueden ponerse en la *forma estándar* de Erdman[161] de la ecuación 5.35 para el caso de *n* posiciones. Las doce variables en la ecuación 5.37e son iguales a las de la ecuación 5.20: w, θ, β_2, β_3, z, ϕ, α_2, α_3, p_{21}, p_{31}, δ_2 y δ_3.

El procedimiento de solución para el caso de la generación de función de tres posiciones puede ser entonces igual al descrito en las ecuaciones 5.20 a 5.27 para el problema de síntesis de movimiento. En otras palabras, las ecuaciones de solución son las mismas para los **tres tipos** de síntesis cinemática: *generación de función, generación de movimiento* y *generación de trayectoria con temporización prescrita.* Por ello Erdman y Sandor denominaron a la ecuación 5.35 *ecuación deforma estándar.* Para desarrollar los datos de la solución de la generación de función, desarrolle la ecuación 5.37b:

$$we^{j(\theta+\beta_2)} + ze^{j(\phi+\alpha_2)} - ze^{j\phi} - we^{j\theta} = ue^{j(\sigma+\gamma_2)} - ue^{j\sigma}$$
$$we^{j(\theta+\beta_3)} + ze^{j(\phi+\alpha_3)} - ze^{j\phi} - we^{j\theta} = ue^{j(\sigma+\gamma_3)} - ue^{j\sigma} \quad (5.37f)$$

También existen **doce variables** en la ecuación 5.37f: w, θ, z, ϕ, α_2, α_3, β_2, β_3, u, σ, γ_2 y γ_3, que se pueden resolver para cualquiera de las cuatro. Los cuatro ángulos, β_2, β_3, γ_2 y γ_3 se especifican a partir de la función que se genera en la ecuación 5.36. Esto deja **cuatro opciones libres.** En el problema de generación de función muchas veces conviene definir la longitud del balancín de salida u, y su ángulo inicial σ, para adaptarse a las restricciones del paquete. Por lo tanto, al seleccionar las componentes u y σ del vector $\mathbf{U}_1$ se proporcionan dos opciones libres convenientes de las cuatro requeridas.

Si se conocen u, σ, γ_2 y γ_3, se pueden encontrar $\mathbf{U}_2$ y $\mathbf{U}_3$. Los vectores $\mathbf{P}_{21}$ y $\mathbf{P}_{31}$ pueden entonces determinarse a partir de la ecuación 5.37c. Seis de las incógnitas en la ecuación 5.37e se definen entonces, a saber: β_2, β_3, p_{21}, p_{31}, δ_2 y δ_3. De las seis restantes (w, θ, z, ϕ, α_2, α_3) se deben suponer valores para dos más como opciones libres con el fin de resolver las otras cuatro. Se supondrán valores (opciones libres) para los dos ángulos α_2, α_3 (como se hizo para la generación de trayectoria con temporización prescrita) y se resolverán las ecuaciones 5.37e para evaluar las componentes de $\mathbf{W}$ y $\mathbf{Z}$ (w, θ, z, ϕ). Ahora se ha reducido el problema al de la sección 5.6 y el ejemplo 5-2. Véase las ecuaciones 5.20-5.27 para la solución.

Una vez elegido el vector $\mathbf{U}_1$ (u, σ), en este caso como opción libre, sólo hay que resolver para una diada, WZ. Aunque se eligió arbitrariamente la longitud del vector $\mathbf{U}_1$, el eslabonamiento de generador de función resultante puede aumentarse o disminuirse a escala para ajustarse a las restricciones de empaque sin afectar la relación entrada/salida definida en la ecuación 5.36, ya que es una función solamente de ángulos. Este hecho no resulta verdadero para los casos de generación de movimiento o de trayectoria, ya que al trazarlos a escala se cambiarían las coordenadas absolutas de los puntos de precisión de salida de trayectoria o de movimiento, los cuales se especificaron en el planteamiento del problema.

La tabla 5-4 muestra las relaciones entre número de posiciones, variables, opciones libres y soluciones para el caso de generación de función. Advierta que con este método se resuelven para hasta siete posiciones de salida angulares.

TABLA 5-4 Número de variables y opciones libres para síntesis de generación de función[7]

Núm. de posiciones (n)	Núm. de variables escalares	Núm. de ecuaciones escalares	Núm. de variables prescritas	Núm. de opciones libres	Núm. de soluciones disponibles
2	8	2	1	5	∞^5
3	12	4	4	4	∞^4
4	16	6	7	3	∞^3
5	20	8	10	2	∞^2
6	24	10	13	1	∞^1
7	28	12	16	0	Finito

5.13 OTROS MÉTODOS DE SÍNTESIS DE ESLABONAMIENTOS

En años recientes se han descubierto muchas de las otras técnicas para la síntesis de eslabonamientos que proporcionan un movimiento prescrito. La mayoría de estos enfoques son algo complejos y muchos matemáticamente complicados. Algunos sólo admiten una solución con cierre de forma; la mayoría requiere una solución numérica iterativa. Muchos tratan el problema de síntesis de trayectoria sin importar si tiene o no temporización prescrita. Como lo señalaron Erdman y Sandor, la trayectoria, el movimiento, y los problemas de generación de función están íntimamente relacionados.'[61]

Lamentablemente el espacio en este libro no permite dar una descripción completa de al menos uno de estos enfoques. En su lugar se optó por presentar una breve sinopsis de los números de métodos de síntesis junto con referencias completas para sus descripciones generales en la literatura científica y de ingeniería. El lector interesado en un reporte detallado de cualquier método de los que aquí se incluyen deberá consultar los artículos de referencia, los cuales se consiguen en cualquier biblioteca universitaria o pública. Algunos autores de estos métodos realizan copias disponibles de su código de computadora para grupos interesados.

La tabla 5-5 resume algunos de los métodos existentes de síntesis para eslabonamientos de cuatro barras y para cada uno indica el tipo de método, número máximo de posiciones sintetizadas, enfoque, características especiales y referencia bibliográfica (véase el final de este capítulo para obtener una referencia completa). La lista en la tabla 5-5 no es exhaustiva, pues además de éstos existen otros métodos.

Los métodos listados se dividen en tres tipos indicados en la tabla como **de precisión, de ecuaciones** y **de optimización** (primera columna de la tabla 5-5). Por **precisión** (del punto de precisión) se hace referencia a un método como los descritos en secciones anteriores de este capítulo, el cual trata de hallar una solución que pase exactamente a través de los puntos deseados (precisión), pero puede desviarse de la trayectoria deseada entre estos puntos. Los métodos de punto de precisión se limitan a acoplar un número de puntos igual al número de parámetros ajustables independientes que definen el mecanismo. Para un eslabonamiento de cuatro barras este número es nueve.* (Los eslabonamientos de orden superior con más eslabones y juntas tendrán un número mayor de posibles puntos de precisión.)

* Los nueve parámetros independientes de un eslabonamiento de cuatro barras son: cuatro longitudes de eslabón, dos coordenadas del punto acoplador con respecto al eslabón acoplador y tres parámetros que definen la ubicación y la orientación del eslabón fijo en el sistema coordenado global.

TABLA 5-5 Algunos métodos para la síntesis analítica de eslabonamientos

Tipo	Núm. máximo de posiciones	Enfoque	Características especiales	Bibliografía	Referencias
De precisión	4	Ecuaciones de lazo – con cierre de forma	Ecuaciones lineales extendibles a 5 posiciones	Freudenstein (1959) Sandor (1959) Erdman (1981)	1, 2, 4, 5, 6, 8, 10
De precisión	5	Ecuaciones de lazo – por el método de Newton Raphson	Emplea matrices de desplazamiento	Suh (1967)	11
De precisión	5	Ecuaciones de lazo – por el método de continuación	Pivotes fijos especificados, pivotes móviles especificados	Morgan (1990) Subbian (1991)	14, 15, 16, 17
De precisión	7	5 puntos con cierre de forma – por el método de iteración a 7 puntos	Extendible a un eslabonamiento de seis barras de Watt del tipo I	Tylaska (1994)	19, 20
De precisión	9	Ecuaciones de lazo – por el método de Newton Raphson	Solución exhaustiva	Morgan (1987) Wampler (1992)	12, 13, 18
De ecuaciones	10	Ecuación de curva de acoplador	Solución iterativa	Blechschmidt (1986)	21
De ecuaciones	15	Ecuación de curva de acoplador	Basado en el método de Blechschmidt	Ananthasuresh (1993)	22
De optimización	N	Ecuaciones de lazo- por el método de mínimos cuadrados	Pivotes fijos especificados controlan la fuerza y el par de torsión.	Fox (1966)	24
De optimización	N	Ecuaciones de lazo- por diversos criterios	Generación de trayectoria o función	Youssef (1975)	25
De optimización	N	Mínimos cuadrados en ecuaciones lineales	Temporización prescrita, convergencia rápida	Nolle (1971)	9
De optimización	N	Síntesis de precisión selectiva (SPS)	No obedece a los requerimientos de precisión	Kramer (1975)	26, 27
De optimización	N	SPS + lógica difusa	Extiende la SPS de Kramer	Krishnamurthi (1993)	28
De optimización	N	Posiciones de cuasi-precisión	Se basa en el método de Kramer	Mirth (1994)	29
De optimización	3 o 4	Ecuaciones de lazo y diversos criterios dinámicos	Cinemática y fuerzas y pares de torsión dinámicos	Conte (1975) Kakatsios (1987)	30, 31, 32
De optimización	N	Ecuaciones de lazo- por el método de mínimos cuadrados	Evita los problemas de rama, y es de convergencia rápida	Angeles (1988)	33
De optimización	N	Método de energía	Enfoque FEA	Aviles (1994)	34
De optimización	N	Algoritmo genético	Síntesis de curva completa	Fang (1994)	35
De optimización	N	Descriptores de Fourier	Síntesis de curva completa	Ullah (1996)	36, 37
De optimización	2, 3 o 4	Ecuaciones de lazo- por diversos criterios	Generación automática sin defectos CBO.	Bawab (1997)	38

Para más de cinco puntos de precisión en el eslabonamiento de cuatro barras, las ecuaciones se resuelven con cierre de forma sin iteración. (La solución de cuatro puntos se utiliza como una herramienta para resolver cinco posiciones con cierre de forma, pero para seis o más puntos las ecuaciones no lineales son difíciles de manejar.) Para seis a nueve puntos de precisión se necesita de un método iterativo que resuelva el sistema de ecuaciones. Cuando se itera con ecuaciones no lineales puede haber problemas no convergentes, o convergentes a soluciones singulares o imaginarias. A pesar del número de puntos por resolver la solución encontrada puede ser inusual debido a los defectos de circuito, de rama o de orden (CBO). Un defecto de circuito significa que el eslabonamiento debe desensamblarse y reensamblarse para llegar a ciertas posiciones, y un defecto de rama significa que se encuentra una posición de agarrotamiento entre puntos sucesivos (véase la sección 4.12). Un defecto de orden significa que todos los puntos se alcanzan en la misma rama pero se encuentran en el orden incorrecto.

En la tabla 5-5, el tipo (columna) **de ecuaciones** se refiere a los métodos que resuelven la curva de acoplador de una séxtica tricircular, trinodal para determinar un eslabonamiento que generará una curva de acoplador entera que aproxime muy de cerca un sistema de los puntos deseados en la curva.

La lista tipo de la tabla 5-5 presenta bajo el título **optimización** un procedimiento iterativo de optimización que trata de minimizar una **función objetivo** que se define de muchas maneras, por ejemplo, la desviación de los mínimos cuadrados entre las posiciones de punto de acoplador calculadas y deseadas. Los puntos determinados se encuentran al resolver un sistema de ecuaciones que defina el comportamiento de la geometría del eslabonamiento, al utilizar supuestos valores iniciales para los parámetros del eslabonamiento. Un sistema de restricciones de desigualdad que limiten el rango de variación de los parámetros, tales como las relaciones de longitud de eslabones, la condición de Grashof o el ángulo de transmisión también se incluyen en el cálculo. Se generan nuevos valores de parámetros de eslabonamientos en cada paso de iteración de acuerdo con el esquema de optimización particular empleado. Se busca el montaje más factible entre los puntos de solución calculados y los puntos deseados, definido como la minimización de la función objetivo seleccionada. Ninguno de los puntos deseados se acoplará exactamente a estos métodos, pero para la mayoría de los trabajos de ingeniería éste constituye un resultado aceptable.

Los métodos de optimización a diferencia de los métodos de precisión permiten que se especifiquen números grandes de puntos, limitados solamente por tiempo disponible en la computadora y errores numéricos de redondeo. La tabla 5-5 muestra una variedad de programas de optimización al clasificar desde el mundano (mínimos cuadrados) hasta el esotérico (lógica confusa, algoritmos genéticos). Todos requieren una solución mediante un programa de computadora. La mayoría puede correrse desde cualquier computadora de escritorio en pequeños tiempos razonables. Cada enfoque de optimización diferente tiene ventajas y desventajas con respecto a la convergencia, exactitud, confiabilidad, complejidad, rapidez y magnitud del cálculo. A menudo la convergencia depende de una buena elección de suposiciones iniciales (valores supuestos) para los parámetros de eslabonamientos. Algunos métodos, si son del todo convergentes, lo hacen a un mínimo local (sólo una de muchas soluciones posibles), y puede que no sea lo mejor para la tarea.

Métodos de punto de precisión

La tabla 5-5 muestra diversos métodos de síntesis de puntos de precisión. Algunos de éstos se basan en el trabajo original de Freudenstein y Sandor.[10] Sandor[1] y Erdman[2], [6]

desarrollaron este enfoque en la "forma estándar", la cual se describe en detalle en este capítulo. Este método genera soluciones con cierre de forma para dos, tres y cuatro posiciones de precisión, y puede extenderse a cinco posiciones. Este método padece de los posibles defectos de circuito, de rama y de orden (CBO) comunes en todos los métodos de punto de precisión.

El método de Suh y Radcliffe'"[1] resulta similar al de Freudenstein y otros[1], [2], [6], [10], pero conduce hacia un sistema de ecuaciones no lineales simultáneas, las cuales resuelven más de cinco posiciones al emplear el método numérico de Newton-Raphson (véase la sección 4.13). Este enfoque agrega a los problemas usuales de CBO las posibilidades de no convergencia, o convergencia a soluciones singulares o imaginarias.

Desarrollos recientes en la teoría matemática de polinomios han creado nuevos métodos de solución denominados **métodos de continuación** (también llamados **métodos homotópicos),** los cuales no padecen los mismos problemas de convergencia que padecen otros, y también determina todas las soluciones de las ecuaciones al comenzar desde cualquier sistema de valores supuestos.[12], [13]Los métodos de continuación son una solución general a esta clase de problema, y son confiables y lo suficientemente rápidos para permitir que se investigen diseños múltiples en un tiempo razonable (comúnmente medidos en *horas de* CPU en una computadora potente).

Diversos investigadores han desarrollado soluciones al problema de cinco a nueve puntos de precisión al emplear esta técnica. Morgan y Wampler[14] resolvieron completamente el problema de cinco puntos de eslabonamiento de cuatro barras con pivotes fijos especificados y encontraron un máximo de 36 soluciones reales. Subbian y Flugrad'[15] utilizaron los pivotes móviles específicos para el problema de cinco puntos, extendieron el método de cinco puntos para los eslabonamientos de seis barras[16] y sintetizaron los mecanismos de ocho y de cinco barras con engranaje para seis o siete puntos de precisión utilizando los métodos de continuación.'[17]

Hasta ahora sólo el método de continuación ha resuelto por completo el problema de nueve puntos de precisión del eslabonamiento de cuatro barras y ha generado todas sus posibles soluciones. Wampler, Morgan y Sommese[18] utilizaron una combinación de reducción analítica de ecuaciones y de métodos de continuación numéricos para calcular exhaustivamente todas las posibles soluciones no degeneradas y genéricas al problema de nueve puntos.* Probaron que se encuentra un máximo de 4 326 eslabonamientos distintos, no degenerados (existentes en 1 442 sistemas de cognados triples), que resolverán potencialmente un problema genérico de eslabonamiento de cuatro barras con nueve puntos de precisión. Su método no elimina eslabonamientos físicamente imposibles (eslabón complejo) o aquellos con defectos CBO. Éstos todavía tienen que removerse por la examinación de las diversas soluciones. También resolvieron cuatro ejemplos y encontraron el número máximo de eslabones con longitudes de eslabones reales que generan estas trayectorias particulares de nueve puntos para ser 21, 45, 64 y 120 cognados triples, respectivamente. Los tiempos calculados para estos cuatro ejemplos van desde los 69 a los 321 minutos de CPU en una IBM 3090.

Tylaska y Kazerounian[19] [20] tomaron un enfoque diferente e idearon un método que sintetiza un eslabonamiento de cuatro barras para más de siete puntos de precisión, y también sintetizaron un eslabonamiento de seis barras de Watt del tipo I para más de seis posiciones guía del cuerpo (especificación de movimiento) con control sobre las localizaciones de algunos pivotes fijos o móviles. Su método genera el sistema completo de soluciones para cualquier sistema de datos de diseño y representa un incremento sobre

* Los autores reportan que este cálculo tomó 332 horas de CPU en una computadora IBM 3081.

los métodos iterativos sensibles a las suposiciones iniciales. Se calcula con menor intensidad que los métodos de continuación.

Métodos de ecuaciones de curva de acoplador

Blechschmidt y Uicker[211] y Ananthasuresh y Kota[221] utilizaron la ecuación algebraica de curva de acoplador en lugar de una aproximación de lazo vectorial para calcular la trayectoria de punto de acoplador. La ecuación de la curva de acoplador es una séxtica tricircular, trinodal de 15 términos sécticos. Nolle[1231] establece que:

> *La ecuación de la curva de acoplador es por sí misma muy compleja, y de lo que se conoce en el estudio de la mecánica (o al respecto en otras áreas) no se ha encontrado ningún otro resultado matemático con características algebraicas que concuerden con las de la curva de acoplador.*

Su solución implica demasiado y requiere de iteración. El enfoque de Blechschmidt y Uicker[211] elige las coordenadas para 10 puntos en la curva deseada. Ananthasuresh utilizó 15 puntos con algunos ensayos y errores requeridos en su selección. La ventaja de estos enfoques de la ecuación de curva de acoplador es que definen la curva completa, la cual puede trazarse y examinarse por conveniencia, y los defectos anteriores para calcular las dimensiones de los eslabones, las cuales requieren un tiempo adicional considerable para calcularlas.

Métodos de optimización

Los métodos incluidos en la tabla 5-5 como **de optimización** son un grupo diverso, y algunos tienen poco en común excepto el objetivo de encontrar un eslabonamiento que generará la trayectoria deseada. Todos permiten que se especifique un número teóricamente ilimitado de puntos de diseño, pero al hacer a *N* demasiado grande se incrementa el tiempo de cálculo y no mejora el resultado. Una limitación inherente a los métodos de optimización es que pueden converger a un mínimo local cerca de las condiciones iniciales. El resultado puede que no sea tan bueno como otros mínimos localizados en otros lugares del espacio *N* de las variables. Es posible encontrar el óptimo global, pero es más difícil y se lleva más tiempo.

Probablemente la primera aplicación (1966) de técnicas de optimización a este problema de síntesis de trayectoria de eslabonamiento de cuatro barras es la de Fox y Willmert,[1241] en la cual se minimiza el área entre las curvas deseadas y calculadas sujetas a un número de restricciones de igualdad y desigualdad. Las longitudes de eslabones se controlaron para que fueran positivas y menores que algunas máximas, para la condición de Grashof se controlaron fuerzas límites y pares de torsión, y se limitaron las localizaciones de los pivotes fijos. Se utilizó el método de Powell para determinar el mínimo de la función objetivo.

Youssef y colaboradores'[251] emplearon la suma de cuadrados, la suma de valores absolutos o el área de criterio de error para minimizar la función objetivo. Ordenaron la generación de trayectoria y función para eslabonamientos de lazo simple (de cuatro barras) o de lazo múltiple (más de cuatro barras), ambos con juntas de pasador y deslizantes. Permitieron que se impusieran restricciones en los rangos admisibles de longitudes de eslabones y ángulos, cualquiera de los cuales también puede mantenerse constante durante la iteración. En la figura 5-11[25] se muestra un ejemplo de optimización realizado con este método para 19 puntos uniformemente espaciados a lo largo de

una trayectoria deseada de acoplador de eslabonamiento de cuatro barras. Otro ejemplo de este método es el eslabonamiento de 10 barras de manivela-corredera que se muestra en la figura 5-12,[251] en el que se observa la curva de acoplador deseada y real generada por el punto *P* para 24 puntos correspondientes, con el fin de igualar los incrementos del ángulo de manivela de entrada.

Nolle y Hunt[9] dedujeron expresiones analíticas que conducen a un sistema de 10 ecuaciones lineales simultáneas no homogéneas cuya solución ofrece valores para todas las variables independientes. Utilizaron un enfoque de mínimos cuadrados para la optimización y también admitieron la temporización específica de la manivela de entrada para cada posición en el acoplador. Como sus ecuaciones son lineales la convergencia es rápida, pues sólo requiere aproximadamente un segundo por iteración.

Kramer y Sandor[126], [27] describieron una variante en la técnica de punto de precisión, la cual denominaron *síntesis de precisión selectiva* (SPS). Ésta no obedece el requerimiento de que la curva pase exactamente por los puntos de precisión cuando define las "proximidades de exactitud" alrededor de cada punto. La dimensión de estas zonas de tolerancia es diferente para cada punto, y se utilizan más de nueve puntos. Los autores señalaron que a menudo la correspondiente exacta a un sistema de puntos no se necesita en aplicaciones de ingeniería, y si teóricamente fuera así, estaría comprometida por las tolerancias de fabricación.

El enfoque SPS es conveniente para cualquier eslabonamiento constructivo desde díadas o tríadas y así como puede acomodar eslabonamientos de seis barras y de cinco barras con engranaje, también acomoda de cuatro barras. La generación de función, de movimiento, o de trayectoria de eslabonamientos de cuatro barras (con temporización prescrita) pueden sintetizarse al utilizar el enfoque de forma estándar que considera las tres formas equivalentes en términos de formulación de ecuaciones. Los mecanismos espaciales también se acomodan. Las soluciones son estables y menos sensibles a los cambios pequeños en los datos que en los métodos de punto de precisión. Krishnamurthi y colaboradores[128] extendieron el enfoque SPS al utilizar un sistema de teoría difusa, el cual da una trayectoria de mecanismos lo más cercana posible a los puntos especificados para un punto de inicio dado; pero es sensible a la selección del punto de inicio y puede encontrar locales óptimos en lugar de globales.

Mirth[129] proporcionó una variación en la técnica de SPS de Kramer denominada síntesis de posición de cuasiprecisión, la cual emplea tres posiciones de precisión y *N* cuasiposiciones que se definen como zonas de tolerancia. Este enfoque conserva las ventajas computacionales del enfoque de Burmester (punto de precisión), al tiempo que permite la especificación de un gran número de puntos para mejorar y perfeccionar el diseño.

Conté y colaboradores,[30] y Kakatsios y Tricamo[31], [32] describieron los métodos para satisfacer un pequeño número de puntos de precisión y optimizar las características dinámicas del eslabonamiento simultáneamente. Las longitudes de eslabones se regulan a una dimensión razonable, y simultáneamente se minimizan la condición limitada de Grashof, el par de torsión de entrada, la dinámica de cojinetes y fuerzas de reacción, y los momentos de sacudimiento.

Muchos de los métodos de optimización listados anteriormente utilizan algunas formas de limitaciones de desigualdad para limitar los valores admisibles de parámetros de diseño, tales como las longitudes de eslabones y ángulos de transmisión. A menudo estas limitaciones causan problemas que conducen hacia la no convergencia o a los

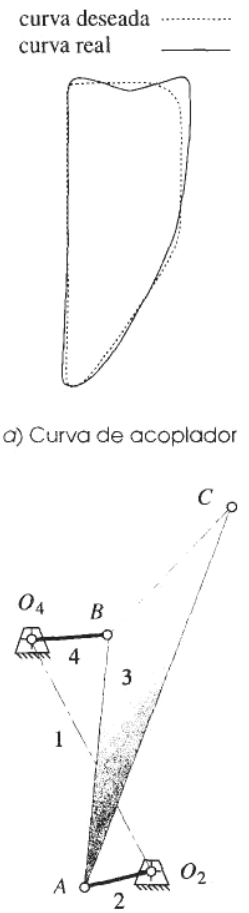


FIGURA 5-11
Eslabonamiento sintetizado para generar una curva de acoplador deseada mediante un método de optimización
Reproducido de "Optimal Kinematic Synthesis of Planar Linkage Mechanisms"[25] con la autorización de la Professional Engineering Publishing, Bury St. Edmunds, Reino Unido

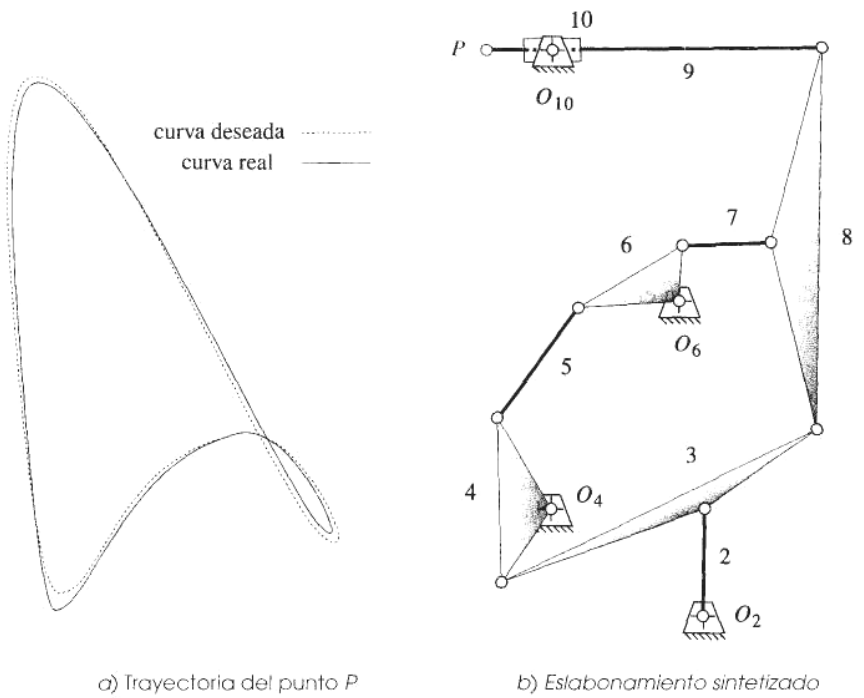


FIGURA 5-12

Ejemplo de la síntesis de un mecanismo de 10 eslabones para generar una trayectoria de acoplador *Reproducido de "Optlmal Klnemotic Synthesis of Planar Llnkage Mechanisms"[125]' con la outorización de la Professional Engineerlng Publishing, Bury St. Edmunds, Reino Unido*

defectos CBO. Angeles y colaboradores[33] describieron un método ilimitado de mínimos cuadrados no lineales que evita estos problemas. Se emplean los métodos de continuación y se requiere una buena convergencia sin defectos de rama.

Aviles y colaboradores[34] propusieron un nuevo enfoque para el problema de síntesis de eslabonamientos que utiliza la energía elástica que se almacenaría en los eslabones si se permitiese que fueran deformados elásticamente, tal como el punto de acoplador alcanza la localización deseada. La función objetivo se define como la condición mínima de energía en el sistema de eslabones deformados los cuales, por supuesto, se encontrarán cuando sus posiciones de cuerpo rígido se aproximen más a la trayectoria deseada. Éste es esencialmente un enfoque de método de elemento finito que considera que cada eslabón es un elemento de barra. El método de Newton se emplea para la iteración, el cual, en este caso, converge mínimamente incluso cuando la suposición inicial está lejos de llegar a la solución.

Fang[35] describió un enfoque inusual para la síntesis de eslabonamientos mediante algoritmos genéticos. Los algoritmos genéticos emulan a los organismos vivos en la manera en que se adaptan a la naturaleza. Inicialmente se genera una población de "organismos" aleatorios, lo que representa que el sistema debe optimizarse. Esto toma la

forma de un pedazo de cuerda, análoga a los cromosomas de una célula, denominada la primera generación. Se realizan dos operaciones sobre una población dada llamadas sobrecruzamiento y mutación. El sobrecruzamiento combina parte del "código genético" del organismo de un "padre" con parte del código del organismo de una "madre". La mutación modifica valores del código genético en puntos aleatorios en el pedazo de cuerda. Se crea una función objetivo que expresa la "conveniencia" del organismo para la tarea deseada. Cada generación sucesiva se produce al seleccionar los organismos que mejor se adapten a la tarea. La población "evoluciona" a través de generaciones hasta que se encuentre un criterio de terminación basado en la función objetivo.

Algunas ventajas de este enfoque son que investiga de población en población en lugar de punto en punto, y esto hace menos problable que se detenga en los óptimos locales. También la población conserva un número de soluciones válidas en lugar de converger con sólo una. Las desventajas son largos lapsos en la computadora debido al gran número de evaluaciones de función objetivo requeridas. No obstante, es más eficiente que la manera aleatoria o la búsqueda exhaustiva de algoritmos. Todos los otros enfoques de optimizaciones listados aquí tratan solamente con síntesis dimensionales, pero los algoritmos genéticos tratan, además, con síntesis tipo.

Ullah y Kota[36] [37] separaron el problema de síntesis de eslabonamientos en dos pasos. El primer paso busca una igualdad aceptable para la forma de la curva deseada sin considerar la dimensión, orientación o localización de la curva en el espacio. Una vez que una curva de forma conveniente y su eslabonamiento asociado se encuentran, el resultado puede traducirse, rotarse y escalarse como se desee. Este enfoque simplifica la tarea de optimización, en comparación con los algoritmos que buscan una optimización estructural, la cual incluye dimensión, orientación y localización de la curva de acoplador, todas al mismo tiempo en la función objetivo. Los descriptores de Fourier se utilizan para describir la forma de la curva como se hace en muchos patrones, pues iguala aplicaciones para las tareas de ensamble automatizado, de robótica por ejemplo. Se emplea una optimización global de algoritmos fortuita que evita la convergencia no deseada de los mínimos locales subóptimos.

Bawab y colaboradores[1381] describieron un enfoque que sintetiza automáticamente (dentro del programa de software) un eslabonamiento de cuatro barras para dos, tres o cuatro posiciones mediante la teoría de Burmester, y elimina todas las soluciones que tienen defectos CBO. Los límites en las relaciones de longitud de eslabón y ángulo de transmisión se especifican, y la función objetivo se basa en estos criterios con factores de peso aplicados. Las regiones en el plano dentro de las que están los pivotes fijos o móviles deben localizarse y especificarse.

5.14 REFERENCIAS

1 **Sandor, G. N.** (1959). "A General Complex Number Method for Plane Kinematic Synthesis with Applications". Tesis doctoral, Universidad de Columbia, University Microfilms, Ann Arbor, Mich.

2 **Erdman,** A. **G.** (1981). "Three and Four Precision Point Kinematic Synthesis of Planar Linkages". *Mechanism and Machine Theory,* núm. 16, pp. 227-245.

3 **Kaufman, R.** E. (1978). "Mechanism Design by Computer". *Machine Design,* 26 de octubre de 1978, pp. 94-100.

4 **Loerch,** R. J. (1975). "Synthesis of Fourbar Linkages with Specified Ground Pivots". *Proc. 4th Applied Mechanisms Conference,* Chicago, 111., pp. 10.1-10.6.

5 **Loerch,** R. J. y **colaboradores** (1979). "On the Existence of Circle-Point and Center-Point Circles for Three Position Dyad Synthesis". *Journal of Mechanical Design,* núm. **101(3),** pp. 554-562.

6 **Erdman, A. G.** y **G. N. Sandor** (1997). *Mechanism Design: Analysis and Synthesis,* vol. 1, 3a. ed. y *Advanced Mechanism Design, Analysis and Synthesis,* vol. 2 (1984). Prentice Hall: Upper Saddle River, NJ.

7 **Jennings,** A. (1977). *Matrix Computation for Engineers and Scientists,* John Wiley and Sons: Nueva York.

8 **Erdman, A. G.** y **J.** E. **Gustafson** (1977). "LINCAGES: Linkage Interactive Computer Analysis and Graphically Enhanced Synthesis". ASME Paper: núm. 77-DTC-5.

9 **Nolle, H. y K. H. Hunt** (1971). "Optimum Synthesis of Planar Linkages to Genérate Coupler Curves". *Journal of Mechanisms,* núm 6, pp. 267-287.

10 **Freudenstein, F.** y **G. N. Sandor** (1959). "Synthesis of Path Generating Mechanisms by Means of a Programmed Digital Computer". *ASME Journal for Engineering in Industry,* núm. 81, p. 2.

11 **Suh, C. H.** y **C. W. Radcliffe** (1966). "Synthesis of Planar Linkages With Use of the Displacement Matrix". ASME Paper: 66-MECH-19, 9 pp.

12 **Morgan,** A. P. y A. J. **Sommese** (1987). "Computing all Solutions to Polynomial Systems Using Homotopy Continuation". *Applied Mathematics and Computation,* núm. 24, pp. 115-138.

13 **Morgan,** A. P. (1987). *Solving Polynomial Systems Using Continuation for Scientific and Engineering Problems,* Prentice-Hall: Upper Saddle River, NJ.

14 **Morgan, A. P.** y **C. W. Wampler** (1990). "Solving a Planar Fourbar Design Problem Using Continuation". *Journal of Mechanical Design,* núm. **112(4),** pp. 544.

15 **Subbian, T.** y **J. D. R. Flugrad** (1991). "Fourbar Path Generation Synthesis by a Continuation Method". *Journal of Mechanical Design,* núm. **113(1),** p. 63.

16 **Subbian, T. y J. D. R. Flugrad** (1993). "Five Position Triad Synthesis with Applications to Four and Sixbar Mechanisms". *Journal of Mechanical Design,* núm. **115(2),** pp. 262.

17 **Subbian, T.** y **J. D. R. Flugrad** (1994). "Six and Seven Position Triad Synthesis Using Continuation Methods". *Journal of Mechanical Design,* núm. **116(2),** pp. 660.

18 **Wampler, C. W.** y **colaboradores** (1992). "Complete Solution of the Nine-Point Path Synthesis Problem for Fourbar Linkages". *Journal of Mechanical Design,* núm. **114(1),** p. 153.

19 **Tylaska,** T. y K. **Kazerounian** (1994). "Synthesis of Defect-Free Sixbar Linkages for Body Guidance Through Up to Six Finitely Separated Positions". *Proc. of 23rd Biennial Mechanisms Conference,* Minneapolis, Minn. p. 369.

20 **Tylaska,** T. y K. **Kazerounian** (1993). "Design of a Six Position Body Guidance Watt I Sixbar Linkage and Related Concepts". *Proc. of 3rd Applied Mechanisms and Robotics Conference,* Cincinnati, pp. 93-101.

21 **Blechschmidt, J. L.** y **J. J. Uicker** (1986). "Linkage Synthesis Using Algebraic Curves". *J. Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design,* núm. **108,** diciembre de 1986, pp. 543-548.

22 **Ananthasuresh, G. K. y S. Kota** (1993). "A Renewed Approach to the Synthesis of Fourbar Linkages for Path Generation via the Coupler Curve Equation". *Proc. of 3rd Applied Mechanisms and Robotics Conference,* Cincinnati, pp. 83-91.

23 **Nolle, H.** (1975). "Linkage Coupler Curve Synthesis: A Historical Review — III. Spatial Synthesis and Optimization". *Mechanism and Machine Theory,* núm. 10, pp. 41-55.

24 **Fox, R. L.** y **K. D. Willmert** (1967). "Optimum Design of Curve-Generating Linka ges with Inequality Constraints". *Journal of Engineering for Industry,* febrero de 1967, pp. 144-152.

25 Youssef, A. H. y **colaboradores** (1975). "Optimal Kinematic Synthesis of Planar Linkage Mechanisms". *I. Mech. E.,* pp. 393-398.

26 **Kramer, S. N. y G. N. Sandor** (1975). "Selective Precisión Synthesis—A General Method of Optimization for Planar Mechanisms". *Trans ASME J. Eng. for Industry,* núm. 97B(2), pp. 689-701.

27 **Kramer,** S. N. (1987). "Selective Precisión Synthesis-A General Design Method for Planar and Spatial Mechanisms". *Proc. of 7th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms,* Sevilla, España.

28 **Krishnamurthi,** S. y **colaboradores** (1993). "Fuzzy Synthesis of Mechanisms". *Proc. of' 3rd Applied Mechanisms and Robotics Conference,* Cincinnati, pp. 94-101.

29 **Mirth, J.** A. (1994). "Quasi-Precision Position Synthesis of Fourbar Linkages". *Proc. of 23rd Biennial Mechanisms Conference,* Minneapolis, Minn., p. 215.

30 **Conté, F. L.** y **colaboradores** (1975). "Optimum Mechanism Design Combining Kinematic and Dynamic-Force Considerations". *Journal of Engineering for Industry,* mayo de 1975, pp. 662-670.

31 **Kakatsios,** A. J. y S. J. **Tricamo** (1987). "Precision Point Synthesis of Mechanisms with Optimal Dynamic Characteristics". *Proc. of 7th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms,* Sevilla, España, pp. 1041-1046.

32 **Kakatsios,** A. J. y S. J. **Tricamo** (1986). "Design of Planar Rigid Body Guidance Mechanisms with Simultaneously Optimized Kinematic and Dynamic Characteristics". *ASME Paper.* 86-DET-142.

33 **Angeles,** J. y **colaboradores** (1988). "An Unconstrained Nonlinear Least-Square Method of Optimization of RRRR Planar Path Generators". *Mechanism and Machine Theory,* núm. 23(5), pp. 343-353.

34 **Aviles,** R. y **colaboradores** (1994). "An Energy-Based General Method for the Optimum Synthesis of Mechanisms". *Journal of Mechanical Design,* núm. **116(1),** p. 127.

35 **Fang, W.** E. (1994). "Simultaneous Type and Dimensional Synthesis of Mechanisms by Genetic Algorithms". *Proc. of 23rd Biennial Mechanisms Conference,* Minneapolis, Minn., p. 36.

36 **Ullah, I. y S. Kota** (1994). "A More Effective Formulation of the Path Generation Mechanism Synthesis Problem". *Proc. of 23rd Biennial Mechanisms Conference,* Minneapolis, Minn., p. 239.

37 **Ullah, I. y S. Kota** (1996). "Globally-Optimal Synthesis of Mechanisms for Path Generation Using Simulated Annealing and Powell's Method". *Proc. of ASME Design Engineering Conference,* Irvine, Cal., pp. 1-8.

38 **Bawab,** S. y **colaboradores** (1997). "Automatic Synthesis of Crank Driven Fourbar Mechanisms for Two, Three, or Four Position Motion Generation". *Journal of Mechanical Design,* núm. **119,** junio de 1997, pp. 225-231.

5.15 PROBLEMAS

Observe que los problemas de síntesis de tres posiciones siguientes pueden resolverse utilizando una calculadora con resolución de matrices, un resolvedor de ecuaciones como Mathcad, Matlab o TKSolver, el programa MATRIX o el programa FOURBAR. Los problemas de síntesis de dos posiciones se resuelven con una calculadora de cuatro funciones.

5-1 Resuelva de nuevo el problema 3-3 utilizando los métodos analíticos de este capítulo.

5-2 Resuelva de nuevo el problema 3-4 utilizando los métodos analíticos de este capítulo.

5-3 Resuelva de nuevo el problema 3-5 utilizando los métodos analíticos de este capítulo.

5-4 Resuelva de nuevo el problema 3-6 utilizando los métodos analíticos de este capítulo.

5-5 Véase el proyecto P3-8. Defina tres posiciones del barco y sintetice analíticamente un eslabonamiento para moverlo por las mismas.

5-6 Véase el proyecto P3-20. Defina tres posiciones del depósito de basura y sintetice analíticamente un eslabonamiento para moverlo por las mismas. Los pivotes fijos deben localizarse en la camioneta existente.

5-7 Véase el proyecto P3-7. Defina tres posiciones del monitor de la computadora y sintetice analíticamente un eslabonamiento para moverlo por éstas. Los pivotes fijos deben localizarse en el piso o en el muro.

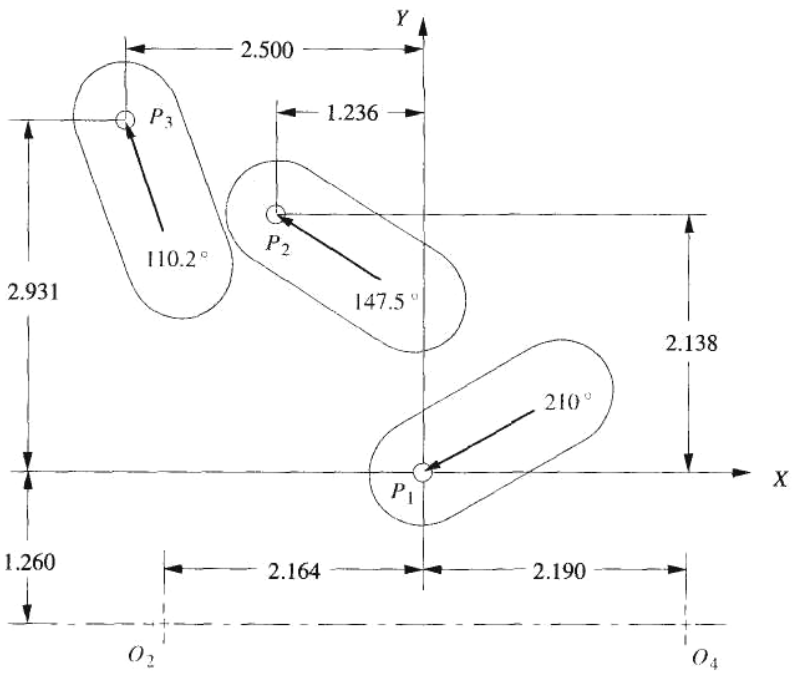


FIGURA P5-1

Datos para los problemas 5-8 a 5-11

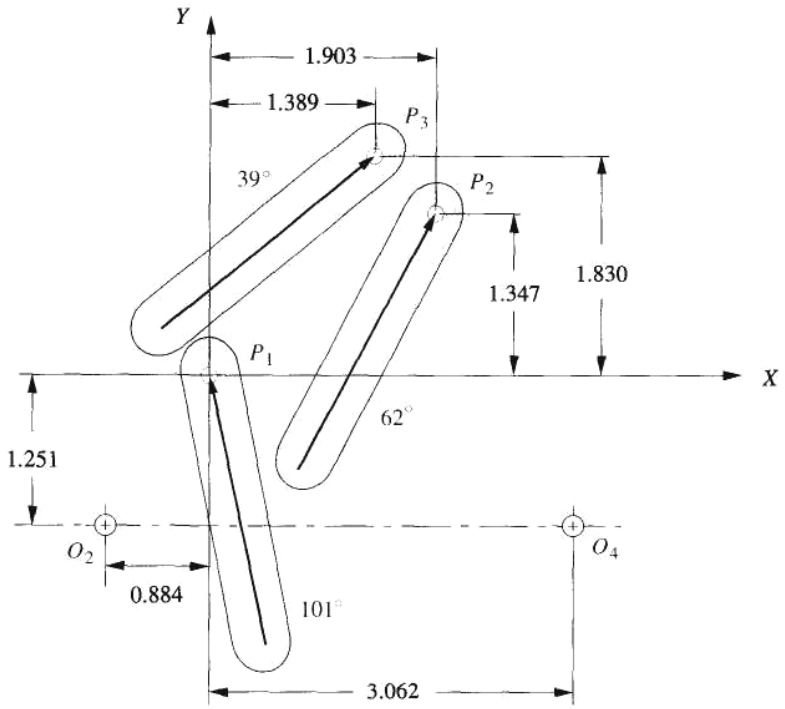


FIGURA P5-2

Datos para los problemas 5-12 a 5-16

*†5-8 Diseñe un eslabonamiento para que el cuerpo de la figura P5-1 pase por las dos posiciones P_1 y P_2 a los ángulos mostrados. Utilice la síntesis analítica sin considerar los pivotes fijos. Sugerencia: Ensaye con los valores de opción libre: $z = 1.075$, $\phi = 204.4°$, $\beta_2 = -27°$, $s = 1.24$, $\psi = 74°$, $\gamma_2 = -40°$.

†5-9 Diseñe un eslabonamiento para que el cuerpo de la figura P5-1 pase por las dos posiciones P_2 y P_3 a los ángulos mostrados. Emplee la síntesis analítica sin considerar los pivotes fijos. Sugerencia: Ensaye primero una solución gráfica burda para crear valores reales para las opciones libres.

†5-10 Diseñe un eslabonamiento para que el cuerpo de la figura P5-1 pase por las tres posiciones P_1, P_2 y P_3 a los ángulos mostrados. Emplee la síntesis analítica sin considerar los pivotes fijos indicados. Sugerencia: Ensaye con los valores de opción libre: $\beta_2 = 30°$, $\beta_3 = 60°$, $\gamma_2 = -10°$, $\gamma_3 = 25°$.

*†5-11 Diseñe un eslabonamiento para que el cuerpo de la figura P5-1 pase por las tres posiciones P_1, P_2 y P_3 a los ángulos mostrados. Emplee la síntesis analítica y diséñela para los pivotes fijos.

†5-12 Diseñe un eslabonamiento para que el cuerpo de la figura P5-2 pase por las dos posiciones P_1 y P_2 a los ángulos mostrados. Utilice la síntesis analítica sin considerar

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para solucionarse con programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad* o *TKSolver*. En la mayoría de los casos la solución se puede verificar con el programa FOURBAR.

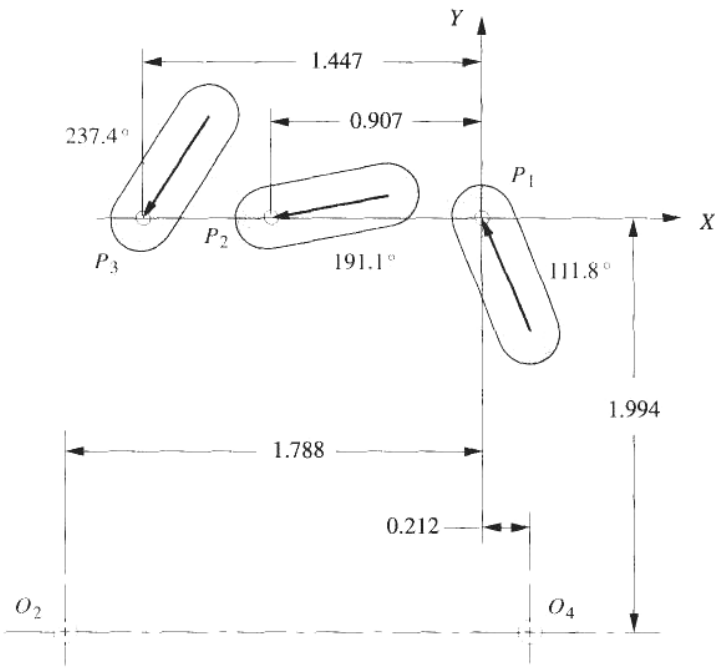


FIGURA P5-3
Datos para los problemas 5-16 a 5-20

los pivotes fijos. Sugerencia: Ensaye con los valores de opción libre $z = 2$, $\phi = 150°$, $\beta_2 = 30°$, $s = 3$, $\psi = -50°$, $\gamma_2 = 40°$.

†5-13 Diseñe un eslabonamiento para que el cuerpo de la figura P5-2 pase por las dos posiciones P_2 y P_3 a los ángulos mostrados. Utilice la síntesis analítica sin considerar los pivotes fijos. Sugerencia: Ensaye primero una solución gráfica burda para crear valores realistas de las opciones libres.

†5-14 Diseñe un eslabonamiento para que el cuerpo de la figura P5-2 pase por las tres posiciones P_1, P_2 y P_3 a los ángulos indicados. Emplee la síntesis analítica sin considerar los pivotes fijos.

*†5-15 Diseñe un eslabonamiento para que el cuerpo de la figura P5-2 pase por las tres posiciones P_1, P_2 y P_3 a los ángulos indicados. Emplee la síntesis analítica y diséñela para los pivotes fijos.

†5-16 Diseñe un eslabonamiento para llevar el cuerpo de la figura P5-3 por las dos posiciones P_1 y P_2 a los ángulos mostrados. Emplee la síntesis analítica sin considerar los pivotes fijos.

†5-17 Diseñe un eslabonamiento que lleve el cuerpo de la figura P5-3 por las dos posiciones P_2 y P_3 a los ángulos mostrados. Emplee la síntesis analítica sin considerar los pivotes fijos.

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para solucionarse con programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad* o *TKSolver*. En la mayoría de los casos la solución se puede verificar con el programa FOURBAR.

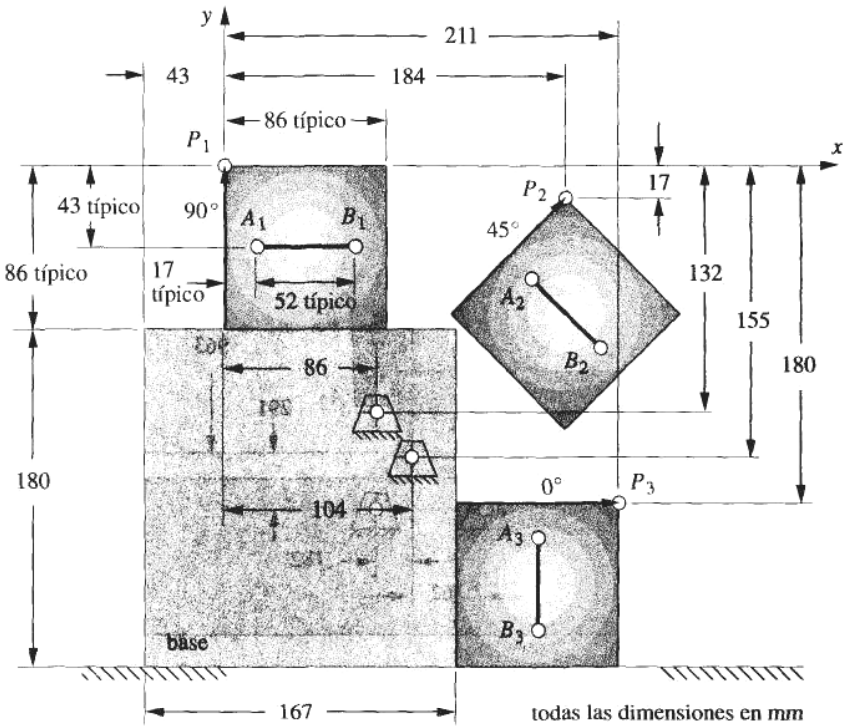


FIGURA P5-4

Datos para los problemas 5-21 a 5-26

†5-18 Diseñe un eslabonamiento para que el cuerpo de la figura P5-3 pase por las tres posiciones P_1, P_2 y P_3 a los ángulos mostrados. Emplee la síntesis analítica sin considerar los pivotes fijos.

*†5-19 Diseñe un eslabonamiento para qut el cuerpo de la figura P5-3 pase por las tres posiciones P_1, P_2 y P_3 a los ángulos mostrados. Emplee la síntesis analítica y diseñe para los pivotes fijos.

†5-20 Realice un programa para generar y granear los círculos de punto circunferencial y de punto central del problema 5-19, utilizando un resolvedor de ecuaciones o cualquier lenguaje de programación.

†5-21 Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para llevar la caja de la figura P5-4 de la posición 1 a la 2 sin considerar los pivotes fijos. Utilice los puntos *A y B* para los puntos de unión. Determine el rango del ángulo de transmisión. Los pivotes fijos deben ubicarse en la base.

†5-22 Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para llevar la caja de la figura P5-4 de la posición 1 a la 3 sin considerar los pivotes fijos. Utilice los puntos *A* y *B* para los puntos de unión. Determine el rango del ángulo de transmisión. Los pivotes fijos deben ubicarse en la base.

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para solucionarse con programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad o TKSolver.* En la mayoría de los casos la solución se puede verificar con el programa FOURBAR.

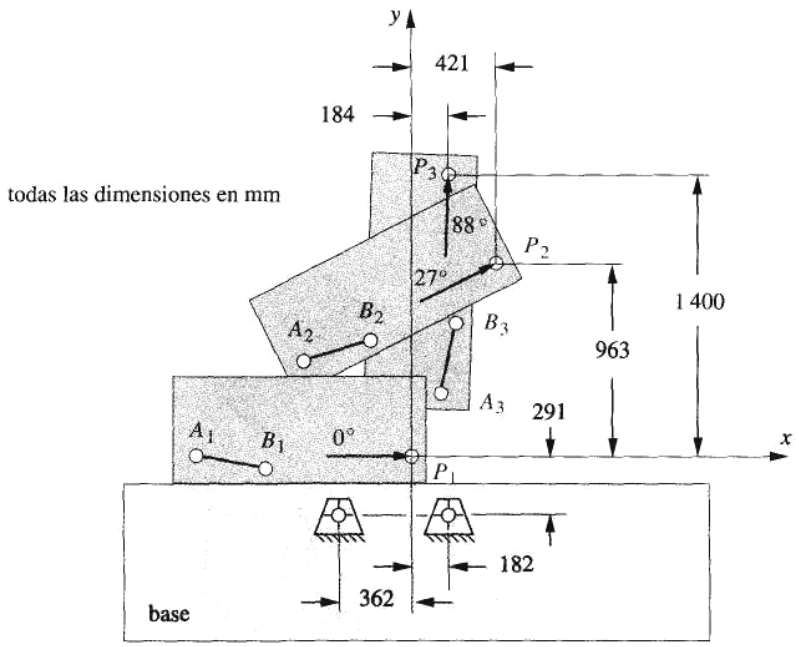


FIGURA P5-5

Datos para los problemas 5-27 a 5-30

†5-23 Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para llevar la caja de la figura P5-4 de la posición 2 a la 3 sin considerar los pivotes fijos. Utilice los puntos *A y B* para los puntos de unión. Determine el rango del ángulo de transmisión. Los pivotes fijos deben ubicarse en la base.

†5-24 Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para llevar la caja de la figura P5-4 por las tres posiciones mostradas en su orden numérico sin considerar los pivotes fijos. Determine el rango del ángulo de transmisión. Utilice cualquiera de los puntos en el objeto como los puntos de unión. Los pivotes fijos deben ubicarse en la base.

†5-25 Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para llevar la caja de la figura P5-4 por las tres posiciones mostradas en su orden numérico, sin considerar los pivotes fijos indicados. Utilice los puntos *A y B* para los puntos de unión. Determine el rango del ángulo de transmisión. Agregue una díada impulsora con una manivela para controlar el movimiento del eslabonamiento de cuatro barras, de manera que no pueda moverse más allá de las posiciones uno y tres.

*†5-26 Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para llevar la caja de la figura P5-4 por las tres posiciones mostradas en su orden numérico empleando los pivotes fijos indicados. Determine el rango del ángulo de transmisión. Agregue una díada impulsora con una manivela para controlar el movimiento del eslabonamiento de cuatro barras, de tal manera que no pueda moverse más allá de las posiciones uno y tres.

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para solucionarse con programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad* o *TKSolver*. En la mayoría de los casos la solución se puede verificar con el programa FOURBAR.

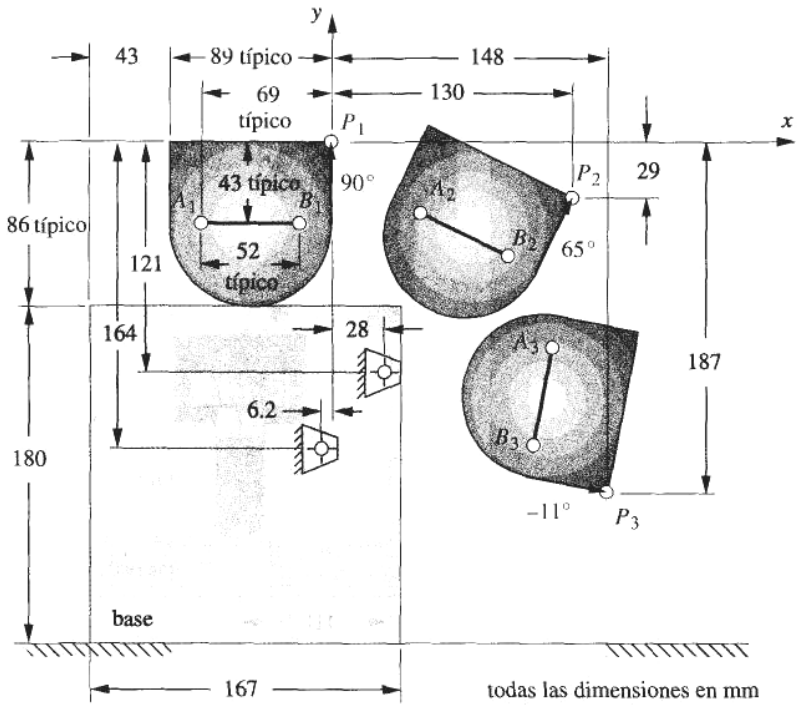


FIGURA P5-6

Datos para los problemas 5-31 a 5-33

†5-27 Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para llevar el objeto de la figura P5-5 por las tres posiciones mostradas en su orden numérico sin considerar los pivotes fijos. Utilice cualquier punto en el objeto como punto de unión. Determine el rango del ángulo de transmisión.

†5-28 Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para llevar el objeto de la figura P5-5 por las tres posiciones mostradas en su orden numérico sin considerar los pivotes fijos. Utilice los puntos *A* y *B* para los puntos de unión. Los pivotes fijos deben ubicarse en la base. Determine el rango del ángulo de transmisión.

†5-29 Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para llevar el objeto de la figura P5-5 por las tres posiciones mostradas en su orden numérico empleando los pivotes fijos indicados. Determine el rango del ángulo de transmisión.

†5-30 Agregue a la solución del eslabonamiento del problema 5-29 una díada impulsora con una manivela para controlar el movimiento del eslabonamiento de cuatro barras, de tal manera que no se mueva más allá de las posiciones uno y tres.

†5-31 Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para llevar el objeto de la figura P5-6 a través de las tres posiciones mostradas en su orden numérico sin considerar los pivotes fijos indicados. Utilice los puntos *A* y *B* como puntos de unión. Determine el rango

† Estos problemas son adecuados para solucionarse con programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad* o *TKSolver*. En la mayoría de los casos la solución se puede verificar con el programa FOURBAR.

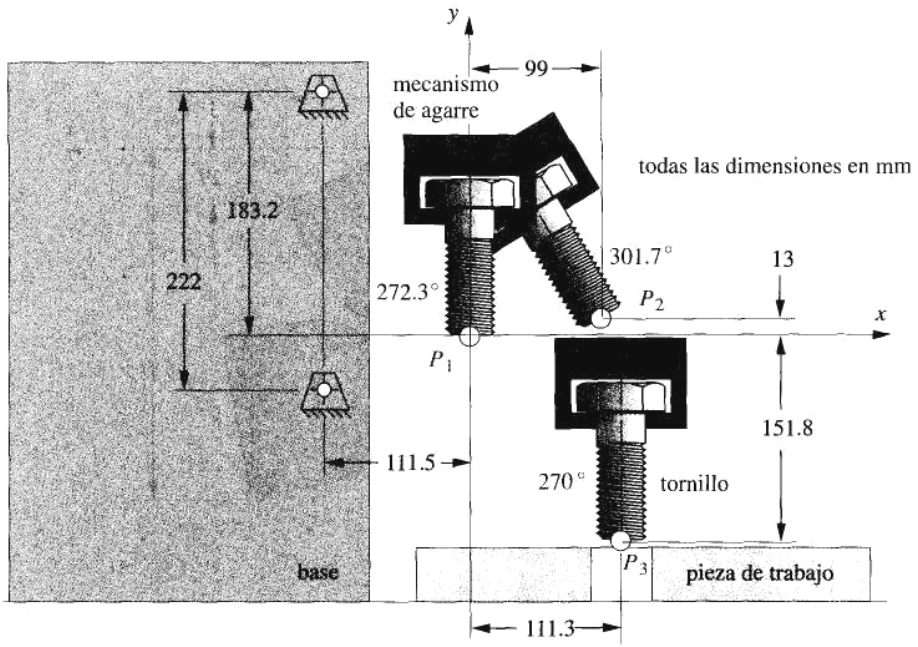


FIGURA P5-7

Datos para los problemas 5-34 a 5-36

del ángulo de transmisión. Agregue una díada impulsora con una manivela para controlar el movimiento del eslabonamiento de cuatro barras de tal manera que no pueda moverse más allá de las posiciones uno y tres.

†5-32 Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para llevar el objeto de la figura P5-6 a través de las tres posiciones mostradas en su orden numérico sin considerar los pivotes fijos indicados. Utilice cualquier punto en el objeto como puntos de unión. Los pivotes fijos deben localizarse en la base. Determine el rango del ángulo de transmisión. Agregue una díada impulsora con una manivela para controlar el movimiento del eslabonamiento de cuatro barras de tal manera que no pueda moverse más allá de las posiciones uno y tres.

†5-33 Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para llevar el objeto de la figura P5-6 a través de las tres posiciones mostradas en su orden numérico empleando los pivotes fijos indicados. Determine el rango del ángulo de transmisión. Agregue una díada impulsora con una manivela para controlar el movimiento del eslabonamiento de cuatro barras de tal manera que no pueda moverse más allá de las posiciones uno y tres.

†5-34 Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para llevar el tornillo de la figura P5-7 de las posiciones 1 a la 2 y de la 2 a la 3 sin considerar los pivotes fijos indicados. El tornillo se desplaza en el mecanismo de agarre en la dirección *z* (hacia dentro del papel). El mecanismo de agarre sujeta el tornillo, y el eslabonamiento lo mueve a la

† Estos problemas son adecuados para solucionarse con programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad* o *TKSolver*. En la mayoría de los casos la solución se puede verificar con el programa FOURBAR.

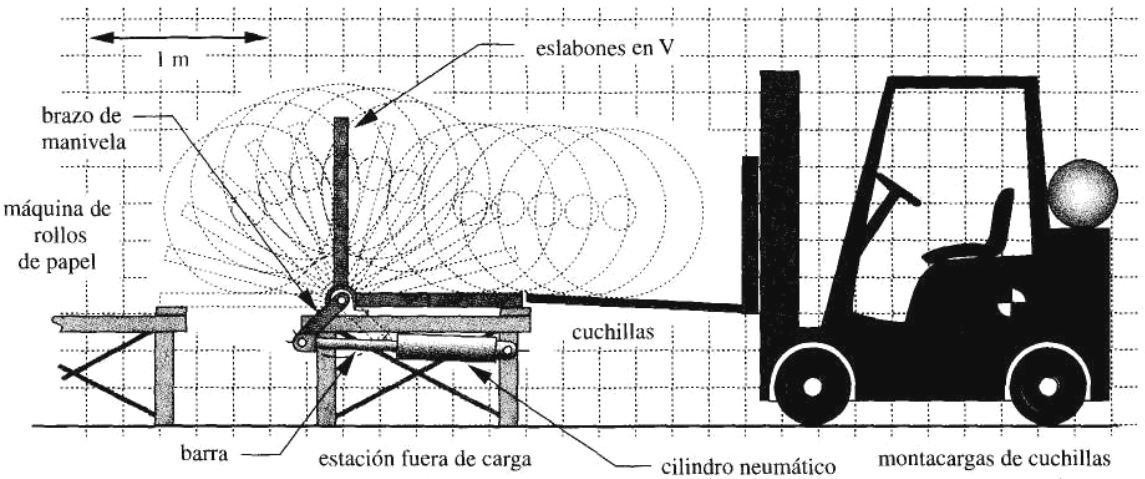


FIGURA P5-8
Problema 5-37

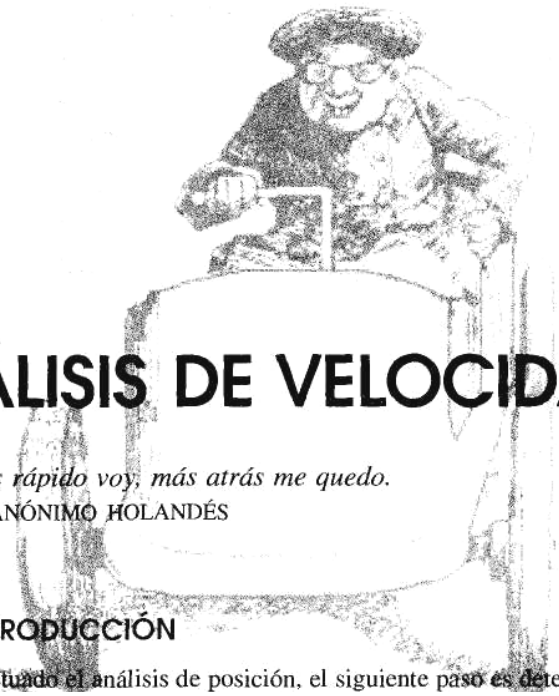
posición 3 para que se inserte en el agujero. Un segundo grado de libertad dentro del ensamble del mecanismo de agarre (no mostrado) empuja el tornillo dentro del agujero. Extienda el ensamble de agarre tanto como sea necesario para incluir los pivotes móviles. Éstos deben estar en, o próximos, al ensamble del mecanismo de agarre, y los pivotes fijos deben estar en la base. Sugerencia: Ensaye primero con los valores de: $\beta_2 = 70°$, $\beta_3 = 140°$, $\gamma_2 = -5°$, $\gamma_3 = -49°$.

†5-35 Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras para llevar el tornillo de la figura P5-7 de las posiciones 1 a la 2 y de la 2 a la 3 al utilizar las ubicaciones de los pivotes fijos indicados. Extienda el ensamble de agarre tanto como sea necesario para incluir los pivotes móviles. Éstos deben estar en, o próximos a, el ensamble del mecanismo de agarre. Véase el problema 5-34 para mayor información.

5-36 Agregue a la solución del eslabonamiento del problema 5-35 una díada impulsora con una manivela para controlar el movimiento de su eslabonamiento de cuatro barras, de tal manera que no pueda moverse más allá de las posiciones uno y tres.

5-37 La figura P5-8 muestra un mecanismo fuera de carga para rollos de papel. El eslabón en V gira a 90° por un eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera impulsado por aire. Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras de juntas de pasador para remplazar la estación fuera de carga existente y realice esencialmente la misma función. Elija tres posiciones del rollo incluyendo sus dos posiciones de los extremos y sintetice un mecanismo sustituto. Utilice un eslabón similar al eslabón V presente como uno de los eslabones. Agregue una díada impulsora para limitar el movimiento al rango deseado.

† Estos problemas son adecuados para solucionarse con programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad o TKSolver.* En la mayoría de los casos la solución se puede verificar con el programa FOURBAR.



Capítulo 6

ANÁLISIS DE VELOCIDAD

Cuanto más rápido voy, más atrás me quedo.
ESCRITOR ANÓNIMO HOLANDÉS

6.0 INTRODUCCIÓN

Una vez efectuado el análisis de posición, el siguiente paso es determinar las velocidades de todos los eslabones y puntos de interés en el mecanismo. Se necesita saber las velocidades en el mecanismo o máquina para calcular la energía cinética almacenada a partir de $Mv^2/2$, y también como un paso para determinar las aceleraciones de eslabón necesarias en los cálculos de las fuerzas dinámicas. Existen muchos métodos y enfoques para encontrar las velocidades en mecanismos. En este capítulo se examinan sólo unos cuantos. Se comenzará por desarrollar métodos gráficos manuales, que a menudo son útiles para verificar la solución analítica más completa y exacta. Se investigan también las propiedades del centro instantáneo de velocidad, lo cual puede aclarar más el comportamiento de la velocidad de un mecanismo con muy poco esfuerzo. Finalmente, se obtiene la solución analítica para un eslabonamiento de cuatro barras y una manivela-corredera invertida como ejemplos de la solución general de ecuación de lazo vectorial para los problemas de análisis de velocidad. A partir de estos cálculos será posible establecer algunos índices de mérito para juzgar los diseños aunque aún estén sobre la mesa de dibujo (o en la computadora).

6.1 DEFINICIÓN DE VELOCIDAD

La velocidad se define como *la razón de cambio de la posición con respecto al tiempo.* La posición (R) es una cantidad vectorial, lo mismo que la velocidad. La velocidad puede ser **angular** o **lineal. La velocidad angular** se representa como ω y la **velocidad lineal** como V.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}; \qquad \mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} \tag{6.1}$$

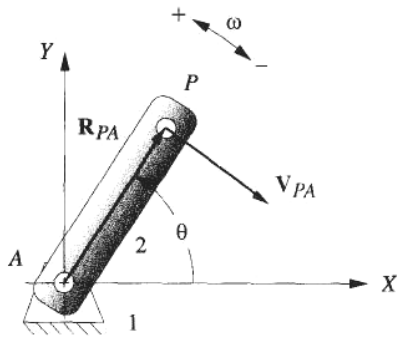


FIGURA 6-1

Un eslabón en rotación pura

La figura 6-1 muestra un eslabón *PA* en rotación pura, pivotado en el punto *A* en el plano xy. Su posición se define mediante el vector de posición $\mathbf{R}_{PA}$. Resulta interesante en la velocidad del punto *P* cuando el eslabón se somete a una velocidad angular ω. Si el vector de posición $\mathbf{R}_{PA}$ se representa como un número complejo en forma polar,

$$\mathbf{R}_{PA} = pe^{j\theta} \tag{6.2}$$

donde p es la longitud escalar del vector. Se puede derivar fácilmente para obtener:

$$\mathbf{V}_{PA} = \frac{d\mathbf{R}_{PA}}{dt} = pje^{j\theta}\frac{d\theta}{dt} = p\omega je^{j\theta} \tag{6.3}$$

Compare el lado derecho de la ecuación 6.3 con el lado derecho de la ecuación 6.2. Observe que después de derivar, se multiplicó la expresión de la velocidad por el operador complejo *j* (constante). Esto ocasiona una rotación de este vector de velocidad a 90° con respecto a la posición original del vector (véase también la figura *4-5b)).* Esta rotación de 90° es positiva, o sea, en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Sin embargo, la expresión de la velocidad también se multiplica por ω, la cual puede ser positiva o negativa. Como resultado, el vector de velocidad **girara 90°** a partir del ángulo θ del vector de posición en **una dirección indicada por el signo de** ω. Esto es sólo una verificación matemática de lo que usted ya sabía, esto es, que *la velocidad se encuentra siempre en dirección perpendicular al radio de rotación y es tangente a la trayectoria del movimiento,* como se muestra en la figura 6-1.

Al sustituir la identidad de Euler (ecuación 4.4a) en la ecuación 6.3 se obtienen las componentes real e imaginaria (o *x* y *y)* del vector de velocidad.

$$\mathbf{V}_{PA} = p\omega j(\cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta) = p\omega(-\text{sen}\,\theta + j\cos\theta) \tag{6.4}$$

Advierta que los términos seno y coseno tienen posiciones intercambiadas entre los términos real e imaginario, debido a que se multiplicaron por el coeficiente *j.* Esto evidencia la rotación de 90° del vector de velocidad en relación con el vector de posición. La componente anterior *x* se convirtió en la componente *y,* y la componente anterior *y* se convirtió en una componente *-x.* Estudie la figura 4-5b) para analizar por qué es así.

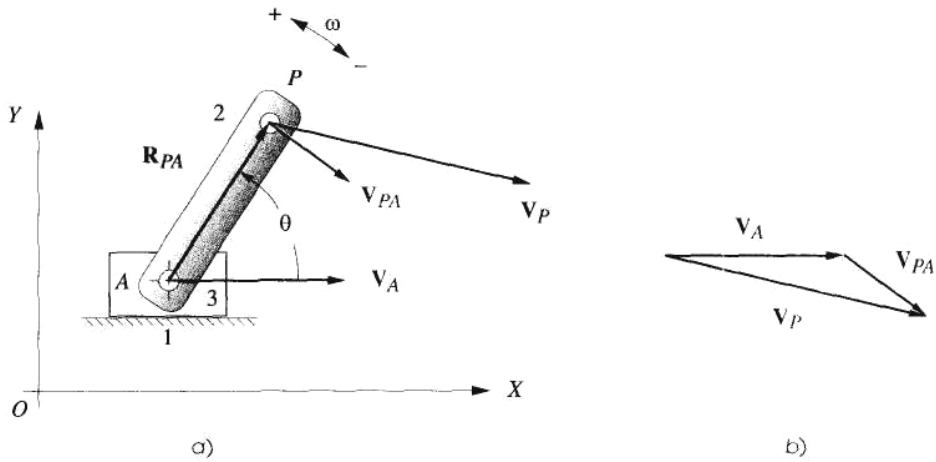


FIGURA 6-2
Diferencia de velocidad

La velocidad $\mathbf{V}_{PA}$ en la figura 6-1 se denomina **velocidad absoluta,** ya que se refiere a *A,* la cual es el origen de los ejes de coordenadas globales en dicho sistema. Como tal, se podría hacer referencia a ella como $\mathbf{V}_P$, sin el segundo subíndice que implica la referencia al sistema de coordenadas global. La figura *6-2a)* muestra un sistema diferente y ligeramente más complicado, en el cual el pivote *A* ya no es estacionario. Tiene una velocidad lineal conocida $\mathbf{V}_A$ como parte del elemento de traslación, el eslabón 3. Si ω no cambia, la velocidad del punto *P* con respecto a *A* permanecerá igual que antes, pero $\mathbf{V}_{PA}$ ya no se considera una velocidad absoluta. Ahora es una **diferencia de velocidad y debe** llevar el segundo subíndice como $\mathbf{V}_{PA}$. En seguida debe determinarse la velocidad absoluta $\mathbf{V}_P$ a partir de la **ecuación de diferencia de velocidad** cuya solución gráfica se muestra en la figura *6-2b):*

$$\mathbf{V}_{PA} = \mathbf{V}_P - \mathbf{V}_A \tag{6.5a}$$

al reordenar:

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{PA} \tag{6.5b}$$

Advierta la similitud de la ecuación 6.5 con la **ecuación de diferencia de posición 4.1.**

La figura 6-3 muestra dos cuerpos independientes *P y A* (podrían ser dos automóviles) que se mueven en el mismo plano. Si se conocen sus velocidades independientes $\mathbf{V}_P$ y $\mathbf{V}_A$, su **velocidad relativa** $\mathbf{V}_{PA}$ se determina a partir de la ecuación 6.5 ordenada algebraicamente como:

$$\mathbf{V}_{PA} = \mathbf{V}_P - \mathbf{V}_A \tag{6.6}$$

La solución gráfica para esta ecuación se indica en la figura 6-3b). Observe que es similar a la figura *6-2b),* excepto por un vector diferente que es la resultante.

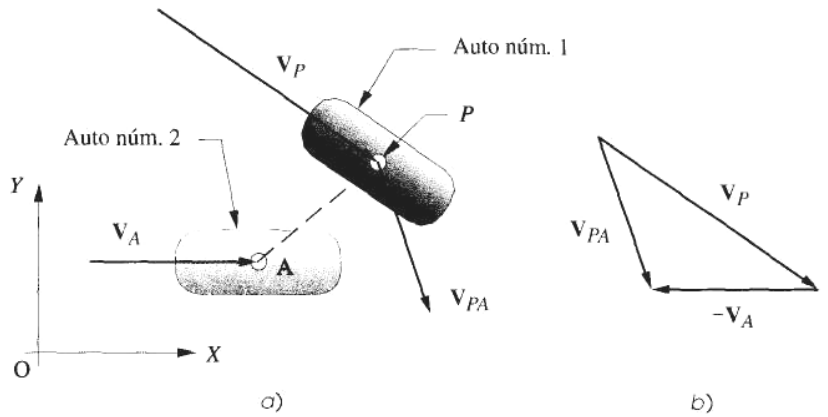


FIGURA 6-3
Velocidad relativa

Como se hizo para el análisis de posición se asignan distintos nombres a estos dos casos sin advertir el hecho de que se aplica la misma ecuación. Al repetir la definición de la sección 4.2, modificada para hacer referencia a la velocidad:

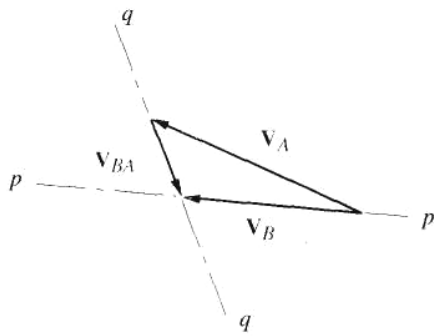
CASO 1. *Dos puntos en el mismo cuerpo* => **diferencia de velocidad**

CASO 2. *Dos puntos en cuerpos diferentes* => **velocidad relativa**

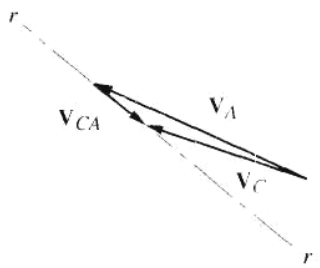
Se empleará esta distinción semántica cuando se analicen las velocidades de eslabonamiento y la velocidad de deslizamiento posteriormente en este capítulo.

6.2 ANÁLISIS GRÁFICO DE VELOCIDAD

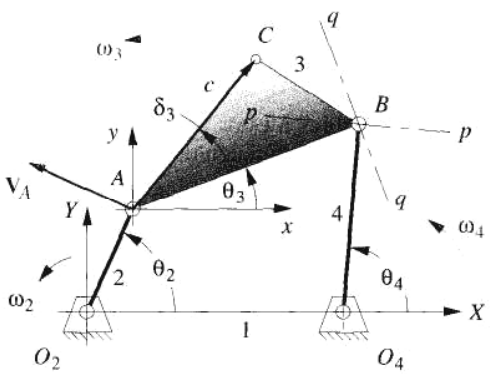
Antes de que los ingenieros contaran con calculadoras programables y computadoras, los métodos gráficos fueron la única manera práctica para resolver estos problemas de análisis de velocidad. Con algo de práctica y con las herramientas apropiadas, tales como una máquina de dibujo o un paquete *CAD,* se resuelven con bastante rapidez las velocidades de puntos particulares en un mecanismo para cualquier posición de entrada al trazar diagramas vectoriales. Sin embargo, éste es un procedimiento tedioso si se deben encontrar las velocidades de un mecanismo para muchas posiciones, pues cada nueva posición requiere que se trace un sistema completamente nuevo de diagramas vectoriales. Una parte muy pequeña del trabajo realizado para resolver las velocidades en la posición 1 se aprovecha para la posición 2 y así sucesivamente. No obstante, este método tiene más que un valor histórico, ya que proporciona una comprobación rápida de los resultados obtenida mediante un programa de computadora. Sólo se necesita efectuar esta comprobación para unas cuantas posiciones a fin de verificar la validez del programa. Asimismo, las soluciones gráficas proporcionan al estudiante principiante cierta retroalimentación visual de la solución, que puede servirle para comprender los principios fundamentales. Básicamente por esta razón se incluyen en este texto las soluciones gráficas, incluso ahora en esta "era de la computación".



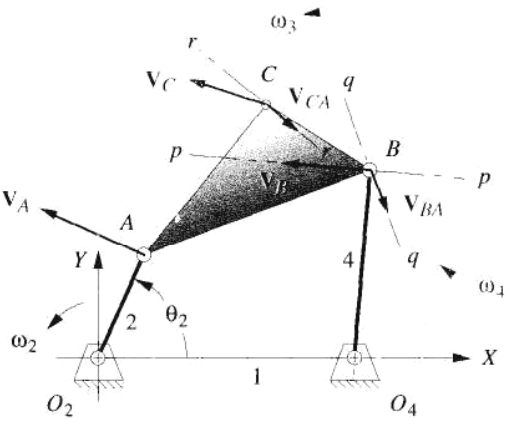
b) Diagrama de velocidad para los puntos *A* y *B*



c) Diagrama de velocidad para los puntos *A* y *C*



a) Eslabonamiento que muestra la velocidad del punto *A*



d) Eslabonamiento que muestra las velocidades de los puntos *A*, *B* y *C*

FIGURA 6-4

Solución gráfica para velocidades en un eslabonamiento de juntas de pasador

Para resolver gráficamente cualquier problema de análisis de velocidad se necesitan sólo dos ecuaciones, la 6.5 y la 6.7 (que son tan sólo la forma escalar de la ecuación 6.3):

$$|\mathbf{V}| = v = r\omega \tag{6.7}$$

Observe que la ecuación escalar 6.7 define sólo la **magnitud** (v) de la velocidad de cualquier punto en un cuerpo en rotación pura. En un análisis gráfico del CASO 1, la **dirección** del vector debida a la componente de rotación debe deducirse de la ecuación 6.3, para ser perpendicular al radio de rotación. Por lo tanto, si se conoce el centro de rotación, también se conoce la dirección de la componente de velocidad debida a dicha rotación y su sentido será consistente con la velocidad angular, ω, del cuerpo.

La figura 6-4 muestra un eslabonamiento de cuatro barras en una posición particular. Se desea resolver para las velocidades angulares de los eslabones 3 y 4 (ω_3, ω_4) y las velocidades lineales de los puntos A, B y C ($\mathbf{V}_A$, $\mathbf{V}_B$, $\mathbf{V}_C$). El punto C representa cualquier punto de interés general. Quizá C es un punto de acoplador. El método de solución es válido para cualquier punto en cualquier eslabón. Para resolver este problema es necesario conocer las *longitudes de todos los eslabones,* las *posiciones angulares de todos los eslabones* y la *velocidad instantánea de entrada de cualquier eslabón impulsor o punto de impulsión.* Suponiendo que se ha diseñado este eslabonamiento, se conocerán o podrán medirse las longitudes de los eslabones. Primero se debe efectuar un **análisis completo de posición** para determinar los ángulos de eslabón θ_3 y θ_4, dada la posición del eslabón de entrada θ_2. Esto puede realizarse con cualquiera de los métodos expuestos en el capítulo 4. En general, hay que resolver estos problemas en etapas, primero para las posiciones de eslabón, después para las velocidades, y finalmente para las aceleraciones. Para el siguiente ejemplo se supondrá que se ha realizado un análisis completo de posición y que la entrada es para el eslabón 2, con θ_2 y ω_2 conocidos para esta posición de "marco congelado" del eslabonamiento móvil.

EJEMPLO 6-1

Análisis gráfico de velocidad para una posición de un eslabonamiento.

Problema: Dados θ_2, θ_3, θ_4, ω_2 encuentre ω_3, ω_4, $\mathbf{V}_A$, $\mathbf{V}_B$, $\mathbf{V}_C$ mediante métodos gráficos.

Solución (Véase la figura 6-4.)

1 Empiece en el extremo del eslabonamiento acerca del cual tiene más información. Calcule la magnitud de la velocidad del punto A con la ecuación escalar 6.7.

$$v_a = (AO_2)\omega_2 \tag{a}$$

2 Trace en una escala conveniente el vector de velocidad $\mathbf{V}_A$ con su longitud igual a su magnitud v_A, con su principio en el punto A y su dirección perpendicular al radio AO_2. Su sentido es igual al de ω_2 corno se indica en la figura 6-4a).

3 Desplácese luego a un punto acerca del cual tenga información. Observe que la dirección de la velocidad del punto B es predecible, ya que está pivotando en rotación pura alrededor del punto O_A. Trace la línea de construcción *pp* por el punto B perpendicular a BO_4 para representar la dirección de $\mathbf{V}_B$, como se índica en la figura 6-4a).

4 Escriba la ecuación vectorial de diferencia de velocidad 6.5 para el punto B respecto del punto A.

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{BA} \tag{b}$$

Se empleará el punto A como punto de referencia para encontrar $\mathbf{V}_B$, puesto que A se localiza en el mismo eslabón que B y ya se ha calculado $\mathbf{V}_A$. Cualquier ecuación vectorial se puede resolver para dos incógnitas. Cada término tiene dos parámetros, a saber: magnitud y dirección. Entonces hay seis incógnitas potenciales en esta ecuación, dos por cada término. Se

deben conocer al menos cuatro para resolverla. Se conocen tanto la magnitud como la dirección de $\mathbf{V}_A$, y la dirección de $\mathbf{V}_B$. Se necesita saber un parámetro más.

5 El término $\mathbf{V}_{BA}$ representa la velocidad de *B* con respecto a *A*. Si se supone que el eslabón *BA* es rígido, entonces no puede haber ninguna componente de $\mathbf{V}_{BA}$ dirigida a lo largo de la línea *BA,* ¡pues el punto *B* no puede moverse hacia o desde del punto *A* sin encoger o estirar el eslabón rígido! Por consiguiente, la dirección de $\mathbf{V}_{BA}$ debe ser perpendicular a *BA.* Trace la línea de construcción *qq* por el punto *B* y perpendicular a *BA* para representar la dirección de $\mathbf{V}_{BA}$, como se indica en la figura 6-4a).

6 Ahora, la ecuación vectorial puede resolverse gráficamente por medio de un diagrama de vectores como se muestra en la figura 6-4b). En este paso se necesitan, ya sea los instrumentos de dibujo o un paquete CAD. Comienza por trazar cuidadosamente el vector de velocidad $\mathbf{V}_A$ a alguna escala, manteniendo su dirección. (Está dibujado dos veces más grande en la figura.) La ecuación en el paso 4 indica sumar $\mathbf{V}_{BA}$ a $\mathbf{V}_A$, así que trace una línea paralela a la línea *qq* a través del extremo de $\mathbf{V}_A$. La resultante, o el lado izquierdo de la ecuación, debe cerrar el diagrama vectorial desde el principio del primer vector trazado $(\mathbf{V}_A)$ hasta el extremo del último, de modo que trace una línea paralela a *pp* por el principio de $\mathbf{V}_A$. La intersección de estas líneas paralelas *a. pp y qq* define las longitudes de $\mathbf{V}_B$ y $\mathbf{V}_{BA}$. Los sentidos de los vectores se determinan con referencia a la ecuación. Se sumó $\mathbf{V}_A$ a $\mathbf{V}_{BA}$, por lo tanto, deben colocarse de terminación a principio. $\mathbf{V}_B$ es la resultante, así que debe colocarse desde el principio del primer vector hasta la terminación del último. Los vectores resultantes se muestran en la figura 6-4¿>) y *d).*

7 Las velocidades angulares de los eslabones 3 y 4 se calculan a partir de la ecuación 6.7:

$$\omega_4 = \frac{v_B}{BO_4} \qquad \text{y} \qquad \omega_3 = \frac{v_{BA}}{BA} \tag{c}$$

Observe que el término de diferencia de velocidad $\mathbf{V}_{BA}$ representa la componente rotacional de la velocidad del eslabón 3 debida a ω_3. Esto debe cumplirse si el punto *B* no puede moverse hacia o desde el punto *A.* La única diferencia de velocidad que pueden tener, uno con respecto al otro, se debe a la rotación de la línea que los une. Usted puede considerar que el punto *B* está en la línea *BA* que gira con respecto al punto *A* como un centro, o que el punto *A* en la línea *AB* que gira con respecto a *B* como un centro. La velocidad rotacional ω de cualquier cuerpo es un "vector libre" que no tiene ningún punto particular de aplicación en el cuerpo. Se encuentra en cualquier parte del cuerpo.

8 Por último, se calcula $\mathbf{V}_C$ usando de nuevo la ecuación 6.5. Se selecciona cualquier punto en el eslabón 3 en el que se conoce la velocidad absoluta para utilizarla como referencia, por ejemplo el punto *A.*

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{CA} \tag{d}$$

En este caso se puede calcular la magnitud de $\mathbf{V}_{CA}$ a partir de la ecuación 6.7 como ya se había determinado ω_3,

$$v_{ca} = c\omega_3 \tag{e}$$

Como ya se conocen $\mathbf{V}_A$ y $\mathbf{V}_{CA}$ se traza directamente el diagrama vectorial, como se muestra en la figura 6-4c); $\mathbf{V}_C$ es la resultante que cierra el diagrama vectorial. La figura *6Ad)* muestra

los vectores de velocidad calculados en el diagrama del eslabonamiento. Observe que el vector de diferencia de velocidad V_{CA} es perpendicular a la línea *CA* (a lo largo de la línea *rr)* por las mismas razones analizadas en el paso 7.

El ejemplo anterior contiene algunos principios interesantes e importantes que merecen un énfasis mayor. Se repite aquí la ecuación 6.5a para su análisis:

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{PA} \tag{6.5a}$$

Esta ecuación representa la velocidad *absoluta* de cierto punto general *P* referida al origen del sistema de coordenas global. El lado derecho define la velocidad de *P* como la suma de la velocidad absoluta de algún otro punto de referencia *A* en el mismo sistema y la diferencia de velocidad (o velocidad relativa) del punto *P* respecto del punto *A*. Esta ecuación también puede escribirse como:

Velocidad = componente de traslación + componente de rotación

Éstas son las mismas dos componentes de movimiento definidas por el teorema de Chasles e introducidas para el desplazamiento en la sección 4.3. El teorema de Chasles también es válido para la velocidad. Estas dos componentes de movimiento, traslación y rotación son independientes una de otra. Si en un ejemplo particular cualquiera es cero, el movimiento complejo se reducirá a uno de los casos especiales de traslación pura o rotación pura. Cuando ambos están presentes la velocidad total es simplemente la suma de sus vectores.

Se repasará ahora lo que se efectuó en el ejemplo 6-1, con objeto de inferir la estrategia general para la solución de esta clase de problemas. Se comienza en el lado de entrada del mecanismo, ya que ahí es donde se definió la velocidad angular de impulsión. Se buscó primero un punto *(A)* para el cual el movimiento fue de rotación pura, de tal manera que uno de los términos en la ecuación 6.5 sería cero. (Se podría haber buscado también un punto en traslación pura para completar la solución.) Después se calculó la velocidad absoluta de ese punto (V_A) utilizando las ecuaciones 6.5 y 6.7. *(Pasos 1 y 2)*

Luego se utilizó el punto (A) recién calculado como punto de referencia para definir la componente de traslación en la ecuación 6.5 escrita para un nuevo punto *(B).* Observe que se necesitó elegir un segundo punto *(B)* localizado en el mismo cuerpo rígido, así como el punto de referencia *(A)* que ya se había calculado, con respecto al cual se podría predecir algún aspecto de la velocidad del nuevo punto *(B).* En este ejemplo se conocía la dirección de la velocidad V_B. En general esta condición se satisfará para cualquier punto en un eslabón que esté fijo (como lo está el eslabón 4). En este ejemplo no se podría haber determinado el punto *C* hasta que se calculara el punto *B,* debido a que el punto C está en un eslabón flotante, un punto para el cual aún no se conoce la dirección de la velocidad. *(Pasos 3 y 4)*

Para resolver la ecuación del segundo punto *(B)* se necesita también identificar que la componente de rotación de la velocidad se dirige perpendicularmente a la línea que une los dos puntos en el eslabón *(B* y *A* en el ejemplo). Usted **siempre conocerá la dirección de la componente rotacional** en la ecuación 6.5 **si representa una situación de diferencia de velocidad** (CASO 1). *Si la componente rotacional relaciona dos puntos en el* **mismo cuerpo rígido,** *entonces esa componente de diferencia de velocidad es siempre perpendicular a la línea que une esos dos puntos* (véase la figura 6-2). Esto se cumplirá

independientemente de los dos puntos que se seleccionen. Pero *esto no se cumplirá en una situación de* CASO 2 (véase la figura 6-3). *(Pasos 5 y 6)*

Una vez que se ha determinado la velocidad absoluta (V_s) de un segundo punto en el mismo eslabón (CASO 1), se puede resolver la velocidad angular de tal eslabón. (Advierta que los puntos *Ay B* están en el eslabón 3 y que la velocidad del punto O_4 es cero.) Una vez que se conocen las velocidades angulares de todos los eslabones se puede determinar la velocidad lineal de cualquier punto (como *C)* en cualquier eslabón utilizando la ecuación 6.5. Para hacer esto se tiene que entender el concepto de la velocidad angular como un **vector libre,** lo que significa que existe en cualquier lugar del eslabón en cualquier instante dado. No tiene ningún centro particular. *Tiene una infinidad de centros potenciales.* El eslabón simplemente *tiene una velocidad angular,* tal como un frisbee cuando se lanza por el césped.

Todos los puntos en un *frisbee,* si giran mientras el disco vuela, obedecen la ecuación 6.5. Si el frisbee se deja a la deriva, girará con respecto de su centro de gravedad *(CG),* que está cerca del centro geométrico de su forma circular. Pero si usted es un jugador experto de frisbee (y tiene dedos bastante puntiagudos), puede imaginar que atrapa el frisbee volador entre sus dos dedos índices en cierta ubicación fuera del centro (no en el *CG),* de tal manera que el frisbee continúe girando alrededor de sus dedos. En este ejemplo, algo rebuscado, de campeonato del juego del frisbee, usted habrá tomado como cero la componente de traslación del movimiento del frisbee, pero su componente de rotación independiente estará todavía presente. Más aún, estará ahora girando con respecto a un centro diferente (sus dedos) del que estuvo durante el vuelo (sus *CG).* Por lo tanto, este **vector libre** de velocidad angular (ω) se ajusta a cualquier punto en el disco. El cuerpo tiene todavía la misma ω, sin tomar en cuenta el supuesto centro de rotación. Es esta propiedad la que permite resolver la ecuación 6.5 literalmente para **cualquier punto** en un cuerpo rígido en movimiento complejo **referido a cualquier otro punto** en ese cuerpo. *(Pasos 7 y 8)*

6.3 CENTROS INSTANTÁNEOS DE VELOCIDAD

La definición de un **centro instantáneo** de velocidad es *un punto, común a dos cuerpos en movimiento plano, que tiene la misma velocidad instantánea en cada cuerpo.* A veces los centros instantáneos se denominan *centros* o *polos.* Como se requieren dos cuerpos o eslabones para crear un centro instantáneo *(CI),* se puede predecir fácilmente la cantidad de centros instantáneos que se esperan de cualquier conjunto de eslabones. La fórmula de combinación para « objetos tomados *r* a la vez es:

$$C = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} \tag{6.8a}$$

Para este caso $r = 2$, lo que se reduce a:

$$C = \frac{n(n-1)}{2} \tag{6.8b}$$

De la ecuación 6.8b se puede ver que un eslabonamiento de cuatro barras tiene seis centros instantáneos, uno de seis barras tiene 15 y uno de ocho barras tiene 28.

En la figura 6-5 se muestra un eslabonamiento de cuatro barras en una posición arbitraria. También se muestra un **grafo lineal*** que es útil para seguir de cerca los *CI* que

* Observe que este término *grafo* no es una gráfica de puntos en un sistema coordenado *x,* y. Por el contrario, es un *grafo lineal* de la fascinante rama de las matemáticas llamada *teoría de los grafos,* que en sí es una rama de la topología. Los grafos lineales se utilizan a menudo para representar las interrelaciones entre diversos fenómenos. Tienen muchas aplicaciones en cinemática, especialmente como un medio para clasificar eslabonamientos y encontrar isómeros.

se han encontrado. Este grafo particular puede crearse dibujando un círculo en el que se marcan tantos puntos como eslabones se encuentren en el ensamble. Después se traza una línea entre los puntos que representan los pares de eslabones cada vez que se encuentra un centro instantáneo. El grafo lineal resultante es el conjunto de líneas que unen los puntos. No se incluye el círculo, el cual se utilizó solamente para situar los puntos. Este grafo es en realidad una solución geométrica a la ecuación 6.8b, ya que al conectar todos los puntos por pares proporciona todas las posibles combinaciones de puntos tomados dos a la vez.

Algunos *CI* se encuentran por inspección, utilizando sólo la definición del centro instantáneo. Observe en la figura *6-5a)* que cada una de las cuatro juntas de pasador satisface esta definición. Evidentemente deben tener la misma velocidad en ambos eslabones todo el tiempo. Éstos se han marcado como $I_{1,2}$, $I_{2,3}$, $I_{3,4}$ e $I_{1,4}$. El orden de los subíndices es indistinto. El centro instantáneo $I_{2,1}$ es el mismo que el $I_{1,2}$. Estos *CI* de junta de pasador algunas veces se denominan centros instantáneos "permanentes", pues se mantienen en la misma ubicación para todas las posiciones del eslabonamiento. En general, los centros instantáneos se moverán a nuevas localizaciones conforme el eslabonamiento cambie de posición; de ahí el adjetivo *instantáneo.* En este ejemplo de eslabonamiento de cuatro barras hay otros dos *CI* que deben encontrarse. Para su localización es útil emplear el teorema de Aronhold-Kennedy,* también denominado *regla de Kennedy.*

Regla de Kennedy:

Cualesquiera tres cuerpos en movimiento plano tendrán exactamente tres centros instantáneos y se ***encontrarán en la misma línea recta.***

La primera parte de esta regla es solamente un nuevo planteamiento de la ecuación 6.8b para $n = 3$. La segunda cláusula en esta regla es la más útil. Observe que esta regla **no** requiere que se conecten los tres cuerpos en alguna forma. Se puede emplear esta regla, junto con el grafo lineal, para encontrar los *CI* faltantes, los cuales no son obvios por inspección. La figura *6-5b)* muestra la construcción necesaria para hallar el centro instantáneo $I_{1,3}$. La figura 6-5c) muestra la construcción necesaria para determinar el centro instantáneo $I_{2,4}$. El siguiente ejemplo describe en detalle el procedimiento.

EJEMPLO 6-2

Localización de todos los centros instantáneos para un eslabonamiento de cuatro barras.

Problema: Dado un eslabonamiento de cuatro barras en una posición, encuentre todos los *CI* por los métodos gráficos.

Solución: (Véase la figura 6-5.)

1 Trace un círculo con todos los eslabones numerados alrededor de la circunferencia como se indica en la figura 6-5a).

2 Localice por inspección tantos *CI* como sea posible. Todas las juntas de pasador deben ser *CI* permanentes. Una los números de eslabón en el círculo para crear un grafo lineal y anote aquellos *CI* encontrados, como se muestra en la figura 6-5a).

* Descubierta independientemente por Aronhold en Alemania, en 1872, y por Kennedy en Inglaterra, en 1886.

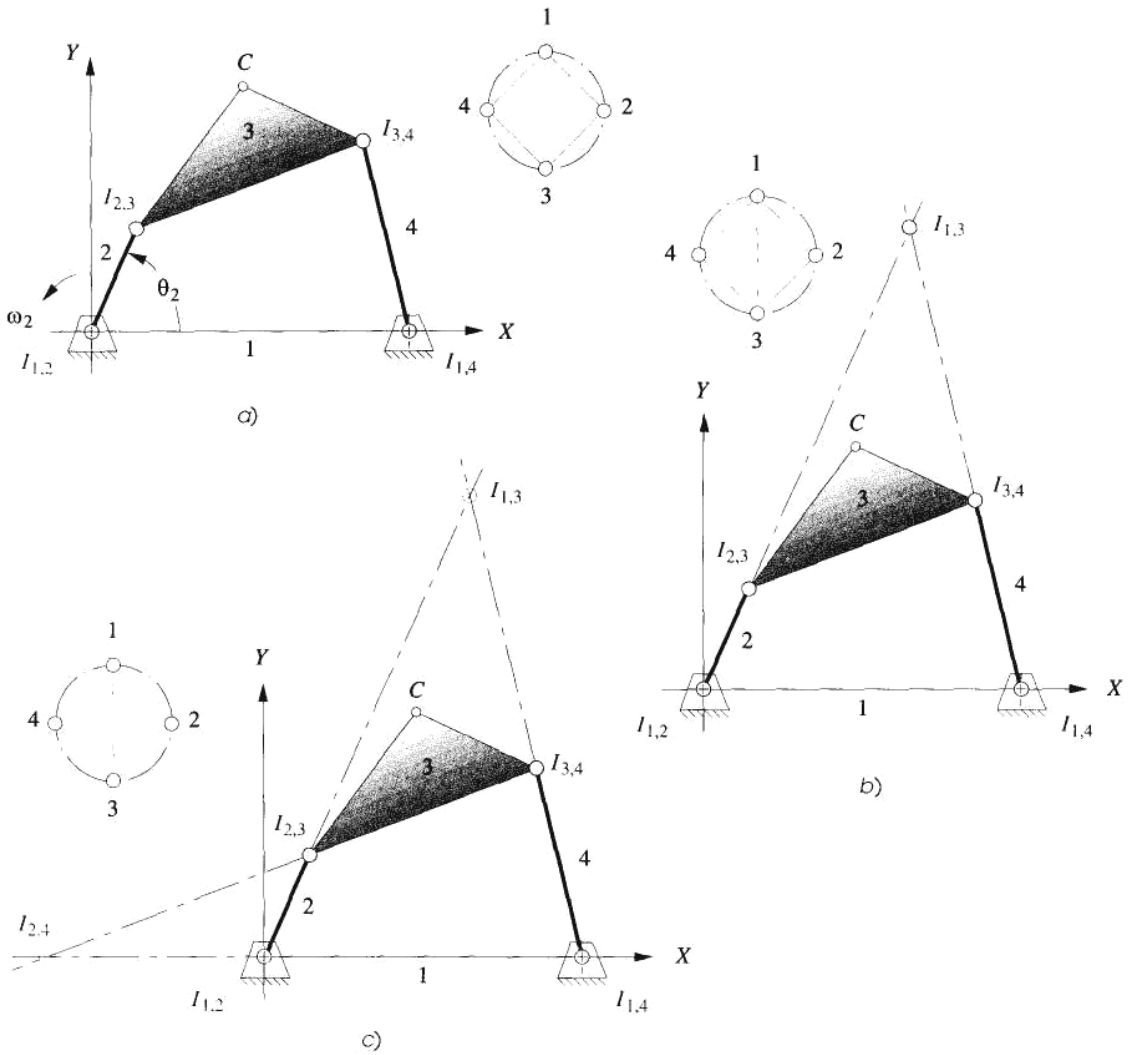


FIGURA 6-5

Localización de centros instantáneos en el eslabonamiento de juntas de pasador

3 Identifique una combinación de eslabones en el grafo lineal para los que no se ha encontrado el *CI,* y trace una línea punteada que una esos dos números de eslabón. Identifique dos triángulos en el grafo (cada uno debe contener la línea punteada y los otros dos lados deben ser líneas continuas que representen los *CI* ya encontrados). En el grafo en la figura 6-5¿) los números de eslabón 1 y 3 se han conectado con una línea punteada. Esta línea forma un triángulo con lados 13, 34 y 14, y otro con lados 13, 23, 12. Estos triángulos definen ternas de *CI* que obedecen la **regla de Kennedy.** Por consiguiente, los *CI* 13, 34 y 14 **deben encontrarse en la misma recta.** También los *CI* 13, 23 y 12 **estarán en una recta diferente.**

4 En el diagrama de eslabonamiento trace una línea que pase por los dos *CI* conocidos, los cuales forman una terna con el *CI* desconocido. Repita esto para la otra terna. En la figura *6-5b)* se ha dibujado una línea que pasa por $I_{1,2}$ e $I_{2,3}$ y se ha prolongado. $I_{1,3}$ debe encontrarse en esta línea. Se ha trazado otra línea que pasa por $I_{1,4}$ e $I_{3,4}$ y se ha prolongado para intersecar la primera línea. Por la regla de Kennedy, el centro instantáneo $I_{1,3}$ también debe hallarse en esta línea, de modo que su intersección sea $I_{1,3}$.

5 Una los números de eslabón 2 y 4 con una línea punteada en el grafo lineal como se muestra en la figura *6-5c).* Esta línea forma un triángulo con lados 24, 23 y 34, y otro con lados 24, 12 y 14. Estos lados representan ternas de *CI* que obedecen la regla de Kennedy. Así que los *CI* 24, 23 y 34 deben estar en la misma recta. También los *CI* 24, 12 y 14 se encuentran en una línea recta diferente.

6 En el diagrama del eslabonamiento trace una línea que pase por los dos *CI* conocidos, los cuales forman una terna con el *CI* desconocido. Repita lo mismo para la otra terna. En figura 6-5c) se ha dibujado una línea que pasa por $I_{1,2}$ e $I_{1,4}$, y se ha prolongado. $I_{2,4}$ debe encontrarse en esta línea. Se ha trazado otra que pasa por $I_{2,3}$ e $I_{3,4}$, y se ha prolongado para interceptar la primera línea. Por la regla de Kennedy el centro instantáneo $I_{2,4}$ debe hallarse también en esta línea, de modo que su intersección sea $I_{2,4}$.

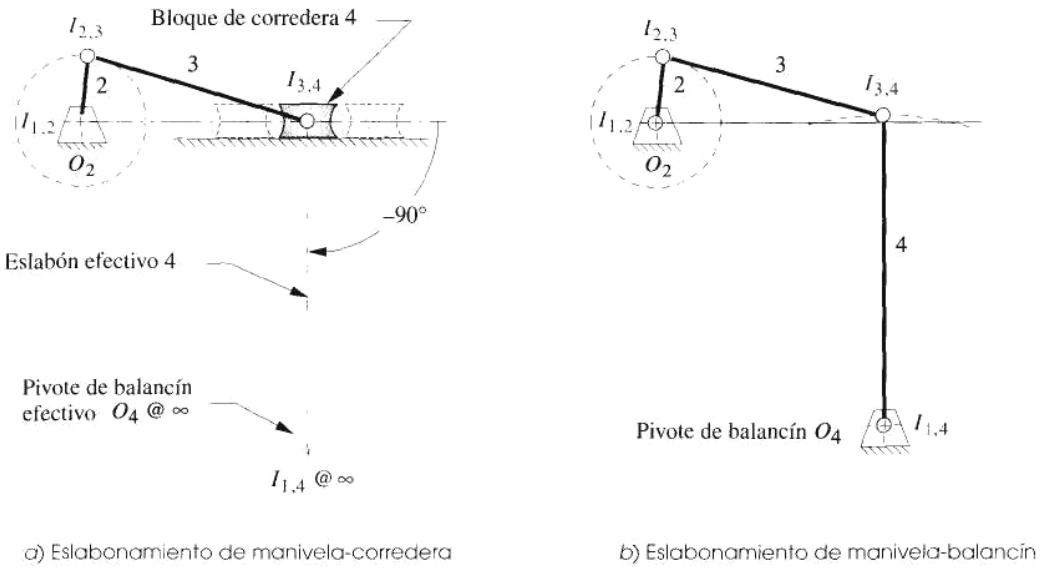
7 Si hubiese más eslabones este procedimiento se repetiría hasta que se encontraran todos los *CI.*

La presencia de juntas de corredera hacen un poco más ingeniosa la localización de centros instantáneos como se muestra en el siguiente ejemplo. La figura *6-6a)* muestra un **eslabonamiento de manivela-corredera de cuatro barras.** Observe que sólo hay tres juntas de pasador en este eslabonamiento. Todas las juntas de pasador son *centros instantáneos permanentes.* Pero la junta entre los eslabones 1 y 4 es una junta completa deslizante rectilínea. Una junta deslizante equivale cinemáticamente a un eslabón infinitamente largo, "pivotado" en el infinito. La figura 6-6b) muestra una versión de junta de pasador casi equivalente a la manivela-corredera, en la cual el eslabón 4 es un balancín muy largo. Ahora el punto *B* oscila a través de un arco somero, el cual es casi una línea recta. Es evidente en la figura 6-6¿») que, en este eslabonamiento, $I_{1,4}$ se encuentra en el pivote O_4. Ahora imagine que se incrementa aún más la longitud de este balancín largo, eslabón 4. En el límite el eslabón 4 se aproxima a la longitud infinita, el pivote O_4 se aproxima al infinito a lo largo de la línea que fue originalmente el balancín largo, y el movimiento en arco del punto *B* se aproxima a una línea recta. Por consiguiente, *una junta de corredera tendrá su centro instantáneo en el infinito, a lo largo de una línea perpendicular a la dirección del deslizamiento,* como se muestra en la figura 6-6a).

EJEMPLO 6-3

Localización de todos los centros instantáneos para un eslabonamiento de manivela-corredera.

Problema: Dado un eslabonamiento de manivela-corredera en una posición, determine todos los *CI* mediante métodos gráficos.



a) Eslabonamiento de manivela-corredera b) Eslabonamiento de manivela-balancín

FIGURA 6-6
Un centro instantáneo de una corredera rectilínea está en el infinito

Solución: (Véase la figura 6-7.)

1 Trace un círculo con todos los eslabones numerados alrededor de su circunferencia como se muestra en la figura *6-la).*

2 Localice por inspección todos los *CI* posibles. Todas las juntas de pasador serán *CI* permanentes. El centro instantáneo de la junta de corredera estará en el infinito a lo largo de una línea perpendicular al eje del deslizamiento. Una los números de eslabón en el círculo para crear un grafo lineal, y anote los *CI* encontrados como se indica en la figura 6-7a).

3 Identifique en el grafo lineal una combinación de eslabones para la cual no se ha determinado el *CI,* y dibuje una línea punteada que una esos dos números de eslabón. Identifique en el grafo dos triángulos que contengan cada uno la línea punteada, y cuyos otros dos lados sean líneas continuas que representen los *CI* ya encontrados. En la gráfica de la figura *6-1b)* los números de eslabón 1 y 3 se unieron con una línea punteada. Esta línea forma un triángulo con lados 13, 34 y 14, y otro con lados 13, 23 y 12. Estos lados representan ternas de *CI que* obedecen la regla de Kennedy. Por lo tanto, los *CI* 13, 34 y 14 deben estar en la misma línea recta. También los *CI* 13, 23 y 12 se encuentran en una línea recta diferente.

4 En el diagrama de eslabonamiento trace una línea que pase por dos *CI* conocidos, los cuales forman una terna con el *CI* desconocido. Repita esto para la otra terna. En la figura *6-7b)* se ha trazado una línea desde $I_{1,2}$ basta $I_{2,3}$ y se ha prolongado. $I_{1,3}$ debe hallarse en esta línea. Se ha trazado otra línea desde $I_{1,4}$ (al infinito) que pasa por $I_{3,4}$ y se ha prolongado hasta intersecar la primera línea. Por la regla de Kennedy, el centro instantáneo $I_{1,3}$ también debe encontrarse en esta línea, de manera que su intersección sea $I_{1,3}$.

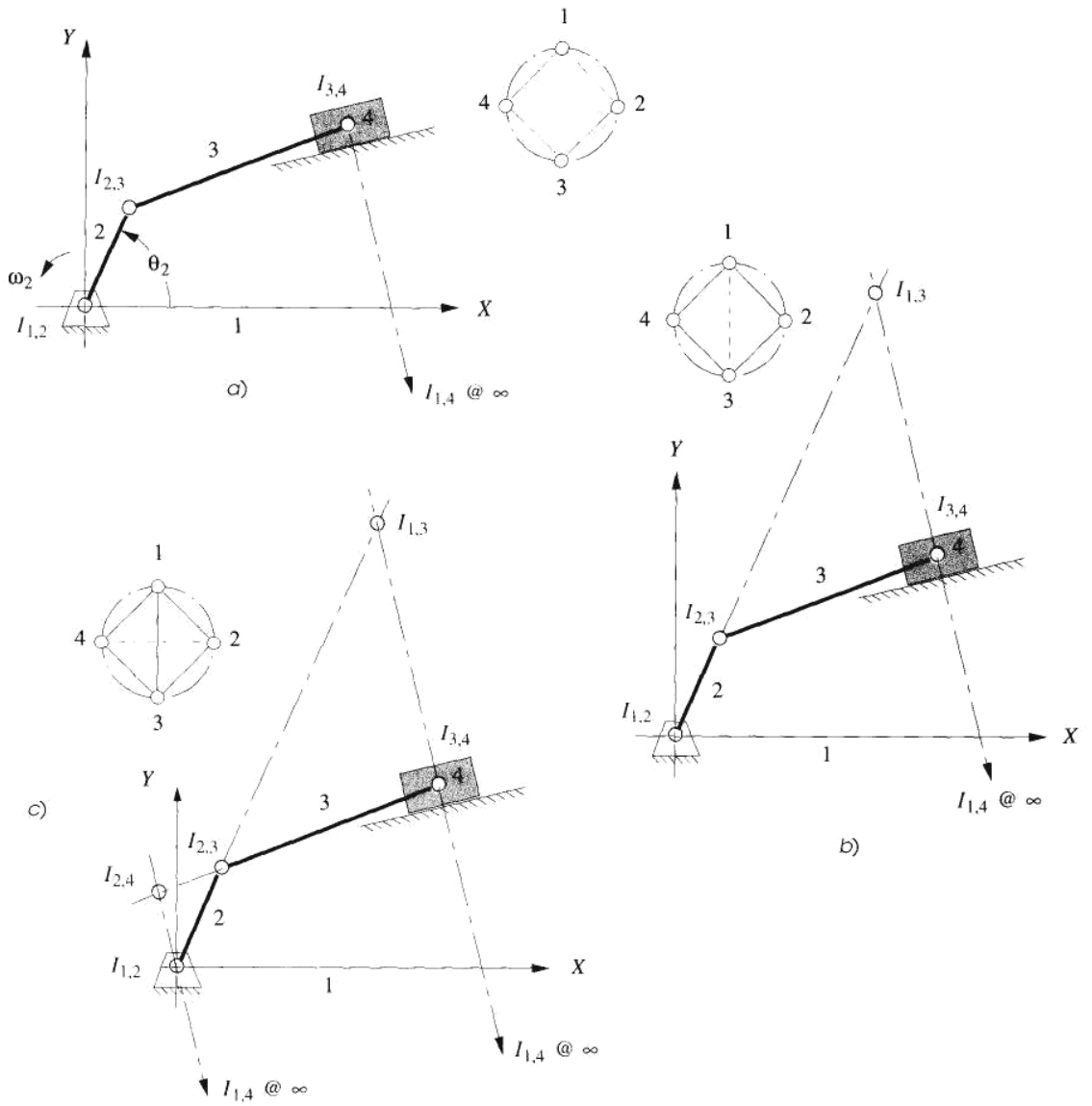


FIGURA 6-7

Localización de centros instantáneos en el eslabonamiento de manivela-corredera

5 Una los eslabones 2 y 4 con una línea punteada, como se muestra en la figura 6-7c). Esta línea forma un triángulo con lados 24, 23 y 34, y otro con lados 24, 12 y 14. Estos lados también representan ternas de *CI* que obedecen la regla de Kennedy. Así que los *CI* 24, 23 y 34 deben encontrarse en la misma recta. También los *CI* 24, 12 y 14 están en una línea recta diferente.

6 En el diagrama de eslabonamiento trace una línea que pase por los dos *CI* conocidos que forman una terna con el *CI* desconocido. Repita esto para la otra terna. En la figura 6-7c) se ha trazado una línea desde $I_{1,2}$ para intersecar a $I_{1,4}$ y se ha prolongado. Advierta que la única manera de intersecar a $I_{1,4}$ en el infinito es trazar una línea paralela a la recta $I_{3,4}I_{1,4}$, ya que todas las paralelas se intersecan en el infinito. El centro instantáneo $I_{2,4}$ debe hallarse en esta línea paralela. Se ha dibujado otra línea que pasa por $I_{2,3}$ e $I_{3,4}$ y se ha prolongado para intersecar la primera línea. Por la regla de Kennedy, el centro instantáneo $I_{2,4}$ debe también encontrarse en esta recta, de tal manera que su intersección sea $I_{2,4}$.

7 Si hubiera más eslabones este procedimiento se repetiría hasta que se encontraran todos los *CI.*

El procedimiento en este ejemplo de una corredera es idéntico al empleado en el eslabonamiento de junta de pasador de cuatro barras, excepto que se complica por la presencia de centros instantáneos localizados en el infinito.

En la sección 2.9 y la figura 2-10c) se mostró que un mecanismo de leva-seguidor es en realidad un eslabonamiento de cuatro barras disfrazado. Como tal, también tendrá centros instantáneos. La presencia de la semijunta en éste o en cualquier eslabonamiento hace un poco más complicada la localización del centro instantáneo. Se debe confirmar que el centro instantáneo entre dos eslabones cualesquiera esté a lo largo de una línea que es perpendicular al vector de *velocidad relativa* entre los eslabones en la semijunta, como se muestra en el siguiente ejemplo. La figura 6-8 muestra el mismo mecanismo de leva-seguidor que en la figura 2-14. También se muestran los eslabones efectivos 2, 3 y 4.

EJEMPLO 6-4

Localización de todos los centros instantáneos para un mecanismo de leva-seguidor.

Problema: Dados una leva y un seguidor en una posición, encuentre todos los *CI* por métodos gráficos.

Solución: (Véase la figura 6-8.)

1 Trace un círculo con todos los eslabones numerados alrededor de la circunferencia como se muestra en la figura *6-&b).* En este caso sólo hay tres eslabones, por consiguiente, deben encontrarse solamente tres *CI,* como se muestra en la ecuación 6.8. Observe que los eslabones están numerados 1, 2 y 4. El eslabón faltante, 3, es el acoplador de longitud variable efectiva.

2 Localice por inspección todos los *CI* posibles. Todas las juntas de pasador serán *CI* permanentes. Los dos pivotes fijos, $I_{1,2}$ e $I_{1,4}$, son aquí las únicas juntas de pasador. Una los números de eslabón en el círculo para crear un grafo lineal y anote aquellos *CI* encontrados como se muestra en la figura 6-8¿>). La única combinación de eslabones en el grafo lineal para la que no se ha encontrado el *CI* es $I_{2,4}$, de modo que trace una línea punteada que conecte estos dos números de eslabón.

3 La regla de Kennedy indica que los tres *CI* deben encontrarse en la misma recta; por lo tanto, el centro instantáneo restante $I_{2,4}$ debe estar en la línea prolongada $I_{1,2}I_{1,4}$. Desgraciadamente,

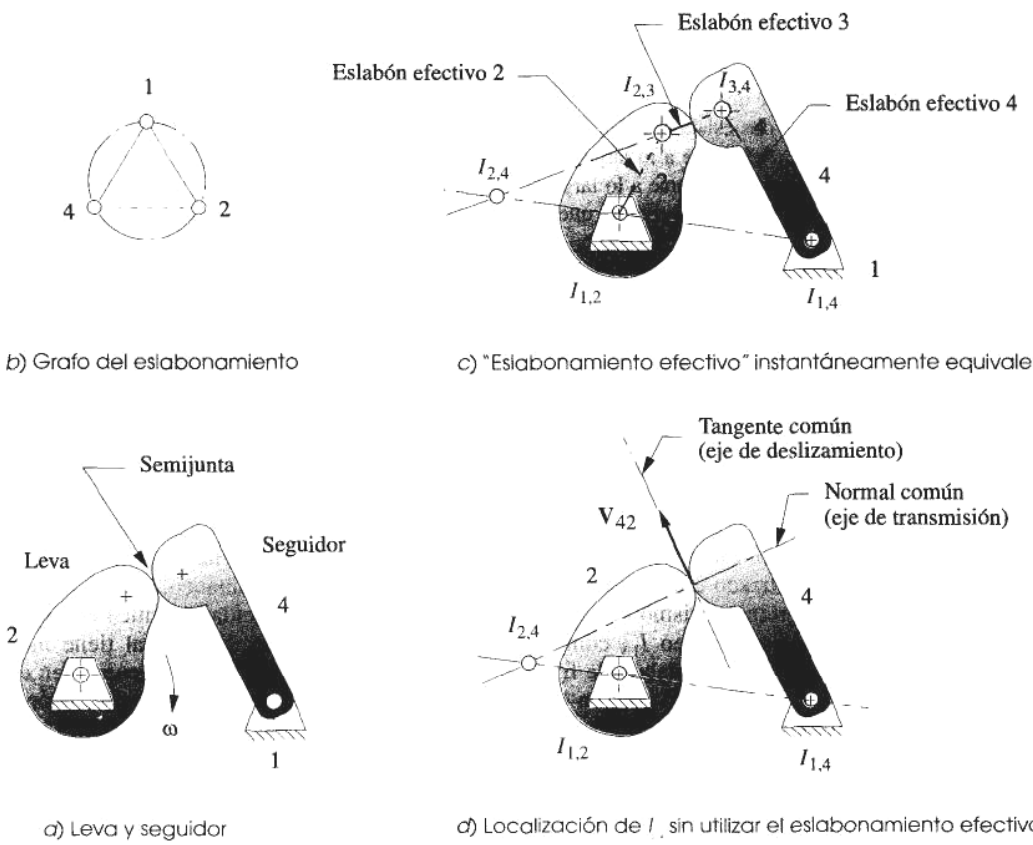


FIGURA 6-8
Localización de centros instantáneos en el mecanismo de leva-seguidor

en este ejemplo se tienen muy pocos eslabones para encontrar una segunda línea en la cual debe encontrarse $I_{2,4}$.

4 En el diagrama de eslabonamiento trace una línea que pase por los dos *CI* conocidos, los cuales forman una terna con el *CI* desconocido. En la figura 6-8c) se ha trazado una línea desde $I_{1,2}$ hasta $I_{1,4}$ y se ha prolongado. Éste es, por supuesto, el eslabón 1. Por la regla de Kennedy, $I_{2,4}$ debe hallarse en esta línea.

5 Al ver la figura 6-8c), que muestra los eslabones efectivos del eslabonamiento de cuatro barras equivalente para esta posición, se puede prolongar el eslabón efectivo 3 hasta que interseque el eslabón prolongado 1. Al igual que en el eslabonamiento de cuatro barras "puro", el centro instantáneo 2,4 se encuentra en la intersección de los eslabones prolongados 1 y 3 (véase el ejemplo 6-2).

6 La figura *6-&d)* muestra que no es necesario construir el eslabonamiento efectivo de cuatro barras para encontrar I_{14}. Observe que se ha dibujado la **tangente común** a los eslabones 2 y 4 en su punto de contacto (la semijunta). Esta línea también se denomina **eje de deslizamiento,** ya que es la línea a lo largo de la cual ocurrirá toda velocidad relativa (deslizamiento) entre los dos eslabones. Por lo tanto, la velocidad del eslabón 4 en relación con la del eslabón 2, V_{42}, se dirige a lo largo del eje de deslizamiento. Por consiguiente, el centro instantáneo 7_{24} debe encontrarse a lo largo de una línea perpendicular a la tangente común, llamada la **normal común.** Advierta que esta línea es la misma que la del eslabón efectivo 3 en la figura 6-8c).

6.4 ANÁLISIS DE VELOCIDAD CON CENTROS INSTANTÁNEOS

Una vez que se han encontrado los *CI* pueden utilizarse para hacer un rápido análisis gráfico de velocidad del eslabonamiento. Advierta que, dependiendo de la posición particular del eslabonamiento analizado, algunos de los *CI* estarán muy distantes de los eslabones. Por ejemplo, si los eslabones 2 y 4 son casi paralelos, sus líneas prolongadas se intersecarán en un punto distante y prácticamente no disponible para un análisis de velocidad. En la figura 6-9 se muestra el mismo eslabonamiento que en la figura 6-5, con $I_{1,3}$ localizado e indicado. Por la definición del centro instantáneo, los dos eslabones que comparten el mismo centro instantáneo tendrán una velocidad idéntica en ese punto. El centro instantáneo $I_{1,3}$ comprende el acoplador (eslabón 3), el cual tiene movimiento complejo, y el eslabón de fijación 1, que es estacionario. Todos los puntos en el eslabón 1 tienen velocidad nula en el sistema global de coordenadas, fijo en el eslabón 1. Por lo tanto, $I_{1,3}$ debe tener una velocidad nula en tal instante. Si $I_{1,3}$ tiene velocidad nula, entonces puede considerarse un "pivote fijo" instantáneo alrededor del cual el eslabón 3 está en rotación pura con respecto al eslabón 1. Un momento después $I_{1,3}$ se moverá a una nueva localización, y el eslabón 3 estará "pivotando" con respecto a un nuevo centro instantáneo.

La velocidad del punto *A* se indica en la figura 6-9. La magnitud de $\mathbf{V}_A$ se calcula con la ecuación 6.7. Su dirección y sentido pueden determinarse por inspección, como se hizo en el ejemplo 6-1. Observe que el punto *A* es también el centro instantáneo $I_{2,3}$. Tiene la misma velocidad como parte del eslabón 2 y como parte del eslabón 3. Puesto que el eslabón 3 en efecto está pivotando con respecto a $I_{1,3}$ en este instante, la velocidad angular ω_3 se determina al reordenar la ecuación 6.7:

$$\omega_3 = \frac{v_A}{(AI_{1,3})} \tag{6.9a}$$

Una vez que se conoce ω la magnitud de $\mathbf{V}_B$ se encuentra también con la ecuación 6.7:

$$v_B = (BI_{1,3})\omega_3 \tag{6.9b}$$

Una vez conocida $\mathbf{V}_B$, ω_4 puede determinarse también a partir de la ecuación 6.7:

$$\omega_4 = \frac{v_B}{(BO_4)} \tag{6.9c}$$

Finalmente, la magnitud de $\mathbf{V}_C$ (o la velocidad de cualquier otro punto en el acoplador) se encuentra con la ecuación 6.7:

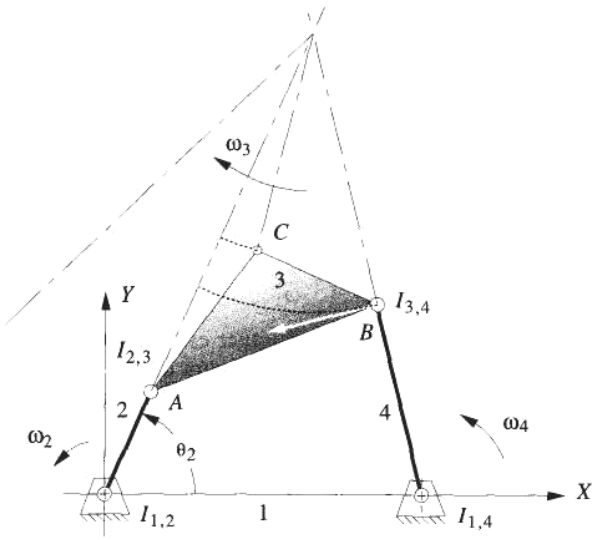


FIGURA 6-9

Análisis de velocidad utilizando centros instantáneos

$$v_C = (CI_{1,3})\omega_3 \tag{6.9d}$$

Advierta que las ecuaciones 6.7 y 6.9 proporcionan sólo la **magnitud escalar** de estos vectores de velocidad. Se tiene que determinar su **dirección** con base en la información del diagrama a escala (figura 6.9). Como se conoce la localización de $I_{1,3}$, la cual es un pivote "fijo" instantáneo para el eslabón 3, todos los vectores de velocidad absoluta de ese eslabón para este instante serán **perpendiculares a sus radios desde $I_{1,3}$ hasta el punto en cuestión.** Puede verse que $\mathbf{V}_B$ y $\mathbf{V}_C$ son perpendiculares a sus radios desde $I_{1,3}$. Observe que $\mathbf{V}_B$ también es perpendicular al radio desde O_4, ya que B también se encuentra pivotando con respecto a ese punto como parte del eslabón 4.

Una solución gráfica rápida a las ecuaciones 6.9 se muestra en la figura. Los arcos centrados en $I_{1,3}$ se trazan desde los puntos B y C para intersecar la recta $AI_{1,3}$. Las magnitudes de las velocidades $\mathbf{V}_{B'}$ y $\mathbf{V}_{C'}$ se determinan a partir de los vectores trazados perpendiculares a esa línea en las intersecciones de los arcos y la recta $AI_{1,3}$. Las longitudes de estos vectores se definen mediante la línea que va desde el extremo de $\mathbf{V}_A$ hasta el centro instantáneo de $I_{1,3}$. Estos vectores se deslizan a lo largo de sus arcos hasta los puntos B y C manteniendo su tangencia a los arcos.

Así, en pocos pasos se han encontrado todas las velocidades que se determinaron con el tedioso método del ejemplo 6-1. El método del centro instantáneo es un método gráfico rápido para analizar velocidades, pero sólo funcionará si los centros instantáneos se encuentran en localizaciones alcanzables para la posición de eslabonamiento particular analizada. Sin embargo, el método gráfico que utiliza la ecuación de diferencia de velo-

cidad mostrada en el ejemplo 6-1 siempre funcionará a pesar de la posición del eslabonamiento.

Relación de velocidad angular

La **relación de velocidad angular** *mV* se define como *la velocidad angular de salida dividida entre la velocidad angular de entrada.* Para un mecanismo de cuatro barras esto se expresa como:

$$m_V = \frac{\omega_4}{\omega_2} \tag{6.10}$$

Se puede obtener esta relación para cualquier eslabonamiento construyendo un **par de eslabones efectivos,** como se muestra en la figura 6-10a). La definición de **pares de eslabones efectivos** es *dos rectas, paralelas entre sí, trazadas a través de los pivotes fijos y que se intersecan en el acoplador prolongado.* Se muestran como O_2A' y O_4B' en la figura 6-10a). Advierta que hay una infinidad de posibles pares de eslabones efectivos. Deben ser paralelos entre sí, pero pueden formar cualquier ángulo con el eslabón 3. En la figura se muestran perpendiculares al eslabón 3 por conveniencia para la deducción que sigue. El ángulo entre los eslabones 2 y 3 se indica como ν. El ángulo de transmisión entre los eslabones 3 y 4 es μ. Se deducirá ahora una expresión para la relación de velocidad angular utilizando estos eslabones efectivos, las longitudes reales de eslabón y los ángulos ν y μ,

Por geometría:

$$O_2A' = (O_2A)\ \text{sen}\ \nu \qquad O_4B' = (O_4B)\ \text{sen}\ \mu \tag{6.11a}$$

A partir de la ecuación 6.7:

$$V_{A'} = (O_2A')\omega_2 \tag{6.11b}$$

La componente de velocidad $V_{A'}$ se encuentra a lo largo del eslabón *AB.* Igual que en el caso de un miembro de dos fuerzas, en el cual una fuerza aplicada en un extremo sólo transmite su componente que se encuentra a lo largo del eslabón hasta el otro extremo, esta componente de velocidad se transmite a lo largo del eslabón hasta el punto *B.* Esto se denomina a veces como el **principio de transmisibilidad.** Entonces se pueden igualar estas componentes, ya sea en uno u otro extremo del eslabón:

$$V_{A'} = V_{B'} \tag{6.11c}$$

Entonces:

$$O_2A'\omega_2 = O_4B'\omega_4 \tag{6.11d}$$

al reordenar:

$$\frac{\omega_4}{\omega_2} = \frac{O_2A'}{O_4B'} \tag{6.11e}$$

y al sustituir:

$$\frac{\omega_4}{\omega_2} = \frac{O_2A\,\text{sen}\,\nu}{O_4B\,\text{sen}\,\mu} = m_V \tag{6.11f}$$

Observe en la ecuación 6.1 lf que conforme el ángulo **v** pasa por cero, la relación de velocidad angular será nula a pesar de los valores de ω_2 o de las longitudes de eslabón, por consiguiente, ω_4 también será nula. Cuando el ángulo ν es nulo, los eslabones 2 y 3 serán colineales, y así estarán en sus posiciones de agarrotamiento. En la sección 3.3 se precisó que las posiciones límite del eslabón 4 se definen por estas condiciones de agarrotamiento. Se debe esperar que la velocidad del eslabón 4 será cero cuando llegue al final de su recorrido. Y una situación aún más interesante se obtiene si se permite que el ángulo μ llegue a cero. La ecuación 6.1 lf muestra que ω_4 **tenderá a infinito** cuando $\mu = 0$, sin considerar los valores de ω_2 o las longitudes de eslabón. Evidentemente no se puede permitir que μ alcance el valor de cero. De hecho, en la sección 3.3 se aprendió que se debe conservar este ángulo de transmisión μ arriba de 40°, aproximadamente, para mantener una buena calidad de movimiento y transmisión de fuerza.*

La figura *6-lOb)* muestra el mismo eslabonamiento que en la figura 6-10a), pero los eslabones efectivos se han trazado ahora de manera que no sólo son paralelos sino también colineales, por lo tanto, se encuentran en la parte superior uno del otro. Ambos intersecan el acoplador prolongado en el mismo punto, el cual es el centro instantáneo $I_{2,4}$. Así, A' y B' de la figura 6-10a) coinciden ahora en $I_{2,4}$. Esto permite escribir una ecuación para la **relación de velocidad angular** en términos de las distancias de los pivotes fijos al centro instantáneo $/_{24}$.

$$m_V = \frac{\omega_4}{\omega_2} = \frac{O_2 I_{2,4}}{O_4 I_{2,4}} \tag{6.11g}$$

Por lo tanto, puede utilizarse el centro instantáneo $I_{2,4}$ para determinar la **relación de velocidad angular.**

Ventaja mecánica

La potencia *P* en un sistema mecánico se define como el punto o producto escalar del vector de fuerza F y el vector de velocidad V en cualquier punto:

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} = F_x V_x + F_y V_y \tag{6.12a}$$

Para un sistema rotatorio, la potencia *P* se vuelve el producto del par de torsión *T* y de la velocidad angular ω que, en dos dimensiones, tienen la misma dirección (z):

$$P = T\omega \tag{6.12b}$$

La potencia fluye a través de un sistema pasivo y:

$$P_{entrada} = P_{salida} + pérdidas \tag{6.12c}$$

La eficiencia mecánica se define como:

$$\varepsilon = \frac{P_{salida}}{P_{entrada}} \tag{6.12d}$$

Los sistemas de eslabonamiento pueden ser muy eficientes si están bien construidos con cojinetes de baja fricción en todos los pivotes. Las pérdidas son a menudo menores que 10%. Para simplificar, en el siguiente análisis se supondrá que las pérdidas son cero (es decir, un sistema conservativo). Luego, sean $T_{entrada}$ y $\omega_{entrada}$ los que representen el par

* Esta limitación en el ángulo de transmisión es crítica sólo si se aplica la carga de salida a un eslabón que está pivotado a la fijación (al eslabón 4 en el caso de un eslabonamiento de cuatro barras). Si se aplica la carga a un eslabón flotante (acoplador), entonces son más apropiadas otras medidas de la calidad de la fuerza de transmisión que el ángulo de transmisión, como se analiza en el capítulo 12.

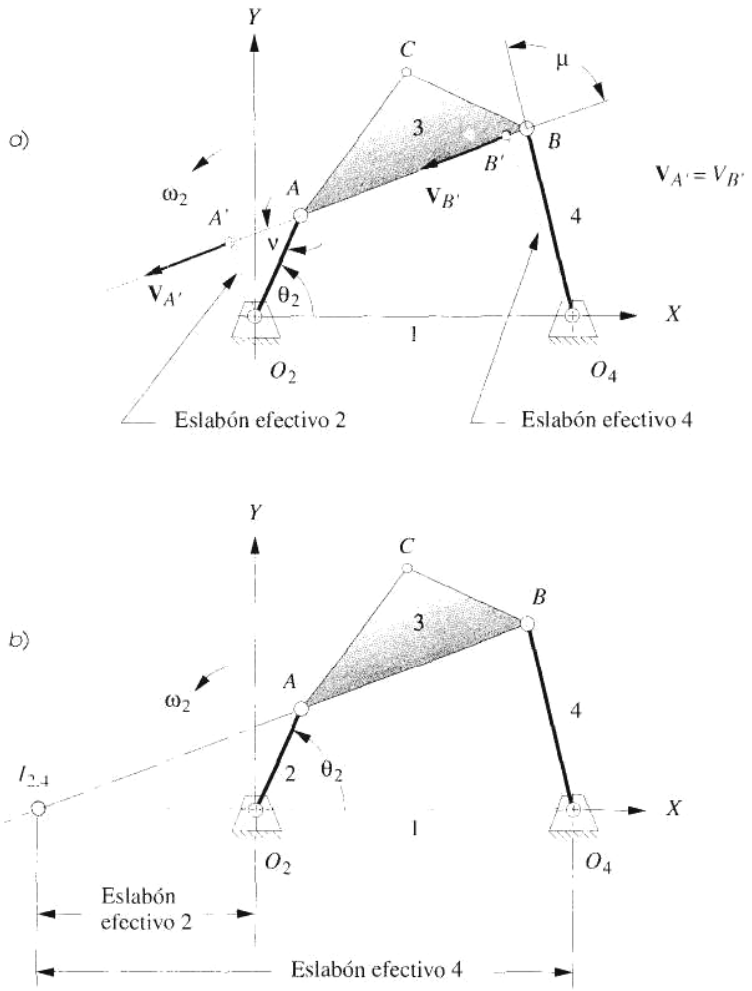


FIGURA 6-10

Eslabones efectivos y la relación de velocidad angular

de torsión y la velocidad angular de entrada, y T_{salida} y ω_{salida} los que representen el par de torsión y la velocidad angular de salida, entonces:

$$P_{entrada} = T_{entrada}\omega_{entrada}$$
$$P_{salida} = T_{salida}\omega_{salida} \qquad (6.12e)$$

y:

$$P_{salida} = P_{entrada}$$

$$T_{salida}\omega_{salida} = T_{entrada}\omega_{entrada}$$
$$\frac{T_{salida}}{T_{entrada}} = \frac{\omega_{entrada}}{\omega_{salida}} \qquad (6.12f)$$

Observe que la **relación del par de torsión** $(m_T = T_{salida}/T_{entrada})$ es la inversa de la relación de velocidad angular.

La **ventaja mecánica** (m_A) se define como:

$$m_A = \frac{F_{salida}}{F_{entrada}} \qquad (6.13a)$$

Al suponer que las fuerzas de entrada y de salida se aplican en ciertos radios, $r_{entrada}$ y r_{salida}, perpendiculares a sus respectivos vectores de fuerza,

$$F_{salida} = \frac{T_{salida}}{r_{salida}}$$
$$F_{entrada} = \frac{T_{entrada}}{r_{entrada}} \qquad (6.13b)$$

cuando se sustituyen las ecuaciones 6.13b en la 6.13a se obtiene una expresión en términos de par de torsión:

$$m_A = \left(\frac{T_{salida}}{T_{entrada}}\right)\left(\frac{r_{entrada}}{r_{salida}}\right) \qquad (6.13c)$$

Sustituyendo la ecuación 6.12f en la 6.13c se obtiene

$$m_A = \left(\frac{\omega_{entrada}}{\omega_{salida}}\right)\left(\frac{r_{entrada}}{r_{salida}}\right) \qquad (6.13d)$$

y al sustituir la ecuación 6.11f se obtiene:

$$m_A = \left(\frac{O_4 B \operatorname{sen}\mu}{O_2 A \operatorname{sen}\nu}\right)\left(\frac{r_{entrada}}{r_{salida}}\right) \qquad (6.13e)$$

Observe la figura 6-11 y compare la ecuación 6.13e con la ecuación 6.11f, y su análisis según la **relación de velocidad angular** expuesta anteriormente. La ecuación 6.13e muestra que para cualquier opción de $r_{entrada}$ y r_{salida}, la ventaja mecánica responde a cambios en los ángulos ν y μ, de manera opuesta a la de la relación de velocidad angular. Si el ángulo de transmisión μ pasa por cero (lo cual no se desea que suceda), la ventaja mecánica también pasa por cero, sin considerar la magnitud de la fuerza de entrada o par de torsión aplicado. Pero cuando el ángulo V pasa por cero (lo cual puede hacer, y lo hace, dos veces por ciclo en un eslabonamiento de Grashof), ¡la ventaja mecánica sería infinita! Éste es el principio del mecanismo de una trituradora de roca como el que se muestra en la figura 6-11. Una fuerza moderada aplicada al eslabón 2 puede generar una fuerza enorme en el eslabón 4 para triturar la roca. Por supuesto, no se espera obtener la magnitud teórica de salida de fuerza infinita o la magnitud del par de torsión, puesto que las resistencias de los eslabones y las juntas limitarán las fuerzas y pares de torsión máximos obtenibles. Las pinzas aseguradoras ViseGrip son otro ejemplo común de un eslabonamiento que aprovecha esta ventaja mecánica teóricamente infinita en la posición de agarrotamiento (véase la figura P6-21).

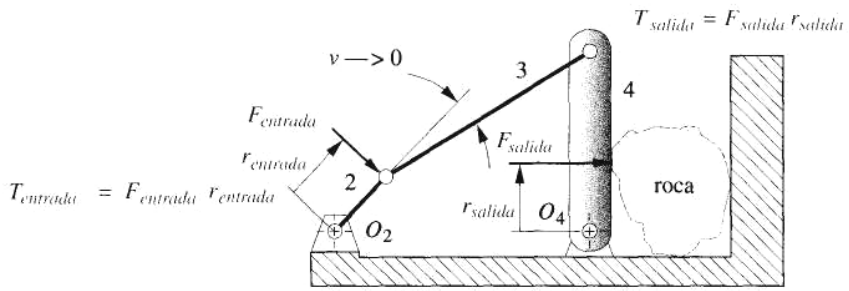


FIGURA 6-11

Mecanismo de agarrotamiento de una "trituradora de roca"

Estas dos relaciones, la **relación de velocidad angular y** la **ventaja mecánica,** proporcionan **índices de mérito** útiles y adimensionales con los cuales se puede juzgar la calidad relativa de diversos diseños de eslabonamientos que podrían proponerse como soluciones.

Uso de los centros instantáneos en el diseño de eslabonamientos

Además de proporcionar un rápido análisis numérico de velocidad, el análisis de centros instantáneos ofrece de manera más importante al diseñador un excelente panorama del comportamiento global del eslabonamiento. Es muy difícil visualizar mentalmente el movimiento complejo de un eslabón de acoplador "flotante", incluso en un simple eslabonamiento de cuatro barras, a menos que construya un modelo o corra una simulación de computadora. Debido a que este complejo movimiento de acoplador se reduce, de hecho, a una rotación pura instantánea con respecto al centro instantáneo $I_{1,3}$, la localización de ese centro permite al diseñador visualizar el movimiento del acoplador como una rotación pura. Es posible, literalmente, *ver* el movimiento y las direcciones de las velocidades de cualquier punto de interés al relacionarlas con el centro instantáneo. Sólo se necesita diseñar el eslabonamiento para unas cuantas posiciones de interés mostrando las localizaciones de los centros instantáneos de cada posición.

En la figura 6-12 se muestra un ejemplo práctico de cómo esta técnica visual, cualitativa y analítica puede aplicarse al diseño de un sistema de suspensión trasera de automóviles. La mayoría de los mecanismos de suspensión de automóviles son eslabonamientos de cuatro barras simples o de manivela-corredera, con el ensamblaje de las ruedas apoyado en el acoplador (como se mostró también en la figura 3-19). La figura 6- 12a) muestra un diseño de suspensión trasera de un auto de fabricación nacional de la producción de 1970, el cual se rediseñó más tarde debido a una tendencia perturbante al "viraje por golpe", es decir, al giro del eje trasero cuando un lado del auto golpea contra un tope. La figura representa una vista desde el centro del automóvil hacia el exterior, que muestra el eslabonamiento de cuatro barras que controla el movimiento hacia arriba y hacia abajo de un lado del eje trasero y una rueda. Los eslabones 2 y 4 están pivotados al bastidor del auto, o sea, el eslabón 1. El ensamblaje de la rueda y el eje está rígidamente unido al acoplador, eslabón 3. Así, el ensamblaje de la rueda tiene movimiento complejo en el plano vertical. Idealmente, lo deseable sería que la rueda se moviera hacia arriba y

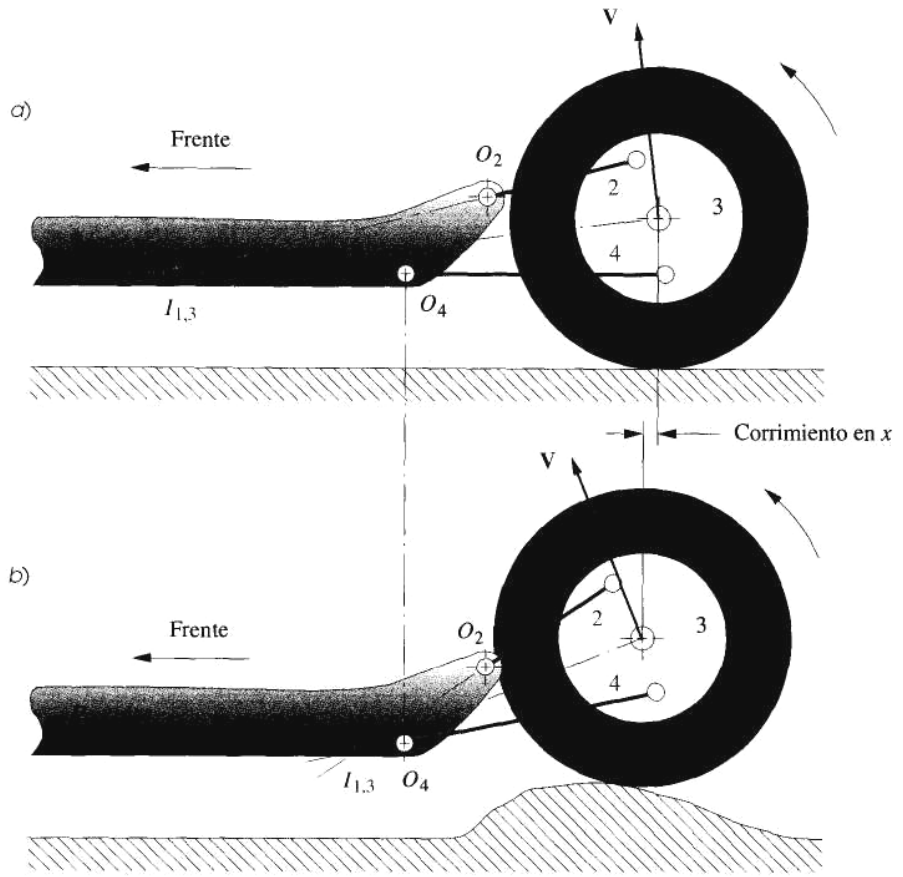


FIGURA 6-12

"Viraje por golpe" debido al corrimiento en la localización del centro instantáneo

hacia abajo en una línea recta vertical cuando golpea contra un tope. En la figura *6*-12*b)* se muestra el movimiento de la rueda y la localización del nuevo centro instantáneo $(I_{1,3})$ para el momento en que una llanta choca contra un tope. El vector de velocidad para el centro de la rueda en cada posición se traza perpendicularmente a su radio desde $I_{1,3}$. Se puede ver que el centro de la rueda tiene una componente horizontal significativa de movimiento conforme se mueve hacia arriba sobre el tope. Esta componente horizontal provoca que el centro de la rueda en ese lado del auto se mueva hacia adelante, mientras se mueve hacia arriba, por lo tanto, voltea el eje (con respecto a un eje vertical) y gira el coche con las llantas traseras de la misma manera en que usted conduce un vagón de juguete. Una vista de la trayectoria del centro instantáneo en cierto intervalo de movimiento describe claramente el comportamiento del eslabón acoplador. El comportamiento indeseable de este sistema de eslabonamiento de suspensión podría haberse pronosti-

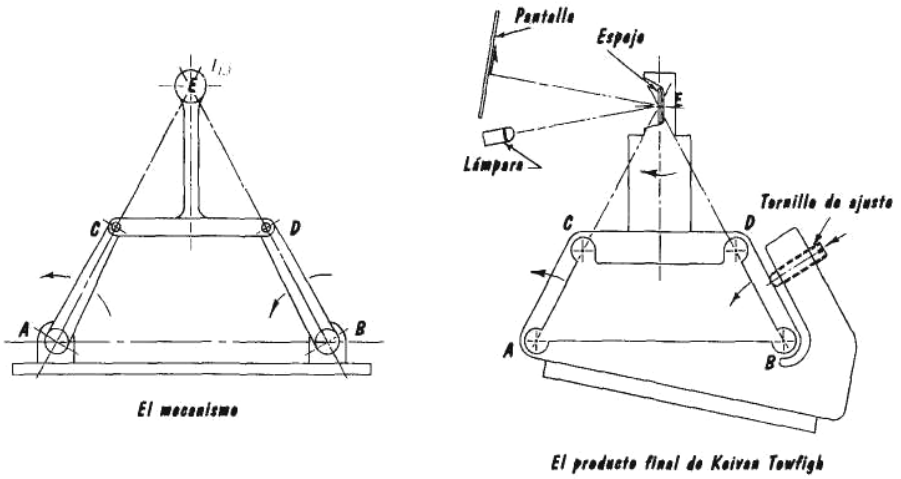


FIGURA 6-13

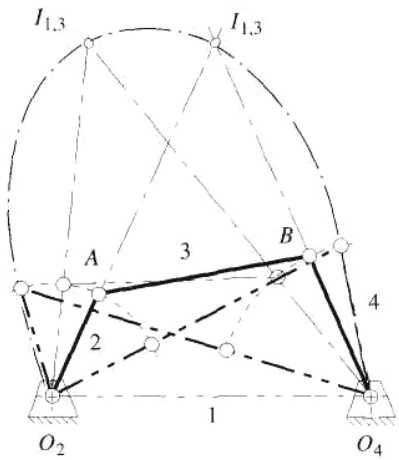
Un mecanismo para ajuste óptico *(Reproducido de la referencia (2) con autorización)*

cado a partir de este análisis simple de centro instantáneo aun antes de construir el mecanismo.

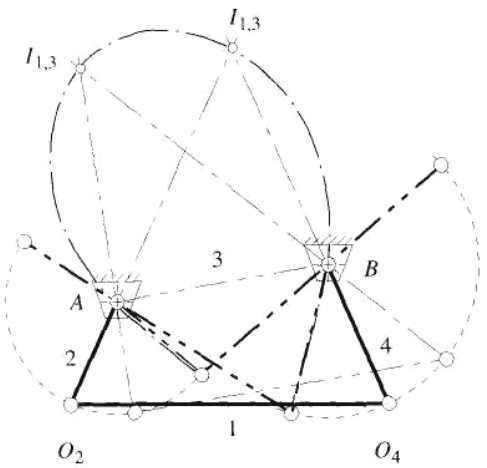
Otro ejemplo práctico del uso efectivo de centros instantáneos en el diseño de eslabonamientos se muestra en la figura 6-13, que es un mecanismo de ajuste óptico utilizado para situar un espejo y permitir una pequeña cantidad de ajuste rotacional. [11] Una explicación más detallada de este caso de estudio de diseño[12] se proporciona en el capítulo 16. El diseñador, K. Towfigh reconoció que $I_{1,3}$ en el punto E es un "pivote fijo" instantáneo que permitirá rotaciones puras muy pequeñas respecto de ese punto con un muy pequeño error de traslación. Luego diseñó un eslabonamiento de cuatro barras de plástico en una pieza, cuyas "juntas de pasador" son delgadas hojas de plástico que se flexionan para permitir ligeras rotaciones. Esto se denomina **eslabonamiento de conformidad,** el cual emplea las deformaciones elásticas de los eslabones como articulaciones en vez de juntas de pasador. Después colocó el espejo en el acoplador en $I_{1,3}$. Incluso el eslabón fijo 1 es la misma pieza que los "eslabones movibles" y tiene un pequeño tornillo de fijación para proporcionar ajuste. Un diseño simple y elegante.

6.5 CÉNTRODOS

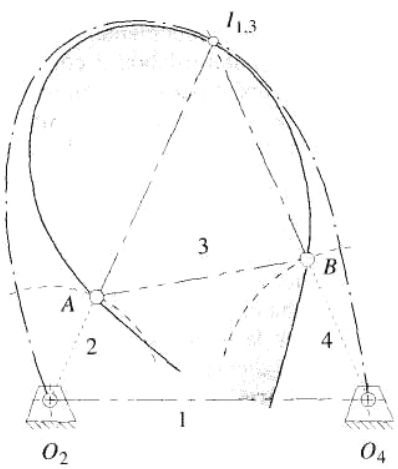
En la figura 6-14 se muestra que las posiciones sucesivas de un centro instantáneo (o **centro)** forman su trayectoria. *Esta trayectoria, o lugar geométrico, del centro instantáneo se denomina* **céntrodo.** Puesto que hay dos eslabones necesarios para crear un centro instantáneo, habrá dos centrados asociados con cualquier centro instantáneo. Éstos se forman primero mediante la trayectoria del centro instantáneo sobre un eslabón y luego sobre el otro. En la figura 6- 14a) se muestra el lugar geométrico del centro instantáneo $I_{1,3}$ como proyectado sobre el eslabón 1. Debido a que el eslabón 1 es estacionario, o fijo, se le denomina **céntrodo fijo.** Al invertir temporalmente el mecanismo y fijar el eslabón



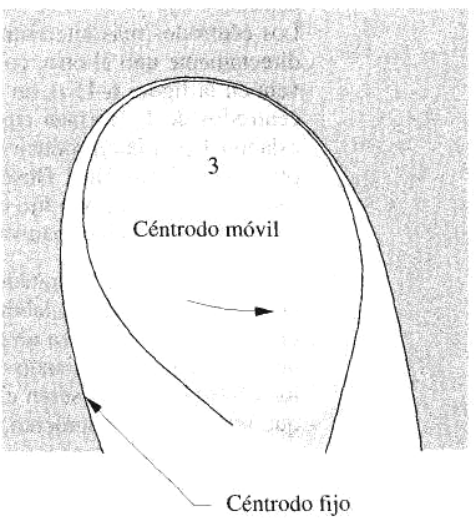
a) El céntrodo fijo



b) El céntrodo móvil



c) Los céntrodos en contacto



d) El céntrodo móvil se rueda contra el céntrodo fijo para producir el mismo movimiento de acoplador que el eslabonamiento original

FIGURA 6-14

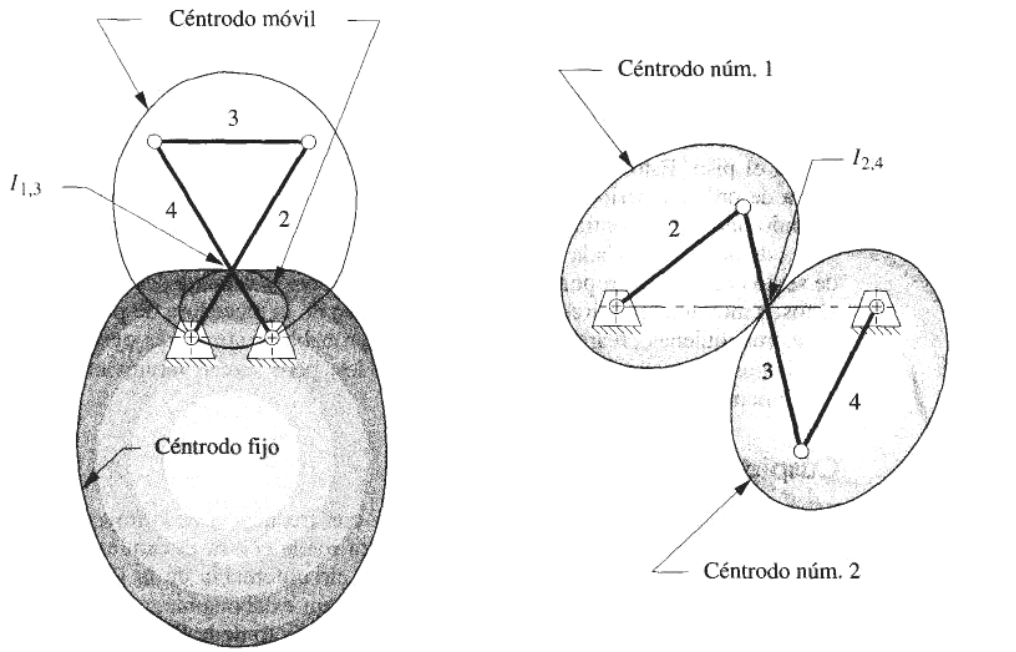
Céntrodos (o polodias) fijo y móvil de lazo abierto de un eslabonamiento de cuatro barras

3 como eslabón de fijación, del mismo modo que se muestra en la figura 6-14b), se puede mover el eslabón 1 como el acoplador y proyectar el lugar geométrico de $I_{1,3}$ sobre el eslabón 3. En el eslabonamiento original el eslabón 3 era el acoplador móvil, por lo que se le denomina **céntrodo móvil.** La figura 6-14c) muestra el eslabón original con los céntrodos fijos y móviles sobrepuestos.

La definición de centro instantáneo expresa que ambos eslabones tienen la misma velocidad en ese punto y en ese instante. El eslabón 1 tiene velocidad cero en cualquier lugar, como el céntrodo fijo. Por lo tanto, conforme se mueve el eslabonamiento el céntrodo móvil debe rodar sobre el fijo, sin deslizarse. Si se cortan en metal los céntrodos fijo y móvil, como se muestra en la figura *6-l4d),* y se hace rodar el céntrodo móvil (o sea el eslabón 3) contra el céntrodo fijo (es decir, el eslabón 1), el movimiento complejo del eslabón 3 sería idéntico al del eslabonamiento original. *Todas las curvas del acoplador de los puntos en el eslabón 3 tendrán las mismas formas de trayectoria que en el eslabón original.* Se tiene ahora, en efecto, un mecanismo de cuatro barras "sin eslabones", uno compuesto en realidad de dos cuerpos que tienen esas formas centródicas que ruedan uno contra el otro. Los eslabones 2 y 4 se han eliminado. Observe que el ejemplo mostrado en la figura 6-14 es un mecanismo de cuatro barras de noGrashof. Las longitudes de sus céntrodos están limitadas por las posiciones de agarrotamiento del doble balancín.

Todos los centros instantáneos de un eslabonamiento tendrán céntrodos. Si los eslabones se conectan directamente por una junta, por ejemplo los $I_{2,3}$, $I_{3,4}$, $I_{1,2}$ e $I_{1,4}$, sus céntrodos fijo y móvil se degenerarán en un punto en esa localización en cada eslabón. Los céntrodos más interesantes son los que incluyen eslabones que no están conectados directamente uno al otro, como los $I_{1,3}$ e $I_{2,4}$. Si se observa el mecanismo de doble manivela en la figura 6-15a), en el cual los eslabones 2 y 4 giran totalmente, se verá que los céntrodos de $I_{1,3}$ forman curvas cerradas. El movimiento del eslabón 3 con respecto al eslabón 1 podría reproducirse de forma tal que esos dos céntrodos rodasen uno contra el otro sin deslizamiento. Observe que hay dos lazos para el céntrodo móvil. Ambos deben rodar sobre el céntrodo fijo de un solo lazo para completar el movimiento del mecanismo equivalente de doble manivela.

Hasta ahora se ha tratado ampliamente con el centro instantáneo $I_{1,3}$. El centro instantáneo $I_{2,4}$ incluye dos eslabones que están en rotación pura y no directamente conectados uno al otro. Si se utiliza un eslabonamiento de Grashof del caso especial con los eslabones cruzados (denominado algunas veces como eslabonamiento **antiparalelográmico),** los céntrodos de $I_{2,4}$ serán elipses, como se muestra en la figura 6-15b). Para garantizar que no habrá deslizamiento, quizá sea necesario poner dientes conectables en cada céntrodo. Se tendrá entonces un par de **engranes no circulares** elípticos, o *engranaje,* que da el *mismo movimiento de salida que el eslabonamiento original de doble manivela,* y tendrá las *mismas variaciones en la relación de velocidad angular y la ventaja mecánica que* tenía *el eslabonamiento.* Por consiguiente, se ve que los *engranajes son sólo eslabonamientos de cuatro barras disfrazados.* Los engranes no circulares se emplean mucho en maquinaria, por ejemplo en las prensas tipográficas, donde se deben acelerar y desacelerar los rodillos, de acuerdo con cierto esquema, durante cada ciclo o revolución. Las formas más complicadas de engranes no circulares son análogas a las levas y seguidores, ya que el eslabonamiento de cuatro barras equivalente debe tener eslabones de longitud variable. Los **engranes circulares** son sólo un caso especial de los engranajes no circulares, los cuales dan una **relación de velocidad angular constante** y se emplean extensamente en todas las máquinas. Los engranes y engranajes se tratarán con mayor detalle en el capítulo 10.



a) Céntrodos de lazo cerrado de $l_{1,3}$ para un eslabonamiento de manivela doble de Grashof

b) Céntrodos elipsoidales de $l_{2,4}$ para un caso especial de eslabonamiento antiparalelográmico de Grashof

FIGURA 6-15

Céntrodos fijo y móvil de lazo cerrado

En general, los céntrodos de manivela-balancín y de doble o triple balancín serán curvas abiertas con asíntotas. Los céntrodos de eslabonamientos de doble manivela serán curvas cerradas. El programa FOURBAR calculará y trazará los céntrodos fijos y móviles para cualquier eslabonamiento que se introduzca. Abra los archivos de datos F06-14.4br y F06-15a.4br y F06-15b.4br con el programa FOURBAR para ver los céntrodos de estos eslabonamientos trazados conforme giran los eslabonamientos.

Un eslabonamiento "sin eslabones"

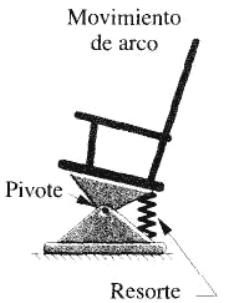
Un ejemplo común de un mecanismo compuesto de céntrodos se muestra en la figura 6-16a). Probablemente usted se ha balanceado en una silla mecedora común del tipo *Boston* o *Hitchcock* y experimentó los movimientos tranquilizadores que proporciona a su cuerpo. También puede haberse sentado en una mecedora de *plataforma,* como la que se ilustra en la figura 6-16*b*), y habrá notado que su movimiento no se siente tan tranquilizador.

Hay buenas razones cinemáticas para esta diferencia. La mecedora de plataforma tiene una junta de pasador fija entre el asiento y la base (el piso). Por lo tanto, todas las partes de su cuerpo están en rotación pura a lo largo de arcos concéntricos. En efecto, se encuentra cabalgando en el balancín de un eslabonamiento.

La mecedora tipo Boston tiene una base formada (curva), o "corredores", que ruedan contra el piso. Estos corredores a menudo *no* son arcos circulares. Tienen un perfil de curva de orden superior. Son, de hecho, **céntrodos móviles.** El piso es el **céntrodo fijo.** Cuando uno rueda contra el otro, la silla y su ocupante experimentan un movimiento de curva de acoplador. Cada parte de su cuerpo viaja a lo largo de una curva de acoplador de sexto orden, que proporciona ligeras aceleraciones y velocidades y se siente mejor que el tosco movimiento (circular) de segundo orden de la mecedora de plataforma. Nuestros ancestros, quienes crearon estas mecedoras, probablemente nunca oyeron de los eslabonamientos de cuatro barras ni de los céntrodos, pero sabían intuitivamente cómo crear movimientos agradables.



a) Mecedora Boston



b) Mecedora
de plataforma

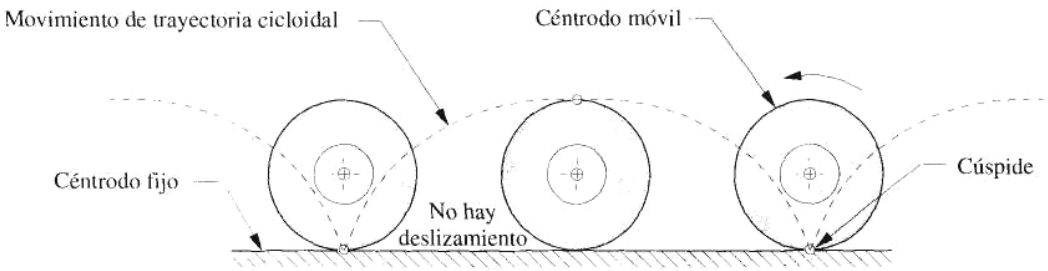
FIGURA 6-16
Algunas sillas mecedoras usan céntrodos de un eslabonamiento de cuatro barras

Cúspides

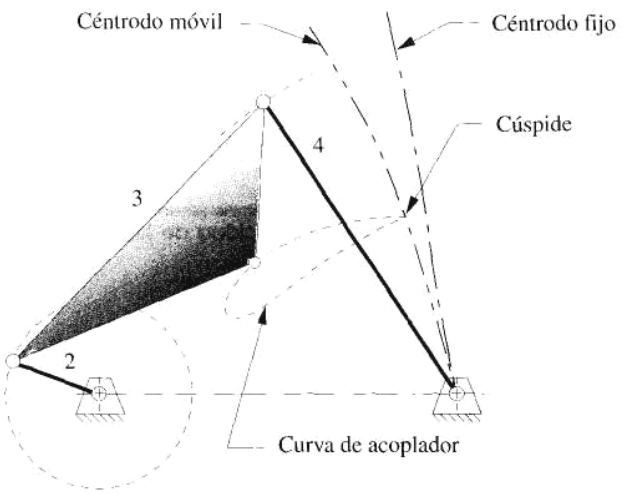
Otro ejemplo de un céntrodo que quizás use con frecuencia es la trayectoria de la llanta de su auto o bicicleta. A medida que la llanta rueda contra el camino sin deslizarse, el camino se convierte en un céntrodo fijo y la circunferencia de la llanta es el céntrodo móvil. La llanta es, en efecto, el acoplador de un eslabonamiento de cuatro barras sin eslabones. Todos los puntos en la superficie de contacto de la llanta se mueven a lo largo de curvas de acoplador cicloidales y pasan por una cúspide de velocidad cero cuando alcanzan el céntrodo fijo en la superficie del camino, como se muestra en la figura 6-17a). Los demás puntos en el ensamblaje de la llanta y la rueda viajan a lo largo de curvas de acoplador que no tienen cúspides. Esto último es una pista para identificar puntos de acoplador que tienen cúspides en su curva de acoplador. 5/ *se elige que un punto de acoplador esté sobre el céntrodo móvil en un extremo de su movimiento de trayectoria (es decir, en una de las posiciones de* /, $_3$), *entonces tendrá una cúspide en su curva de acoplador.* La figura 6-17¿>) muestra una curva de acoplador de dicho punto, trazada con el programa FOURBAR. El extremo derecho de la trayectoria de acoplador toca el céntrodo móvil y como resultado tiene una cúspide en ese punto. De tal modo que si se desea una cúspide en el movimiento de acoplador, se puede disponer de muchos. Simplemente seleccione un punto de acoplador en el céntrodo móvil del eslabón 3. Lea el archivo del disco F06-17b.4br en el programa FOURBAR para animar ese eslabonamiento con su curva de acoplador o céntrodos. Observe en la figura 6-14 que al elegir cualquier localización de centro instantáneo $I_{1,3}$ tanto sobre el acoplador como sobre un punto de acoplador, se proporcionará una cúspide en ese punto.

6.6 VELOCIDAD DE DESLIZAMIENTO

Cuando hay una junta deslizante entre dos eslabones y ninguno es el eslabón de fijación, el análisis de velocidad es más complicado. La figura 6-18 muestra una inversión del mecanismo de cuatro barras de manivela-corredera, en el cual la junta deslizante es flotante, es decir, no está fija. En la resolución para la velocidad en la junta deslizante A se tiene que reconocer que hay más de un punto A en esa junta. Hay un punto A como parte del eslabón 2 (A_2), un punto A como parte del eslabón 3 (A_3) y un punto A como parte del eslabón 4 (A_4). Esta es una situación de CASO 2, en la cual se tienen por



a) Las cúspides de curva de acoplador existen sólo en el céntrodo móvil



b) Movimiento cicloidal de un céntrodo circular móvil que rueda sobre un céntrodo fijo recto

FIGURA 6-17
Ejemplos de centrados

lo menos dos puntos que pertenecen a diferentes eslabones, pero que ocupan la misma localización en un instante dado. Por consiguiente, se aplicará la ecuación 6.6 de **velocidad relativa.** Lo usual es resolver directamente para la velocidad de al menos uno de estos puntos, a partir de la información de entrada conocida, utilizando la ecuación 6.7. Ésta y la ecuación 6.6 son las necesarias para determinar lo demás. En este ejemplo el impulsor es el eslabón 2, y θ_2 y ω_2 se dan para la posición de bastidor congelado que se muestra. Se desea determinar ω_4, la velocidad angular del eslabón 4, y también la velocidad de deslizamiento en la junta marcada con *A*.

En la figura 6-18, el **eje de deslizamiento** se muestra tangente al movimiento de la corredera, y es la línea a lo largo de la cual se produce todo deslizamiento entre los

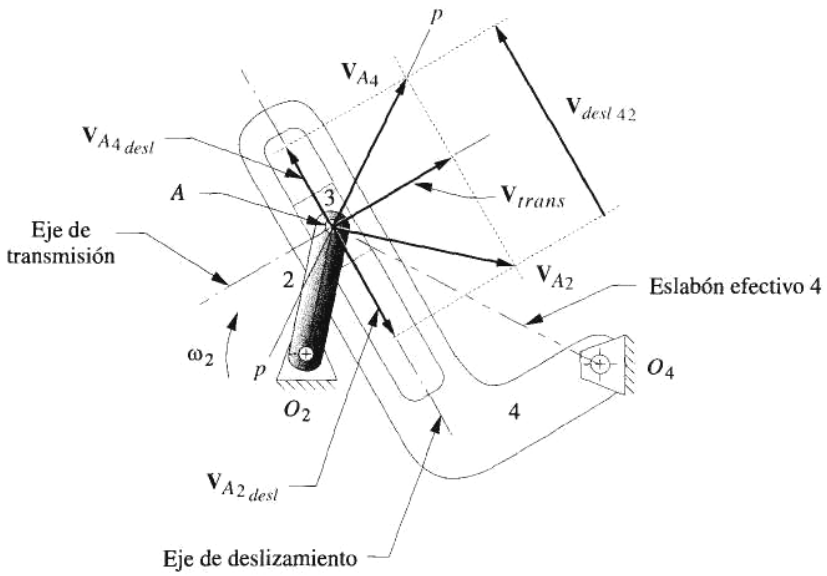


FIGURA 6-18

Velocidad de deslizamiento y velocidad de transmisión (observe que la ω aplicada es negativa como se muestra)

eslabones 3 y 4. El **eje de transmisión** está definido para ser perpendicular al eje de deslizamiento, y pasa por la junta de corredera en *A*. Este *eje de transmisión es la* **única recta** *a lo largo de la cual se puede transmitir movimiento o fuerza por medio de la junta de corredera, excepto por la fricción.* En este ejemplo se supondrá que la fricción es despreciable. Cualquier vector de fuerza o velocidad aplicado al punto *A se* resuelve en dos componentes a lo largo de estos dos ejes, los cuales proporcionan un *sistema de coordenadas local, traslatorio y rotatorio,* para el análisis de la junta. La componente a lo largo del eje de transmisión realizará el trabajo útil en la junta. Pero, la componente a lo largo del eje de deslizamiento no lo efectuará, excepto el *trabajo de fricción.*

EJEMPLO 6-5

Análisis gráfico de velocidad en una junta deslizante.

Problema: Dados θ_2, θ_3, θ_4 y ω_2 encuentre ω_3, ω_4 y $\mathbf{V}_A$ por medio de métodos gráficos.

Solución: (Véase la figura 6-18.)

! Empiece en el extremo del eslabonamiento acerca del cual tiene más información. Calcule la magnitud de la velocidad del **punto A como parte del eslabón 2** *(A_2)* utilizando la ecuación escalar 6.7.

$$v_{A_2} = (AO_2)\omega_2 \qquad \text{(a)}$$

2 Trace el vector de velocidad $\mathbf{V}_{A_2}$ con su longitud igual a su magnitud v_{A_2}, a una escala conveniente y con su principio en el punto A y su dirección perpendicular al radio AO_2. Su sentido es el mismo que el de ω_2, como se muestra en la figura 6-18.

3 Dibuje el **eje de deslizamiento** y el **eje de transmisión** a través del punto *A*.

4 Proyecte $\mathbf{V}_{A_2}$ sobre el eje de deslizamiento y sobre el eje de transmisión para crear las componentes $\mathbf{V}_{A_2desl}$ y $\mathbf{V}_{trans}$ de $\mathbf{V}_{A_2}$ sobre los ejes de deslizamiento y de transmisión, respectivamente. Observe que la **componente de transmisión** se comparte entre todos los vectores de velocidad verdaderos en este punto, ya que es la única componente que se transmite a través de la junta.

5 Note que el eslabón 3 está articulado al eslabón 2, de tal manera que $\mathbf{V}_{A_3} = \mathbf{V}_{A_2}$.

6 Advierta que la dirección de la velocidad del punto $\mathbf{V}_{A_4}$ es predecible, puesto que todos los puntos en el eslabón 4 se encuentran pivotando en rotación pura con respecto al punto O_4. Trace la recta *pp* a través del punto *A* y perpendicular al eslabón efectivo 4, AO_4. La recta *pp* es la dirección de la velocidad $\mathbf{V}_{A_4}$.

7 Trace la verdadera magnitud del vector de velocidad $\mathbf{V}_{A_4}$ al prolongar la proyección de la **componente de transmisión** $\mathbf{V}_{transm}$ hasta que interseque la recta *pp*.

8 Proyecte $\mathbf{V}_{A_4}$ sobre el eje de deslizamiento para crear la **componente de deslizamiento** $\mathbf{V}_{A_4desl}$

9 Escriba la ecuación del vector de velocidad relativa 6.6 para las **componentes de deslizamiento** del punto A_2 contra el punto A_4:

$$V_{desl_{42}} = V_{A_{4desl}} - V_{A_{2desl}} \tag{b}$$

10 Las velocidades angulares de los eslabones 3 y 4 son idénticas debido a que comparten la junta de corredera o deslizamiento y deben girar juntas. Pueden calcularse a partir de la ecuación 6.7:

$$\omega_4 = \omega_3 = \frac{V_{A_4}}{AO_4} \tag{c}$$

El análisis de centros instantáneos se emplea también para resolver gráficamente problemas de velocidad en juntas deslizantes.

EJEMPLO 6-6

Análisis gráfico de velocidad en el mecanismo de cuatro barras de manivela-corredera invertido mediante centros instantáneos.

Problema: Dados θ_2, θ_3, θ_4, ω_2 encuentre ω_3, ω_4 y $\mathbf{V}_A$ por medio de métodos gráficos.

Solución: (Véase la figura 6-19.)

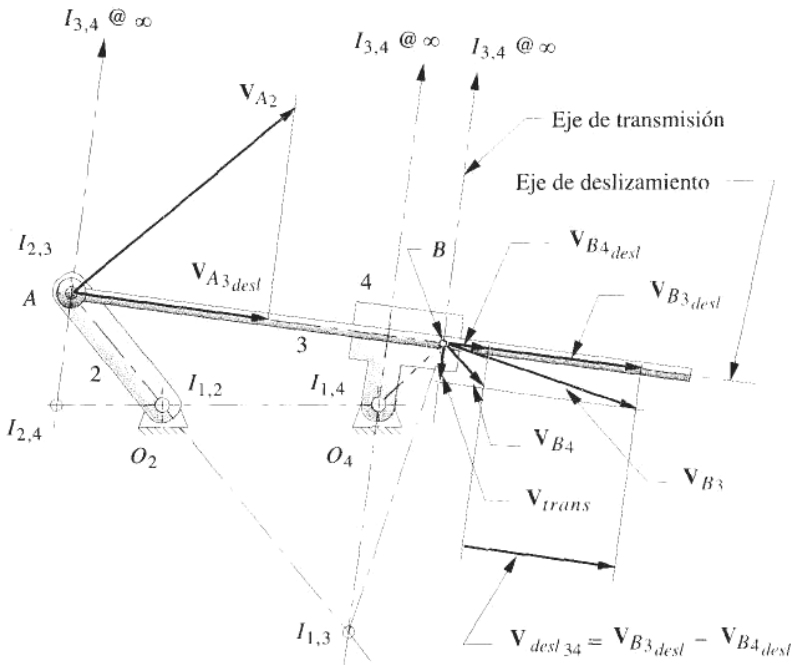


FIGURA 6-19

Análisis gráfico de velocidad de un eslabonamiento de manivela-corredera invertida

1 Comience en el extremo del eslabonamiento acerca del cual tiene la mayor información. Calcule la magnitud de la velocidad del punto *A* como parte del eslabón 2 *(A_2)* utilizando la ecuación escalar 6.7.

$$v_{A2} = (AO_2)\omega_2 \qquad \text{(a)}$$

2 Trace el vector de velocidad $\mathbf{V}_{A_2}$ con su longitud equivalente a su magnitud v_{A_2} a una escala conveniente, con su principio en el punto A y su dirección perpendicular al radio AO_2. Su sentido es el mismo que el de ω_2 como se muestra en la figura 6-19. Advierta que el eslabón 3 está articulado al eslabón 2, de modo que $\mathbf{V}_{A_3} = \mathbf{V}_{A_2}$.

3 Localice los centros instantáneos del eslabonamiento como se muestra en la figura 6-19.

4 Defina un punto *(B)* en el bloque de corredera para su análisis. Trace el **eje de deslizamiento y** el **eje de transmisión** a través del punto *B.* Observe que el punto *B* es un punto múltiple, perteneciente a los eslabones 3 y 4, y tiene distintas velocidades lineales en cada uno.

5 Proyecte $\mathbf{V}_{A_2}$ sobre el eje de deslizamiento para crear la componente ortogonal $\mathbf{V}_{A_{3desl}}$ a lo largo del eslabón 3. Traslade esta componente de deslizamiento a lo largo del eslabón 3 y colóquela en el punto 5. Renómbrela como $\mathbf{V}_{B_{3desl}}$.

6 La dirección de la velocidad verdadera del punto *B* como parte del eslabón 3 ($\mathbf{V}_{B3}$) se encuentra a lo largo de una recta perpendicular al radio desde $I_{1,3}$ hasta *B*. Trace una perpendicular a $\mathbf{V}_{B3desl}$ en su terminación y cree $\mathbf{V}_{B3}$.

7 Proyecte $\mathbf{V}_{B3}$ sobre el eje de transmisión para crear la componente $\mathbf{V}_{trans}$. Observe que la **componente de transmisión** se comparte entre todos los vectores de velocidad verdadera en este punto, puesto que es la única componente que puede transmitir a través de la junta.

8 Observe que se puede predecir la dirección de la velocidad del punto $\mathbf{V}_{B4}$, ya que todos los puntos en el eslabón 4 se encuentran pivotando en rotación pura con respecto al punto O_4. Trace una línea en la dirección de $\mathbf{V}_{B4}$, perpendicular al eslabón efectivo 4. Trace la magnitud verdadera del vector de velocidad $\mathbf{V}_{B4}$ prolongando la proyección de la componente de transmisión $\mathbf{V}_{trans}$ hasta que interseque la recta de $\mathbf{V}_{B4}$.

9 Proyecte $\mathbf{V}_{B4}$ sobre el eje de deslizamiento para crear la **componente de deslizamiento** $\mathbf{V}_{B4desl}$.

10 La velocidad de deslizamiento total en *B* es la diferencia entre las dos componentes de deslizamiento. Escriba la ecuación 6.6 para las componentes de deslizamiento del punto B_3 contra el punto B_4.

$$V_{desl34} = V_{B3desl} - V_{B4desl} \tag{b}$$

11 Las velocidades angulares de los eslabones 3 y 4 son idénticas debido a que comparten la junta de corredera y deben girar juntas. Se calculan a partir de la ecuación 6.7:

$$\omega_4 = \omega_3 = \frac{V_{B4}}{AO_4} \tag{c}$$

Los ejemplos anteriores muestran cómo se resuelve gráficamente un eslabonamiento de junta deslizante para las velocidades en una posición. En la siguiente sección se desarrollará la solución general utilizando ecuaciones algebraicas para resolver el mismo tipo de problema.

6.7 SOLUCIONES ANALÍTICAS PARA ANÁLISIS DE VELOCIDAD

Eslabonamiento de cuatro barras con juntas de pasador

Las ecuaciones de posición para el eslabonamiento de cuatro barras con juntas de pasador se dedujeron en la sección 4.5. El eslabonamiento se mostró en la figura 4-7 y se muestra de nuevo en la figura 6-20, en la cual se indica también una velocidad angular de entrada ω_2 aplicada al eslabón 2. Esta ω_2 puede ser una velocidad de entrada variable con el tiempo. La ecuación de lazo vectorial se indica en las ecuaciones 4.5a y 4.5c, las cuales se repiten ahora para su conveniencia:

$$\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1 = 0 \tag{4.5a}$$

Como antes, se sustituye la notación de número complejo para los vectores, que denotan sus longitudes escalares como *a, b, c, d* como se muestra en la figura 6-20a):

$$ae^{j\theta_2} + be^{j\theta_3} - ce^{j\theta_4} - de^{j\theta_1} = 0 \tag{4.5c}$$

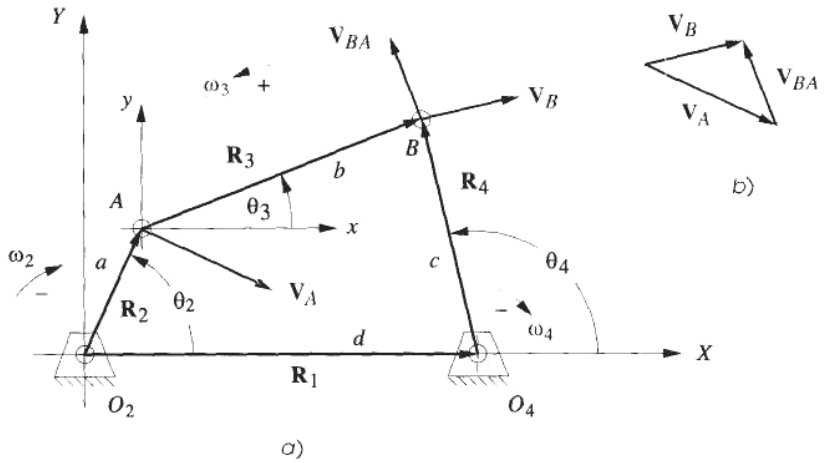


FIGURA 6-20

Lazo de vectores de posición para un eslabonamiento de cuatro barras que muestra los vectores de velocidad para una ω_2 negativa (smr)

Para obtener una expresión que represente la velocidad se diferencia la ecuación 4.5c con respecto al tiempo:

$$jae^{j\theta_2}\frac{d\theta_2}{dt} + jbe^{j\theta_3}\frac{d\theta_3}{dt} - jce^{j\theta_4}\frac{d\theta_4}{dt} = 0 \tag{6.14a}$$

Pero,

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \omega_2; \qquad \frac{d\theta_3}{dt} = \omega_3; \qquad \frac{d\theta_4}{dt} = \omega_4 \tag{6.14b}$$

y:

$$ja\omega_2 e^{j\theta_2} + jb\omega_3 e^{j\theta_3} - jc\omega_4 e^{j\theta_4} = 0 \tag{6.14c}$$

Observe que el término θ_1 se ha eliminado debido a que el ángulo es una constante, por consiguiente, su derivada es cero. Observe también que la ecuación 6.14 es, de hecho, la **velocidad relativa** o la **ecuación de diferencia de velocidad.**

$$\mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{BA} - \mathbf{V}_B = 0 \tag{6.15a}$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_A &= ja\omega_2 e^{j\theta_2} \\ \mathbf{V}_{BA} &= jb\omega_3 e^{j\theta_3} \\ \mathbf{V}_B &= jc\omega_4 e^{j\theta_4} \end{aligned} \tag{6.15b}$$

Compare la ecuación 6.15 con las ecuaciones 6.3, 6.5 y 6.6. Esta ecuación se resuelve gráficamente en el diagrama vectorial de la figura *6-20b).*

Ahora se necesita resolver la ecuación 6.14 para ω_3 y ω_4, conociendo la velocidad de entrada ω_2, las longitudes de eslabón y todos los ángulos de eslabón. Por lo tanto, el análisis de posición deducido en la sección 4.5 debe efectuarse primero para determinar los ángulos de eslabón, antes de que se complete este análisis de velocidad. Se desea resolver la ecuación 6.14 para obtener expresiones en esta forma:

$$\omega_3 = f(a,\ b,\ c,\ d,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \theta_4,\ \omega_2) \qquad \omega_4 = g(a,\ b,\ c,\ d,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \theta_4,\ \omega_2) \tag{6.16}$$

La estrategia de solución será la misma que la efectuada para el análisis de posición. Primero se sustituye la identidad de Euler a partir de la ecuación 4.4a en cada término de la ecuación 6.14c:

$$ja\omega_2(\cos\theta_2 + j\ \text{sen}\ \theta_2) + jb\omega_3(\cos\theta_3 + j\ \text{sen}\ \theta_3) - jc\omega_4(\cos\theta_4 + j\ \text{sen}\ \theta_4) = 0 \tag{6.17a}$$

Se multiplica por el operador j:

$$a\omega_2(j\cos\theta_2 + j^2\ \text{sen}\ \theta_2) + b\omega_3(j\cos\theta_3 + j^2\ \text{sen}\ \theta_3) - c\omega_4(j\cos\theta_4 + j^2\ \text{sen}\ \theta_4) = 0 \tag{6.17b}$$

Los términos coseno serán los términos imaginarios, o los términos en la dirección y, y puesto que $j^2 = -1$, los términos seno serán los reales o en la dirección x.

$$a\omega_2(-\text{sen}\ \theta_2 + j\cos\theta_2) + b\omega_3(-\text{sen}\ \theta_3 + j\cos\theta_3) - c\omega_4(-\text{sen}\ \theta_4 + j\cos\theta_4) = 0 \tag{6.17c}$$

Ahora se puede separar esta ecuación vectorial en sus dos componentes reuniendo por separado todos los términos reales e imaginarios:

parte real (componente x):

$$-a\omega_2\ \text{sen}\ \theta_2 - b\omega_3\ \text{sen}\ \theta_3 + c\omega_4\ \text{sen}\ \theta_4 = 0 \tag{6.17d}$$

parte imaginaria (componente *y):*

$$a\omega_2\cos\theta_2 + b\omega_3\cos\theta_3 - c\omega_4\cos\theta_4 = 0 \tag{6.17e}$$

Observe que se han cancelado las j en la ecuación 6.17e. Se resuelven estas dos ecuaciones, 6.17d y 6.17e, simultáneamente por sustitución directa para obtener:

$$\omega_3 = \frac{a\omega_2}{b}\frac{\text{sen}(\theta_4 - \theta_2)}{\text{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \tag{6.18a}$$

$$\omega_4 = \frac{a\omega_2}{c}\frac{\text{sen}(\theta_2 - \theta_3)}{\text{sen}(\theta_4 - \theta_3)} \tag{6.18b}$$

Una vez que se han obtenido ω_3 y ω_4, se determinan las velocidades lineales sustituyendo la identidad de Euler en las ecuaciones 6.15,

$$\mathbf{V}_A = ja\omega_2(\cos\theta_2 + j\ \text{sen}\ \theta_2) = a\omega_2(-\text{sen}\ \theta_2 + j\cos\theta_2) \tag{6.19a}$$

$$\mathbf{V}_{BA} = jb\omega_3(\cos\theta_3 + j\ \text{sen}\ \theta_3) = b\omega_3(-\text{sen}\ \theta_3 + j\cos\theta_3) \tag{6.19b}$$

$$\mathbf{V}_B = jc\omega_4(\cos\theta_4 + j\,\text{sen}\,\theta_4) = c\omega_4(-\text{sen}\,\theta_4 + j\cos\theta_4) \tag{6.19c}$$

donde los términos reales e imaginarios son las componentes *x* y *y,* respectivamente. Las ecuaciones 6.18 y 6.19 proporcionan una solución completa para las velocidades angulares de los eslabones y las velocidades lineales de las juntas en el eslabonamiento de cuatro barras con juntas de pasador. Observe que también hay dos soluciones a este problema de velocidad, correspondientes a las ramas abierta y cruzada del eslabonamiento. Se determinan por la sustitución de los valores de las ramas abierta o cruzada de θ_3 y θ_4 obtenidos de las ecuaciones 4.10 y 4.13, en las ecuaciones 6.18 y 6.19. La figura 6-20a) muestra la rama abierta.

Eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera

Las ecuaciones de posición para el eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera con corrimiento (inversión núm. 1) se dedujeron en la sección 4.6. El eslabonamiento se mostró en la figura 4-9 y se muestra nuevamente en la figura 6-2la), en la que se tiene también una velocidad angular de entrada ω_2 aplicada al eslabón 2. Esta ω_2 puede ser una velocidad de entrada variable con el tiempo. La ecuación de lazo vectorial 4.14 se repite aquí para su conveniencia.

$$\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1 = 0 \tag{4.14a}$$

$$ae^{j\theta_2} - be^{j\theta_3} - ce^{j\theta_4} - de^{j\theta_1} = 0 \tag{4.14b}$$

La ecuación 4.14b se diferencia con respecto al tiempo, haciendo notar que *a, b, c,* θ_1 y θ_4 son constantes, pero la longitud del eslabón *d* varía con el tiempo en esta inversión.

$$ja\omega_2 e^{j\theta_2} - jb\omega_3 e^{j\theta_3} - \dot{d} = 0 \tag{6.20a}$$

El término *d con punto* es la velocidad lineal del bloque de la corredera. La ecuación 6.20a es la ecuación de diferencia de velocidad 6.5 y puede escribirse en esa forma.

$$\mathbf{V}_A - \mathbf{V}_{AB} - \mathbf{V}_B = 0$$

o:

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_{AB}$$

pero:

$$\mathbf{V}_{AB} = -\mathbf{V}_{BA} \tag{6.20b}$$

entonces:

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{BA}$$

La ecuación 6.20 es idéntica en forma a las ecuaciones 6.5 y 6.15a. Observe que debido a que se ordenó el vector de posición R_3 en las figuras 4-9 y 6-21, con su principio en el punto *B,* dirigido desde *B* hasta A, su derivada representa la diferencia de velocidad de un punto *A* con respecto a un punto *B,* lo opuesto de lo considerado en el ejemplo anterior de un eslabonamiento de cuatro barras. Compare esto también con la ecuación 6.15b, observando que su vector R_3 se dirige desde *A* hasta *B.* La figura 6-21*b)* muestra el diagrama vectorial de la solución gráfica a la ecuación 6.20b.

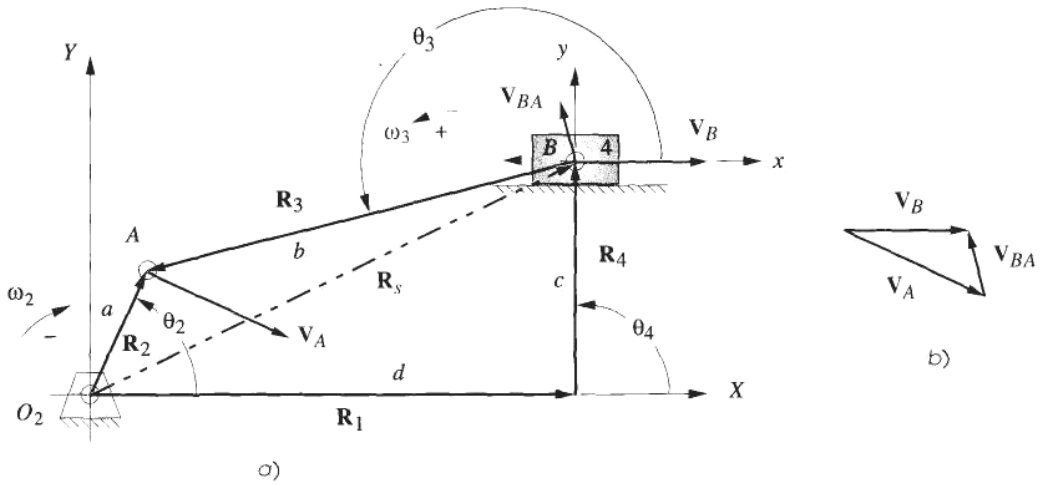


FIGURA 6-21

Lazo de vectores de posición para un eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera que muestra los vectores de velocidad para una ω_2 negativa (smr)

Sustituya el equivalente de Euler, ecuación 4.4a, en la ecuación 6.20a,

$$ja\omega_2(\cos\theta_2 + j\,\text{sen}\,\theta_2) - jb\omega_3(\cos\theta_3 + j\,\text{sen}\,\theta_3) - \dot{d} = 0 \qquad (6.21a)$$

se simplifica,

$$a\omega_2(-\text{sen}\,\theta_2 + j\cos\theta_2) - b\omega_3(-\text{sen}\,\theta_3 + j\cos\theta_3) - \dot{d} = 0 \qquad (6.21b)$$

y se separa en componentes reales e imaginarios.

parte real (componente x):

$$-a\omega_2\,\text{sen}\,\theta_2 + b\omega_3\,\text{sen}\,\theta_3 - \dot{d} = 0 \qquad (6.21c)$$

parte imaginaria (componente *y):*

$$a\omega_2\cos\theta_2 - b\omega_3\cos\theta_3 = 0 \qquad (6.21d)$$

Éstas son dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas, *d con punto* y ω_3. La ecuación 6.2Id puede resolverse para ω_3 y sustituirse en la 6.21c para encontrar *d con punto:*

$$\omega_3 = \frac{a}{b}\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_3}\omega_2 \qquad (6.22a)$$

$$\dot{d} = -a\omega_2\,\text{sen}\,\theta_2 + b\omega_3\,\text{sen}\,\theta_3 \qquad (6.22b)$$

La velocidad absoluta del punto A y la diferencia de velocidad del punto A contra el punto *B* se determinan a partir de la ecuación 6.20:

$$\mathbf{V}_A = a\omega_2(-\text{sen}\,\theta_2 + j\cos\theta_2) \tag{6.23a}$$

$$\mathbf{V}_{AB} = b\omega_3(-\text{sen}\,\theta_3 + j\cos\theta_3) \tag{6.23b}$$

$$\mathbf{V}_{BA} = -\mathbf{V}_{AB} \tag{6.23c}$$

Eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera invertido

Las ecuaciones de posición para este eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera invertido se dedujeron en la sección 4.7. Este eslabonamiento se mostró en la figura 4-10 y se muestra nuevamente en la figura 6-22, en la cual se indica también una velocidad angular de entrada ω_2 aplicada al eslabón 2. Esta ω_2 puede variar con el tiempo. Las ecuaciones de lazo vectorial 4.14 mostradas anteriormente son también validas para este eslabonamiento.

Todos los eslabonamientos de corredera tendrán al menos un eslabón cuya longitud efectiva entre juntas varía conforme se mueve el eslabonamiento. En esta inversión la longitud del eslabón 3 entre los puntos *Ay B,* designada como *b,* cambiará cuando pase por la corredera en el eslabón 4. Para obtener una expresión de la velocidad se diferencia la ecuación 4.14b respecto al tiempo, observándose que *a, c, d* y θ_1 son constantes y *b* varía con el tiempo.

$$ja\omega_2 e^{j\theta_2} - jb\omega_3 e^{j\theta_3} - \dot{b}e^{j\theta_3} - jc\omega_4 e^{j\theta_4} = 0 \tag{6.24}$$

El valor de *db/dt* será una de las variables por resolverse en este caso, y es el término *b con punto* en la ecuación. Otra variable será ω_4, la velocidad angular del eslabón 4. Observe, sin embargo, que también se tiene una incógnita en ω_3, la velocidad angular del eslabón 3. Esto da un total de tres incógnitas. La ecuación 6.24 sólo puede resolverse para dos incógnitas. Por lo tanto, se requiere de otra ecuación para resolver el sistema. Hay una relación fija entre los ángulos θ_3 y θ_4, indicada como γ en la figura 6-22 y definida en la ecuación 4.18, que se repite aquí:

$$\theta_3 = \theta_4 \pm \gamma \tag{4.18}$$

Se diferencia con respecto al tiempo para obtener:

$$\omega_3 = \omega_4 \tag{6.25}$$

Se desea resolver la ecuación 6.24 para obtener expresiones en esta forma:

$$\omega_3 = \omega_4 = f(a, b, c, d, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \omega_2)$$

$$\frac{db}{dt} = \dot{b} = g(a, b, c, d, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \omega_2) \tag{6.26}$$

La sustitución de la identidad de Euler (ecuación 4.4a) en la ecuación 6.24 da:

$$ja\omega_2(\cos\theta_2 + j\,\text{sen}\,\theta_2) - jb\omega_3(\cos\theta_3 + j\,\text{sen}\,\theta_3)$$

$$-\dot{b}(\cos\theta_3 + j\,\text{sen}\,\theta_3) - jc\omega_4(\cos\theta_4 + j\,\text{sen}\,\theta_4) = 0 \tag{6.27a}$$

Se multiplica por el operador , y se sustituye ω_4 por ω_3 a partir de la ecuación 6.25:

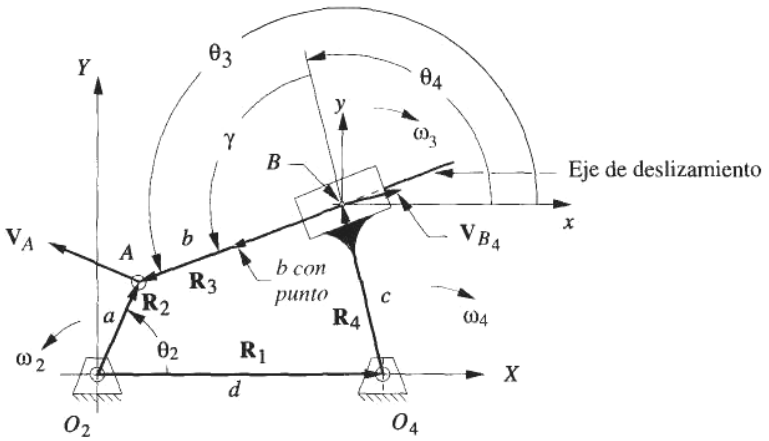


FIGURA 6-22

Análisis de velocidad de la inversión núm. 3 del eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera

$$a\omega_2(-\text{sen}\,\theta_2 + j\cos\theta_2) - b\omega_4(-\text{sen}\,\theta_3 + j\cos\theta_3)$$

$$-\dot{b}(\cos\theta_3 + j\,\text{sen}\,\theta_3) - c\omega_4(-\text{sen}\,\theta_4 + j\cos\theta_4) = 0 \qquad (6.27b)$$

Se puede ahora separar esta ecuación vectorial en sus dos componentes al agrupar por un lado los términos reales y por otro los imaginarios:

parte real (componente *x):*

$$-a\omega_2\,\text{sen}\,\theta_2 + b\omega_4\,\text{sen}\,\theta_3 - \dot{b}\cos\theta_3 + c\omega_4\,\text{sen}\,\theta_4 = 0 \qquad (6.28a)$$

parte imaginaria (componente y):

$$a\omega_2\cos\theta_2 - b\omega_4\cos\theta_3 - \dot{b}\,\text{sen}\,\theta_3 - c\omega_4\cos\theta_4 = 0 \qquad (6.28b)$$

Se agrupan los términos y se reordenan las ecuaciones 6.28 para aislar una incógnita en el lado izquierdo.

$$\dot{b}\cos\theta_3 = -a\omega_2\,\text{sen}\,\theta_2 + \omega_4\,(b\,\text{sen}\,\theta_3 + c\,\text{sen}\,\theta_4) \qquad (6.29a)$$

$$\dot{b}\,\text{sen}\,\theta_3 = a\omega_2\cos\theta_2 - \omega_4\,(b\cos\theta_3 + c\cos\theta_4) \qquad (6.29b)$$

Cualquier ecuación puede resolverse para el *b con punto* y el resultado sustituirse en la otra. Resolviendo la ecuación 6.29a:

$$\dot{b} = \frac{-a\omega_2\,\text{sen}\,\theta_2 + \omega_4(b\,\text{sen}\,\theta_3 + c\,\text{sen}\,\theta_4)}{\cos\theta_3} \qquad (6.30a)$$

Se sustituye en la ecuación 6.29b y se simplifica:

$$\omega_4 = \frac{a\omega_2\cos(\theta_2 - \theta_3)}{b + c\cos(\theta_4 - \theta_3)} \qquad (6.30b)$$

La ecuación 6.30a proporciona la **velocidad de deslizamiento** en el punto *B*. La ecuación 6.30b da la **velocidad angular** del eslabón 4. Observe que se puede sustituir a $-\gamma = \theta_4 - \theta_3$ de la ecuación 4.18 (para un eslabón abierto) en la ecuación 6.30b para simplificarla aún más. Observe que $\cos(-\gamma) = \cos(\gamma)$.

$$\omega_4 = -\frac{a\omega_2 \cos(\theta_2 - \theta_3)}{b + c\cos\gamma} \tag{6.30c}$$

La **velocidad de deslizamiento** de la ecuación 6.30a siempre se dirige a lo largo del **eje de deslizamiento** como se muestra en las figuras 6-19 y 6-22. También hay una componente ortogonal al eje de deslizamiento llamada **velocidad de transmisión.** Ésta se encuentra a lo largo del **eje de transmisión,** es decir la única línea a lo largo de la cual se transmite cualquier trabajo útil mediante la junta deslizante. Toda la energía asociada con el movimiento a lo largo del eje de deslizamiento se convierte en calor y se pierde.

La velocidad lineal absoluta del punto A se determina a partir de la ecuación 6.23a. Puede determinarse la velocidad absoluta del punto *B* en el eslabón 4, puesto que ahora se conoce ω_4. De la ecuación 6.15b:

$$\mathbf{V}_{B4} = jc\omega_4 e^{j\theta_4} = c\omega_4(-\text{sen}\,\theta_4 + j\cos\theta_4) \tag{6.31}$$

6.8 ANÁLISIS DE VELOCIDAD DEL ESLABONAMIENTO DE CINCO BARRAS CON ENGRANAJE

La ecuación de lazo de posición para este mecanismo de cinco barras con engranaje se dedujo en la sección 4.8 y se repite aquí. Véase la figura P6-4 para la notación.

$$ae^{j\theta_2} + be^{j\theta_3} - ce^{j\theta_4} - de^{j\theta_5} - fe^{j\theta_1} = 0 \tag{4.23b}$$

Se diferencia con respecto al tiempo para obtener una expresión para la velocidad.

$$a\omega_2 je^{j\theta_2} + b\omega_3 je^{j\theta_3} - c\omega_4 je^{j\theta_4} - d\omega_5 je^{j\theta_5} = 0 \tag{6.32a}$$

Se sustituyen los equivalentes de Euler:

$$a\omega_2 j(\cos\theta_2 + j\,\text{sen}\,\theta_2) + b\omega_3 j(\cos\theta_3 + j\,\text{sen}\,\theta_3)$$
$$-c\omega_4 j(\cos\theta_4 + j\,\text{sen}\,\theta_4) - d\omega_5 j(\cos\theta_5 + j\,\text{sen}\,\theta_5) = 0 \tag{6.32b}$$

Observe que el ángulo θ se define en términos de θ_2, de la relación de engranes λ y del ángulo de fase ϕ.

$$\theta_5 = \lambda\theta_2 + \phi \tag{4.23c}$$

Se diferencia con respecto al tiempo:

$$\omega_5 = \lambda\omega_2 \tag{6.32c}$$

Puesto que debe realizarse un análisis completo de la posición antes de uno de la velocidad, se supondrá que ya se han encontrado los valores de θ_5 y ω_5 y se dejarán estas ecuaciones en términos de θ_5 y ω_5.

Al separar los términos reales e imaginarios en la ecuación 6.32b:

reales: $$-a\omega_2 \operatorname{sen}\theta_2 - b\omega_3 \operatorname{sen}\theta_3 + c\omega_4 \operatorname{sen}\theta_4 + d\omega_5 \operatorname{sen}\theta_5 = 0 \tag{6.32d}$$

imaginarios: $$a\omega_2 \cos\theta_2 + b\omega_3 \cos\theta_3 - c\omega_4 \cos\theta_4 - d\omega_5 \cos\theta_5 = 0 \tag{6.32e}$$

Las únicas dos incógnitas son ω_3 y ω_4. La ecuación 6.32d o la 6.32e pueden resolverse para una incógnita y sustituir el resultado en la otra. La solución para ω_3 es:

$$\omega_3 = -\frac{2\operatorname{sen}\theta_4\left[a\omega_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4) + d\omega_5 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_5)\right]}{b\left[\cos(\theta_3 - 2\theta_4) - \cos\theta_3\right]} \tag{6.33a}$$

La velocidad angular ω_4 puede determinarse a partir de la ecuación 6.32d utilizando ω_3:

$$\omega_4 = \frac{a\omega_2 \operatorname{sen}\theta_2 + b\omega_3 \operatorname{sen}\theta_3 - d\omega_5 \operatorname{sen}\theta_5}{c\operatorname{sen}\theta_4} \tag{6.33b}$$

Con todos los ángulos de eslabón y las velocidades angulares conocidas, las velocidades lineales de las juntas de pasador pueden determinarse a partir de:

$$\mathbf{V}_A = a\omega_2(-\operatorname{sen}\theta_2 + j\cos\theta_2) \tag{6.33c}$$

$$\mathbf{V}_{BA} = b\omega_3(-\operatorname{sen}\theta_3 + j\cos\theta_3) \tag{6.33d}$$

$$\mathbf{V}_C = d\omega_5(-\operatorname{sen}\theta_5 + j\cos\theta_5) \tag{6.33e}$$

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{BA} \tag{6.33f}$$

6.9 VELOCIDAD DE UN PUNTO CUALQUIERA EN UN ESLABONAMIENTO

Una vez que se han determinado las velocidades angulares de todos los eslabones resulta fácil definir y calcular la velocidad de *un punto en un eslabón cualquiera* para una posición de entrada del eslabonamiento. En la figura 6-23 se muestra el eslabonamiento de cuatro barras con su acoplador, el eslabón 3, aumentado para que contenga un punto de acoplador *P*, La manivela y el balancín han aumentado también para mostrar los puntos *S* y *U*, que podrían representar los centros de gravedad de esos eslabones. Se desea desarrollar expresiones algebraicas para las velocidades de estos (o de cualesquiera) puntos en los eslabones.

Para encontrar la velocidad del punto *S*, trace el vector de posición desde el pivote fijo O_2 hasta el punto *S*. Este vector, $\mathbf{R}_{SO_2}$, forma un ángulo δ_2 con el vector $\mathbf{R}_{AO_2}$. El angulo δ_2 se define completamente por la geometría del eslabón 2 y es constante. El vector de posición para el punto *S* es entonces:

$$\mathbf{R}_{SO_2} = \mathbf{R}_S = se^{j(\theta_2 + \delta_2)} = s[\cos(\theta_2 + \delta_2) + j\operatorname{sen}(\theta_2 + \delta_2)] \tag{4.25}$$

Se diferencia este vector de posición respecto al tiempo para encontrar la velocidad de ese punto.

$$\mathbf{V}_S = jse^{j(\theta_2 + \delta_2)}\omega_2 = s\omega_2[-\operatorname{sen}(\theta_2 + \delta_2) + j\cos(\theta_2 + \delta_2)] \tag{6.34}$$

La posición del punto *U* en el eslabón 4 se determina del mismo modo, utilizando el ángulo δ_4 que constituye un corrimiento angular constante dentro del eslabón. La expresión es:

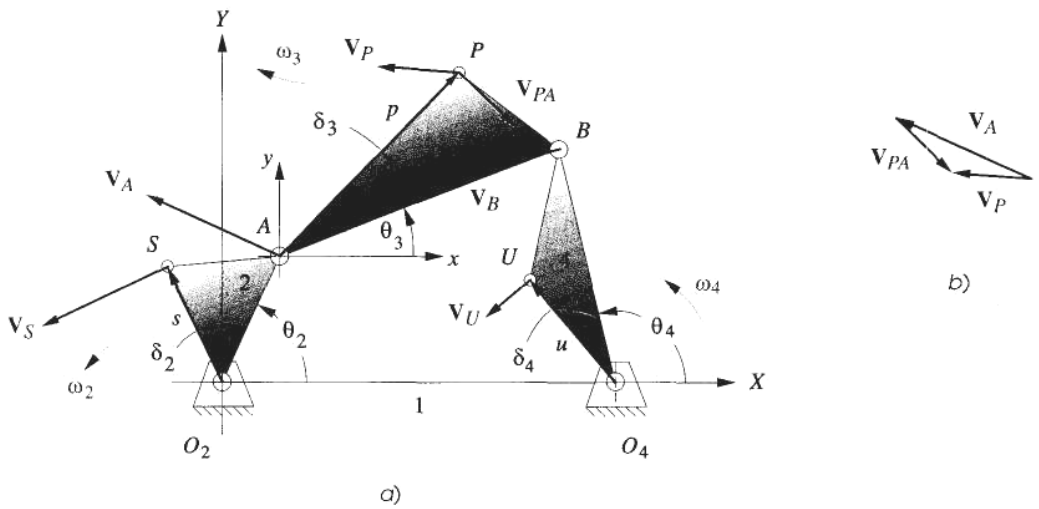


FIGURA 6-23

Determinación de las velocidades de los puntos en los eslabones

$$\mathbf{R}_{UO_4} = ue^{j(\theta_4 + \delta_4)} = u[\cos(\theta_4 + \delta_4) + j\,\text{sen}(\theta_4 + \delta_4)] \tag{4.26}$$

La derivada de este vector de posición produce la velocidad de ese punto.

$$\mathbf{V}_U = jue^{j(\theta_4 + \delta_4)}\omega_4 = u\omega_4[-\text{sen}(\theta_4 + \delta_4) + j\cos(\theta_4 + \delta_4)] \tag{6.35}$$

La velocidad del punto *P* en el eslabón 3 puede determinarse a partir de la suma de dos vectores de velocidad, tales como $\mathbf{V}_A$ y $\mathbf{V}_{PA}$. $\mathbf{V}_A$ ya está definido a partir del análisis de las velocidades de eslabón. $\mathbf{V}_{PA}$ es la diferencia de velocidad del punto *P* con respecto al punto *A*. El punto *A* se elige como el punto de referencia, debido a que el ángulo θ_3 se define en un sistema coordenado local cuyo origen se encuentra en A. El vector de posición $\mathbf{R}_{PA}$ se define en la misma forma que $\mathbf{R}_S$ o $\mathbf{R}_U$ por medio del ángulo de corrimiento de eslabón interno δ_3 y el ángulo del eslabón 3, θ_3. Esto se efectuó en la ecuación 4.27.

$$\mathbf{R}_{PA} = pe^{j(\theta_3 + \delta_3)} = p[\cos(\theta_3 + \delta_3) + j\,\text{sen}(\theta_3 + \delta_3)] \tag{4.27a}$$

$$\mathbf{R}_P = \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_{PA} \tag{4.27b}$$

Se diferencia ahora este vector de posición con respecto al tiempo para determinar la velocidad de dicho punto.

$$\mathbf{V}_{PA} = jpe^{j(\theta_3 + \delta_3)}\omega_3 = p\omega_3[-\text{sen}(\theta_3 + \delta_3) + j\cos(\theta_3 + \delta_3)] \tag{6.36a}$$

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{PA} \tag{6.36b}$$

Compárese la ecuación 6.36 con las ecuaciones 6.5 y 6.15. Esto es, de nuevo, la ecuación de diferencia de velocidad.

6.10 REFERENCIAS

1 **Towfigh, K.** (1969). "The Fourbar Linkage as an Adjustment Mechanism". *Proc. of Applied Mechanisms Conference,* Tulsa, Oklahoma, pp. 27-1 a 27-4.

2 **Wood, G. A.** (1977). "Educating for Creativity in Engineering". *Proc. of ASEE 85th Annual Conference,* University of North Dakota, pp. 1-13.

6.11 PROBLEMAS

6-1 Utilice la ecuación de velocidad relativa y resuelva de manera gráfica o analítica.

a. Un barco navega hacia el norte a 20 nudos (millas náuticas por hora). Un submarino se encuentra en espera a 1/2 milla al oeste del barco. El submarino dispara un torpedo en un curso de 85°. El torpedo viaja a una velocidad constante de 30 nudos. ¿Golpeará el barco? Si no, ¿por cuántas millas náuticas habrá fallado?

b. Un avión vuela hacia el sur a 500 mi/h a una altitud de 35 000 pies, en línea recta y horizontal. Un segundo avión está inicialmente a 40 millas al este del primer avión, también a una altitud de 35 000 pies, vuela en una dirección recta horizontal a 550 mi/h. Determine el ángulo de brújula en el que el segundo avión estaría en un curso de colisión con respecto al primero. ¿Cuánto tiempo le tomará al segundo avión alcanzar al primero?

6-2 Un punto está a un radio de 6.5 pulgadas en un cuerpo en rotación pura con co = 100 rad/s. El centro de rotación está en el origen de un sistema coordenado. Cuando el punto se encuentra en la posición *A,* su vector de posición forma un ángulo de 45° con el eje *X.* En la posición *B* su vector posicional forma un ángulo de 75° con el eje *X.* Trace este sistema a escala conveniente y:

a. Escriba una expresión para el vector de velocidad de la partícula en la posición *A* utilizando la notación de número complejo, en las formas polar y cartesiana.

b. Escriba una expresión para el vector de velocidad de la partícula en la posición *B* utilizando la notación de número complejo, en las formas polar y cartesiana.

c. Escriba una ecuación vectorial para la diferencia de velocidad entre el punto *B* y el *A.* Sustituya la notación de número complejo para los vectores en esta ecuación y resuelva numéricamente para la diferencia de posición.

d. Compruebe el resultado del inciso c con un método gráfico.

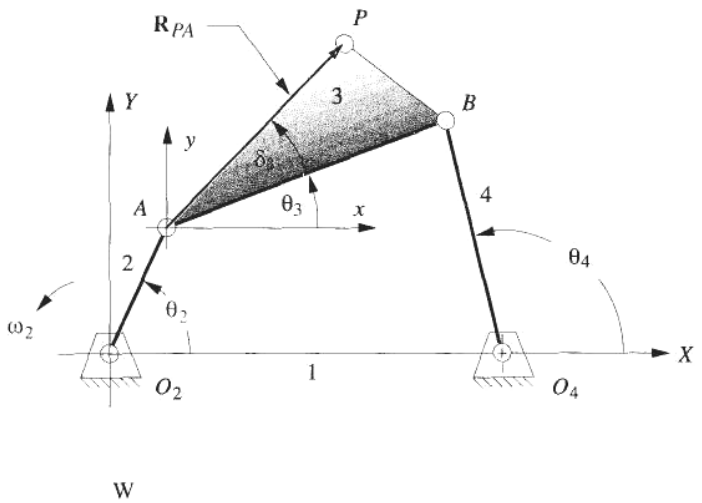
6-3 Repita el problema 6-2 considerando que los puntos A y *B* se encuentran en cuerpos separados que giran alrededor del origen con ω de -50 *(A)* y + 75 rad/s (5). Encuentre su velocidad relativa.

*6-4 La configuración general y la notación de un eslabonamiento de cuatro barras se muestran en la figura P6-1. Las longitudes de eslabón, localización del punto de acoplador y los valores de θ_2 y ω_2 para los mismos eslabonamientos de cuatro barras, como se utilizaron para el análisis de posición en el capítulo 4 se redefinen en la tabla P6-1, que es igual a la tabla P4-1. *Para el(los) renglón(es) asignado(s),* trace el eslabonamiento a escala y encuentre gráficamente las velocidades de las juntas de pasador *A* y *B* de los centros instantáneos $I_{1,3}$ e $I_{2,4}$ empleando un método gráfico. Luego calcule ω_3 y ω_4, y determine la velocidad del punto *P.*

*†6-5 Repita el problema 6-4 utilizando un método analítico. Trace el eslabonamiento a escala y rotúlelo antes de establecer las ecuaciones.

* Respuestas en el Apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para solucionarse usando programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*



W

FIGURA P6-1

Configuración y terminología para el eslabonamiento de cuatro barras con juntas de pasador de los problemas 6-4 y 6-5

*6-6 La configuración general del eslabonamiento y la notación para un eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera con corrimiento se muestran en la figura P6-2. Las longitudes de eslabón y los valores de θ_2 y ω_2 se definen en la tabla P6-2. *Para el(los) renglón(es) asignado(s)* trace el eslabonamiento a escala y determine, mediante un método gráfico, las velocidades de las juntas de pasador *A y B* y la velocidad de deslizamiento en la junta deslizante.

TABLA P6-1 Datos para los problemas 6-4 y 6-5

Renglón	Eslabón 1	Eslabón 2	Eslabón 3	Eslabón 4	θ_2	ω_2	R_{pa}	δ_3
a	6	2	7	9	30	10	6	30
b	7	9	3	8	85	−12	9	25
c	3	10	6	8	45	−15	10	80
d	8	5	7	6	25	24	5	45
e	8	5	8	6	75	−50	9	300
f	5	8	8	9	15	−45	10	120
g	6	8	8	9	25	100	4	300
h	20	10	10	10	50	−65	6	20
i	4	5	2	5	80	25	9	80
j	20	10	5	10	33	25	1	0
k	4	6	10	7	88	−80	10	330
l	9	7	10	7	60	−90	5	180
m	9	7	11	8	50	75	10	90
n	9	7	11	6	120	15	15	60

* Respuestas en el apéndice F.

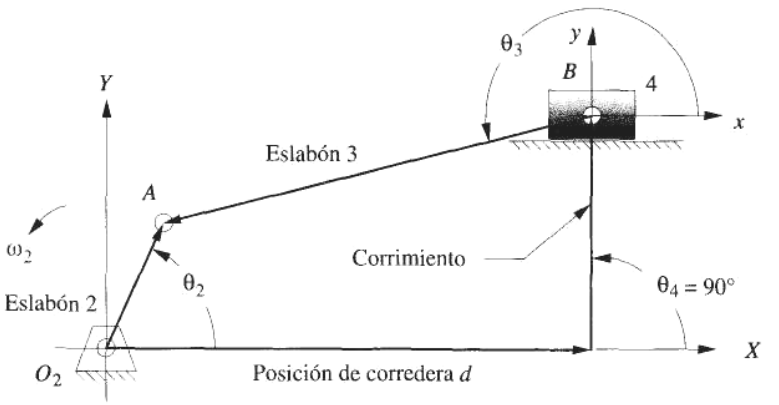


FIGURA P6-2

Configuración y terminología para los problemas 6-6 y 6-7

*†6-7 Repita el problema 6-6 empleando un método analítico. Trace el eslabonamiento a escala y rotúlelo antes de establecer las ecuaciones.

*6-8 La configuración general del eslabonamiento y la terminología para un eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera invertida se muestran en la figura P6-3. Las longitudes de eslabón y los valores de θ_2, ω_2 y γ se definen en la tabla P6-3. *Para el (los) renglón(es) asignado(s)* trace el eslabonamiento a escala y encuentre, empleando un método gráfico, las velocidades de las juntas de pasador *A y B y* la velocidad de deslizamiento en la junta deslizante.

*†6-9 Repita el problema 6-8 utilizando un método analítico. Trace el eslabonamiento a escala y rotúlelo antes de establecer las ecuaciones.

*6-10 La configuración general del eslabonamiento y la terminología para un eslabonamiento de cinco barras con engranaje se muestran en la figura P6-4. Las longitudes de eslabón, relación de engranes (λ), ángulo de fase (ϕ) y los valores de θ_2 y ω_2 se definen en la tabla P6-4. *Para el(los) renglón(es) asignado(s)* trace a escala el eslabonamiento y halle ω_3 y ω_4 utilizando un método gráfico.

TABLA P6-2 Datos para los problemas 6-6 y 6-7

Renglón	Eslabón 2	Eslabón 3	Corrimiento	θ_2	ω_2
a	1.4	4	1	45	10
b	2	6	–3	60	–12
c	3	8	2	–30	–15
d	3.5	10	1	120	24
e	5	20	–5	225	–50
f	3	13	0	100	–45
g	7	25	10	330	100

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para solucionarse usando programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad*, *Matlab* o *TKSolver*.

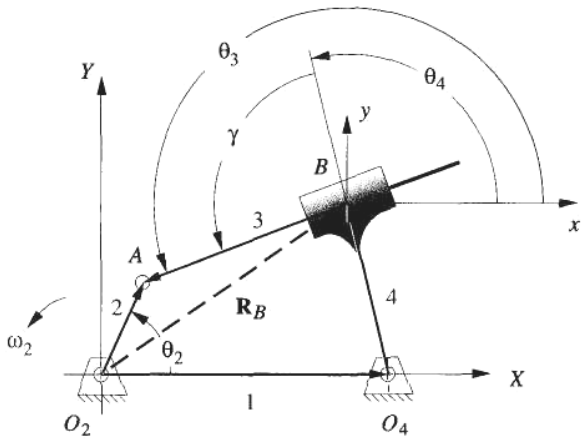


FIGURA P6-3

Configuración y terminología para los problemas 6-8 y 6-9

*†6-11 Repita el problema 6-10 utilizando un método analítico. Trace el eslabonamiento a escala y rotúlelo antes de establecer las ecuaciones.

6-12 Encuentre todos los centros instantáneos de los eslabonamientos mostrados en la figura P6-5.

6-13 Encuentre todos los centros instantáneos de los eslabonamientos mostrados en la figura P6-6.

6-14 Encuentre todos los centros instantáneos de los eslabonamientos mostrados en la figura P6-7.

6-15 Encuentre todos los centros instantáneos de los eslabonamientos mostrados en la figura P6-8.

6-16 El eslabonamiento de la figura P6-5a) tiene O_2A = 0.8, AB = 1.93, AC = 1.33 y de corrimiento = 0.38 pulgadas. El ángulo de manivela en la posición mostrada es de 34.3° y el ángulo BAC = 38.6°. Determine ω_3, $\mathbf{V}_A$, $\mathbf{V}_B$ y $\mathbf{V}_C$ para la posición mostrada para ω_2 = 15 rad/s en la dirección que se muestra.

TABLA P6-3 Datos para los problemas 6-8 y 6-9

Renglón	Eslabón 1	Eslabón 2	Eslabón 4	γ	θ_2	ω_2
a	6	2	4	90	30	10
b	7	9	3	75	85	–15
c	3	10	6	45	45	24
d	8	5	3	60	25	–50
e	8	4	2	30	75	–45
f	5	8	8	90	150	100

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para solucionarse empleando programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

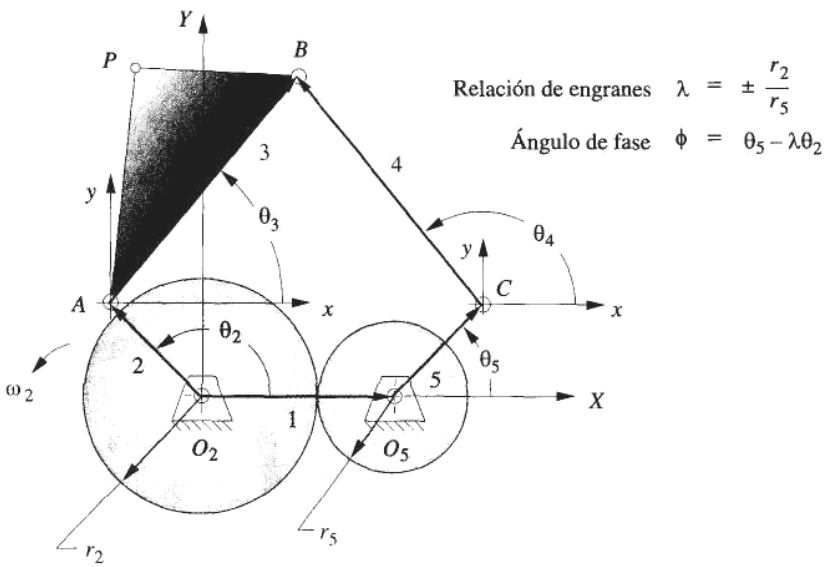


FIGURA P6-4
Configuración y terminología para los problemas 6-10 y 6-11

a. Utilizando el método gráfico de diferencia de velocidad.
b. Utilizando el método gráfico de centro instantáneo.
†c. Utilizando el método analítico.

6-17 El eslabonamiento de la figura P6-5c) tiene $I_{12}A = 0.75$, $AB = 1.5$ y $AC = 1.2$ pulgadas. El ángulo efectivo de la manivela en la posición mostrada es de 77° y el ángulo $BAC = 30°$. Determine ω_3, ω_4, $\mathbf{V}_A$, $\mathbf{V}_B$ y $\mathbf{V}_C$ para la posición mostrada para $\omega_2 = 15$ rad/s en la dirección indicada.

a. Utilizando el método gráfico de diferencia de velocidad.
b. Utilizando el método gráfico de centro instantáneo.

TABLA P6-4 Datos para los problemas 6-10 y 6-11

Renglón	Eslabón 1	Eslabón 2	Eslabón 3	Eslabón 4	Eslabón 5	λ	ϕ	ω_2	θ_2
a	6	1	7	9	4	2	30	10	60
b	6	5	7	8	4	−2.5	60	−12	30
c	3	5	7	8	4	−0.5	0	−15	45
d	4	5	7	8	4	−1	120	24	75
e	5	9	11	8	8	3.2	−50	−50	−39
f	10	2	7	5	3	1.5	30	−45	120
g	15	7	9	11	4	2.5	−90	100	75
h	12	8	7	9	4	−2.5	60	−65	55
i	9	7	8	9	4	−4	120	25	100

† Estos problemas son adecuados para solucionarse empleando programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad*, *Matlab* o *TKSolver*.

†c. Utilizando el método analítico. (Sugerencia: Construya un eslabonamiento efectivo para la posición indicada y analícelo como si fuera de cuatro barras con juntas de pasador.)

6-18 El eslabonamiento de la figura P6-5*f*) tiene $AB = 1.8$ y $AC = 1.44$ pulgadas. El ángulo de AB en la posición mostrada es de 128° y el ángulo $BAC = 49°$. La corredera en B se encuentra en un ángulo de 59°. Determine ω_3, $\mathbf{V}_A$, $\mathbf{V}_B$ y $\mathbf{V}_C$ de la posición mostrada para $\mathbf{V}_A = 10$ pulg/s en la dirección indicada.

a. Utilizando el método gráfico de diferencia de velocidad.

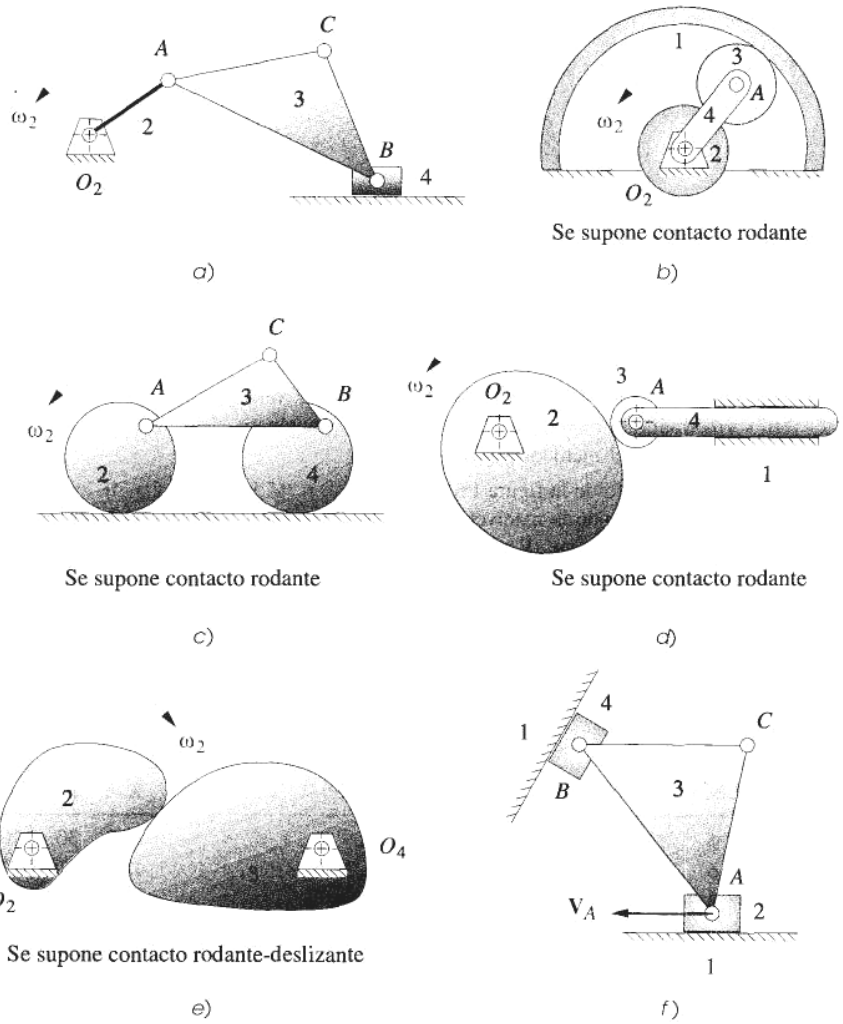


FIGURA P6-5

Problemas de análisis de velocidad y de centros instantáneos. Problemas 6-12 y 6-16 a 6-20

† Estos problemas son adecuados para solucionarse empleando programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

b. Utilizando el método gráfico de centro instantáneo.
†c. Utilizando el método analítico.

6-19 Mida la geometría de eslabón en la figura P6-5rf) y determine $\mathbf{V}_4$, $\mathbf{V}_{trans}$ y $\mathbf{V}_{desl}$ para la posición indicada con $\omega_2 = 20$ rad/s en la dirección mostrada.

6-20 Mida la geometría de eslabón en la figura P6-5e) y determine ω_3, $\mathbf{V}_{trans}$ y $\mathbf{V}_{desl}$ para la posición indicada para $\omega_2 = 10$ rad/s en la dirección mostrada.

6-21 Mida la geometría de eslabón en la figura P6-6¿>) y determine, para la posición indicada, la relación de velocidad $V_{I5,6}/V_{I2,3}$ y la ventaja mecánica del eslabón 2 al eslabón 6.

a. Utilizando el método gráfico de diferencia de velocidad.
b. Utilizando el método gráfico de centro instantáneo.

6-22 Repita el problema 6-21 para el mecanismo de la figura P6-6í/).

†6-23 Construya y trace los céntrodos móvil y fijo de los eslabones 1 y 3 para el eslabonamiento de la figura P6-7a).

6-24 El eslabonamiento de la figura P6-8a) tiene $AB = 116$, $BC = 108$, $CD = 110$ y $AD = 174$ mm. AD se encuentra a -25° y AB se encuentra a 37° en el sistema coordenado global XY. Determine ω_t, $\mathbf{V}_B$ y $\mathbf{V}_C$ en el sistema coordenado global para la posición indicada si $\omega_u = 15$ rad/s en el sentido de las manecillas del reloj (SMR). Emplee el método gráfico de diferencia de velocidad. (Sugerencia: Haga una copia aumentada de la figura y dibuje sobre ella.)

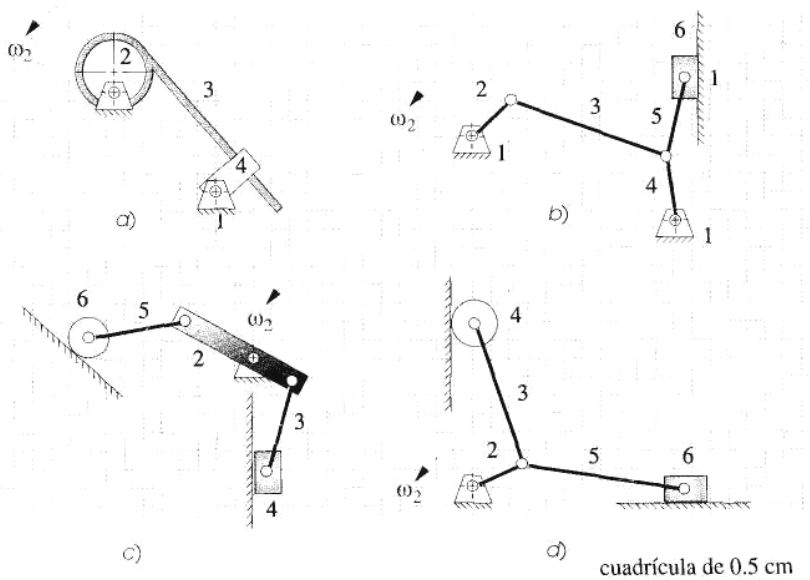


FIGURA P6-6
Problemas 6-13, 6-21 y 6-22

† Estos problemas son adecuados para solucionarse empleando programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad, Matlab o TKSolver.*

6-25 El eslabonamiento de la figura P6-8a) tiene *AB* = 116, *BC* = 108, *CD* = 110 y *AD* = 174 mm. *AD* está a -25° y *AB* está a 37° en el sistema coordenado global *XY*. Determine ω_f, $\mathbf{V}_B$ y $\mathbf{V}_C$ en el sistema coordenado global para la posición indicada si ω_d = 15 rad/s en SMR. Emplee el método gráfico de centro instantáneo. (Sugerencia: Haga una copia aumentada de la figura y dibuje sobre ella.)

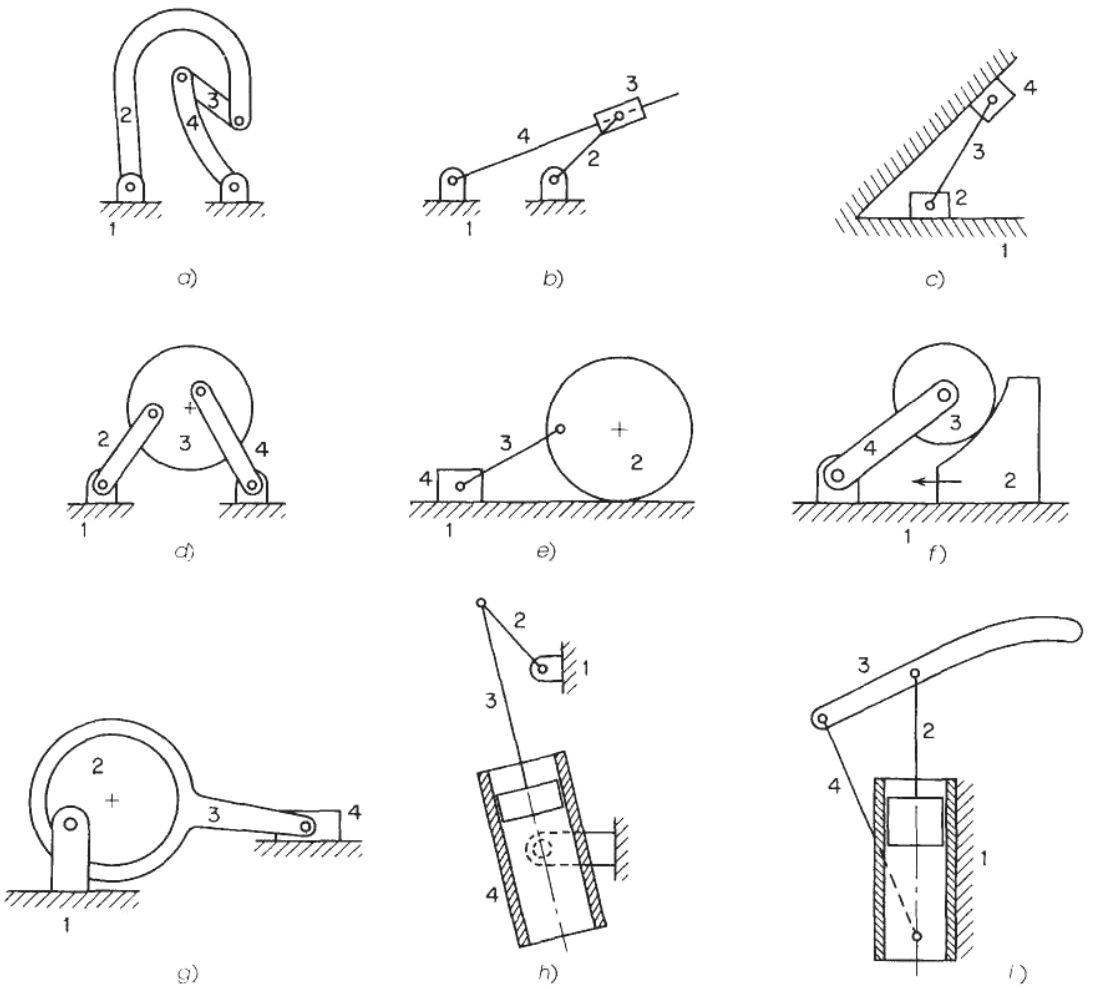


FIGURA P6-7

Problemas 6-14 y 6-23 *Tomados de R.T. Hinkle Problems in Kinematics, Prentice-Hall. Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1954*

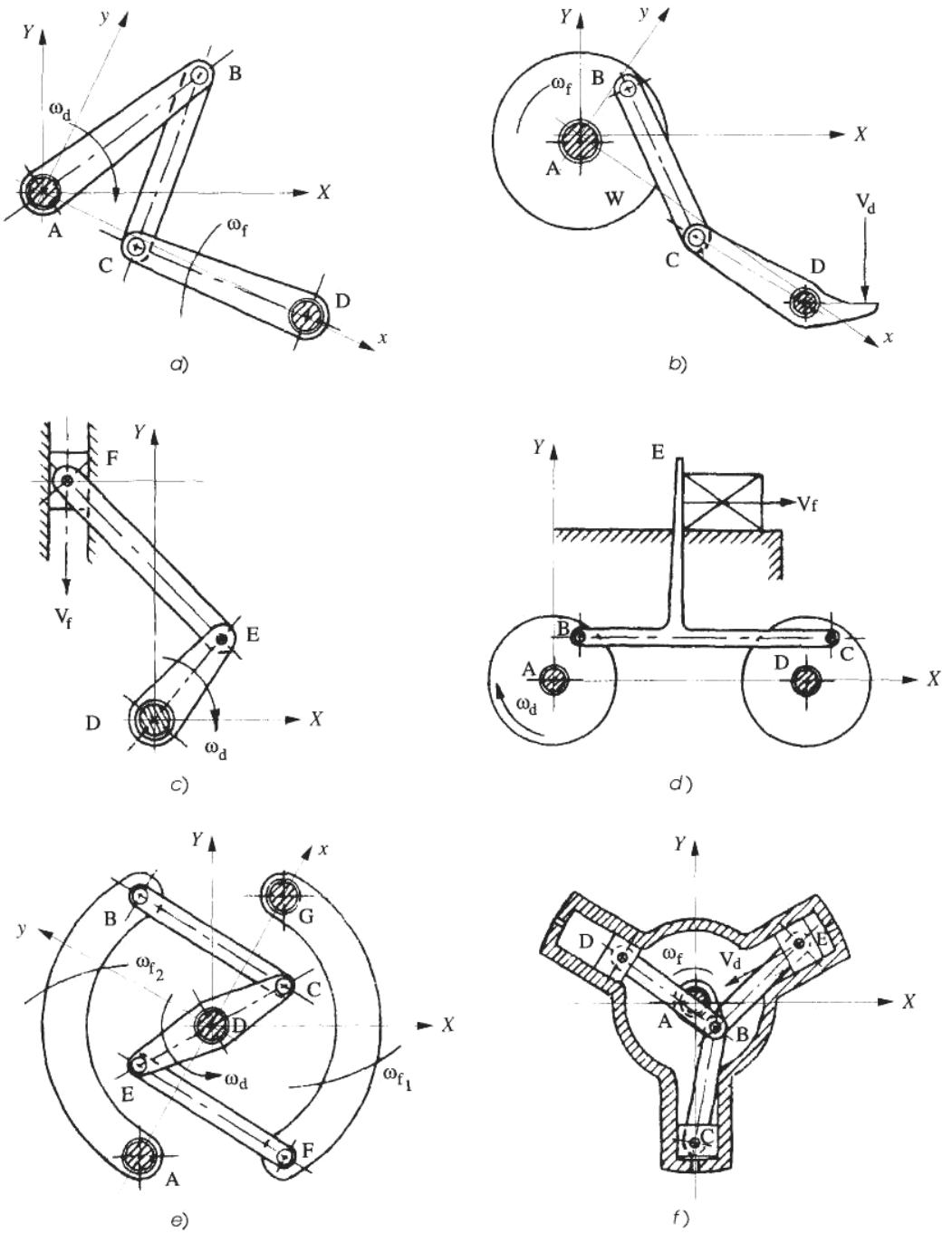


FIGURA P6-8

Problemas 6-15 y 6-24 a 6-45 *Adaptados de P. H. Hill y W. P. Rule (1960). Mechanisms: Analysis and Design, reproducido con autorización*

†6-26 El eslabonamiento de la figura P6-8a) tiene $AB = 116$, $BC = 108$, $CD = 110$ y $AD = 174$ mm. AB está a 62° en el sistema coordenado local $x'y'$. Determine ω_f, $\mathbf{V}_B$ y $\mathbf{V}_C$ en el sistema coordenado local para la posición indicada si $\omega_d = 15$ rad/s en SMR. Emplee un método analítico.

†6-27 El eslabonamiento de la figura P6-8a) tiene $AB = 116$, $BC = 108$, $CD = 110$ y $AD = 174$ mm. Escriba un programa de computadora o utilice un resolvedor de ecuaciones para determinar y trazar ω_f, $\mathbf{V}_B$ y $\mathbf{V}_C$ en el sistema coordenado local para el rango máximo de movimiento que permite este eslabonamiento si $\omega_d = 15$ rad/s en SMR.

6-28 El eslabonamiento de la figura P6-8*b*) tiene $AB = 40$, $BC = 96$, $CD = 75$ y $AD = 162$ mm. La distancia perpendicular desde D hasta $\mathbf{V}_D$ es de 36 mm. AD está a -36° y AB está a 47° en el sistema coordenado global XY. Determine ω_d, $\mathbf{V}_B$, $\mathbf{V}_C$ y $\mathbf{V}_d$ sn el sistema coordenado global para la posición indicada si $\omega_f = 20$ rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj (SCMR). Emplee el método gráfico de diferencia de velocidad. (Sugerencia: Haea una copia aumentada de la figura y dibuje sobre ella.)

6-29 El eslabonamiento de la figura P6-8*b*) tiene $AB = 40$, $BC = 96$, $CD = 75$ y $AD = 162$ mm. La distancia perpendicular de D a $\mathbf{V}_D$ es de 36 mm. AD está a -36° y AB está a 47° en el sistema coordenado global XY. Determine ω_d, $\mathbf{V}_B$, $\mathbf{V}_C$ y $\mathbf{V}_d$ en el sistema coordenado global para la posición indicada si $\omega_f = 20$ rad/s en SCMR. Emplee el método gráfico de centro instantáneo. (Sugerencia: Haga una copia aumentada de la figura y dibuje sobre ella.)

†6-30 El eslabonamiento de la figura P6-8*b*) tiene $AB = 40$, $BC = 96$, $CD = 75$ y $AD = 162$ mm. La distancia perpendicular de D a $\mathbf{V}_D$ es de 36 mm. AB está a 83° en el sistema coordenado local $x'y'$. Determine ω_d, $\mathbf{V}_B$, $\mathbf{V}_C$ y $\mathbf{V}_d$ en el sistema coordenado local para la posición indicada si $\omega_f = 20$ rad/s en SCMR. Utilice un método analítico.

†6-31 El eslabonamiento de la figura P6-8*b*) tiene $AB = 40$, $BC = 96$, $CD = 75$ y $AD = 162$ mm. La distancia perpendicular de D a $\mathbf{V}_D$ es de 36 mm. Escriba un programa de computadora o utilice un resolvedor de ecuaciones para determinar y trazar ω_d, $\mathbf{V}_B$, $\mathbf{V}_C$ y $\mathbf{V}_d$ en el sistema coordenado local para el rango máximo de movimiento que este eslabonamiento permite si $\omega_f = 20$ rad/s en SCMR.

6-32 El eslabonamiento de manivela-corredera con corrimiento, de la figura P6-8c), tiene $DE = 63$, $EF = 130$ y corrimiento = 52 mm. DE está a 51° en el sistema coordenado global XY. Determine $\mathbf{V}_E$ y $\mathbf{V}_f$ en el sistema coordenado global para la posición indicada si $\omega_d = 25$ rad/s en SMR. Utilice el método gráfico de diferencia de velocidad. (Sugerencia: Haga una copia aumentada de la figura y dibuje sobre ella.)

6-33 El eslabonamiento de manivela-corredera con corrimiento, de la figura P6-8c), tiene $DE = 63$, $EF = 130$ y corrimiento = 52 mm. DE está a 51° en el sistema coordenado global XY. Determine $\mathbf{V}_E$ y $\mathbf{V}_f$ en el sistema coordenado global para la posición indicada si $\omega_d = 25$ rad/s en SMR. Utilice el método gráfico de centro instantáneo. (Sugerencia: Haga una copia aumentada de la figura y dibuje sobre ella.)

†6-34 El eslabonamiento de manivela-corredera con corrimiento, de la figura P6-8c), tiene $DE = 63$, $EF = 130$ y corrimiento = 52 mm. DE está a 51° en el sistema coordenado global XY. Determine $\mathbf{V}_E$ y $\mathbf{V}_f$ en el sistema coordenado global para la posición indicada si $\omega_d = 25$ rad/s en SMR. Utilice un método analítico.

†6-35 El eslabonamiento de manivela-corredera con corrimiento, de la figura P6-8c), tiene $DE = 63$, $EF = 130$ y corrimiento = 52 mm. Transcriba a un programa de computadora

† Estos problemas son adecuados para solucionarse empleando programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad, Matlab* o *TKSolver*.

o utilice un resolvedor de ecuaciones para determinar y trazar a $\mathbf{V}_E$ y $\mathbf{V}_f$ en el sistema coordenado global, para el rango máximo de movimiento que este eslabonamiento permite, si $\omega_d = 25$ rad/s en SMR.

6-36 El eslabonamiento de la figura P6-8d) tiene *AB* = 30, *BC* = 150, *CD* = 30 y *AD* = 150 mm. *AB* está a 58° en el sistema coordenado global *XY*. Determine $\mathbf{V}_B$, $\mathbf{V}_C$ y $\mathbf{V}_f$ en el sistema coordenado global para la posición indicada si $\omega_d = 30$ rad/s en SMR. Utilice el método gráfico de diferencia de velocidad. (Haga una copia aumentada de la figura y dibuje sobre ella.)

†6-37 El eslabonamiento de la figura P6-8d) tiene *AB* = 30, *BC* = 150, *CD* = 30 y *AD* = 150 mm. *AB* está a 58° en el sistema coordenado global. Determine $\mathbf{V}_B$, $\mathbf{V}_C$ y $\mathbf{V}_f$ en el sistema coordenado global para la posición indicada si $\omega_d = 30$ rad/s en SMR. Utilice un método analítico.

†6-38 El eslabonamiento de la figura P6-8d) tiene *AB* = 30, *BC* = 150, *CD* = 30 y *AD* = 150 mm. Escriba un programa de computadora o utilice un resolvedor de ecuaciones para determinar y trazar $\mathbf{V}_B$, $\mathbf{V}_C$ y $\mathbf{V}_f$ en el sistema coordenado global para el rango máximo de movimiento que este eslabonamiento permite si $\omega_d = 30$ rad/s en SMR.

6-39 El eslabonamiento de la figura P6-8e) tiene *AB* = *GF* = 153, *BC* = *EF* = 100, *CD* = *DE* = 49 y *AD* = *DG* = 87 mm. *DG* está a 61° y *DC* está a 29° en el sistema coordenado global *XY*. Determine ω_f, $\mathbf{V}_B$ y $\mathbf{V}_C$ en el sistema coordenado global para la posición indicada si $\omega_d = 15$ rad/s en SMR. Utilice el método gráfico de diferencia de velocidad. (Haga una copia aumentada de la figura y dibuje sobre ella.)

6-40 El eslabonamiento de la figura P6-8e) tiene *AB* = *GF* = 153, *BC* = *EF* = 100, *CD* = *DE* = 49 y *AD* = *DG* = 87 mm. *DG* está a 61° y *DC* está a 29° en el sistema coordenado global *XY*. Determine ω_f, $\mathbf{V}_B$ y $\mathbf{V}_C$ en el sistema coordenado global para la posición indicada si $\omega_d = 15$ rad/s en SMR. Utilice el método gráfico de centro instantáneo. (Haga una copia aumentada de la figura y dibuje sobre ella.)

†6-41 El eslabonamiento de la figura P6-8e) tiene *AB* = *GF* = 153, *BC* = *EF* = 100, *CD* = *DE* = 49 y *AD* = *DG* = 87 mm. *DC* está a -38° en el sistema coordenado local $x'y'$. Determine ω_f, $\mathbf{V}_B$ y $\mathbf{V}_C$ en el sistema coordenado local para la posición mostrada si $\omega_d = 15$ rad/s en SMR. Utilice un método analítico.

†6-42 El eslabonamiento de la figura P6-8e) tiene *AB* = *GF*= 153, *BC* = *EF* = 100, *CD* = *DE* = 49 y *AD* = *DG* = 87 mm. Escriba un programa de computadora o utilice un resolvedor de ecuaciones para determinar y trazar ω_f, $\mathbf{V}_B$ y $\mathbf{V}_C$ en el sistema coordenado local para el rango máximo de movimiento que este eslabonamiento permite si $\omega_d = 15$ rad/s en SMR.

6-43 El compresor radial de tres cilindros mostrado en la figura P6-8/) tiene una longitud de manivela *AB* = 19 mm y barras de conexión *BC* = *BD* = *BE* = 70 mm. La manivela está a -53° en la posición mostrada. Los cilindros están equidistantes a 120°. Determine las velocidades de pistón $\mathbf{V}_C$, $\mathbf{V}_D$ y $\mathbf{V}_E$ para la posición de la manivela mostrada, utilizando un método gráfico si $\omega = 15$ rad/s en SMR. (Haga una copia aumentada de la figura y dibuje sobre ella.)

†6-44 El compresor radial de tres cilindros que se muestra en la figura P6-8/) tiene una longitud de manivela *AB* = 19 mm y barras de conexión *BC* = *BD* = *BE* = 70 mm. La manivela está a -53° en la posición indicada. Los cilindros están equidistantes a 120°. Determine las velocidades del pistón $\mathbf{V}_C$, $\mathbf{V}_D$ y $\mathbf{V}_E$ para la posición de la manivela indicada utilizando un método analítico si $\omega = 15$ rad/s en SMR.

† Estos problemas son adecuados para solucionarse empleando programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad*, *Matlab* o *TKSolver*.

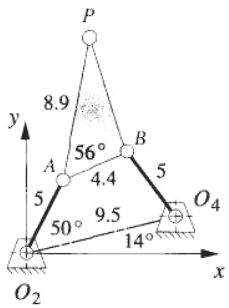


FIGURA P6-9
Problema 6-46

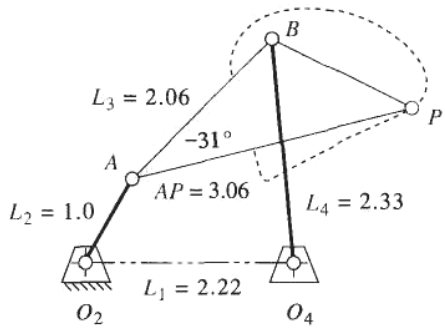


FIGURA P6-10
Problema 6-47 Un eslabonamiento de cuatro barras con una curva de acoplador de doble recta

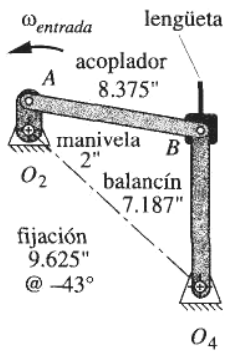


FIGURA P6-11
Problema 6-48
Transmisión de una tejedora de barras

6

†6-45 El compresor radial de tres cilindros de la figura P6-8/) tiene una longitud de manivela *AB* = 19 mm y barras de conexión *BC* = *BD* = *BE* = 70 mm. La manivela está a -53° en la posición mostrada. Los cilindros están equidistantes a 120°. Escriba un programa o utilice un resolvedor de ecuaciones para determinar y trazar las velocidades de pistón $\mathbf{V}_C$, $\mathbf{V}_D$ y $\mathbf{V}_E$ para una revolución de la manivela.

6-46 La figura P6-9 muestra un eslabonamiento en una posición. Encuentre las velocidades instantáneas de los puntos *A, B y P* si el eslabón O_2A gira en SMR a 40 rad/s.

*†6-47 En la figura P6-10 se muestra un eslabonamiento y su curva de acoplador. Escriba un programa de computadora o utilice un resolvedor de ecuaciones para calcular y trazar la magnitud y dirección de la velocidad del punto de acoplador *P* en incrementos de *2*° al ángulo de la manivela para co_2 = 100 rpm. Verifique su resultado con el programa FOURBAR.

*†6-48 En la figura P6-11 se muestra un eslabonamiento que opera a 500 rpm. Escriba un programa de computadora o utilice un resolvedor de ecuaciones para calcular y trazar la magnitud y dirección de la velocidad del punto de acoplador *B* en incrementos de 2° al ángulo de la manivela. Verifique su resultado con el programa FOURBAR.

*†6-49 En la figura P6-12 se muestra un eslabonamiento y su curva de acoplador. Escriba un programa de computadora o utilice un resolvedor de ecuaciones para calcular y trazar la magnitud y dirección de la velocidad del punto de acoplador *P* en incrementos de 2° al ángulo de manivela para co_2 = 20 rpm sobre el rango máximo de movimiento posible. Verifique su resultado con el programa FOURBAR.

†6-50 En la figura P6-13 se muestra un eslabonamiento y su curva de acoplador. Escriba un programa de computadora o utilice un resolvedor de ecuaciones para calcular y trazar la magnitud y dirección de la velocidad del punto de acoplador *P* en incrementos de 2° al ángulo de manivela para ω_2 = 80 rpm sobre el rango máximo de movimiento posible. Verifique su resultado con el programa FOURBAR.

*†6-51 En la figura P6-14 se muestra un eslabonamiento y su curva de acoplador. Escriba un programa de computadora o utilice un resolvedor de ecuaciones para calcular y trazar la magnitud y dirección de la velocidad del punto de acoplador *P* en incrementos de

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para solucionarse empleando programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

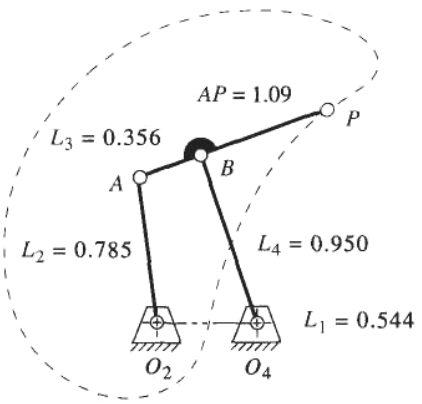


FIGURA P6-12

Problema 6-49

2° al ángulo de manivela para $\omega_2 = 80$ rpm sobre el rango máximo de movimiento posible. Verifique su resultado con el programa FOURBAR.

†‡6-52 En la figura P6-15 se muestra una sierra eléctrica, la cual es un mecanismo de manivela-corredera con corrimiento. La manivela mide 75 mm, la biela mide 170 mm, y el corrimiento es de 45 mm. Trace un diagrama equivalente al eslabón; luego calcule y grafique la velocidad de la hoja de la sierra con respecto a la pieza que se cortará sobre una revolución de la manivela a 50 rpm.

†‡6-53 En la figura P6-16 se muestra un mecanismo de tomar y colocar, el cual se analiza como dos eslabonamientos de cuatro barras impulsados por una manivela común. La etapa de paralelogramo tiene manivelas de 40 mm y un acoplador de 108 mm. La manivela *AB* = 32 mm. *BC* = 260, *CD* = 96, *DE* = 160 y *AD* = 200 mm. El ángulo *CDE* = 75°. *AD* está a 205°. El ángulo de fase entre los dos pasadores de manivela

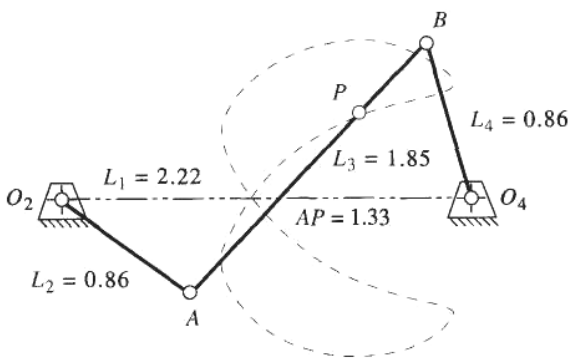


FIGURA P6-13

Problema 6-50

† Estos problemas son adecuados para solucionarse empleando programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

‡ Estos problemas son adecuados para solucionarse usando el programa *Working Model,* el cual está en el CD-ROM anexo.

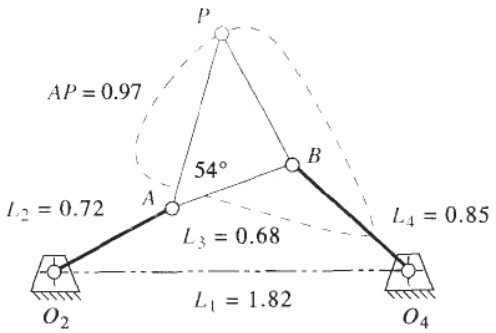


FIGURA P6-14

Problema 6-51

6

sobre la rueda *W* es de 120°. Los cilindros *P* que se empujarán tienen diámetros de 60 mm. El punto de contacto entre el dedo vertical y el cilindro de la izquierda en la posición indicada es de 58 mm a 80° con respecto al extremo izquierdo del acoplador del paralelogramo. Calcule y grafique la velocidad relativa entre el punto £ y el centro del cilindro de la izquierda *P*.

†‡6-54 En la figura P6-17 se muestra el mecanismo de carga de un rollo de papel manejado por un cilindro neumático. En la posición que se muestra, $AO_2 = 1.1$ m a 178° y O_4A es de 0.3 m a 226°. $O_2O_4 = 0.93$ m a 163°. Los eslabones en V se unen rígidamente a O_4A. El cilindro neumático se repliega a una velocidad constante de 0.2 m/s. Trace un diagrama cinemático del mecanismo, escriba las ecuaciones necesarias, y calcule y grafique la velocidad angular del rollo de papel y la velocidad lineal de su centro cuando gira 90° en scmr desde la posición indicada.

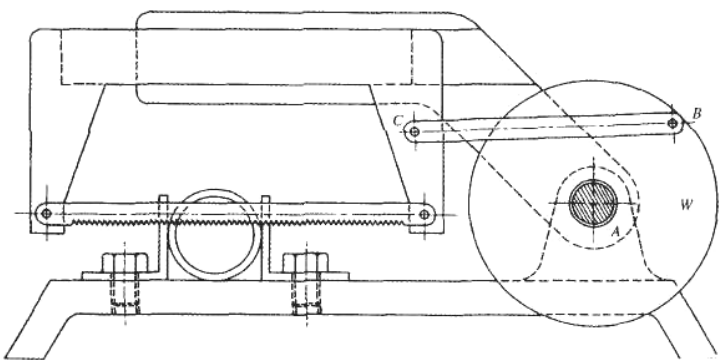


FIGURA P6-15

Problema 6-52 *Tomado de P.H. Hill y W.P. Rule (1960). Mechanisms: Analysis and Design, con autorización*

† Estos problemas son adecuados para solucionarse empleando programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

‡ Estos problemas son adecuados para solucionarse usando el programa *Working Model,* el cual está en el CD-ROM anexo.

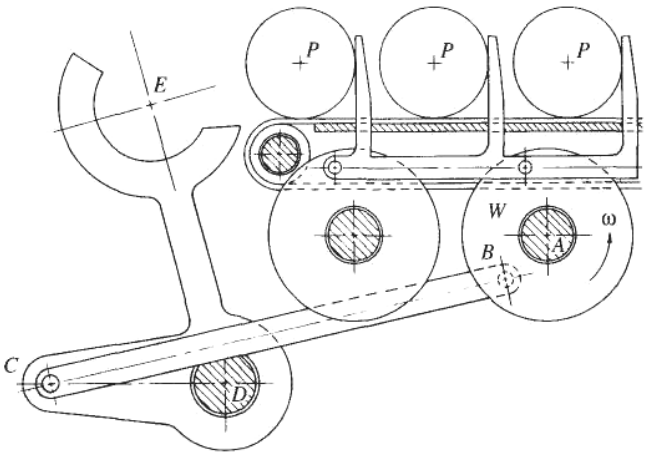


FIGURA P6-16

Problema 6-53 *Tomado de P. H. Hill y W. P. Rule. (1960). Mechanisms: Analysis and Design, con autorización*

†‡6-55 En la figura P6-18 se muestra un mecanismo de compactación de polvo.

a. Calcule su ventaja mecánica para la posición mostrada.
b. Calcule y grafique su ventaja mecánica como una función del ángulo del eslabón *AC* a medida que gira de 15 a 60°.

†‡6-56 La figura P6-19 muestra un mecanismo de viga viajera. Calcule y grafique la velocidad V_{salida} para una revolución de la manivela de entrada 2 la cual gira a 100 rpm.

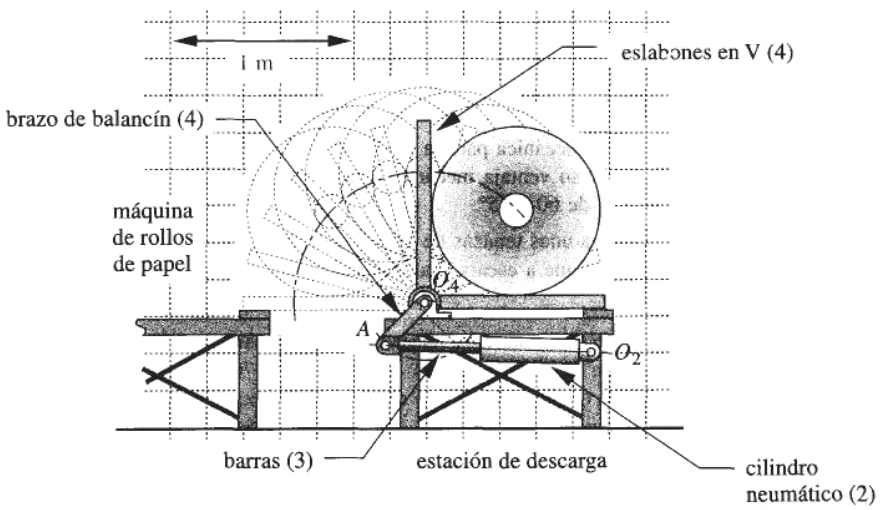


FIGURA P6-17

Problema 6-54

† Estos problemas son adecuados para solucionarse empleando programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad*, *Matlab* o *TKSolver*.

‡ Estos problemas son adecuados para solucionarse usando el programa *Working Model*, el cual está en el CD-ROM anexo.

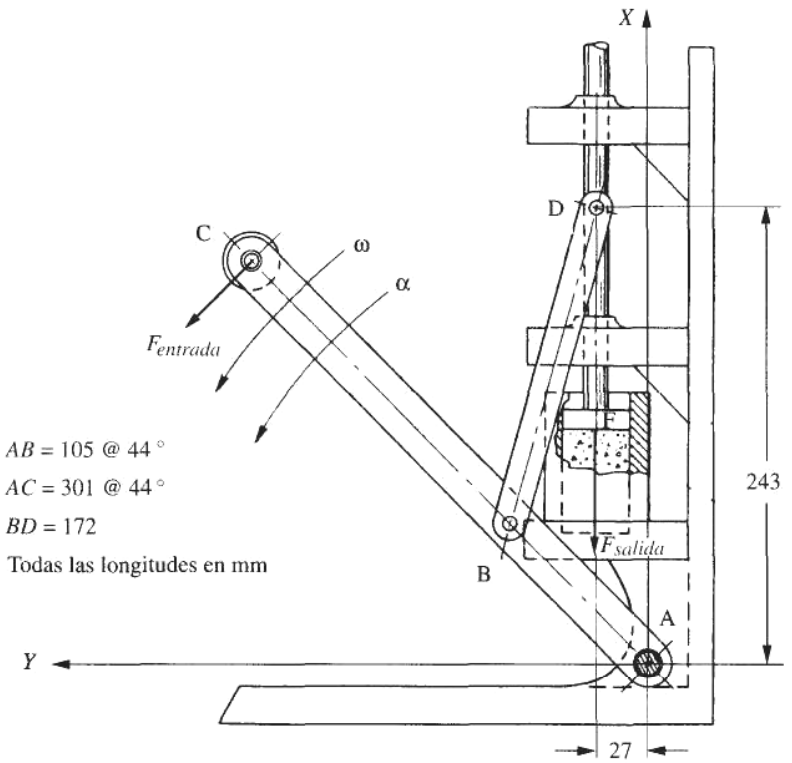


FIGURA P6-18

Problema 6-55 *Tomado de P. H. Hill y W. P. Rule. (1960). Mechanisms: Analysis and Design, con autorización*

†6-57 En la figura P6-20 se muestra una tenaza engarzadura.

a. Calcule su ventaja mecánica para la posición mostrada.
b. Calcule y grafique su ventaja mecánica como una función del ángulo del eslabón *AB* conforme gira de 60 a 45°.

†6-58 La figura P6-21 muestra unas tenazas de sujeción. Calcule su ventaja mecánica para la posición mostrada. Grafique a escala cualesquiera de las dimensiones necesarias del diagrama.

†6-59 La figura P6-22 muestra una mordaza estriada de cuatro barras utilizada para sostener una pieza de trabajo en su lugar, sujetándola en *D*. $O_2A = 70$, $O_2C = 138$, $AB = 35$, $O_4B = 34$, $O_4D = 82$ y $O_2O_4 = 48$ mm. El eslabón 2 se encuentra a 104° en la posición indicada. El eslabonamiento se agarrotará cuando el eslabón 2 alcance 90°.

a. Calcule su ventaja mecánica para la posición mostrada.
b. Calcule y grafique su ventaja mecánica como una función del ángulo del eslabón *AB* a medida que el eslabón 2 gira de 120 a 90°.

†6-60 En la figura P6-23 se muestra una esmeriladora de superficies. La pieza de trabajo oscila bajo la rueda de esmeril de 90 mm de diámetro por el eslabonamiento de

† Estos problemas son adecuados para solucionarse empleando programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad, Matlab* o *TKSolver*.

‡ Estos problemas son adecuados para solucionarse usando el programa *Working Model*, el cual está en el CD-ROM anexo.

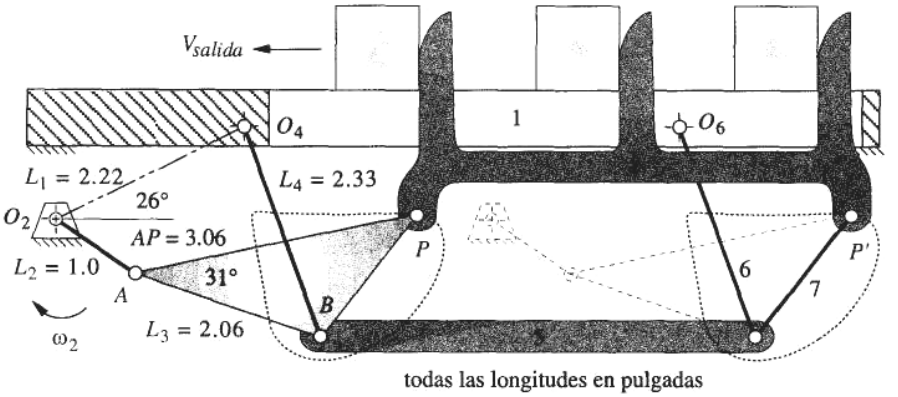


FIGURA P6-19

Problema 6-56. Mecanismo transportador de una viga viajera de ocho barras con movimiento rectilíneo

6

manivela-corredera que tiene una manivela de 22 mm, una barra de conexión de 157 mm y un corrimiento de 40 mm. La manivela gira a 120 rpm, y la rueda de esmeril a 3 450 revoluciones por minuto. Calcule y grafique la velocidad del punto de contacto de la rueda de esmeril en relación con la pieza de trabajo sobre una revolución de la manivela.

6-61 La figura P6-24 muestra un mecanismo de manivela-corredera invertida. El eslabón 2 tiene 2.5 pulgadas de longitud. La distancia O_4A es de 4.1 pulgadas y la O_2O_4 es de 3.9 pulgadas. Determine ω_2, ω_3, ω_4, $\mathbf{V}_{A4}$, $\mathbf{V}_{trans}$ y $\mathbf{V}_{desl}$ para la posición mostrada con $V_{A_2} = 20$ pulg/s en la dirección indicada.

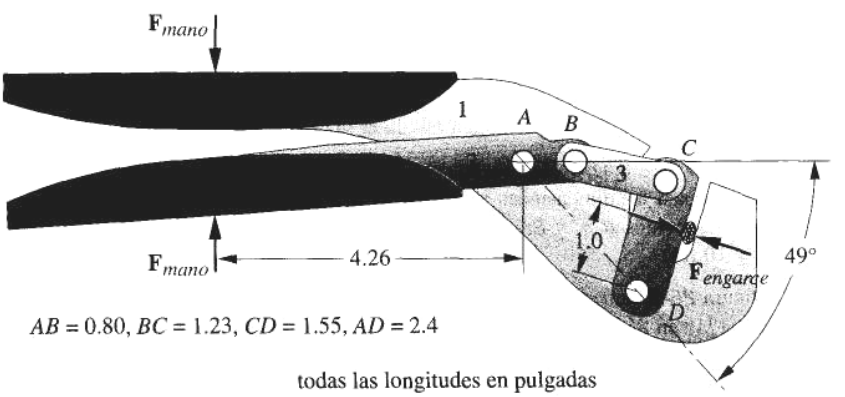


FIGURA P6-20

Problema 6-57. Una tenaza engarzadura

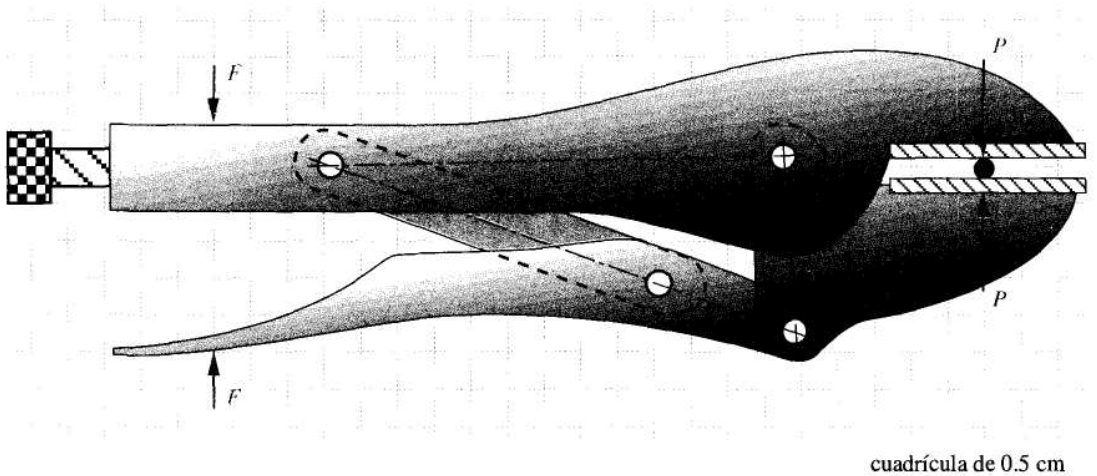


FIGURA P6-21

Problema 6-58

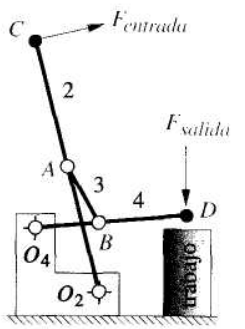


FIGURA P6-22

Problema 6-59

† Estos problemas son adecuados para solucionarse empleando programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

‡ Estos problemas son adecuados para solucionarse usando el programa *Working Model,* el cual está en el CD-ROM anexo.

†6-62 La figura P6-25 muestra un mecanismo de eslabón de arrastre. Haga el diagrama a escala para las dimensiones, escriba las ecuaciones necesarias y resuélvalas para calcular la velocidad angular del eslabón 4 para una entrada de $\omega_2 = 1$ rad/s. Comente acerca de los usos para este mecanismo.

†6-63 La figura P6-25 muestra un mecanismo de eslabón de arrastre. Dibuje a escala el diagrama para las dimensiones, escriba las ecuaciones necesarias, y resuélvalas para calcular y trazar los centrados del centro instantáneo $I_{2,4}$.

†6-64 La figura P6-26 muestra un mecanismo. Dibuje a escala el diagrama para las dimensiones y utilice un método gráfico para calcular las velocidades de los puntos *B, D y E* y la velocidad de deslizamiento para la posición indicada. $\omega_{AB} = 20$ rad/s.

6-65 La figura P6-27 muestra una leva y seguidor. Encuentre las velocidades de los puntos *A y B,* la velocidad de transmisión, la velocidad de deslizamiento, y w_3 si $\omega_2 = 50$ rad/s. Utilice un método gráfico. Dibuje a escala el diagrama para las dimensiones.

‡6-66 La figura P6-28 muestra un mecanismo de retroceso rápido. Dibuje a escala el diagrama para las dimensiones y utilice un método gráfico para calcular las velocidades de los puntos *B, C y E, y* la velocidad de deslizamiento para la posición indicada. $\omega_{CD} = 10$ rad/s.

†‡6-67 La figura P6-29 muestra un mecanismo de pedal de tambor. $O_2A = 100$ mm a 162° y gira a 171° en A'. $O_2O_4 = 56$ mm, $AB = 28$ mm, $AP = 124$ mm y $O_4B = 64$ mm. La distancia de O_4 a $F_{entrada}$ es de 48 mm. Determine y trace la ventaja mecánica y la razón de velocidad del eslabonamiento sobre su rango de movimiento. Si la velocidad de entrada $V_{entrada}$ es una magnitud constante de 3 m/s, y $F_{entrada}$ es constante en 50 N, encuentre la velocidad de salida, la fuerza de salida sobre el rango de movimiento y la potencia de entrada.

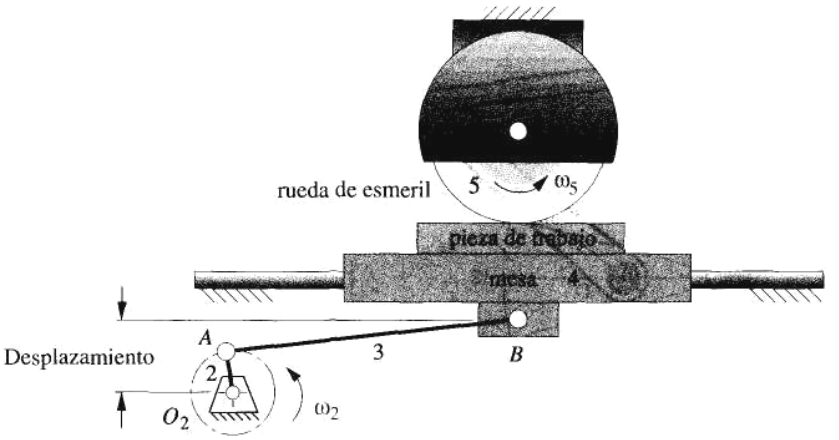


FIGURA P6-23

Problema 6-60. Una esmeriladora de superficies

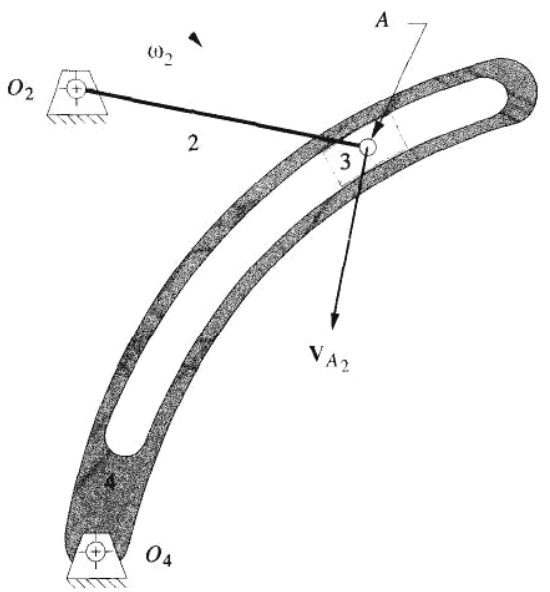


FIGURA P6-24

Problema 6-61 *Tomado de P. H. Hill y W. P. Rule. (1960). Mechanisms: Analysis and Design, con autorización*

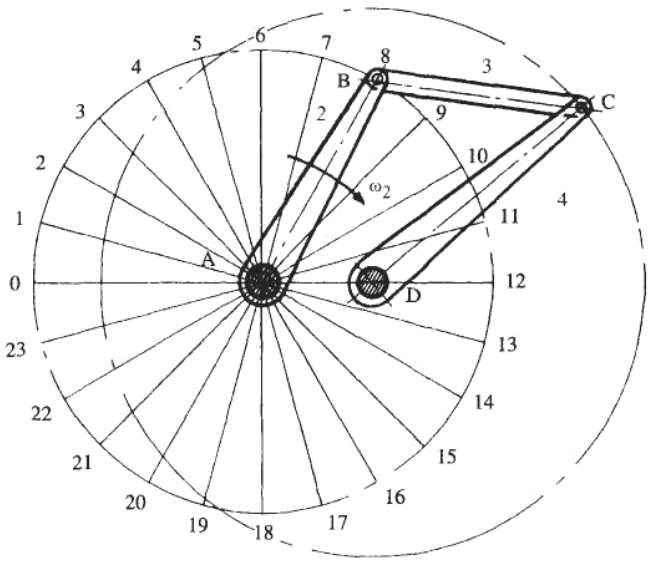


FIGURA P6-25

Problema 6-62 y 6-63 *Tomado de P. H. Hill y W. P. Rule. (1960). Mechanisms: Analysis and Design, con autorización*

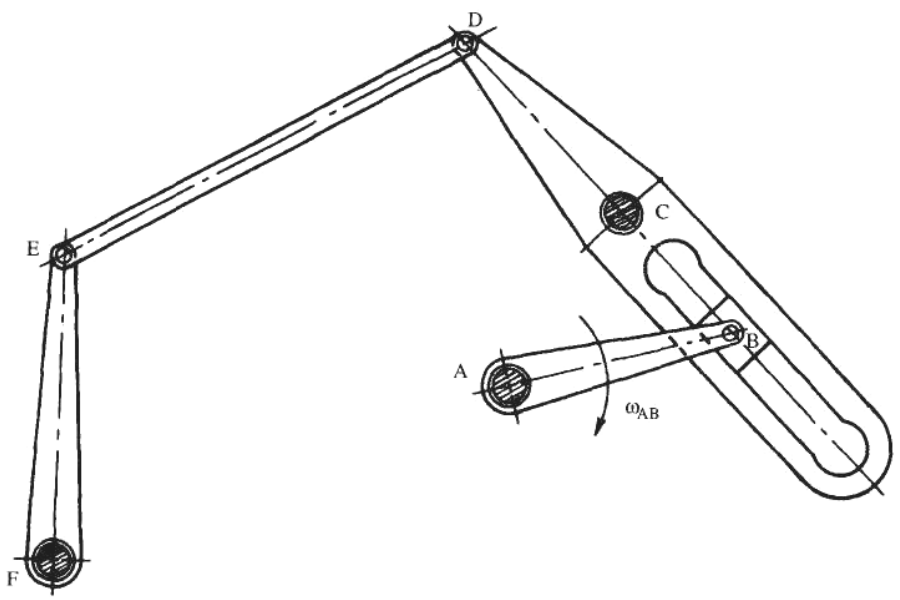


FIGURA P6-26

Problema 6-64 *Tomado de P. H. Hill y W. P. Rule. (1960). Mechanisms: Analysis and Design, con autorización*

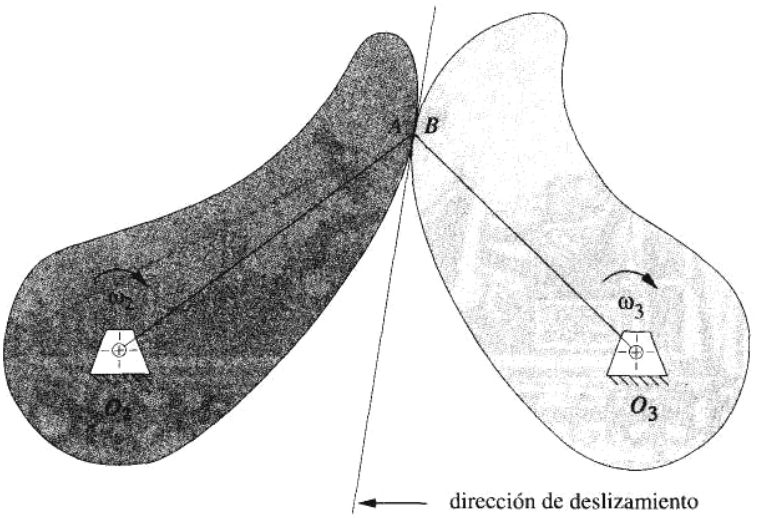


FIGURA P6-27

Problema 6-65 *Tomado de P. H. Hill y W. P. Rule. (1960). Mechanisms: Analysis and Design, con autorización*

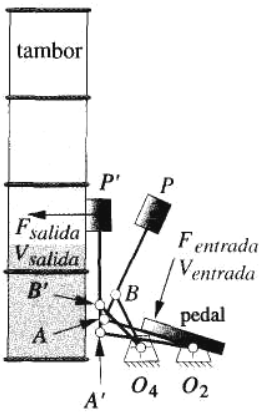


FIGURA P6-29

Problema 6-67

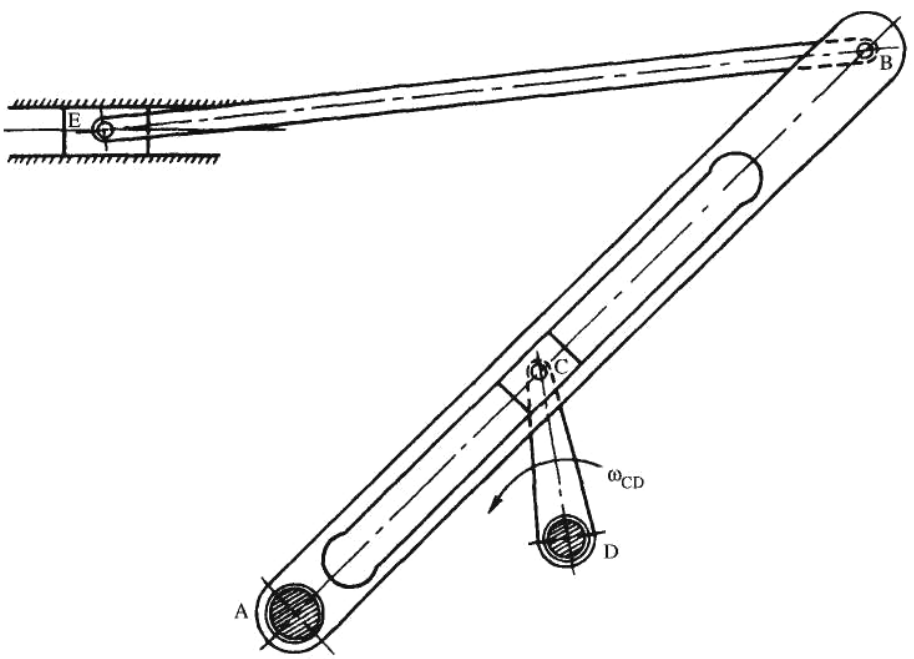


FIGURA P6-28

Problema 6-66 *Tomado de P. H. Hill y W. P. Rule. (1960). Mechanisms: Analysis and Design, con autorización*

Capítulo 7



ANÁLISIS DE ACELERACIÓN

Llévelo torcido a cinco, Sr. Sulu.
CAPITÁN KIRK

7

7.0 INTRODUCCIÓN

Una vez que se ha efectuado un análisis de velocidad, el siguiente paso es determinar las aceleraciones de todos los eslabones y puntos de interés en el mecanismo o máquina. Es necesario conocer las aceleraciones para calcular las fuerzas dinámicas a partir de F = *m* a. Las fuerzas dinámicas contribuyen a los esfuerzos en los eslabones y en los otros componentes. Hay muchos métodos y enfoques para determinar la aceleración en un mecanismo. Aquí se examinarán sólo algunos. Primero se desarrollará un método gráfico manual, útil para comprobar la solución analítica más completa y precisa. Después se deducirá la solución analítica para las aceleraciones en los eslabonamientos de cuatro barras y de manivela-corredera invertidos, como ejemplos de solución general por ecuación de lazo vectorial a los problemas de análisis de aceleración.

7.1 DEFINICIÓN DE ACELERACIÓN

La aceleración se define como *la razón de variación de la velocidad con respecto al tiempo.* La velocidad ($\mathbf{V}$, ω), como la aceleración, es una cantidad vectorial. Las aceleraciones pueden ser **angulares** o **lineales.** Una **aceleración angular** se representa como α, y una aceleración **lineal** como A.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}; \qquad \mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} \tag{7.1}$$

En la figura 7-1 se muestra un eslabón *PA* en rotación pura, que pivota en un punto *A* en el plano *xy*, y se tiene interés en la aceleración del punto *P* cuando el eslabón está sujeto a una velocidad angular ω, y a una aceleración angular α, que puede no tener el mismo sentido. La posición del eslabón está definida por el vector de posición R, y la

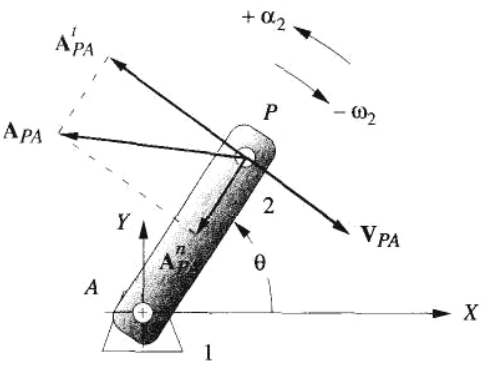


FIGURA 7-1

La aceleración de un eslabón en rotación pura con una α_2 positiva (en SCMR) y una ω_2 negativa (en SMR)

velocidad de *P* es $\boldsymbol{V}_{PA}$. Estos vectores se definieron en las ecuaciones 6.2 y 6.3, las cuales se repiten aquí por conveniencia. (Véase también la figura 6-1.)

$$\mathbf{R}_{PA} = pe^{j\theta} \tag{6.2}$$

$$V_{PA} = \frac{d\mathbf{R}_{PA}}{dt} = pje^{j\theta}\frac{d\theta}{dt} = p\omega je^{j\theta} \tag{6.3}$$

donde *p* es la magnitud escalar del vector $\mathbf{R}_{PA}$. La ecuación 6.3 se distingue fácilmente para obtener una expresión de la aceleración del punto *P:*

$$\mathbf{A}_{PA} = \frac{d\mathbf{V}_{PA}}{dt} = \frac{d(p\omega je^{j\theta})}{dt}$$

$$\mathbf{A}_{PA} = jp\left(e^{j\theta}\frac{d\omega}{dt} + \omega je^{j\theta}\frac{d\theta}{dt}\right) \tag{7.2}$$

$$\mathbf{A}_{PA} = p\alpha je^{j\theta} - p\omega^2 e^{j\theta}$$

$$\mathbf{A}_{PA} = \mathbf{A}^t_{PA} + \mathbf{A}^n_{PA}$$

Observe que hay dos funciones del tiempo en la ecuación 6.3, éstas son θ y ω. Por lo tanto, hay dos términos en la expresión de la aceleración: la componente tangencial de la aceleración $\mathbf{A}^t_{PA}$ que implica a α y la componente normal (o centrípeta) $\mathbf{A}^n_{PA}$ en la que interviene ω^2. Como resultado de la diferenciación la componente tangencial está multiplicada por el operador complejo *j* (constante). Esto produce una rotación del vector aceleración de 90° con respecto al vector de posición original. (Véase también la figura *4-5b.)* Esta rotación de 90° es nominalmente positiva, o en sentido contrario a las manecillas del reloj (SCMR). Sin embargo, la componente tangencial también se multiplica por α, la cual puede ser positiva o negativa. Como resultado, la componente tangencial de la aceleración será **rotada** un giro de 90° desde el ángulo θ del *vector de posición* **en** el **sentido dictado por el signo de** α. Ésta es una verificación matemática de lo que ya se conocía, a saber: *la aceleración tangencial está siempre en una dirección perpendicular*

al radio de rotación, por lo tanto, es tangente a la trayectoria del movimiento, como se muestra en la figura 7-1. La componente normal o centrípeta de la aceleración se multiplica por j^2 o –l. Esto dirige *a la componente centrípeta a 180° a un ángulo* θ *del vector posición original;* es decir, hacia el centro (centrípeta significa *hacia el centro).* La aceleración total $\mathbf{A}_{PA}$ del punto *P* es la suma vectorial de las componentes normal $\mathbf{A}^n_{PA}$ y tangencial $\mathbf{A}^t_{PA}$ como se muestra en la figura 7-1 y en la ecuación 7.2.

Al sustituir la identidad de Euler (ec. 4-4a) en la ecuación 7.2 se obtienen las componentes real e imaginaria (o sea *x* y *y)* del vector aceleración:

$$\mathbf{A}_{PA} = p\alpha(-\text{sen}\,\theta + j\cos\theta) - p\omega^2(\cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta) \tag{7.3}$$

Podemos referirnos a la aceleración $\mathbf{A}_{PA}$, que se ilustra en la figura 7-1 como una **aceleración absoluta,** ya que está referida al punto *A,* el cual es el origen de los ejes coordenados globales en ese sistema. De modo que nos podríamos haber referido a ella como $\mathbf{A}_P$, ya que la ausencia del segundo subíndice implica referencia al sistema de coordenadas global.

En la figura 7-2a) se muestra un sistema diferente, ligeramente más complicado, en el cual el pivote *A* ya no es estacionario. Tiene una aceleración lineal conocida $\mathbf{A}_A$ como parte del elemento de traslación, el eslabón 3. Si α no cambia, la aceleración del punto *P* con respecto a *A* será la misma que antes, pero $\mathbf{A}_{PA}$ ya no se puede considerar como aceleración absoluta. Ésta es ahora una **diferencia de aceleración y debe** llevar el segundo subíndice como $\mathbf{A}_{PA}$. La aceleración absoluta $\mathbf{A}_P$ debe hallarse ahora a partir de la ecuación de **diferencia de aceleración,** cuya solución gráfica se muestra en la figura 7-2*b*):

$$\mathbf{A}_P = \mathbf{A}_A + \mathbf{A}_{PA}$$
$$\left(\mathbf{A}^t_P + \mathbf{A}^n_P\right) = \left(\mathbf{A}^t_A + \mathbf{A}^n_A\right) + \left(\mathbf{A}^t_{PA} + \mathbf{A}^n_{PA}\right) \tag{7.4}$$

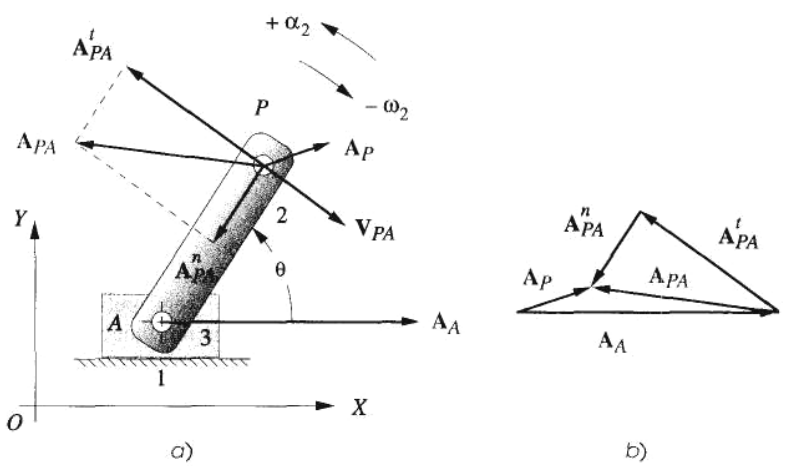


FIGURA 7-2

Diferencia de aceleración en un sistema con una α_2 positiva (en SCMR) y con una ω_2 negativa (en SMR)

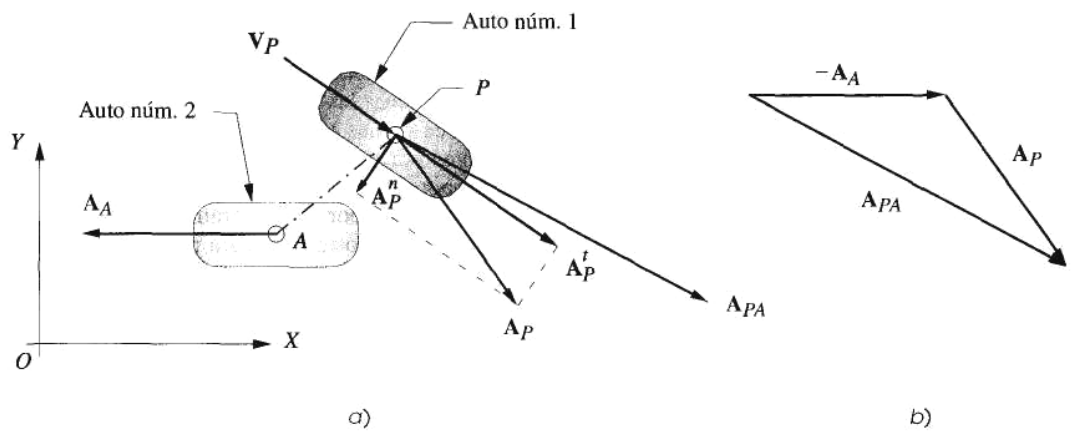


FIGURA 7-3
Aceleración relativa

Observe la similitud de la ecuación 7.4 con la **ecuación de diferencia de velocidad** (ecuación 6-5). Observe también que la solución para A_f en la ecuación 7.4 puede obtenerse al sumar el vector resultante $\mathbf{A}_{PA}$ o sus componentes normal y tangencial, $\mathbf{A}_{PA}^n$ y $\mathbf{A}_{PA}^t$, al vector $\mathbf{A}_A$ en la figura *l-2b).* El vector $\mathbf{A}_A$ tiene una componente normal igual a cero en este ejemplo, ya que el eslabón 3 está en traslación pura.

En la figura 7-3 se muestran dos cuerpos independientes *P* y *A,* los cuales podrían ser dos automóviles que se mueven en el mismo plano. El auto núm. 1 está virando y acelera hacia la trayectoria del auto núm. 2, el cual desacelera para evitar un choque. Si se conocen sus aceleraciones independientes, $\mathbf{A}_P$ y $\mathbf{A}_A$, se puede obtener su **aceleración relativa** $\mathbf{A}_{PA}$ a partir de la ecuación 7.4 algebraicamente como:

$$\mathbf{A}_{PA} = \mathbf{A}_P - \mathbf{A}_A \tag{7.5}$$

La solución gráfica de esta ecuación se muestra en la figura 7-3b).

Como se hizo para el análisis de la velocidad, se dan nombres diferentes a estos casos aunque se aplica la misma ecuación. Al repetir la definición de la sección 6.1, modificada para referirse a la aceleración:

CASO 1. Dos puntos en el mismo cuerpo => ***diferencia de aceleración***

CASO **2.** Dos puntos en cuerpos diferentes => ***aceleración relativa***

7.2 ANÁLISIS GRÁFICO DE ACELERACIÓN

Lo expuesto en la sección 6.2 sobre el análisis gráfico de velocidad se aplica también al análisis gráfico de aceleración. Históricamente, los métodos gráficos fueron la única forma práctica de resolver estos problemas de análisis de aceleración. Con alguna práctica y herramientas apropiadas, tales como una máquina de dibujo o un paquete CAD, se determinan rápidamente las aceleraciones de puntos específicos en un mecanismo, para

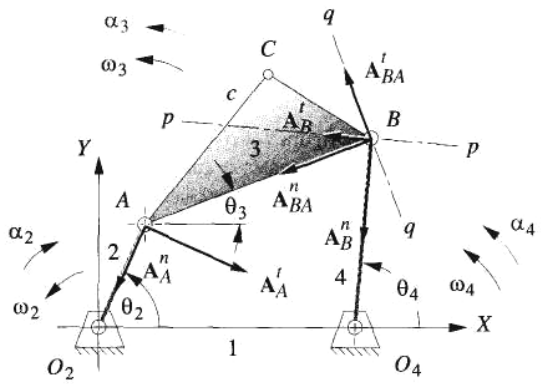
cualquier posición de entrada, dibujando los diagramas vectoriales. Sin embargo, si se han de obtener las aceleraciones para muchas posiciones del mecanismo, cada nueva posición requiere el trazo de un conjunto completamente nuevo de diagramas vectoriales. Muy poco del trabajo realizado para determinar las aceleraciones en la posición 1 lleva a la posición 2, etcétera. Éste es un proceso más tedioso que el del análisis gráfico de velocidad, porque hay más componentes por trazar. No obstante, este método aún tiene un valor más que histórico, ya que proporciona una comprobación rápida de los resultados obtenidos a partir de una solución dada por un programa de computación. Esta verificación sólo es necesaria en unas cuantas posiciones para probar la validez del programa.

Para resolver gráficamente cualquier problema de análisis de aceleración se necesitan sólo tres ecuaciones, la 7.4 y la 7.6 (las cuales corresponden simplemente a las magnitudes escalares de los términos en la ecuación 7.2):

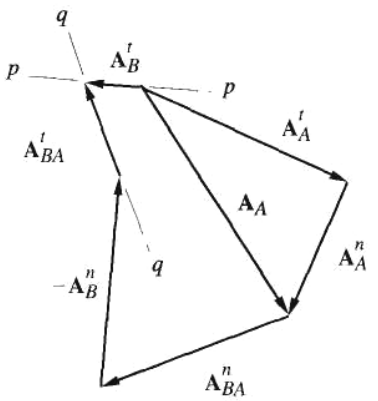
$$|\mathbf{A}^t| = A^t = r\alpha$$
$$|\mathbf{A}^n| = A^n = r\omega^2 \tag{7.6}$$

Observe que las ecuaciones escalares 7.6 definen sólo las **magnitudes** (A^t, A^n) de las componentes de aceleración de un punto en rotación. En un análisis gráfico del CASO 1, las **direcciones** de los vectores debidas a las componentes centrípeta y tangencial de la diferencia de aceleración se deben considerar a partir de la ecuación 7.2, como perpendicular y a lo largo del radio de rotación, respectivamente. Así, si se conoce o se supone el centro de rotación, se conocerán también las direcciones de las componentes de la diferencia de aceleración debidas a esa rotación, y sus sentidos serán consistentes con la velocidad angular ω y la aceleración angular α del cuerpo.

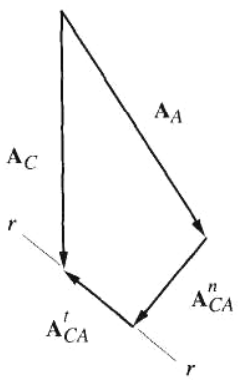
La figura 7-4 muestra un eslabonamiento de cuatro barras en una posición particular. Se desean evaluar las aceleraciones angulares de los eslabones 3 y 4 (α_3, α_4), y las aceleraciones lineales de los puntos A, *B* y *C* $(\boldsymbol{A}_A, \boldsymbol{A}_B, \boldsymbol{A}_C)$. El punto *C* representa cualquier punto general de interés como un punto de acoplador. El método de solución es válido para cualquier punto de un eslabón. Para resolver este problema se necesita conocer: *las longitudes, las posiciones angulares y las velocidades angulares de todos los eslabones,* así como *la aceleración instantánea de entrada de cualquier eslabón impulsor o punto de impulsión.* Suponiendo que se ha diseñado este eslabonamiento, se conocerán o podrán medir las longitudes del eslabón. También se debe efectuar primero un **análisis completo de posición y velocidad** para obtener los ángulos de eslabón θ_3 y θ_4, y las velocidades angulares ω_3 y ω_4, dada la posición angular del eslabón de entrada θ_2, así como la velocidad angular ω_2 de entrada y la aceleración angular de entrada α_2. Esto se puede realizar aplicando uno de los métodos expuestos en los capítulos 4 y 6. En general, estos problemas se deben resolver en etapas: primero las posiciones de eslabón, después la¿> velocidades y finalmente las aceleraciones. En el siguiente ejemplo se supondrá que se ha realizado un análisis completo de velocidad y posición, y que se conocen la entrada al eslabón 2 con θ_2, ω_2 y α_2 para esta posición de "marco congelado" del eslabonamiento en movimiento.



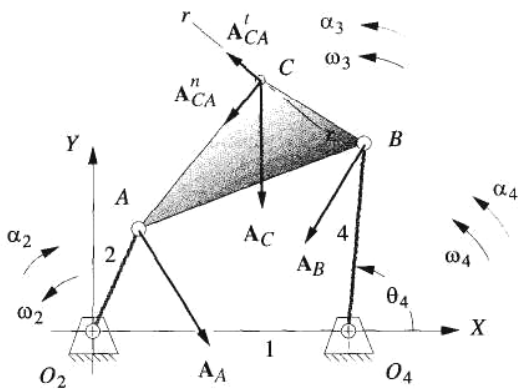
a) Construcción vectorial



b) Polígono vectorial (doble tamaño)



c) Polígono vectorial (doble tamaño)



d) Vectores resultantes

FIGURA 7-4

Solución gráfica para la aceleración en un eslabonamiento de pasador-articulado con una α_2 negativa (en SMR) y con una ω_2 positiva (en SCMR)

EJEMPLO 7-1

Análisis gráfico de aceleración para una posición de un eslabonamiento de cuatro barras.

Problema: Dados $\theta_2, \theta_3, \theta_4, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \alpha_2$ obtenga $\alpha_3, \alpha_4, \mathbf{A}_A, \mathbf{A}_B, \mathbf{A}_P$ por métodos gráficos.

Solución: (Véase la figura 7-4.)

1 Inicie al final del eslabonamiento del que se tenga mayor información. Calcule las magnitudes de las componentes centrípeta y tangencial de la aceleración del punto *A* mediante las ecuaciones escalares 7.6.

$$A_A^n = (AO_2)\omega_2^2; \qquad A_A^t = (AO_2)\alpha_2 \tag{a}$$

2 En el diagrama de eslabonamiento mostrado en la figura 7-4a), dibuje los vectores componentes de la aceleración $\mathbf{A}_A^n$ y $\mathbf{A}_A^t$ con sus longitudes iguales a sus magnitudes, a una escala conveniente. Coloque sus orígenes en el punto *A* con sus direcciones a lo largo y perpendicular al radio AO_2 respectivamente. El sentido de $\mathbf{A}_B^t$ se define por el de α_2 (de acuerdo con la regla de la mano derecha), y el sentido de $\mathbf{A}_A^n$ es el opuesto al sentido del vector de posición $\mathbf{R}_A$, como se muestra en la figura *l-4a).*

3 Pase en seguida hacia un punto del cual tenga alguna información, como el *B* en el eslabón 4. Observe que las direcciones de las componentes tangencial y normal de la aceleración del punto *B* son predecibles, ya que este eslabón está en rotación pura alrededor del punto O_4. Dibuje la línea de construcción *pp* pasando por el punto *B* perpendicular a BO_4, para representar la dirección de $\mathbf{A}_B^t$ como se muestra en la figura 7-4a).

4 Escriba la ecuación 7.4 de la diferencia vectorial de aceleración para el punto *B* con respecto al punto *A.*

$$\mathbf{A}_B = \mathbf{A}_A + \mathbf{A}_{BA} \tag{b}$$

Sustituya cada término por las componentes normal y tangencial:

$$(\mathbf{A}_B^t + \mathbf{A}_B^n) = (\mathbf{A}_A^t + \mathbf{A}_A^n) + (\mathbf{A}_{BA}^t + \mathbf{A}_{BA}^n) \tag{c}$$

Se utilizará el punto *A* como referencia para obtener $\mathbf{A}_B$, ya que *A* está en el mismo eslabón que *B* y se tienen determinadas $\mathbf{A}_A^t$ y $\mathbf{A}_A^n$. Cualquier ecuación vectorial bidimensional se resuelve para dos incógnitas, y cada término tiene dos parámetros; a saber, magnitud y dirección. Entonces hay potencialmente 12 incógnitas en esta ecuación, dos por término. Se deben conocer 10 de ellas para resolverla. Se conocen las magnitudes y las direcciones de $\mathbf{A}_A^t$ y $\mathbf{A}_A^n$, así como las direcciones de $\mathbf{A}_B^t$, y $\mathbf{A}_B^n$, que están a lo largo de la recta *pp y* la recta BO_4, respectivamente. La magnitud de $\mathbf{A}_B^n$ se calcula a partir de la ecuación 7.6, ya que se conoce ω_4. Esto proporciona siete valores conocidos, pero se necesita conocer tres parámetros más para resolver la ecuación.

5 El término $\mathbf{A}_{BA}$ representa la diferencia de aceleración de *B* con respecto a *A.* Ésta tiene dos componentes. La componente normal $\mathbf{A}_{BA}^n$ está dirigida a lo largo de la recta *BA* debido a que se emplea el punto *A* como centro de rotación de referencia para el vector libre ω_3, y su magnitud se calcula a partir de la ecuación 7.6. La dirección de $\mathbf{A}_{BA}^t$ debe ser entonces perpendicular a la recta *BA.* Dibuje la línea de construcción *qq* a través del punto *B* y perpendicular a *BA* para representar la dirección de $\mathbf{A}_{BA}^t$, como se muestra en la figura *1-Aá).* La magnitud y la dirección calculadas de la componente $\mathbf{A}_{BA}^n$, y la dirección conocida de $\mathbf{A}_{BA}^t$, proporcionan los tres parámetros adicionales necesarios.

6 Ahora se puede resolver gráficamente la ecuación vectorial dibujando un diagrama vectorial como se muestra en la figura 7-4¿>). En este paso se requieren herramientas de dibujo o un paquete CAD. La estrategia es dibujar primero todos los vectores de los cuales se conoce la magnitud y la dirección, poniendo cuidado al asignarles sentidos, de acuerdo con la ecuación 7.4.

Primero dibuje cuidadosamente a escala los vectores de la aceleración $\mathbf{A}_A^t$ y $\mathbf{A}_A^n$ de la punta de flecha al origen manteniendo sus direcciones (en la figura están dibujados al doble de su tamaño). Observe que la suma de estas dos componentes es el vector $\mathbf{A}_A$. La ecuación en el paso 4 indica sumar $\mathbf{A}_{BA}$ a $\mathbf{A}_A$. Se conoce $\mathbf{A}_{BA}^n$, de modo que es posible dibujar esa componente en el extremo final de $\mathbf{A}_A$. También se conoce $\mathbf{A}_B^n$, pero esta componente está en el lado izquierdo de la ecuación 7.4, así que se debe restar. Dibuje el negativo (sentido opuesto) de $\mathbf{A}_B^n$ en el extremo de $\mathbf{A}_{BA}^n$.

Esto agota la totalidad de componentes de las cuales se conocía la magnitud y la dirección. Las dos incógnitas restantes son las direcciones de $\mathbf{A}_B^t$ y $\mathbf{A}_{BA}^t$, que se encuentran a lo largo de las rectas *pp* y *qq*, respectivamente. Dibuje una línea paralela a la *qq* que pasa por la punta de flecha del vector que representa a *menos* $\mathbf{A}_B^n$. La resultante, o lado izquierdo de la ecuación, debe cerrar el diagrama vectorial desde el origen del primer vector dibujado $(\mathbf{A}_A)$ hasta la punta de flecha del último, así que se dibuja una recta paralela a *pp* que pasa por el origen de $\mathbf{A}_A$. La intersección de estas rectas paralelas a *pp* y *qq* define las longitudes de $\mathbf{A}_B^t$ y $\mathbf{A}_{BA}^t$. Los sentidos de estos vectores se determinan a partir de la ecuación 7.4. El vector $\mathbf{A}_A$ se sumó al $\mathbf{A}_{BA}$, de modo que sus componentes deben estar dispuestas de la punta de flecha al origen. El vector $\mathbf{A}_B$ es la resultante, así que su componente $\mathbf{A}_B^t$ debe ir desde el origen del primero hasta la punta de flecha del último. Los vectores resultantes se muestran en la figura 7-46) y *d).*

7 Las aceleraciones angulares de los eslabones 3 y 4 se calculan mediante la ecuación 7.6:

$$\alpha_4 = \frac{A_B^t}{BO_4} \qquad \alpha_3 = \frac{A_{BA}^t}{BA} \tag{d}$$

Observe que el término diferencia de aceleración $\mathbf{A}_{BA}^t$ representa la componente rotacional de la aceleración del eslabón 3 debida a α_3. La aceleración angular α de un cuerpo es un **"vector libre"** que no tiene un punto particular de aplicación en el cuerpo. Éste existe en cualquier parte del cuerpo.

8 Finalmente se determina $\mathbf{A}/_C$ usando de nuevo la ecuación 7.4. Seleccione un punto en el eslabón 3, del cual se conoce la velocidad absoluta que se usará como referencia, tal como el punto *A.*

$$\mathbf{A}_C = \mathbf{A}_A + \mathbf{A}_{CA} \tag{e}$$

En este caso se puede calcular la magnitud de $\mathbf{A}_{CA}^t$ de la ecuación 7.6 porque ya se ha obtenido α_3,

$$A_{CA}^t = c\alpha_3 \tag{f}$$

La magnitud de la componente $\mathbf{A}_{CA}^n$ se encuentra con la ecuación 7.6 utilizando ω_3.

$$A_{CA}^n = c\omega_3^2 \tag{g}$$

Como se conocen $\mathbf{A}_A$ y $\mathbf{A}_{CA}$, el diagrama vectorial se traza directamente como se muestra en la figura 7-4c). El vector $\mathbf{A}_C$ es la resultante que cierra el diagrama. La figura *1-Ad)* muestra los vectores de aceleración calculados en el diagrama del eslabonamiento.

El ejemplo anterior contiene algunos principios interesantes y significativos que merecen un señalamiento adicional. La ecuación 7.4 se repite aquí para su análisis:

$$\mathbf{A}_P = \mathbf{A}_A + \mathbf{A}_{PA}$$
$$(\mathbf{A}_P^t + \mathbf{A}_P^n) = (\mathbf{A}_A^t + \mathbf{A}_A^n) + (\mathbf{A}_{PA}^t + \mathbf{A}_{PA}^n) \quad (7.4)$$

Esta ecuación representa la aceleración *absoluta* de algún punto general *P* con referencia al origen del sistema coordenado global. El lado derecho define éste como la suma de la aceleración absoluta de algún otro punto de referencia *A* en el mismo sistema, y la diferencia de aceleración (o aceleración relativa) del punto *P* con respecto al punto *A.* Estos términos se descomponen luego en sus componentes normal (centrípeta) y tangencial que tienen definiciones como se muestra en la ecuación 7.2.

Revisemos lo que se hizo en el ejemplo 7-1 con el fin de extraer la estrategia general para solucionar esta clase de problemas. Se inició en el lado de entrada del mecanismo, ya que ahí es donde se definió la aceleración angular de impulsión α_2. Primero se buscó un punto *(A)* para el cual el movimiento era de rotación pura. Luego se determino la aceleración absoluta de ese punto $(\mathbf{A}_A)$ usando las ecuaciones 7.4 y 7.6, para descomponer $\mathbf{A}_A$ en sus componentes normal y tangencial. *(Pasos 1 y 2)*

Después se usó el punto *(A)* como punto de referencia para definir la componente de traslación en la ecuación 7.4 escrita para un nuevo punto *(B).* Observe que fue necesario elegir un segundo punto *(B),* el cual estaba en el mismo cuerpo rígido como el punto de referencia (A), que ya se había resuelto y permitía predecir algún aspecto de las componentes de aceleración del nuevo punto (fi's). En este ejemplo se conocía la dirección de la componente $\mathbf{A}_B^t$, aunque no se sabía aún cuál era su magnitud. También se pudo calcular la magnitud y la dirección de la componente centrípeta, $\mathbf{A}_B^n$, ya que se conocía a ω_3 y la longitud del eslabón. En general, esta situación se obtendrá para cualquier punto en un eslabón que está unido a la fijación (como el caso del eslabón 4). En este ejemplo no se podría haber obtenido el punto *C* hasta determinar el *B,* ya que el punto *C* está en un eslabón flotante del cual aún no se conocían la aceleración angular o la dirección de la aceleración absoluta. *(Pasos 3 y 4)*

Para resolver la ecuación del segundo punto *(B)* también fue necesario reconocer que la componente tangencial de la diferencia de aceleración, $\mathbf{A}_{BA}^t$, siempre se dirige perpendicularmente a la recta que une a los dos puntos relacionados en el eslabón *(B* y *A* en el ejemplo). Además, siempre se conocerá la magnitud y la dirección de las componentes de la aceleración centrípeta en la ecuación 7.4 *si* **representa una situación de diferencia de aceleración** (CASO 1). *Si los dos puntos están en el mismo cuerpo rígido, entonces dicha componente centrípeta de diferencia de aceleración tiene una magnitud igual a* $r\omega^2$, *y está siempre dirigida a lo largo de la recta que une a los dos puntos y que apunta hacia el de referencia como centro* (véase la figura 7-2). Estas observaciones son verdaderas independientemente de los dos puntos seleccionados. Sin embargo, *observe que esto no se cumple en la situación del* CASO 2, como se muestra en la figura 7-3a), donde la componente normal de la aceleración del auto núm. 2 no está dirigida a lo largo de la recta que pasa por los puntos *A y P. (Pasos 5 y 6)*

Una vez que se obtiene la aceleración absoluta $(\mathbf{A}_B)$ de sun segundo punto en el mismo eslabón (CASO 1), se podría evaluar la aceleración angular de ese eslabón. (Observe que los puntos *A* y *B* están en el eslabón 3 y la aceleración del punto O_4 vale cero.) Una vez que se conocen las aceleraciones angulares de todos los eslabones se podría determinar la aceleración lineal de un punto (tal como *C)* en cualquier eslabón mediante

la ecuación 7.4. Para hacer esto se tuvo que comprender el concepto de la aceleración angular como un **vector libre,** lo que significa que se presenta en cualquier parte del eslabón en un instante dado. No tiene un centro en particular, *sino que posee una infinidad de centros potenciales.* El eslabón simplemente *tiene una aceleración angular.* Es esta propiedad la que permite resolver la ecuación 7.4 para, literalmente, **cualquier punto** en un cuerpo rígido en movimiento complejo **en relación con cualquier otro punto** en el mismo cuerpo. *(Pasos 7 y 8)*

7.3 SOLUCIONES ANALÍTICAS PARA EL ANÁLISIS DE ACELERACIÓN

El eslabonamiento de cuatro barras con juntas de pasador

Las ecuaciones de posición para el eslabonamiento de cuatro barras con juntas de pasador se obtuvieron en la sección 4.5. El eslabonamiento se mostró en la figura 4-7, y de nuevo en la figura 7-5a), en la que también se indica una aceleración angular de entrada α_2 aplicada al eslabón 2. Esta aceleración angular de entrada α_2 puede variar con el tiempo. La ecuación de lazo vectorial se mostró en las ecuaciones 4.5a y 4.5c, las cuales se repiten aquí por conveniencia:

$$\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1 = 0 \tag{4.5a}$$

Como antes, se sustituye la notación de número complejo para los vectores, y se designan sus longitudes escalares como *a, b, c, d,* según se muestra en la figura 7-5:

$$ae^{j\theta_2} + be^{j\theta_3} - ce^{j\theta_4} - de^{j\theta_1} = 0 \tag{4.5c}$$

En la sección 6.7 se derivó la ecuación 4.5c con respecto al tiempo para obtener una expresión de la velocidad, la cual se repite en seguida:

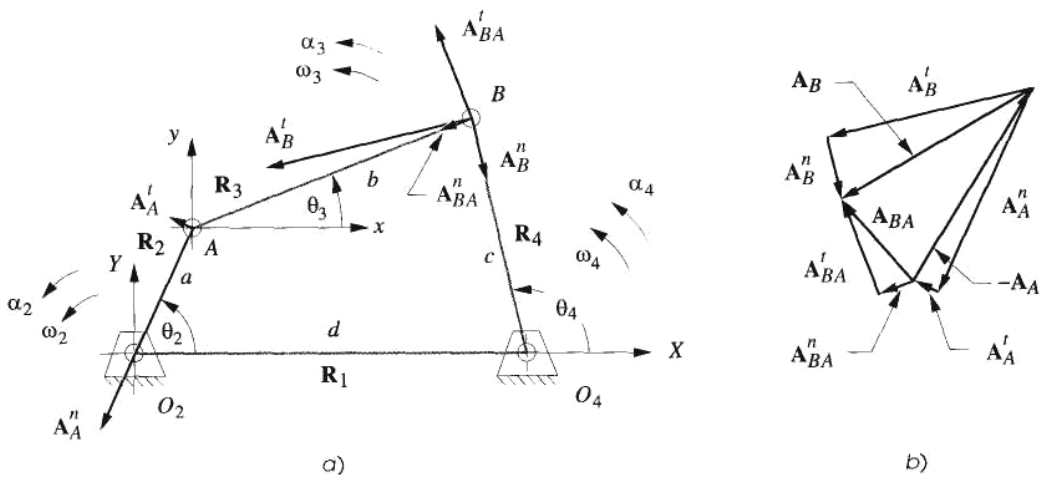


FIGURA 7-5

Lazo vectorial de posición para un eslabonamiento de cuatro barras que muestra los vectores de aceleración

$$ja\omega_2 e^{j\theta_2} + jb\omega_3 e^{j\theta_3} - jc\omega_4 e^{j\theta_4} = 0 \tag{6.14c}$$

Ahora se derivará la ecuación 6.14c con respecto al tiempo a fin de obtener una expresión para las aceleraciones en el eslabonamiento. Cada término en la ecuación 6.14c contiene dos funciones del tiempo, θ y ω. Al derivar con la regla de la cadena en este ejemplo, resultarán dos términos en la expresión de la aceleración para cada término en la ecuación de velocidad:

$$\left(j^2 a\omega_2^2 e^{j\theta_2} + ja\alpha_2 e^{j\theta_2}\right) + \left(j^2 b\omega_3^2 e^{j\theta_3} + jb\alpha_3 e^{j\theta_3}\right) - \left(j^2 c\omega_4^2 e^{j\theta_4} + jc\alpha_4 e^{j\theta_4}\right) = 0 \tag{7.7a}$$

Simplificando y agrupando términos queda:

$$\left(a\alpha_2 je^{j\theta_2} - a\omega_2^2 e^{j\theta_2}\right) + \left(b\alpha_3 je^{j\theta_3} - b\omega_3^2 e^{j\theta_3}\right) - \left(c\alpha_4 je^{j\theta_4} - c\omega_4^2 e^{j\theta_4}\right) = 0 \tag{7.7b}$$

Compare los términos agrupados en los paréntesis con las ecuaciones 7.2. La ecuación 7.7 contiene las componentes tangencial y normal de las aceleraciones de los puntos *A y B,* así como de la diferencia de aceleración de *B* a *A.* Observe que éstas son las mismas relaciones que se usaron para resolver gráficamente este problema en la sección 7.2. La ecuación 7.7 es, de hecho, la **ecuación de diferencia de aceleración** 7.4, la cual, con la nomenclatura empleada aquí, es:

$$\mathbf{A}_A + \mathbf{A}_{BA} - \mathbf{A}_B = 0 \tag{7.8a}$$

donde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_A &= \left(\mathbf{A}_A^t + \mathbf{A}_A^n\right) = \left(a\alpha_2 je^{j\theta_2} - a\omega_2^2 e^{j\theta_2}\right) \\
\mathbf{A}_{BA} &= \left(\mathbf{A}_{BA}^t + \mathbf{A}_{BA}^n\right) = \left(b\alpha_3 je^{j\theta_3} - b\omega_3^2 e^{j\theta_3}\right) \\
\mathbf{A}_B &= \left(\mathbf{A}_B^t + \mathbf{A}_B^n\right) = \left(c\alpha_4 je^{j\theta_4} - c\omega_4^2 e^{j\theta_4}\right)
\end{aligned} \tag{7.8b}$$

El diagrama vectorial de la figura 7-5¿>) contiene estas componentes y es una solución gráfica de la ecuación 7.8a. También se muestra cómo actúan las componentes vectoriales en sus respectivos puntos en la figura 7-5a).

Ahora se necesita resolver la ecuación 7.7 para α_3 y α_4, conociendo la aceleración angular de entrada α_2, las longitudes de los eslabones, todos los ángulos de eslabón y las velocidades angulares. Por consiguiente, se debe comenzar por el análisis de posición deducido en la sección 4.5, y el análisis de velocidad de la sección 6.7 para determinar los ángulos de eslabón y las velocidades angulares antes de terminar este análisis de aceleración. Se desea resolver la ecuación 7.8 para obtener expresiones de la siguiente forma:

$$\alpha_3 = f(a,\ b,\ c,\ d,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \theta_4,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \alpha_2) \tag{7.9a}$$

$$\alpha_4 = g(a,\ b,\ c,\ d,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \theta_4,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \alpha_2) \tag{7.9b}$$

La estrategia de solución será la misma que se aplicó en los análisis de posición y de velocidad. Se introduce primero la identidad de Euler de la ecuación 4.4a en cada término de la ecuación 7.7:

$$\begin{aligned}
&\left[a\alpha_2 j(\cos\theta_2 + j\,\mathrm{sen}\,\theta_2) - a\omega_2^2(\cos\theta_2 + j\,\mathrm{sen}\,\theta_2)\right] \\
&\quad + \left[b\alpha_3 j(\cos\theta_3 + j\,\mathrm{sen}\,\theta_3) - b\omega_3^2(\cos\theta_3 + j\,\mathrm{sen}\,\theta_3)\right] \\
&\quad - \left[c\alpha_4 j(\cos\theta_4 + j\,\mathrm{sen}\,\theta_4) - c\omega_4^2(\cos\theta_4 + j\,\mathrm{sen}\,\theta_4)\right] = 0
\end{aligned} \tag{7.10a}$$

Se multiplica por el operador *j* y se reordena:

$$\begin{aligned}&\left[a\alpha_2(-\operatorname{sen}\theta_2 + j\cos\theta_2) - a\omega_2^2(\cos\theta_2 + j\operatorname{sen}\theta_2)\right]\\&+\left[b\alpha_3(-\operatorname{sen}\theta_3 + j\cos\theta_3) - b\omega_3^2(\cos\theta_3 + j\operatorname{sen}\theta_3)\right]\\&-\left[c\alpha_4(-\operatorname{sen}\theta_4 + j\cos\theta_4) - c\omega_4^2(\cos\theta_4 + j\operatorname{sen}\theta_4)\right] = 0\end{aligned} \tag{7.10b}$$

Ahora se puede separar esta ecuación vectorial en sus dos componentes, mediante la reunión por separado de todos los términos reales y todos los imaginarios.

parte real (componente JC):

$$-a\alpha_2\operatorname{sen}\theta_2 - a\omega_2^2\cos\theta_2 - b\alpha_3\operatorname{sen}\theta_3 - b\omega_3^2\cos\theta_3 + c\alpha_4\operatorname{sen}\theta_4 + c\omega_4^2\cos\theta_4 = 0 \tag{7.11a}$$

parte imaginaria (componente y):

$$a\alpha_2\cos\theta_2 - a\omega_2^2\operatorname{sen}\theta_2 + b\alpha_3\cos\theta_3 - b\omega_3^2\operatorname{sen}\theta_3 - c\alpha_4\cos\theta_4 + c\omega_4^2\operatorname{sen}\theta_4 = 0 \tag{7.11b}$$

Observe que las *j* se han cancelado en la ecuación 7.11b. Las ecuaciones 7.11a y 7.11b se resuelven simultáneamente y se obtiene

$$\alpha_3 = \frac{CD - AF}{AE - BD} \tag{7.12a}$$

$$\alpha_4 = \frac{CE - BF}{AE - BD} \tag{7.12b}$$

donde:

$$\begin{aligned}A &= c\operatorname{sen}\theta_4\\B &= b\operatorname{sen}\theta_3\\C &= a\alpha_2\operatorname{sen}\theta_2 + a\omega_2^2\cos\theta_2 + b\omega_3^2\cos\theta_3 - c\omega_4^2\cos\theta_4\\D &= c\cos\theta_4\\E &= b\cos\theta_3\\F &= a\alpha_2\cos\theta_2 - a\omega_2^2\operatorname{sen}\theta_2 - b\omega_3^2\operatorname{sen}\theta_3 + c\omega_4^2\operatorname{sen}\theta_4\end{aligned} \tag{7.12c}$$

Una vez que se tienen soluciones para α_3 y α_4 se obtienen las aceleraciones lineales introduciendo la identidad de Euler en las ecuaciones 7.8b,

$$\mathbf{A}_A = a\alpha_2\ (-\operatorname{sen}\theta_2 + j\cos\theta_2) - a\omega_2^2\ (\cos\theta_2 + j\operatorname{sen}\theta_2) \tag{7.13a}$$

$$\mathbf{A}_{BA} = b\alpha_3\ (-\operatorname{sen}\theta_3 + j\cos\theta_3) - b\omega_3^2\ (\cos\theta_3 + j\operatorname{sen}\theta_3) \tag{7.13b}$$

$$\mathbf{A}_B = c\alpha_4\ (-\operatorname{sen}\theta_4 + j\cos\theta_4) - c\omega_4^2\ (\cos\theta_4 + j\operatorname{sen}\theta_4) \tag{7.13c}$$

donde los términos reales e imaginarios son las componentes *x* y y, respectivamente. Las ecuaciones 7.12 y 7.13 proporcionan una solución completa para las aceleraciones angulares de los eslabones, y las aceleraciones lineales de las juntas en el eslabonamiento de cuatro barras con juntas de pasador.

Eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera

La primera inversión de la manivela-corredera con corrimiento tiene la pieza corrediza en deslizamiento sobre el plano de fijación, como se muestra en la figura *l-6a).* Sus aceleraciones se evalúan en forma similar a como se hizo en el eslabonamiento de cuatro barras articulado.

Las ecuaciones de posición para la cadena de cuatro barras de manivela-corredera con corrimiento (inversión núm. 1) se dedujeron en la sección 4.6. El eslabonamiento se mostró en las figuras 4-9 y 6-21, y se indica de nuevo en la figura *l-6a),* en la cual también se muestra una aceleración angular de entrada α_2 aplicada al eslabón 2. Esta α_2 puede ser una aceleración de entrada variable en el tiempo. La ecuación de lazo vectorial 4.14 se repite aquí por conveniencia:

$$\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1 = 0 \tag{4.14a}$$

$$ae^{j\theta_2} - be^{j\theta_3} - ce^{j\theta_4} - de^{j\theta_1} = 0 \tag{4.14b}$$

En la sección 6.7 se diferenció la ecuación 4.14b con respecto al tiempo. Observe que a, b, c, θ_1 y θ_4 son constantes, pero la longitud del eslabón, d, varía con el tiempo en esta inversión.

$$ja\omega_2 e^{j\theta_2} - jb\omega_3 e^{j\theta_3} - \dot{d} = 0 \tag{6.20a}$$

El término *d con punto* es la velocidad lineal de la corredera. La ecuación 6.20a es la ecuación de diferencia de velocidad.

Ahora se derivará la ecuación 6.20a con respecto al tiempo para obtener una expresión de la aceleración en esta inversión del mecanismo de manivela-corredera:

$$(ja\alpha_2 e^{j\theta_2} + j^2 a\omega_2^2 e^{j\theta_2}) - (jb\alpha_3 e^{j\theta_3} + j^2 b\omega_3^2 e^{j\theta_3}) - \ddot{d} = 0 \tag{7.14a}$$

Simplificando:

$$(a\alpha_2 je^{j\theta_2} - a\omega_2^2 e^{j\theta_2}) - (b\alpha_3 je^{j\theta_3} - b\omega_3^2 e^{j\theta_3}) - \ddot{d} = 0 \tag{7.14b}$$

Observe que la ecuación 7.14 es nuevamente la ecuación de diferencia de aceleración:

$$\mathbf{A}_A - \mathbf{A}_{AB} - \mathbf{A}_B = 0$$

$$\mathbf{A}_{BA} = -\mathbf{A}_{AB} \tag{7.15a}$$

$$\mathbf{A}_B = \mathbf{A}_A + \mathbf{A}_{BA}$$

$$\mathbf{A}_A = \left(\mathbf{A}_A^t + \mathbf{A}_A^n\right) = \left(a\alpha_2 je^{j\theta_2} - a\omega_2^2 e^{j\theta_2}\right)$$

$$\mathbf{A}_{BA} = \left(\mathbf{A}_{BA}^t + \mathbf{A}_{BA}^n\right) = \left(b\alpha_3 je^{j\theta_3} - b\omega_3^2 e^{j\theta_3}\right) \tag{7.15b}$$

$$\mathbf{A}_B = \mathbf{A}_B^t = \ddot{d}$$

Observe que en este mecanismo el eslabón 4 está en traslación pura, por tanto, tiene ω_4 y α_4 a cero. La aceleración del eslabón 4 tiene sólo una componente "tangencial" de aceleración a lo largo de su trayectoria.

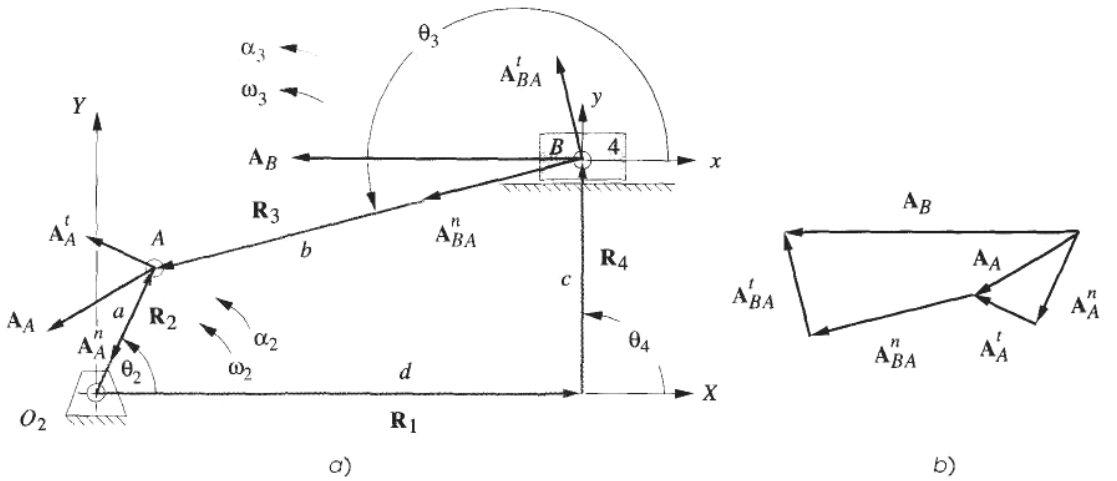


FIGURA 7-6

Lazo vectorial de posición para un eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera que muestra los vectores de aceleración

Las dos incógnitas en la ecuación vectorial 7.14 son la aceleración angular del eslabón 3, o sea α_3, y la aceleración lineal del eslabón 4, *d con dos puntos.* Para encontrarlas se sustituye la identidad de Euler,

$$a\alpha_2(-\operatorname{sen}\theta_2 + j\cos\theta_2) - a\omega_2^2(\cos\theta_2 + j\operatorname{sen}\theta_2)$$

$$-b\alpha_3(-\operatorname{sen}\theta_3 + j\cos\theta_3) + b\omega_3^2(\cos\theta_3 + j\operatorname{sen}\theta_3) - \ddot{d} = 0 \qquad (7.16a)$$

y se separan las componentes real *(x)* e imaginaria (y):

parte real (componente *x):*

$$-a\alpha_2\operatorname{sen}\theta_2 - a\omega_2^2\cos\theta_2 + b\alpha_3\operatorname{sen}\theta_3 + b\omega_3^2\cos\theta_3 - \ddot{d} = 0 \qquad (7.16b)$$

parte imaginaria (componente *y)*

$$a\alpha_2\cos\theta_2 - a\omega_2^2\operatorname{sen}\theta_2 - b\alpha_3\cos\theta_3 + b\omega_3^2\operatorname{sen}\theta_3 = 0 \qquad (7.16c)$$

La ecuación 7.16c se resuelve directamente para α_3 y el resultado se sustituye en la ecuación 7.16b para encontrar *d con dos puntos.*

$$\alpha_3 = \frac{a\alpha_2\cos\theta_2 - a\omega_2^2\operatorname{sen}\theta_2 + b\omega_3^2\operatorname{sen}\theta_3}{b\cos\theta_3} \qquad (7.16d)$$

$$\ddot{d} = -a\alpha_2\operatorname{sen}\theta_2 - a\omega_2^2\cos\theta_2 + b\alpha_3\operatorname{sen}\theta_3 + b\omega_3^2\cos\theta_3 \qquad (7.16e)$$

Las otras aceleraciones lineales se determinan a partir de la ecuación 7.15b y se muestran en el diagrama vectorial de la figura *7-6b).*

Aceleración de Coriolis

Los ejemplos usados para el análisis de aceleración anterior han implicado sólo eslabonamientos con juntas de pasador, o la inversión del de manivela-corredera en donde la pieza corrediza no tiene rotación. Cuando una junta de deslizamiento está presente en un eslabón rotatorio habrá una componente adicional de aceleración llamada **componente de Coriolis,** denominada así por su descubridor. La figura *7-7 a)* muestra un sistema simple de dos eslabones que consta de un eslabón con ranura radial y una corredera que se puede deslizar dentro de dicha abertura.

La localización instantánea de la pieza corrediza está definida por un vector de posición $(\mathbf{R}_P)$ referido al origen global en el centro del eslabón. *Este vector está girando y cambia de longitud cuando el sistema se mueve.* Como se muestra, este es un sistema con dos grados de libertad. Sus **dos entradas** al sistema son la aceleración angular (α) del eslabón y la velocidad lineal relativa de deslizamiento $(\mathbf{V}_{Pdesl})$ de la corredera con respecto al disco. La velocidad angular ω es resultado de la integración con respecto al tiempo de la aceleración angular. La situación mostrada, con una α en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y una ω en el sentido de las manecillas del reloj, implica que en un tiempo anterior el eslabón se había acelerado hasta obtener velocidad angular en el sentido de las manecillas del reloj, y ahora es desacelerado. La componente de transmisión de velocidad $(\mathbf{V}_{Ptrans})$ es resultado de la ω del eslabón que actúa en el radio $\mathbf{R}_P$, cuya magnitud es *p.*

En la figura 7-7 se muestra la situación para un instante dado. Sin embargo, las ecuaciones por deducir serán válidas para cualquier tiempo. Se desea determinar la aceleración en el centro de la corredera *(P)* bajo este movimiento combinado de rotación y deslizamiento. Para hacer esto primero se escribe la expresión del vector de posición $\mathbf{R}_P$, en el cual se localiza el punto *P:*

$$\mathbf{R}_P = pe^{j\theta_2} \tag{7.17}$$

Observe que hay dos funciones del tiempo en la ecuación 7.17, p y θ. Cuando se deriva con respecto al tiempo se obtienen dos términos en la expresión de velocidad:

$$\mathbf{V}_P = p\omega_2 je^{j\theta_2} + \dot{p}e^{j\theta_2} \tag{7.18a}$$

Que son las componentes de transmisión y de deslizamiento de la velocidad, es decir:

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_{Ptrans} + \mathbf{V}_{Pdesl} \tag{7.18b}$$

El término $p\omega$ es la componente de transmisión, y está dirigida 90° hacia el eje de deslizamiento, el cual, en este ejemplo, coincide con el vector de posición $\mathbf{R}_P$. El término *p con punto* es la **componente de deslizamiento** y está dirigida a lo largo del **eje de deslizamiento** en la misma dirección que el vector de posición en este ejemplo. Su suma vectorial es $\mathbf{V}_P$, como se muestra en la figura *7-7 a).*

Para obtener una expresión de la aceleración se debe derivar la ecuación 7.18 con respecto al tiempo. Observe que la componente de transmisión tiene **tres** funciones del tiempo: p, ω y θ. La regla de la cadena producirá tres términos para ese único término. La componente de deslizamiento de la velocidad contiene dos funciones de tiempo, p y θ, lo que da dos términos en la derivada para un total de cinco términos, dos de los cuales resultan ser iguales:

$$\mathbf{A}_P = \left(p\alpha_2 je^{j\theta_2} + p\omega_2^2 j^2 e^{j\theta_2} + \dot{p}\omega_2 je^{j\theta_2}\right) + \left(\dot{p}\omega_2 je^{j\theta_2} + \ddot{p}e^{j\theta_2}\right) \tag{7.19a}$$

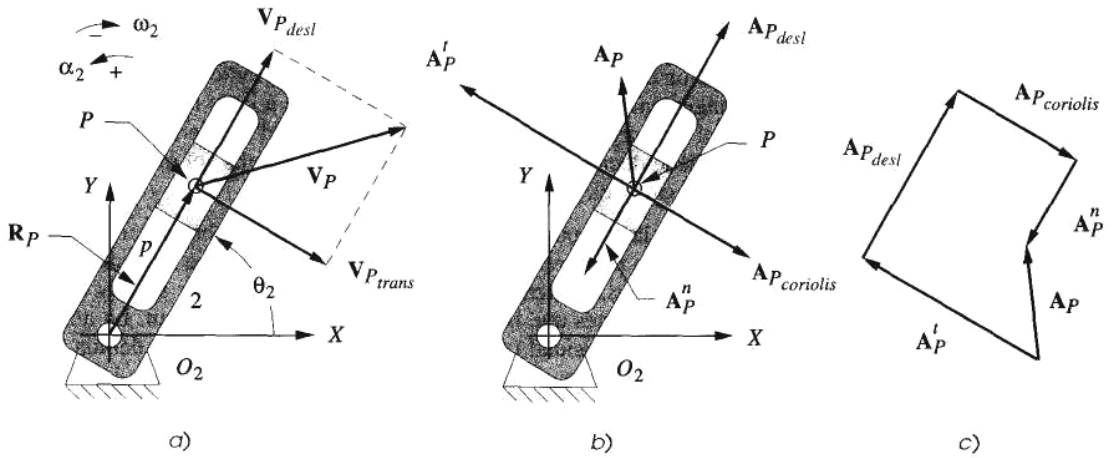


FIGURA 7-7

Componente de Coriolis de la aceleración mostrada en un sistema con una α_2 positiva (en SCMR) y una ω_2 negativa (en SMR)

7

Simplificando y agrupando términos:

$$\mathbf{A}_P = p\alpha_2 je^{j\theta_2} - p\omega_2^2 e^{j\theta_2} + 2\dot{p}\omega_2 je^{j\theta_2} + \ddot{p}e^{j\theta_2} \tag{7.19b}$$

Estos términos representan las siguientes componentes:

$$\mathbf{A}_P = \mathbf{A}_{P_{tangencial}} + \mathbf{A}_{P_{normal}} + \mathbf{A}_{P_{coriolis}} + \mathbf{A}_{P_{desl}} \tag{7.19c}$$

Observe que el término de Coriolis ha aparecido en la expresión de la aceleración como resultado de la diferenciación, simplemente porque la longitud del vector *p* es una función del tiempo. La magnitud de la componente de Coriolis es dos veces el producto de la velocidad de deslizamiento (ecuación 7.18) y la velocidad angular del eslabón que contiene la ranura de la corredera. Su dirección ha girado 90° desde la del vector de posición original $\mathbf{R}_P$, ya sea en sentido de las manecillas del reloj, o en sentido contrario, dependiendo del sentido de w.* (Observe que se elige alinear el vector de posición $\mathbf{R}_P$ con el eje de deslizamiento en la figura 7-7, lo cual siempre puede realizarse sin considerar la ubicación del centro de rotación. Véase también la figura 7-6, donde $\mathbf{R}_1$ está alineada con el eje de deslizamiento.) Las cuatro componentes de la ecuación 7.19 se muestran actuando en el punto *P* en la figura *7-7b).* La aceleración total $\mathbf{A}_P$ es la suma vectorial de los cuatro términos como se muestra en la figura *7-7 c).* Observe que el término de aceleración normal de la ecuación 7.19b tiene signo negativo, así que se convierte en una sustracción cuando se sustituye en la ecuación 7.19c.

Esta componente de Coriolis de la aceleración estará presente siempre que haya una velocidad de deslizamiento asociada con cualquier elemento que también tenga una velocidad angular. En ausencia de uno u otro de estos dos factores, la componente de Coriolis será nula. Quizá ha experimentado ya la citada aceleración complementaria si alguna vez ha subido a un carrusel (o tiovivo). Si se intenta caminar radialmente desde el exterior hacia el interior (o viceversa) mientras el carrusel gira, la fuerza inercial empuja hacia un

* Este enfoque funciona en el caso de 2-D. La aceleración de Coriolis es el producto cruz de 2 w y la veocidad de deslizamiento. La operación del producto cruz definirá su magnitud, signo y dirección en el caso 3-D.

lado debido a la aceleración de Coriolis. Usted estaba en la *corredera* de la figura 7-7 y su *velocidad de deslizamiento,* combinada con la rotación del Carrusel, creó la componente de aceleración de Coriolis. Cuando camina desde un radio grande hacia uno menor, su velocidad tangencial tiene que cambiar para adaptarse a la de la nueva ubicación de su pie en el carrusel giratorio. Cualquier cambio de velocidad requiere una aceleración para su realización. Puede decirse que fue el "fantasma de Coriolis" el que lo empujó lateralmente a bordo del carrusel.

Otro ejemplo de la componente de Coriolis es su efecto sobre sistemas meteorológicos. Las grandes masas móviles de aire que se presentan en la baja atmósfera de la Tierra, tales como los huracanes, abarcan un área suficiente para quedar sujetas a velocidades significativamente diferentes que hay en sus extremidades norte y sur. La atmósfera gira junto con la Tierra. La velocidad tangencial de la superficie terrestre debida a su velocidad angular, varía desde cero en los polos hasta un máximo de unas 1 000 mi/h en el ecuador. Los vientos de un sistema ciclónico son atraídos hacia la baja presión en su centro. Estos vientos tienen una velocidad de deslizamiento con respecto a la superficie, que cuando se combinan con la ω de la Tierra crean una componente de aceleración de Coriolis sobre las masas de aire en movimiento. Esta aceleración de Coriolis origina que el aire que irrumpe hacia adentro gire alrededor del centro, u "ojo" del ciclón o huracán. Esta rotación será en sentido contrario al de las manecillas del reloj en el hemisferio norte, y en el sentido de las manecillas del reloj en el hemisferio sur. El movimiento de todo el sistema ciclónico desde el sur hacia el norte también crea una componente de Coriolis, la cual tenderá a desviar hacia el este la ruta de la tormenta, aunque este efecto con frecuencia es contrarrestado por fuerzas debidas a otras grandes masas de aire como los sistemas de alta presión, los cuales pueden desviar un ciclón o tormenta tropical. Estos factores complejos dificultan predecir la verdadera trayectoria de un huracán.

Observe que en la solución analítica presentada aquí, la componente de Coriolis se toma en cuenta automáticamente en tanto se efectúen de manera correcta las derivaciones. Sin embargo, cuando se efectúa un análisis gráfico de aceleración hay que estar alerta para reconocer la presencia de tal componente, calcularla e incluirla en los diagramas vectoriales cuando sus dos componentes $\mathbf{V}_{desl}$ y ω son ambas distintas de cero.

Eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera invertido

Las ecuaciones de posición para este eslabonamiento se dedujeron en la sección 4.7. El eslabonamiento se mostró en las figuras 4-10 y 6-22, y se ilustra de nuevo en la figura 7-8a, en la que también se indica una aceleración angular de entrada α_2 aplicada al eslabón 2. Esta α_2 puede variar con el tiempo. Las ecuaciones de lazo vectorial 4.14 son válidas también para este eslabonamiento.

Todos los eslabonamientos de corredera tendrán por lo menos un eslabón cuya longitud efectiva entre juntas varíe conforme se mueve el eslabonamiento. En esta inversión la longitud del eslabón 3 entre los puntos *A* y *B,* designada como *b,* cambiará cuando pase por la corredera en el eslabón 4. En la sección 6.7 se obtuvo una expresión para la velocidad, al derivar la ecuación 4.14b con respecto al tiempo, observando que *a, c, d* y θ_1 son constantes, y *b,* θ_3 y θ_4 varían con el tiempo.

$$ja\omega_2 e^{j\theta_2} - jb\omega_3 e^{j\theta_3} - \dot{b}e^{j\theta_3} - jc\omega_4 e^{j\theta_4} = 0 \qquad (6.24)$$

Al derivar esta ecuación con respecto al tiempo se obtendrá una expresión para las aceleraciones en esta inversión del mecanismo de manivela-corredera:

$$(ja\alpha_2 e^{j\theta_2} + j^2 a\omega_2^2 e^{j\theta_2}) - (jb\alpha_3 e^{j\theta_3} + j^2 b\omega_3^2 e^{j\theta_3} + j\dot{b}\omega_3 e^{j\theta_3})$$

$$-(\ddot{b}e^{j\theta_3} + j\dot{b}\omega_3 e^{j\theta_3}) - (jc\alpha_4 e^{j\theta_4} + j^2 c\omega_4^2 e^{j\theta_4}) = 0 \qquad (7.20a)$$

Simplificando y agrupando términos:

$$(a\alpha_2 je^{j\theta_2} - a\omega_2^2 e^{j\theta_2}) - (b\alpha_3 je^{j\theta_3} - b\omega_3^2 e^{j\theta_3} + 2\dot{b}\omega_3 je^{j\theta_3} + \ddot{b}e^{j\theta_3})$$

$$-(c\alpha_4 je^{j\theta_4} - c\omega_4^2 e^{j\theta_4}) = 0 \qquad (7.20b)$$

La ecuación 7.20 es, de hecho, la ecuación de diferencia de aceleración (ec. 7.4), y puede escribirse en esa notación, como se muestra en la ecuación 7.21.

$$\mathbf{A}_A - \mathbf{A}_{AB} - \mathbf{A}_B = 0$$

pero:
$$\mathbf{A}_{BA} = -\mathbf{A}_{AB} \qquad (7.21a)$$

y:
$$\mathbf{A}_B = \mathbf{A}_A + \mathbf{A}_{BA}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_A &= \mathbf{A}_{A_{tangencial}} + \mathbf{A}_{A_{normal}} \\ \mathbf{A}_{AB} &= \mathbf{A}_{AB_{tangencial}} + \mathbf{A}_{AB_{normal}} + \mathbf{A}_{AB_{coriolis}} + \mathbf{A}_{AB_{desl}} \\ \mathbf{A}_B &= \mathbf{A}_{B_{tangencial}} + \mathbf{A}_{B_{normal}} \end{aligned} \qquad (7.21b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{A_{tangencial}} &= a\alpha_2 je^{j\theta_2} & \mathbf{A}_{A_{normal}} &= -a\omega_2^2 e^{j\theta_2} \\ \mathbf{A}_{B_{tangencial}} &= c\alpha_4 je^{j\theta_4} & \mathbf{A}_{B_{normal}} &= -c\omega_4^2 e^{j\theta_4} \\ \mathbf{A}_{AB_{tangencial}} &= b\alpha_3 je^{j\theta_3} & \mathbf{A}_{AB_{normal}} &= -b\omega_3^2 e^{j\theta_3} \\ \mathbf{A}_{AB_{coriolis}} &= 2\dot{b}\omega_3 je^{j\theta_3} & \mathbf{A}_{AB_{desl}} &= \ddot{b}e^{j\theta_3} \end{aligned} \qquad (7.21c)$$

Como este eslabón deslizante también tiene velocidad angular habrá una componente de Coriolis distinta de cero de la aceleración en el punto *B,* que es el término *b con dos puntos* en la ecuación 7.20. Como antes de efectuar este análisis de aceleración se realizó un análisis completo de velocidad, la componente de Coriolis se calcula fácilmente en este punto, ya que sí se conoce ω y $\mathbf{V}_{desl}$ del análisis de velocidad.

El término *b con dos puntos* en la ecuación 7.20 es la *componente de deslizamiento de la aceleración.* Ésta es una de las variables por determinar en este análisis de aceleración. Otra variable por evaluar es α_4, la aceleración angular del eslabón 4. Observe, sin embargo, que también se tiene una incógnita en α_3, la aceleración angular del eslabón 3. Esto da un total de tres incógnitas. La ecuación 7.20 sólo se puede resolver para dos incógnitas. Así que se requiere otra ecuación para resolver el sistema. En la figura 7-8 hay una relación fija entre los ángulos θ_3 y θ_4, indicada como γ, que se definió en la ecuación 4.18, la cual se repite aquí:

$$\theta_3 = \theta_4 \pm \gamma \qquad (4.18)$$

Derivando dos veces con respecto al tiempo se obtiene:

$$\omega_3 = \omega_4; \qquad \alpha_3 = \alpha_4 \qquad (7.22)$$

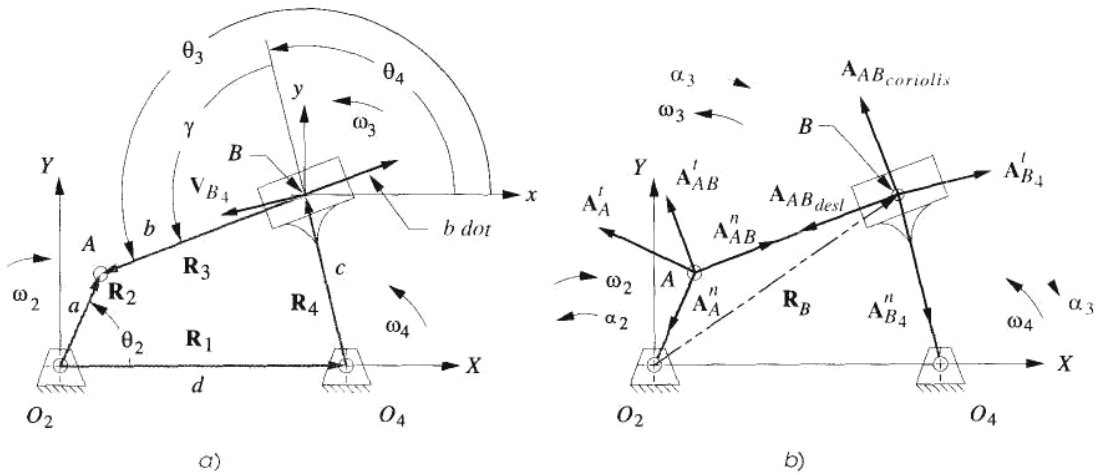


FIGURA 7-8

Análisis de aceleración de inversión núm. 3 del eslabonamiento de manivela-corredera de cuatro barras manejado con una α_2 positiva (en SCMR) y una ω_2 negativa (en SMR)

Se desea resolver la ecuación 7.20 para obtener expresiones en esta forma:

$$\alpha_3 = \alpha_4 = f(a, b, \dot{b}, c, d, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \alpha_2) \tag{7.23a}$$

$$\frac{d^2b}{dt^2} = \ddot{b} = g\left(a, b, \dot{b}, c, d, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \alpha_2\right) \tag{7.23b}$$

Sustituyendo la identidad de Euler (ec. 4.4a) en la ecuación 7.20 se obtiene:

$$\begin{aligned} &a\alpha_2 j(\cos\theta_2 + j\,\text{sen}\,\theta_2) - a\omega_2^2(\cos\theta_2 + j\,\text{sen}\,\theta_2) \\ &-b\alpha_3 j(\cos\theta_3 + j\,\text{sen}\,\theta_3) + b\omega_3^2(\cos\theta_3 + j\,\text{sen}\,\theta_3) \\ &-2\dot{b}\omega_3 j(\cos\theta_3 + j\,\text{sen}\,\theta_3) - \ddot{b}(\cos\theta_3 + j\,\text{sen}\,\theta_3) \\ &-c\alpha_4 j(\cos\theta_4 + j\,\text{sen}\,\theta_4) + c\omega_4^2(\cos\theta_4 + j\,\text{sen}\,\theta_4) = 0 \end{aligned} \tag{7.24a}$$

Multiplique por el operador j y sustituya α_3 por α_4, de la ecuación 7.22:

$$\begin{aligned} &a\alpha_2(-\text{sen}\,\theta_2 + j\cos\theta_2) - a\omega_2^2(\cos\theta_2 + j\,\text{sen}\,\theta_2) \\ &-b\alpha_4(-\text{sen}\,\theta_3 + j\cos\theta_3) + b\omega_3^2(\cos\theta_3 + j\,\text{sen}\,\theta_3) \\ &-2\dot{b}\omega_3(-\text{sen}\,\theta_3 + j\cos\theta_3) - \ddot{b}(\cos\theta_3 + j\,\text{sen}\,\theta_3) \\ &-c\alpha_4(-\text{sen}\,\theta_4 + j\cos\theta_4) + c\omega_4^2(\cos\theta_4 + j\,\text{sen}\,\theta_4) = 0 \end{aligned} \tag{7.24b}$$

Ahora se puede separar esta ecuación vectorial 7.24b en sus dos componentes agrupando todos los términos reales e imaginarios por separado:

parte real (componente x):

$$-a\alpha_2 \operatorname{sen}\theta_2 - a\omega_2^2 \cos\theta_2 + b\alpha_4 \operatorname{sen}\theta_3 + b\omega_3^2 \cos\theta_3 + 2\dot{b}\omega_3 \operatorname{sen}\theta_3 - \ddot{b} \cos\theta_3 + c\alpha_4 \operatorname{sen}\theta_4 + c\omega_4^2 \cos\theta_4 = 0 \tag{7.25a}$$

parte imaginaria (componente y):

$$a\alpha_2 \cos\theta_2 - a\omega_2^2 \operatorname{sen}\theta_2 - b\alpha_4 \cos\theta_3 + b\omega_3^2 \operatorname{sen}\theta_3 - 2\dot{b}\omega_3 \cos\theta_3 - \ddot{b} \operatorname{sen}\theta_3 + c\alpha_4 \cos\theta_4 + c\omega_4^2 \operatorname{sen}\theta_4 = 0 \tag{7.25b}$$

Observe que las j se han eliminado en la ecuación 7.25b. Las ecuaciones 7.25 se resuelven simultáneamente para las dos incógnitas α_4 y *b con dos puntos.* La solución es:

$$\alpha_4 = \frac{a\left[\alpha_2 \cos(\theta_3 - \theta_2) + \omega_2^2 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2)\right] + c\omega_4^2 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3) - 2\dot{b}\omega_3}{b + c\cos(\theta_3 - \theta_4)} \tag{7.26.a}$$

$$\ddot{b} = -\frac{\left\{\begin{array}{c} a\omega_2^2\left[b\cos(\theta_3 - \theta_2) + c\cos(\theta_4 - \theta_2)\right] + a\alpha_2\left[b\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_3) - c\operatorname{sen}(\theta_4 + \theta_2)\right] \\ +2\dot{b}c\omega_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3) - \omega_4^2\left[b^2 + c^2 + 2bc\cos(\theta_4 - \theta_3)\right] \end{array}\right\}}{b + c\cos(\theta_3 - \theta_4)} \tag{7.26b}$$

La ecuación 7.26a proporciona la **aceleración angular** del eslabón 4. La ecuación 7.26b proporciona la **aceleración de deslizamiento** en el punto *B.* Una vez que se determinan estas variables se obtienen las aceleraciones lineales en los puntos A y *B* del eslabonamiento de la figura 7-8 sustituyendo la identidad de Euler en las ecuaciones 7-21.

$$\mathbf{A}_A = a\alpha_2(-\operatorname{sen}\theta_2 + j\cos\theta_2) - a\omega_2^2(\cos\theta_2 + j\operatorname{sen}\theta_2) \tag{7.27a}$$

$$\mathbf{A}_{BA} = b\alpha_3(\operatorname{sen}\theta_3 - j\cos\theta_3) + b\omega_3^2(\cos\theta_3 + j\operatorname{sen}\theta_3) + 2\dot{b}\omega_3(\operatorname{sen}\theta_3 - j\cos\theta_3) - \ddot{b}(\cos\theta_3 + j\operatorname{sen}\theta_3) \tag{7.27b}$$

$$\mathbf{A}_B = -c\alpha_4(\operatorname{sen}\theta_4 - j\cos\theta_4) - c\omega_4^2(\cos\theta_4 + j\operatorname{sen}\theta_4) \tag{7.27c}$$

Esas componentes de estos vectores se muestran en la figura 7-8¿>).

7.4 ANÁLISIS DE LA ACELERACIÓN DEL ESLABONAMIENTO DE CINCO BARRAS CON ENGRANAJE

La ecuación de velocidad para el mecanismo de cinco barras con engranaje se dedujo en la sección 6.8 y se repite aquí. Véase la notación en la figura P7-4.

$$a\omega_2 je^{j\theta_2} + b\omega_3 je^{j\theta_3} - c\omega_4 je^{j\theta_4} - d\omega_5 je^{j\theta_5} = 0 \tag{6.32a}$$

Derivando con respecto al tiempo se obtiene una expresión para la aceleración.

$$(a\alpha_2 je^{j\theta_2} - a\omega_2^2 e^{j\theta_2}) + (b\alpha_3 je^{j\theta_3} - b\omega_3^2 e^{j\theta_3}) - (c\alpha_4 je^{j\theta_4} - c\omega_4^2 e^{j\theta_4}) - (d\alpha_5 je^{j\theta_5} - d\omega_5^2 e^{j\theta_5}) = 0 \tag{7.28a}$$

Sustituyendo las equivalentes de Euler:

$$a\alpha_2(-\text{sen}\,\theta_2 + j\cos\theta_2) - a\omega_2^2(\cos\theta_2 + j\,\text{sen}\,\theta_2)$$
$$+ b\alpha_3(-\text{sen}\,\theta_3 + j\cos\theta_3) - b\omega_3^2(\cos\theta_3 + j\,\text{sen}\,\theta_3)$$
$$- c\alpha_4(-\text{sen}\,\theta_4 + j\cos\theta_4) + c\omega_4^2(\cos\theta_4 + j\,\text{sen}\,\theta_4)$$
$$- d\alpha_5(-\text{sen}\,\theta_5 + j\cos\theta_5) + d\omega_5^2(\cos\theta_5 + j\,\text{sen}\,\theta_5) = 0 \qquad (7.28b)$$

Observe que el ángulo θ_5 está definido en función de θ_2 la relación de engranes λ y el ángulo de fase ϕ. Estas relaciones y sus derivadas son

$$\theta_5 = \lambda\theta_2 + \phi; \qquad \omega_5 = \lambda\omega_2; \qquad \alpha_5 = \lambda\alpha_2 \qquad (7.28c)$$

Puesto que se debe realizar un análisis completo de posición y velocidad antes de un análisis de aceleración, se supondrá que se han obtenido los valores de θ_5 y ω_5, y ello dejará estas ecuaciones en términos de θ_5, ω_5 y α_5.

Al separar los términos reales e imaginarios en la ecuación 7.28b queda:

reales:

$$-a\alpha_2\,\text{sen}\,\theta_2 - a\omega_2^2\cos\theta_2 - b\alpha_3\,\text{sen}\,\theta_3 - b\omega_3^2\cos\theta_3$$
$$+ c\alpha_4\,\text{sen}\,\theta_4 + c\omega_4^2\cos\theta_4 + d\alpha_5\,\text{sen}\,\theta_5 + d\omega_5^2\cos\theta_5 = 0 \qquad (7.28d)$$

imaginarios:

$$a\alpha_2\cos\theta_2 - a\omega_2^2\,\text{sen}\,\theta_2 + b\alpha_3\cos\theta_3 - b\omega_3^2\,\text{sen}\,\theta_3$$
$$- c\alpha_4\cos\theta_4 + c\omega_4^2\,\text{sen}\,\theta_4 - d\alpha_5\cos\theta_5 + d\omega_5^2\,\text{sen}\,\theta_5 = 0 \qquad (7.28e)$$

Las únicas dos incógnitas son α_3 y α_4. La ecuación 7.28d o la 7.28e se resuelven para determinar una incógnita y el resultado se sustituye en la otra. La solución para α_3 es:

$$\alpha_3 = \frac{\begin{bmatrix} -a\alpha_2\,\text{sen}(\theta_2 - \theta_4) - a\omega_2^2\cos(\theta_2 - \theta_4) \\ -b\omega_3^2\cos(\theta_3 - \theta_4) + d\omega_5^2\cos(\theta_5 - \theta_4) \\ + d\alpha_5\,\text{sen}(\theta_5 - \theta_4) + c\omega_4^2 \end{bmatrix}}{b\,\text{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \qquad (7.29a)$$

y el ángulo α_4 es:

$$\alpha_4 = \frac{\begin{bmatrix} a\alpha_2\,\text{sen}(\theta_2 - \theta_3) + a\omega_2^2\cos(\theta_2 - \theta_3) \\ -c\omega_4^2\cos(\theta_3 - \theta_4) - d\omega_5^2\cos(\theta_3 - \theta_5) \\ + d\alpha_5\,\text{sen}(\theta_3 - \theta_5) + b\omega_3^2 \end{bmatrix}}{c\,\text{sen}(\theta_4 - \theta_3)} \qquad (7.29b)$$

Con todos los ángulos de eslabón, velocidades angulares y aceleraciones angulares conocidas, las aceleraciones lineales para las juntas de pasador se pueden obtener de:

$$\mathbf{A}_A = a\alpha_2(-\text{sen}\,\theta_2 + j\cos\theta_2) - a\omega_2^2(\cos\theta_2 + j\,\text{sen}\,\theta_2) \qquad (7.29c)$$

$$\mathbf{A}_{BA} = b\alpha_3(-\text{sen}\,\theta_3 + j\cos\theta_3) - b\omega_3^2(\cos\theta_3 + j\,\text{sen}\,\theta_3) \tag{7.29d}$$

$$\mathbf{A}_C = c\alpha_5(-\text{sen}\,\theta_5 + j\cos\theta_5) - c\omega_5^2(\cos\theta_5 + j\,\text{sen}\,\theta_5) \tag{7.29e}$$

$$\mathbf{A}_B = \mathbf{A}_A + \mathbf{A}_{BA} \tag{7.29f}$$

7.5 ACELERACIÓN DE UN PUNTO CUALQUIERA EN UN ESLABONAMIENTO

Una vez que se obtienen las aceleraciones angulares de todos los eslabonamientos es fácil definir y calcular la aceleración de *cualquier punto en un eslabón* para una posición cualquiera de entrada del eslabonamiento. En la figura 7-9 se muestra el eslabonamiento de cuatro barras con su acoplador, eslabón 3, ampliado para contener un punto de acoplador *P*. La manivela y el balancín también se han ampliado para mostrar los puntos *S* y *U* que podrían representar los centros de gravedad de esos eslabones. Se desea desarrollar expresiones algebraicas para las aceleraciones de estos (o cualesquiera) puntos en los eslabones.

Para obtener la aceleración del punto *S* dibuje el vector de posición desde el pivote fijo O_2 hasta el punto *S*. Este vecto $\mathbf{R}_{SO_2}$ forma un ángulo δ_2 con el vector $\mathbf{R}_{AO_2}$. Este ángulo δ_2 se define completamente por la configuración del eslabón 2 y es constante. El vector de posición para el punto *S* es entonces

$$\mathbf{R}_{SO_2} = \mathbf{R}_S = se^{j(\theta_2 + \delta_2)} = s[\cos(\theta_2 + \delta_2) + j\ \text{sen}(\theta_2 + \delta_2)] \tag{4.25}$$

Este vector de posición se derivó en la sección 6.9 para obtener la velocidad de dicho punto. La ecuación se repite en seguida por conveniencia.

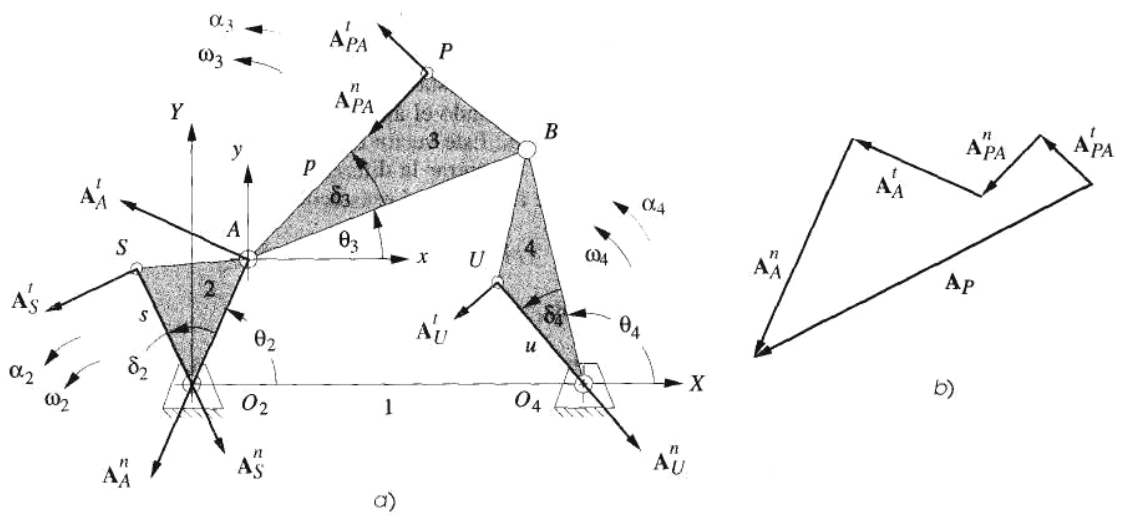


FIGURA 7-9
Determinación de la aceleración de cualquier punto sobre cualquier eslabón

$$\mathbf{V}_S = jse^{j(\theta_2+\delta_2)}\omega_2 = s\omega_2[-\text{sen}(\theta_2+\delta_2)+j\cos(\theta_2+\delta_2)] \tag{6.34}$$

Se puede derivar de nuevo con respecto al tiempo para encontrar la aceleración del punto *S*.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_S &= s\alpha_2 je^{j(\theta_2+\delta_2)} - s\omega_2^2 e^{j(\theta_2+\delta_2)} \\ &= s\alpha_2[-\text{sen}(\theta_2+\delta_2)+j\cos(\theta_2+\delta_2)] \\ &\quad -s\omega_2^2[\cos(\theta_2+\delta_2)+j\,\text{sen}(\theta_2+\delta_2)]\end{aligned} \tag{7.30}$$

La posición del punto *U* en el eslabón 4 se obtiene en la misma forma, por medio del ángulo δ_4, que es un corrimiento angular constante dentro del eslabón. La expresión es:

$$\mathbf{R}_{UO_4} = ue^{j(\theta_4+\delta_4)} = u[\cos(\theta_4+\delta_4)+j\,\text{sen}(\theta_4+\delta_4)] \tag{4.26}$$

Este vector de posición se derivó también en la sección 6.9 para obtener la velocidad de aquel punto. La ecuación se presenta de nuevo aquí por conveniencia:

$$\mathbf{V}_U = jue^{j(\theta_4+\delta_4)}\omega_4 = u\omega_4[-\text{sen}(\theta_4+\delta_4)+j\cos(\theta_4+\delta_4)] \tag{6.35}$$

Se deriva otra vez respecto al tiempo para hallar la aceleración del punto *U*.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_U &= u\alpha_4 je^{j(\theta_4+\delta_4)} - u\omega_4^2 e^{j(\theta_4+\delta_4)} \\ &= u\alpha_4[-\text{sen}(\theta_4+\delta_4)+j\cos(\theta_4+\delta_4)] \\ &\quad -u\omega_4^2[\cos(\theta_4+\delta_4)+j\,\text{sen}(\theta_4+\delta_4)]\end{aligned} \tag{7.31}$$

La aceleración del punto *P* en el eslabón 3 se obtiene de la suma de dos vectores de aceleración como $\mathbf{A}_A$ y $\mathbf{A}_{PA}$. El vector $\mathbf{A}_A$ ya se definió a partir del análisis de las aceleraciones del eslabón. $\mathbf{A}_{PA}$ es la diferencia de aceleración del punto *P* con respecto al punto A. El punto A se elige como el punto de referencia, ya que el ángulo θ_3 está definido en un sistema coordenado local cuyo origen está en A. El vector de posición $\mathbf{R}_{PA}$ se define en la misma forma que $\mathbf{R}_U$, o bien $\mathbf{R}_S$, usando el ángulo de corrimiento interno del eslabón, δ_3, y el ángulo del eslabón 3, o sea θ_3. Este vector de posición se analizó con anterioridad y se derivó en la sección 6.9 para encontrar la diferencia de velocidad de ese punto con respecto a A. Por conveniencia se repiten aquí esas ecuaciones.

$$\mathbf{R}_{PA} = pe^{j(\theta_3+\delta_3)} = p[\cos(\theta_3+\delta_3)+j\,\text{sen}(\theta_3+\delta_3)] \tag{4.27a}$$

$$\mathbf{R}_P = \mathbf{R}_A + \mathbf{R}_{PA} \tag{4.27b}$$

$$\mathbf{V}_{PA} = jpe^{j(\theta_3+\delta_3)}\omega_3 = p\omega_3[-\text{sen}(\theta_3+\delta_3)+j\cos(\theta_3+\delta_3)] \tag{6.36a}$$

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_{PA} \tag{6.36b}$$

Se deriva de nuevo la ecuación 6.36 con respecto al tiempo, para hallar $\mathbf{A}_{PA}$, la aceleración del punto *P* con respecto a A. Este vector se suma luego al vector $\mathbf{A}_A$, ya obtenido, para definir la aceleración absoluta $\mathbf{A}_P$ del punto *P*.

$$\mathbf{A}_P = \mathbf{A}_A + \mathbf{A}_{PA} \tag{7.32a}$$

donde:

$$\mathbf{A}_{PA} = p\alpha_3 j e^{j(\theta_3+\delta_3)} - p\omega_3^2 e^{j(\theta_3+\delta_3)}$$

$$= p\alpha_3[-\text{sen}(\theta_3 + \delta_3) + j\cos(\theta_3 + \delta_3)] \qquad (7.32b)$$

$$-p\omega_3^2[\cos(\theta_3 + \delta_3) + j\,\text{sen}(\theta_3 + \delta_3)]$$

Compare la ecuación 7.32 con la 7.4. De nuevo se trata de la ecuación de diferencia de aceleración. Observe que esta ecuación se aplica a **cualquier punto** en **cualquier eslabón,** en una posición para la cual están definidas las posiciones y las velocidades. Es una solución general para cualquier cuerpo **rígido.**

7.6 TOLERANCIA HUMANA A LA ACELERACIÓN

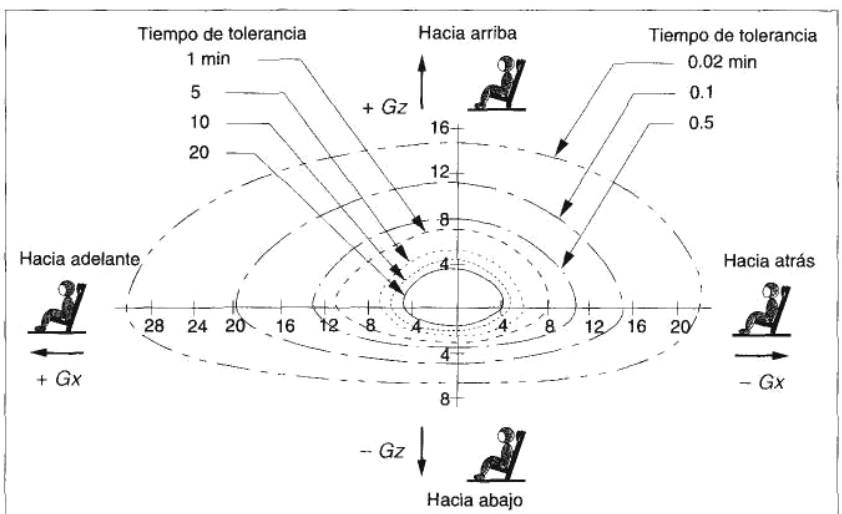
Es interesante observar que el cuerpo humano no percibe mucho la velocidad, excepto con los ojos, pero es muy sensible a la aceleración. Al viajar en automóvil, a la luz del día, se puede ver cómo el paisaje se desplaza hacia atrás, y se tiene así la sensación de movimiento. Pero al ir en la noche a bordo de un avión comercial a una velocidad constante de 500 mi/h, no se tiene sensación de movimiento mientras el vuelo sea tranquilo. Lo que se percibe son los cambios en la velocidad, debidos a turbulencias atmosféricas al despegar o al aterrizar. Los canales semicirculares en el oído interno son acelerómetros sensibles que nos informan acerca de las aceleraciones que experimentamos. Sin duda también se ha experimentado la sensación de aceleración cuando se va en un ascensor, y al arrancar, detenerse o virar en un automóvil. Las aceleraciones producen fuerzas dinámicas en los sistemas físicos, como lo expresa la segunda ley de Newton: F = *m* a. Para una masa constante la fuerza es proporcional a la aceleración. Las fuerzas dinámicas producidas dentro del cuerpo humano en respuesta a la aceleración pueden ser dañinas si son excesivas. El cuerpo humano no es, después de todo, rígido. Es un saco flexiblemente acoplado, con huesos, tejidos y agua, la mayor parte movibles por completo internamente. Las aceleraciones a lo largo del cuerpo, hacia la cabeza o hacia los pies, tenderán a retirar o acumular sangre en el cerebro, ya que este líquido responde a la ley de Newton, y se mueve efectivamente dentro del cuerpo en dirección contraria a la de la aceleración aplicada, se retrasa con respecto al movimiento del esqueleto. La escasez de sangre proporcionada al cerebro causa desmayo, y su afluencia en exceso trastorna la visión (produce enrojecimiento). Uno u otro efecto dan por resultado la muerte si se mantienen por un tiempo prolongado.

En Estados Unidos las fuerzas armadas y la NASA han realizado una amplia investigación para determinar los límites de la tolerancia humana a las aceleraciones sostenidas, aplicadas en diversas direcciones. En la figura 7-10 se muestran datos desarrollados a partir de tales pruebas.[111] Las unidades de la aceleración lineal están definidas en la tabla 1-4 como: pulg/s^2, pies/s^2, o bien m/s^2. Otra unidad común para la aceleración es la *"g"*, que se define como la aceleración debida a la gravedad, la cual en la Tierra (a nivel del mar) es aproximadamente igual a 386.4 pulg/s^2, 32.2 pies/s^2, o 9.8 m/s^2. La *g* es una unidad muy conveniente para medir las aceleraciones que afectan al ser humano, ya que vivimos en un ambiente de 1 *g.* Nuestro peso, que se siente en los pies o cuando se está sentado, es igual a nuestra masa multiplicada por la aceleración debido a la gravedad, o *mg.* Por tanto, una aceleración impuesta de 1 *g* por encima de la gravedad normal, o sea

de 2 *g*, se sentirá como una duplicación del peso. A 6 *g* se sentiría como un peso seis veces mayor que el normal, y se tendría gran dificultad incluso para mover los brazos contra esa aceleración. En la figura 7-10 se muestra que la tolerancia del cuerpo humano a la aceleración depende de su dirección a través del cuerpo, de su magnitud y de su duración. Observe también que los datos empleados en este diagrama se obtuvieron a partir de pruebas en personal militar joven, con buena salud y condición física. No es de esperar que la población general, niños y ancianos en particular, puedan soportar tan altos grados de aceleración. Puesto que gran parte de la maquinaria se diseña para ser empleada por seres humanos, estos datos de tolerancia a la aceleración serán de gran interés y valor para el diseñador de máquinas. Varias obras de referencia con información acerca de estos factores humanos se proporcionan en la bibliografía del capítulo 1.

Otro punto clave útil cuando se diseña maquinaria para uso humano es tratar de relacionar las magnitudes de aceleraciones que se experimentan comúnmente, con valores calculados para su diseño potencial. En la tabla 7-1 se presentan algunos niveles aproximados de aceleración, en *g*, que los seres humanos pueden experimentar en la vida diaria. La propia experiencia de esto le ayudará a desarrollar un "sentido" para los valores de aceleración que encontrará en el diseño de maquinaria destinada al empleo humano.

Observe que las máquinas que no serán ocupadas por seres humanos están limitadas en sus niveles de aceleración sólo por consideraciones de los esfuerzos en sus partes. Estos esfuerzos con frecuencia son generados en gran parte por fuerzas dinámicas debi-



Niveles promedio de aceleración lineal, en direcciones diferentes que pueden tolerarse en una base voluntaria para periodos específicos. Cada curva muestra la carga promedio *G* que puede tolerarse durante el tiempo indicado. Los puntos de referencia obtenidos estaban realmente sobre los ejes; las líneas son extrapolaciones de los puntos de referencia para formar las figuras concéntricas.

(Adaptado de la referencia [1], fig. 17-17, p. 505, reimpreso con autorización)

FIGURA 7-10

Tolerancia humana a la aceleración

das a aceleraciones. La gama de valores de aceleraciones en la maquinaria de este tipo es tan amplia que no es posible establecer comprensivamente guías o pautas para el diseñador, como niveles aceptables o inaceptables de aceleración. Si la masa en movimiento es pequeña, entonces son razonables valores numéricos de aceleración muy grandes. Si la masa es grande los esfuerzos dinámicos que los materiales pueden resistir limitarán a valores bajos las aceleraciones permisibles. Desafortunadamente, el diseñador no sabe por lo general cuánta aceleración es demasiada en su diseño, hasta que lo termina y llega al momento de calcular los esfuerzos de cada parte. Esto requiere un diseño bastante completo y detallado. Si los esfuerzos resultan muy elevados y se deben a fuerzas dinámicas, entonces el único recurso es iterar hacia atrás a través del proceso de diseño y reducir las aceleraciones y/o las masas. Ésta es una razón por la cual el proceso de diseño es una actividad circular y no lineal.

Como punto de referencia, la aceleración del pistón en un motor de auto pequeño, económico, de cuatro cilindros (de aproximadamente 1.5 litros de desplazamiento volumétrico) en punto muerto, es de aproximadamente 40 *g.* A las velocidades de autopista la aceleración del pistón puede ser hasta de 700 *g.* ¡A la máxima rapidez de rotación del motor de 6 000 rpm la aceleración máxima del pistón es de 2 000 *g[* En tanto usted no se esté moviendo junto con el pistón, esto es aceptable. Estos motores duran largo tiempo a pesar de las altas aceleraciones que experimentan. Un factor clave es la elección de materiales de masa baja y de alta resistencia para las partes móviles, con el fin de mantener las fuerzas dinámicas en un valor no muy alto a estas aceleraciones elevadas y permitirles tolerar esfuerzos intensos.

7.7 RAPIDEZ DE ACELERACIÓN

¡No, no usted! **La derivada con respecto al tiempo de la aceleración** se llama *rapidez de aceleración* o *choque.* Estos nombres son apropiados, pues dan una imagen real del fenómeno. La ***rapidez de aceleración*** es la *derivada de la aceleración con respecto al tiempo.* La fuerza es proporcional a la aceleración. Una aceleración rápidamente variable significa una fuerza con variación rápida. Las fuerzas rápidamente cambiantes tienden a "sacudir" un cuerpo. Quizá usted ha experimentado este fenómeno cuando viaja en automóvil. Si al conductor le gustan los "arrancones" y acelera violentamente al ver la luz verde de un semáforo, los ocupantes sentirán una gran sacudida debido a que su aceleración irá desde un valor cero hasta uno alto en forma repentina. Pero cuando Jaime, el chofer, está al volante del *Rolls,* siempre intenta minimizar el sacudimiento acelerando despacio y suavemente, de modo que *La señora* no advierta el cambio de velocidad.

TABLA 7-1 Valores comunes de la aceleración en actividades humanas

Aceleración lenta en un automóvil	0.1 *g*
Avión de motor de reacción en despegue	0.3 *g*
Aceleración fuerte en un automóvil	0.5 *g*
Parada abrupta en un automóvil	0.7 *g*
Vuelta rápida en un automóvil	0.8 *g*
Montaña rusa	3.5 *g*
Avión de motor de reacción F-16 de la fuerza aérea	9.0 *g*

El control y la minimización de la rapidez de aceleración en el diseño de máquinas con frecuencia son de importancia, especialmente si se desea una baja vibración. Las sacudidas grandes tenderán a excitar las frecuencias naturales de vibración de la máquina o estructura con la cual están relacionadas, lo que ocasiona aumento en la vibración y en los niveles de ruido. El control de la rapidez de aceleración tiene mayor importancia en el diseño de levas que en el de eslabonamientos y se investigará con mayor detalle en el capítulo 8, en el que se aborda el diseño de levas.

El procedimiento para calcular la sacudida en un eslabonamiento es una ampliación directa de los métodos que se indican para el análisis de aceleración. Sea que la rapidez de aceleración angular se represente por:

$$\varphi = \frac{d\alpha}{dt} \tag{7.33a}$$

y la rapidez de aceleración lineal por:

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \tag{7.33b}$$

Para determinar la rapidez de aceleración en un eslabonamiento de cuatro barras, por ejemplo, la ecuación de lazo vectorial para aceleración (ecuación 7.7) se deriva con respecto al tiempo. Véase la figura 7-5 para la notación.

$$\begin{aligned} &-a\omega_2^3 j e^{j\theta_2} - 2a\omega_2\alpha_2 e^{j\theta_2} + a\alpha_2\omega_2 j^2 e^{j\theta_2} + a\varphi_2 j e^{j\theta_2} \\ &\quad - b\omega_3^3 j e^{j\theta_3} - 2b\omega_3\alpha_3 e^{j\theta_3} + b\alpha_3\omega_3 j^2 e^{j\theta_3} + b\varphi_3 j e^{j\theta_3} \\ &\quad + c\omega_4^3 j e^{j\theta_4} + 2c\omega_4\alpha_4 e^{j\theta_4} - c\alpha_4\omega_4 j^2 e^{j\theta_4} - c\varphi_4 j e^{j\theta_4} = 0 \end{aligned} \tag{7.34a}$$

Agrupando términos y simplificando:

$$\begin{aligned} &-a\omega_2^3 j e^{j\theta_2} - 3a\omega_2\alpha_2 e^{j\theta_2} + a\varphi_2 j e^{j\theta_2} \\ &\quad - b\omega_3^3 j e^{j\theta_3} - 3b\omega_3\alpha_3 e^{j\theta_3} + b\varphi_3 j e^{j\theta_3} \\ &\quad + c\omega_4^3 j e^{j\theta_4} + 3c\omega_4\alpha_4 e^{j\theta_4} - c\varphi_4 j e^{j\theta_4} = 0 \end{aligned} \tag{7.34b}$$

Sustituyendo la identidad de Euler y separando en las componentes *x* y *y:*

parte real (componente *x):*

$$\begin{aligned} &a\omega_2^3 \operatorname{sen}\theta_2 - 3a\omega_2\alpha_2 \cos\theta_2 - a\varphi_2 \operatorname{sen}\theta_2 \\ &\quad + b\omega_3^3 \operatorname{sen}\theta_3 - 3b\omega_3\alpha_3 \cos\theta_3 - b\varphi_3 \operatorname{sen}\theta_3 \\ &\quad - c\omega_4^3 \operatorname{sen}\theta_4 + 3c\omega_4\alpha_4 \cos\theta_4 + c\varphi_4 \operatorname{sen}\theta_4 = 0 \end{aligned} \tag{7.35a}$$

parte imaginaria (componente *y*):

$$\begin{aligned} &-a\omega_2^3 \cos\theta_2 - 3a\omega_2\alpha_2 \operatorname{sen}\theta_2 + a\varphi_2 \cos\theta_2 \\ &\quad - b\omega_3^3 \cos\theta_3 - 3b\omega_3\alpha_3 \operatorname{sen}\theta_3 + b\varphi_3 \cos\theta_3 \\ &\quad + c\omega_4^3 \cos\theta_4 + 3c\omega_4\alpha_4 \operatorname{sen}\theta_4 - c\varphi_4 \cos\theta_4 = 0 \end{aligned} \tag{7.35b}$$

Estas ecuaciones se resuelven simultáneamente para evaluar φ_3 y φ_4, que son las únicas incógnitas. La rapidez de aceleración angular de impulsión, φ_2, si no es cero, debe conocerse para resolver el sistema. En las ecuaciones 7.35 todos los demás factores están definidos o han sido calculados a partir de los análisis de posición, velocidad y aceleración. Para simplificar estas expresiones se fijarán los términos conocidos a constantes temporales.

En la ecuación 7.35a, sea:

$$\begin{aligned} A &= a\omega_2^3 \operatorname{sen}\theta_2 & D &= b\omega_3^3 \operatorname{sen}\theta_3 & G &= 3c\omega_4\alpha_4 \cos\theta_4 \\ B &= 3a\omega_2\alpha_2 \cos\theta_2 & E &= 3b\omega_3\alpha_3 \cos\theta_3 & H &= c \operatorname{sen}\theta_4 \\ C &= a\varphi_2 \operatorname{sen}\theta_2 & F &= c\omega_4^3 \operatorname{sen}\theta_4 & K &= b \operatorname{sen}\theta_3 \end{aligned} \tag{7.36a}$$

La ecuación 7.35a se reduce entonces a:

$$\varphi_3 = \frac{A - B - C + D - E - F + G + H\varphi_4}{K} \tag{7.36b}$$

Observe que la ecuación 7.36b define el ángulo φ_3 en función del ángulo φ_4. Ahora se simplificará la ecuación 7.35b y se sustituirá la ecuación 7.36b en ésta.

En la ecuación 7.35b, se tiene

$$\begin{aligned} L &= a\omega_2^3 \cos\theta_2 & P &= b\omega_3^3 \cos\theta_3 & S &= c\omega_4^3 \cos\theta_4 \\ M &= 3a\omega_2\alpha_2 \operatorname{sen}\theta_2 & Q &= 3b\omega_3\alpha_3 \operatorname{sen}\theta_3 & T &= 3c\omega_4\alpha_4 \operatorname{sen}\theta_4 \\ N &= a\varphi_2 \cos\theta_2 & R &= b \cos\theta_3 & U &= c \cos\theta_4 \end{aligned} \tag{7.37a}$$

La ecuación 7.35b se reduce entonces a:

$$R\varphi_3 = U\varphi_4 - L - M + N - P - Q + S + T = 0 \tag{7.37b}$$

Sustituyendo la ecuación 7.36b en la 7.35b:

$$R\left(\frac{A - B - C + D - E - F + G + H\varphi_4}{K}\right) - U\varphi_4 - L - M + N - P - Q + S + T = 0 \tag{7.38}$$

La solución es:

$$\varphi_4 = \frac{KN - KL - KM - KP - KQ + AR - BR - CR + DR - ER - FR + GR + KS + KT}{KU - HR} \tag{7.39}$$

El resultado de la ecuación 7.39 se sustituye en la ecuación 7.36b para obtener φ_3. Una vez que se obtienen los valores de rapidez de aceleración angular, la rapidez de aceleración lineal en las juntas de pasador se obtiene de:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_A &= -a\omega_2^3 j e^{j\theta_2} - 3a\omega_2\alpha_2 e^{j\theta_2} + a\varphi_2 j e^{j\theta_2} \\ \mathbf{J}_{BA} &= -b\omega_3^3 j e^{j\theta_3} - 3b\omega_3\alpha_3 e^{j\theta_3} + b\varphi_3 j e^{j\theta_3} \\ \mathbf{J}_B &= -c\omega_4^3 j e^{j\theta_4} - 3c\omega_4\alpha_4 e^{j\theta_4} + c\varphi_4 j e^{j\theta_4} = 0 \end{aligned} \tag{7.40}$$

El mismo enfoque que se usó en la sección 7.4 para determinar la aceleración de un punto en un eslabón se usa ahora para obtener la rapidez de aceleración lineal en cualquier punto.

$$\mathbf{J}_P = \mathbf{J}_A + \mathbf{J}_{PA} \tag{7.41}$$

La ecuación 7.41 de diferencia de rapidez de aceleración se aplica a un punto cualquiera en un eslabón, si *P* representa cualquier punto arbitrario en cualquier eslabón, y *A* cualquier punto de referencia en el mismo elemento, del cual se conoce el valor del vector de rapidez de aceleración. Observe que si se sustituyen las ecuaciones 7.40 en la 7.41, se obtendrá la ecuación 7.34.

7.8 ESLABONAMIENTOS DE *N* BARRAS

Las mismas técnicas de análisis expuestas aquí para posición, velocidad, aceleración y rapidez de aceleración, con los eslabonamientos de cuatro y de cinco barras como ejemplos, puede ampliarse para ensambles más complejos de eslabones. Las ecuaciones de lazo vectorial múltiple pueden expresarse con respecto a un eslabonamiento de complejidad arbitraria. Las ecuaciones vectoriales resultantes se pueden derivar y resolver simultáneamente para las variables de interés. En algunos casos se requerirá de la solución simultánea de un sistema de ecuaciones no lineales. Un algoritmo para la obtención de raíces, como el método de Newton-Raphson, será necesario para resolver estos casos más complicados. Se necesita una computadora. Un paquete de computación para la solución de ecuaciones, como el *TKSolver* o el *Mathcad* que realizan la obtención de raíces iterativa, será una útil ayuda para resolver cualquiera de estos problemas de análisis, incluso los ejemplos que se muestran aquí.

7.9 REFERENCIAS

1 **Sanders, M. S., y E. J. McCormick,** *Human Factors in Engineering and Design,* 6a. ed., McGraw-Hill Co., Nueva York, 1987, p. 505.

7.10 PROBLEMAS

7-1 Un punto está a un radio de 6.5 pulgadas en un cuerpo con rotación pura de $\omega = 100$ rad/s y una $\alpha = -500$ rad/s^2 constante en el punto A. El centro de rotación está en el origen de un sistema coordenado. Cuando el punto se encuentra en la posición *A* su vector de posición forma un ángulo de 45° con el eje *X*. Le toma 0.01 s alcanzar el punto *B*. Dibuje este sistema a una escala conveniente, calcule θ y ω de la posición *B* y:

a. Escriba una expresión para el vector aceleración de la partícula en la posición *A* mediante la notación de número complejo, en las formas polar y cartesiana.
b. Escriba una expresión para el vector aceleración de la partícula en la posición *B* mediante la notación de número complejo en las formas polar y cartesiana.
c. Establezca una ecuación vectorial para la diferencia de la aceleración entre los puntos *B y A*. Sustituya la notación de número complejo para los vectores en esta ecuación y resuelva numéricamente la diferencia de la aceleración.
d. Compruebe el resultado de la parte c mediante un método gráfico.

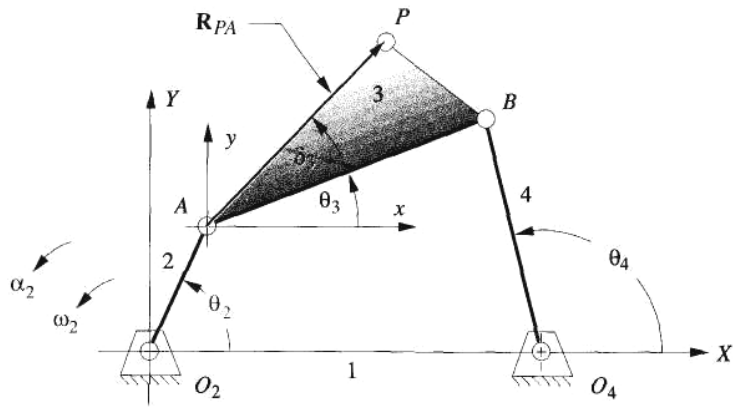


FIGURA P7-1

Configuración y terminología para los problemas 7-3, 7-4 y 7-11

7-2 En el problema 7-1, sean los puntos *A* y *B* representaciones de los cuerpos rotatorios separados con la ω y α indicadas en $t = 0$, $\theta_A = 45°$ y $\theta_B = 120°$, determine su aceleración relativa.

*7-3 Las longitudes del eslabón, la ubicación del punto acoplador y los valores de θ_2, ω_2 y α_2, para los mismos eslabonamientos de cuatro barras utilizados en los análisis de posición y de velocidad de los capítulos 4 y 6, están redefinidos en la tabla P7-1, que es la misma que la tabla P6-1. La configuración general del eslabonamiento y la terminología se muestran en la figura P7-1. *Para el (los) renglón(es) asignado(s),* dibuje el eslabonamiento a escala y obtenga gráficamente las aceleraciones de los puntos *A y B.* Después calcule α_3 y α_4, así como la aceleración del punto *P.*

*†7-4 Repita el problema 7-3 pero resuélvalo por el método analítico de lazo vectorial de la sección 7.3.

TABLA P7-1 Datos para los problemas 7-3 y 7-4

Renglón	Eslabón 1	Eslabón 2	Eslabón 3	Eslabón 4	θ_2	ω_2	α_2	R_{PA}	δ_3
a	6	2	7	9	30	10	0	6	30
b	7	9	3	8	85	–12	5	9	25
c	3	10	6	8	45	–15	–10	10	80
d	8	5	7	6	25	24	–4	5	45
e	8	5	8	6	75	–50	10	9	300
f	5	8	8	9	15	–45	50	10	120
g	6	8	8	9	25	100	18	4	300
h	20	10	10	10	50	–65	25	6	20
i	4	5	2	5	80	25	–25	9	80
j	20	10	5	10	33	25	–40	1	0
k	4	6	10	7	88	–80	30	10	330
l	9	7	10	7	60	–90	20	5	180
m	9	7	11	8	50	75	–5	10	90
n	9	7	11	6	120	15	–65	15	60

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para solucionarse usando los programas resolvedores de ecuaciones: *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

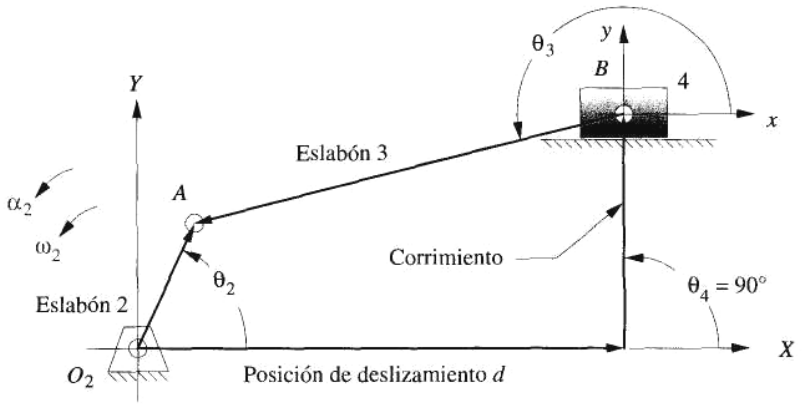


FIGURA P7-2
Configuración y terminología para los problemas 7-5 y 7-6

*7-5 Las longitudes de eslabón y corrimiento, y los valores de θ_2, ω_2 y α_2 para algunos eslabonamientos de cuatro barras de manivela-corredera con corrimiento y no invertidos, se definen en la tabla P7-2. La configuración general del eslabonamiento y la terminología se muestra en la figura P7-2. *Para el (los) renglón(es) asignado(s)* dibuje a escala el eslabonamiento y encuentre gráficamente las aceleraciones de las juntas de pasador *A* y *B*, así como la aceleración de deslizamiento en la junta respectiva.

*†7-6 Repita el problema 7-5 usando un método analítico.

*†7-7 Las longitudes de eslabón y los valores de θ_2, ω_2 y γ para algunos eslabonamientos de cuatro barras de manivela-corredera invertidos están definidos en la tabla P7-3. La configuración general del eslabonamiento y la terminología se muestran en la figura P7-3. *Para el (los) renglón(es) asignado(s)* encuentre las aceleraciones de las juntas de pasador *A*, así como la aceleración de deslizamiento de la junta respectiva. Resuelva por el método analítico de lazo vectorial de la sección 7.3 para la configuración abierta del eslabonamiento.

*†7-8 Repita el problema 7-7 para la configuración cruzada del eslabonamiento.

TABLA P7-2 Datos para los problemas 7-5 y 7-6

Renglón	Eslabón 2	Eslabón 3	Corrimiento	θ_2	ω_2	α_2
a	1.4	4	1	45	10	0
b	2	6	–3	60	–12	5
c	3	8	2	–30	–15	–10
d	3.5	10	1	120	24	–4
e	5	20	–5	225	–50	10
f	3	13	0	100	–45	50
g	7	25	10	330	100	18

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para solucionarse usando los programas resolvedores de ecuaciones: *Mathcad*, *Matlab* o *TKSolver*.

TABLA P7-3 Datos para los problemas 7-7 y 7-8

Renglón	Eslabón 1	Eslabón 2	Eslabón 4	γ	θ_2	ω_2	α_2
a	6	2	4	90	30	10	–25
b	7	9	3	75	85	–15	–40
c	3	10	6	45	45	24	30
d	8	5	3	60	25	–50	20
e	8	4	2	30	75	–45	–5
f	5	8	8	90	150	100	–65

*7-9 Las longitudes de eslabón, relación de engranes (λ), ángulo de fase (ϕ) y los valores de θ_2, ω_2 y α_2 para algunos eslabonamientos de cinco barras con engranaje están definidos en la tabla P7-4. La configuración general del eslabonamiento y terminología se muestran en la figura P7-4. *Para el (los) renglón(es) asignado(s)* encuentre α_3 y α_4 y la aceleración lineal en el punto *P*.

†7-10 Un automovilista tomó una curva demasiado rápido. El vehículo giró fuera de control con respecto a su centro de gravedad *(CG)* y salió de la carretera en dirección noreste. La fricción de las llantas derrapantes proporcionó una desaceleración lineal de 0.25 *g*. El auto tenía una velocidad angular de 100 rpm. Cuando el vehículo chocó de frente contra un árbol a 30 mi/h, le tomó 0.1 segundo detenerse por completo.

a. ¿Cuál fue la aceleración que experimentó la niña que iba sentada a la mitad del asiento trasero, a dos pies atrás del *CG* del auto, justo antes del impacto?
b. ¿Qué fuerza ejerció la pequeña, con peso de 100 lb, sobre su equipo de sujeción o cinturón de seguridad, como resultado de la aceleración, justo antes del choque?
c. Suponga una desaceleración constante durante los 0.1 s del impacto. ¿Cuál fue la magnitud de la desaceleración promedio que sintieron los pasajeros en ese intervalo?

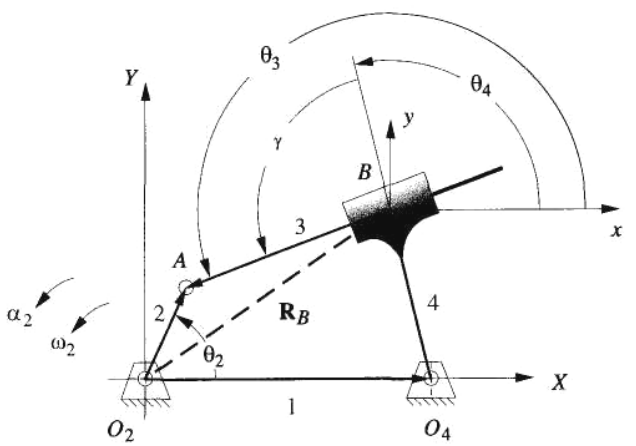


FIGURA P7-3
Configuración y terminología para los problemas 7-7 y 7-8

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para solucionarse usando los programas resolvedores de ecuaciones: *Mathcad, Matlab* o *TKSolver*.

TABLA P7-4 Datos para el problema 7-9

Renglón	Eslabón 1	Eslabón 2	Eslabón 3	Eslabón 4	Eslabón 5	λ	ϕ	θ_2	ω_2	α_2	R_{pa}	δ_3
a	6	1	7	9	4	2.0	30	60	10	0	6	30
b	6	5	7	8	4	–2.5	60	30	–12	5	9	25
c	3	5	7	8	4	–0.5	0	45	–15	–10	10	80
d	4	5	7	8	4	–1.0	120	75	24	–4	5	45
e	5	9	11	8	8	3.2	–50	–39	–50	10	9	300
f	10	2	7	5	3	1.5	30	120	–45	50	10	120
g	15	7	9	11	4	2.5	–90	75	100	18	4	300
h	12	8	7	9	4	–2.5	60	55	–65	25	6	20
i	9	7	8	9	4	–4.0	120	100	25	–25	9	80

†7-11 Para el (los) renglón(es) asignado(s) en la tabla P7-1 encuentre la rapidez de aceleración angular de los eslabones 3 y 4, así como la rapidez de aceleración lineal de la junta de pasador entre los eslabones 3 y 4 (punto *B*). Suponga una rapidez de aceleración angular nula en el eslabón 2. La configuración de eslabonamiento y terminología se muestran en la figura P7-1.

†7-12 Usted se encuentra en un carrusel que gira a una velocidad constante de 15 rpm. Tiene un radio interior de tres pies, y uno exterior de 10 pies. Usted comienza a correr desde el círculo interior hasta el exterior a lo largo de un radio. Su velocidad máxima con respecto al carrusel es de 5 mi/h, y ocurre en un radio de siete pies. ¿Cuál es la

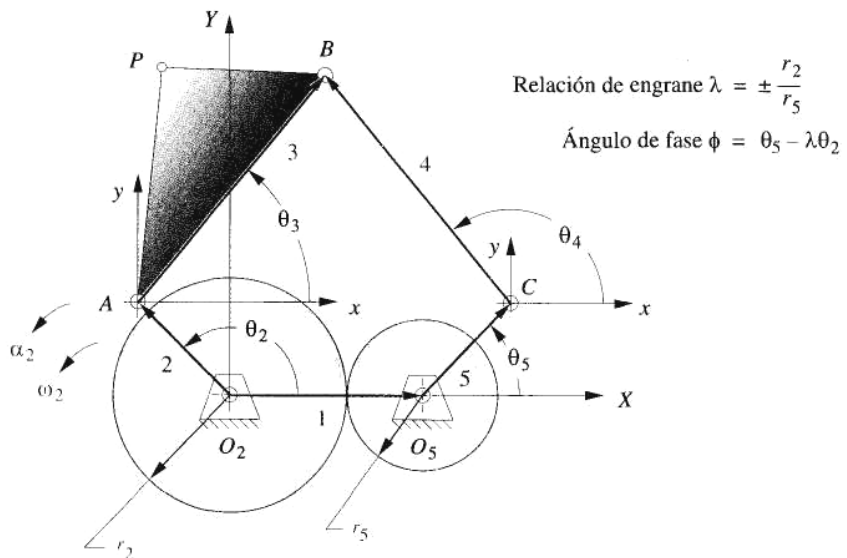


FIGURA P7-4
Configuración y terminología para el problema 7-9

† Estos problemas son adecuados para solucionarse usando los programas resolvedores de ecuaciones: *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

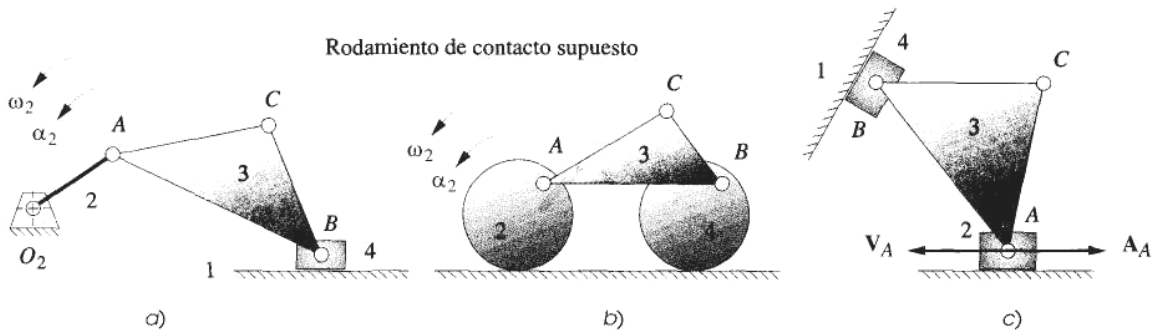


FIGURA P7-5

Problemas 7-13 a 7-15

magnitud y la dirección de su máxima aceleración de Coriolis con respecto al carrusel?

7-13 El eslabonamiento en la figura P7-5a) tiene *0-¡A* = 0.8, *AB* = 1.93, *AC* = 1.33 y un corrimiento igual a 0.38 pulgadas. El ángulo de la manivela en la posición mostrada es 34.3° y el ángulo *BAC* = 38.6°. Encuentre α_3, $\mathbf{A}_A$, $\mathbf{A}_B$ y $\mathbf{A}_C$ de la posición mostrada para $\omega_2 = 15$ rad/s y $\alpha_2 = 10$ rad/s² en las direcciones mostradas.

a. Usando el método gráfico de diferencia de aceleración.
†b. Usando un método analítico.

7-14 El eslabonamiento en la figura P7-5¿) tiene $I_{12}A = 0.75$, $AB = 1.5$ y $AC = 1.2$ pulgadas. El ángulo de manivela efectivo en la posición mostrada es de 77° y el ángulo *BAC* = 30°. Encuentre α_3, $\mathbf{A}_A$, $\mathbf{A}_B$ y $\mathbf{A}_C$ para la posición mostrada de $\omega_2 = 15$ rad/s y $\alpha_2 = 10$ rad/s² en las direcciones mostradas.

a. Usando el método gráfico de diferencia de aceleración.
†b. Usando un método analítico. (Sugerencia: Construya un eslabonamiento efectivo para la posición mostrada y analícelo como un eslabonamiento de cuatro barras con junta de pasador.)

7-15 El eslabonamiento en la figura P7-5c) tiene *AB* = 1.8 y *AC* = 1.44 pulgadas. El ángulo de *AB* en la posición mostrada es de 128° y el ángulo *BAC* = 49°. El deslizador en *B* está a un ángulo de 59°. Encuentre α_3, $\mathbf{A}_B$ y $\mathbf{A}_C$ para la posición mostrada $\mathbf{V}_A = 10$ pulg/s y $\mathbf{A}_A = 15$ pulg/s² en las direcciones mostradas.

a. Usando el método gráfico de diferencia de aceleración.
†b. Usando un método analítico.

†7-16 Para el eslabonamiento mostrado en la figura P7-6*a*) escriba las ecuaciones de lazo vectorial; derívelas y haga un análisis de posición completa de la velocidad y de la aceleración del eslabonamiento. Mida la geometría del eslabonamiento de la figura. Suponga que $\omega_2 = 10$ rad/s y $\alpha_2 = 20$ rad/s².

†7-17 Repita el problema 7-16 para el eslabonamiento mostrado en la figura P7-6*b*).

†7-18 Repita el problema 7-16 para el eslabonamiento mostrado en la figura P7-6*c*).

†7-19 Repita el problema 7-16 para el eslabonamiento mostrado en la figura P7-6*d*).

† Estos problemas son adecuados para solucionarse usando los programas resolvedores de ecuaciones: *Mathcad*, *Matlab* o *TKSolver*.

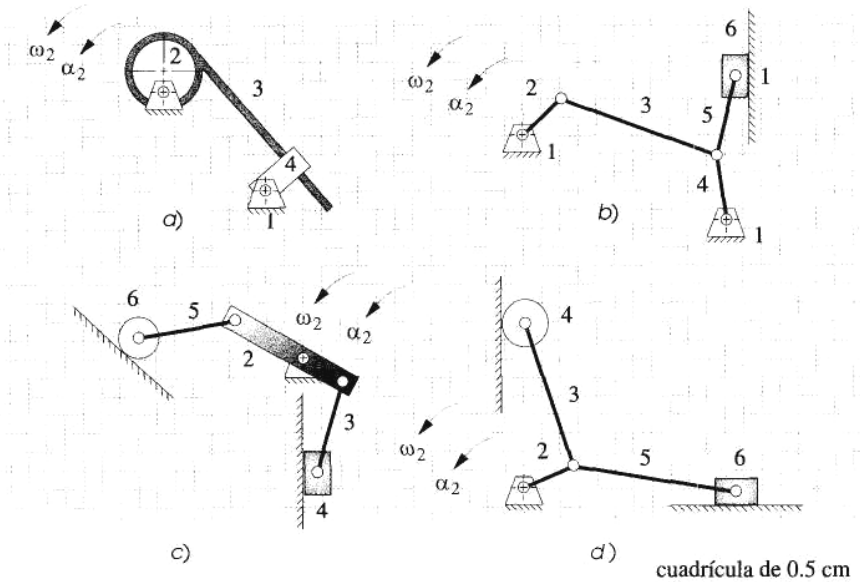


FIGURA P7-6

Problemas 7-16 a 7-19

†7-20 La figura P7-7 muestra un eslabonamiento de seis barras con $O_2B = 1$, $BD = 1.5$, $DC = 3.5$, $DO_6 = 3$ y $h = 1.3$ pulgadas. Encuentre la aceleración angular de eslabón 6 si ω_2 es una constante igual a 1 rad/s.

7-21 El eslabonamiento en la figura P7-8a) tiene *AB* = 116, *BC* = 108, *CD* = 110 y *AD* = 174 mm. *AD* está a —25° y *AB* está a 37° en el sistema coordenado global *XY*. Encuentre $\mathbf{A}_B$ y $\mathbf{A}_C$ en el sistema coordenado global para la posición mostrada si $\omega_d =$ 15 rad/s en SMR y $\alpha_d = 25$ rad/s^2 en SCMR. Use el método gráfico de la diferencia de aceleración. (Sugerencia: Haga una copia ampliada de la figura y dibuje sobre ésta.)

†7-22 El eslabonamiento en la figura P7-8a) tiene *AB* =116, *BC* = 108, *CD* = 110 y *AD* = 174 mm. *AB* está a 62° en el sistema coordenado local $x'y'$. Encuentre α_f, $\mathbf{A}_B$ y $\mathbf{A}_C$ en el sistema coordenado local para la posición mostrada si $\omega_d = 15$ rad/s en SMR y $\alpha_d =$ 25 rad/s^2 en SCMR. Use un método analítico.

†7-23 El eslabonamiento en la figura P7-8a) tiene *AB* = 116, *BC* = 108, *CD* = 110 y *AD* = 174 mm. Escriba un programa de computadora o use un resolvedor de ecuaciones para encontrar y granear α_f, $\mathbf{A}_B$ y $\mathbf{A}_C$ en el sistema coordenado local para el rango máximo de movimiento que permite este eslabonamiento si $\omega_d = 15$ rad/s en SMR.

7-24 El eslabonamiento en la figura P7-86) tiene *AB* = 40, *BC* = 96, *CD = 75 y AD* = 162 mm. La distancia perpendicular desde *D* hasta V_D es 36 mm. *AD* está a -36° y *AB* está a 47° en el sistema coordenado global *XY*. Encuentre α_d, $\mathbf{A}_B$ y $\mathbf{A}_C$ en el sistema coordenado global para la posición mostrada si $\omega_f = 20$ rad/s en SCMR. Use el método gráfico de la diferencia de aceleración. (Sugerencia: Haga una copia ampliada de la figura y dibuje sobre ésta.)

† Estos problemas son adecuados para solucionarse usando los programas resolvedores de ecuaciones: *Mathcad, Matlab* o *TKSolver*.

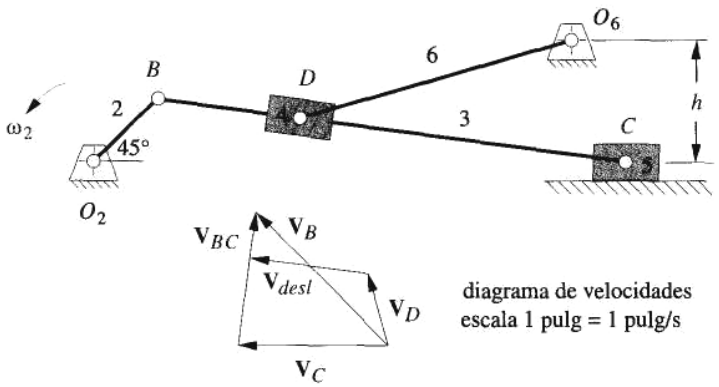


FIGURA P7-7

Problema 7-20 *Cortesía del Prof. J. M. Vance, Iowa State University*

†7-25 El eslabonamiento en la figura P7-86) tiene *AB* = 40, *BC* = 96, *CD* = 75 y *AD* = 162 mm. La distancia perpendicular desde *D* hasta $\mathbf{V}_D$ es de 36 mm. *AB* está a 83° en el sistema coordenado local *x'y'*. Encuentre α_d, $\mathbf{A}_B$ y $\mathbf{A}_C$ en el sistema coordenado global para la posición mostrada si ω_f = 20 rad/s en SCMR. Use un método analítico.

†7-26 El eslabonamiento en la figura P7-8¿0 tiene *AB* = 40, *BC* = 96, *CD* = 75 y *AD* = 162 mm. La distancia perpendicular desde *D* hasta $\mathbf{V}_D$ es de 36 mm. Escriba un programa de computadora o use un resolvedor de ecuaciones para encontrar y granear a α_d, $\mathbf{A}_B$ y $\mathbf{A}_C$ en el sistema coordenado local para el rango máximo de movimiento que este eslabonamiento permite si ω_f = 20 rad/s en SCMR.

7-27 El eslabonamiento de manivela-corredera de corrimiento de la figura P7-8c) tiene *DE* = 63, *EF* = 130 y corrimiento igual a 52 mm. *DE* está a 51° en el sistema coordenado global *XY*. Encuentre $\mathbf{A}_E$ y $\mathbf{A}_f$ en el sistema coordenado global para la posición mostrada si ω_d = 25 rad/s en SMR. Use el método gráfico de diferencia de la aceleración. (Sugerencia: Haga una copia ampliada de la figura y dibuje sobre ésta.)

†7-28 El eslabonamiento de manivela-corredera de corrimiento de la figura P7-8c) tiene *DE* = 63, *EF* = 130 y desplazamiento igual a 52 mm. *DE* está a 51° en el sistema coordenado global *XY*. Encuentre $\mathbf{A}_E$ y $\mathbf{A}_f$ en el sistema coordenado global para la posición mostrada si ω_d = 25 rad/s en SMR. Use un método analítico.

†7-29 El eslabonamiento de manivela-corredera de corrimiento de la figura P7-8c) tiene *DE* = 63, *EF* = 130 y corrimiento igual a 52 mm. Escriba un programa de computadora o use un resolvedor de ecuaciones para encontrar y granear $\mathbf{A}_E$ y $\mathbf{A}_f$ en el sistema coordenado global para el rango máximo de movimiento que este eslabonamiento permite si ω_d = 25 rad/s en SMR.

7-30 El eslabonamiento en la figura *Pl-Sd)* tiene *AB* = 30, *BC* = 150, *CD* = 30 y *AD* = 150 mm. AB está a 58° en el sistema coordenado global *XY*. Encuentre $\mathbf{A}_B$, $\mathbf{A}_C$ y $\mathbf{A}_f$ (la aceleración de la caja) en el sistema coordenado global para la posición mostrada si ω_d = 30 rad/s en SMR. Use el método gráfico de la diferencia de aceleración. (Haga una copia ampliada de la figura y utilícela.)

† Estos problemas son adecuados para solucionarse usando los programas resolvedores de ecuaciones: *Mathcad*, *Matlab* o *TKSolver*.

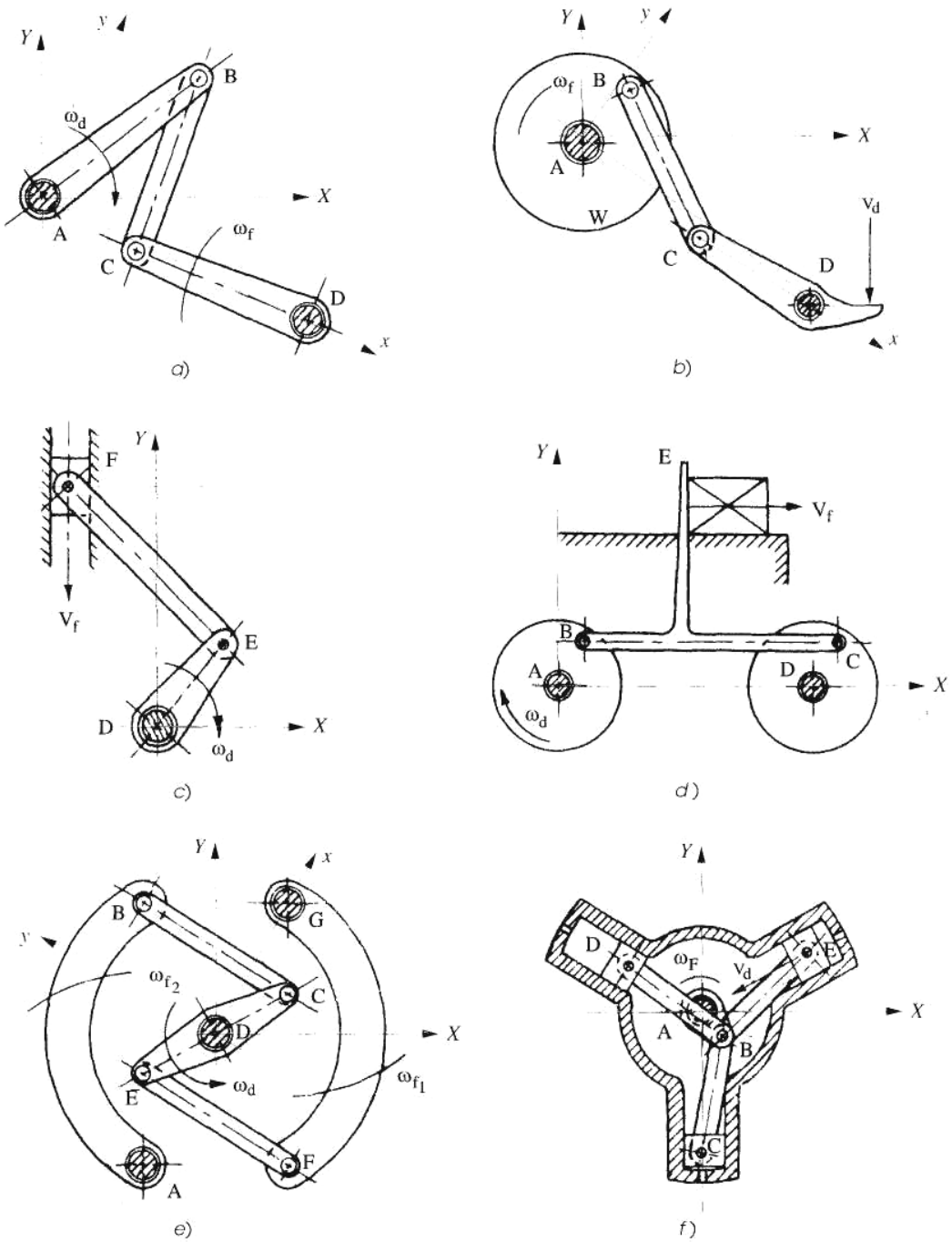


FIGURA P7-8

Problemas 7-21 a 7-38 *Adaptado de P.H. Hill y W. P. Rule. (1960) Mechanisms: Analysis and Design, con autorización*

†7-31 El eslabonamiento en la figura *P7-8d)* tiene *AB* = 30, *BC* = 150, *CD* = 30 y *AD* = 150 mm. *AB* está a 58° en el sistema coordenado global *XY*. Encuentre $\mathbf{A}_B$, $\mathbf{A}_C$ y $\mathbf{A}_f$ (la aceleración de la caja) en el sistema coordenado global para la posición mostrada si ω_d = 30 rad/s en SMR. Use un método analítico.

†7-32 El eslabonamiento en la figura P7-8*d*) tiene *AB* = 30, *BC* = 150, *CD* = 30 y *AD* = 150 mm. Escriba un programa de computadora o use un resolvedor de ecuaciones para encontrar y graficar a $\mathbf{A}_B$, $\mathbf{A}_C$ y $\mathbf{A}_f$ (la aceleración de la caja) en el sistema coordenado global para el rango máximo de movimiento que este eslabonamiento permite si ω_d = 30 rad/s en SMR.

7-33 El eslabonamiento de la figura P7-8e) tiene *AB* = *GF* = 153, *BC* = *EF* = 100, *CD* = *DE* = 49 y *AD* = *DG* = 87 mm. *DG* está en 61° y *DC* está a 29° en el sistema coordenado global *XY*. Encuentre α_f, $\mathbf{A}_B$ y $\mathbf{A}_C$ en el sistema coordenado global para la posición mostrada si ω_d = 15 rad/s en SMR. Use el método gráfico de diferencia de la aceleración. (Haga una copia ampliada de la figura y dibuje sobre ésta.)

†7-34 El eslabonamiento en la figura P7-8e) tiene *AB* = *GF* = 153, *BC* = *EF* = 100, *CD* = *DE* = 49 y *AD* = *DG* = 87 mm. *DC* está en 148° en el sistema coordenado local $x'y'$. Encuentre α_f, $\mathbf{A}_B$ y $\mathbf{A}_C$ en el sistema coordenado local para la posición mostrada si ω_d = 15 rad/s en SMR. Use un método analítico.

†7-35 El eslabonamiento de la figura P7-8e) tiene *AB* = *GF* = 153, *BC* = *EF* = 100, *CD* = *DE* = 49 y *AD* = *DG* = 87 mm. Escriba un programa de computadora o use un resolvedor de ecuaciones para encontrar y graficar α_f, $\mathbf{A}_B$ y $\mathbf{A}_C$ en el sistema de coordenadas local para el rango máximo de movimiento que este eslabonamiento permite si ω_d = 15 rad/s en SMR.

7-36 El compresor radial de tres cilindros de la figura P7-8*f*) tiene una manivela con una longitud *AB* = 19 mm y bielas *BC* = *BD* = *BE* = 70 mm. La manivela está a -53° en la posición mostrada y ω = 15 rad/s en SMR. Los cilindros están igualmente espaciados a 120 . Encuentre las aceleraciones de pistón de $\mathbf{A}_C$, $\mathbf{A}_D$ y $\mathbf{A}_E$ para la posición de la manivela mostrada usando un método gráfico. (Sugerencia: Haga una copia ampliada de la figura y dibuje sobre ésta.)

†7-37 El compresor radial de tres cilindros de la figura P7-8*f*) tiene una manivela con una longitud *AB* = 19 mm y bielas *BC* - *BD* = *BE* = 70 mm. La manivela está a -53° en la posición mostrada y co = 15 rad/s en SMR. Los cilindros están igualmente espaciados a 120°. Encuentre las aceleraciones de pistón de $\mathbf{A}_C$, $\mathbf{A}_D$ y $\mathbf{A}_E$ para la posición de la manivela mostrada usando un método analítico.

†7-38 El compresor radial de tres cilindros de la figura P7-8*f*) tiene una manivela de longitud *AB* = 19 mm y bielas *BC* = *BD* = *BE* = 70 mm. La manivela está a -53° en la posición mostrada y ω = 15 rad/s en SMR. Los cilindros están igualmente espaciados a 120°. Escriba un programa de computadora o use un resolvedor de ecuaciones para encontrar y graficar las aceleraciones de pistón $\mathbf{A}_C$, $\mathbf{A}_D$ y $\mathbf{A}_E$ para una revolución de la manivela.

*†7-39 La fisura P7-9 muestra un eslabonamiento en una posición. Encuentre las aceleraciones instantáneas de los puntos *A, B* y *P* si el eslabón O_2A está girando en SMR a 40 rad/s.

*†7-40 La figura P7-10 muestra un eslabonamiento y su curva de acoplador. Escriba un programa de computadora o use un resolvedor de ecuaciones para calcular y trazar la

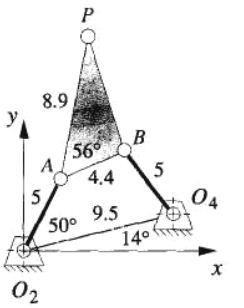


FIGURA P7-9
Problema 7-39

7

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para solucionarse usando los programas resolvedores de ecuaciones: *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

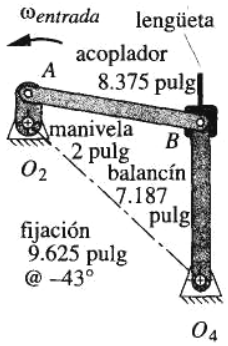


FIGURA P7-11

Problema 7-41. Transmisión de una tejedora de barras

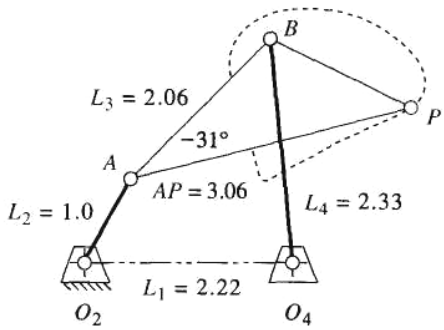


FIGURA P7-10

Problema 7-40

magnitud y dirección de la aceleración del punto de acoplador *P* con incrementos de ángulo en la manivela de 2° para $\omega_2 =$ 100 rpm. Verifique su resultado con el programa FOURBAR.

*†7-41 La figura P7-11 muestra un eslabonamiento que opera la manivela a 500 rpm. Escriba un programa de computadora o use un resolvedor de ecuaciones para calcular y graficar la magnitud y dirección de la aceleración del punto *B* con incrementos de ángulo en la manivela de 2°. Compruebe su resultado con el programa FOURBAR.

*†7-42 La figura P7-12 muestra un eslabonamiento y su curva de acoplador. Escriba un programa de computadora o un resolvedor de ecuaciones para calcular y graficar la magnitud y dirección de la aceleración del punto de acoplador *P* con incrementos de ángulo en la manivela de *2*° para $\omega_2 =$ 20 rpm sobre el máximo rango de movimiento posible. Verifique su resultado con el programa FOURBAR.

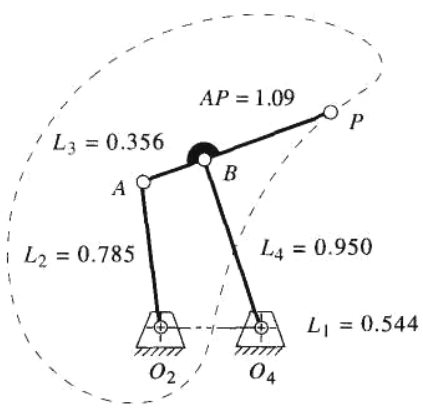


FIGURA P7-12

Problema 7-42

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para solucionarse usando los programas resolvedores de ecuaciones: *Mathcad*, *Matlab* o *TKSolver*.

†7-43 La figura P7-13 muestra un eslabonamiento y su curva de acoplador. Escriba un programa de computadora o use un resolvedor de ecuaciones para calcular y graficar la magnitud y dirección de la aceleración del punto de acoplador *P* con incrementos de ángulo en la manivela de 2° para ω_2 = 80 rpm sobre el rango máximo de movimiento posible. Combruebe su resultado con el programa FOURBAR.

*†7-44 La figura P7-14 muestra un eslabonamiento y su curva de acoplador. Escriba un programa de computadora o use un resolvedor de ecuaciones para calcular y trazar la magnitud y dirección de la aceleración del punto de acoplamiento *P* con incrementos de ángulo en la manivela de 2° para ω_2 = 80 rpm sobre el rango máximo de movimiento posible. Combruebe su resultado con el programa FOURBAR.

†‡7-45 La figura P7-15 muestra una sierra eléctrica que es un mecanismo de manivela-corredera de corrimiento. La manivela es de 75 mm, la biela es de 170 mm y el desplazamiento es de 45 mm. Dibuje un diagrama del eslabonamiento equivalente, y después calcule y grafique la aceleración de la hoja de la sierra con respecto al pedazo que está cortando para una revolución de la manivela a 50 rpm.

†‡7-46 La figura P7-16 muestra un mecanismo de tomar y colocar que puede analizarse como dos eslabonamientos de cuatro barras manejado por una manivela común. La fase del paralelogramo tiene una manivela de 40 mm y un acoplador de 108 mm. Manivela *AB* = 32 mm. *BC* = 260, *CD* = 96, *DE* = 160 y *AD* = 200 mm. Ángulo *CDE* = 75°. *AD* está a 205°. El ángulo de la fase entre los dos pasadores de la manivela en la rueda *W* es de 120°. Los cilindros *P* que se impulsan tienen 60 mm de diámetro. El punto de contacto entre el dedo vertical y el cilindro al extremo izquierdo en la posición mostrada es de 58 mm a 80° contra el extremo izquierdo del acoplador del paralelogramo. Calcule y grafique la aceleración relativa entre el punto £ y el centro del cilindro a la izquierda *P*.

†‡7-47 La figura P7-17 muestra el mecanismo de un rollo de papel manejado por un cilindro neumático. En la posición mostrada AO_2 = 1.1 m a 178° y O_4A está a 0.3 m a 226°. O_2AO_4A = 0.93 m a 163°. Los eslabones en forma de V se sujetan rígidamente a O_4A. El cilindro neumático está retrocediendo con una aceleración constante de 0.1 m/s².

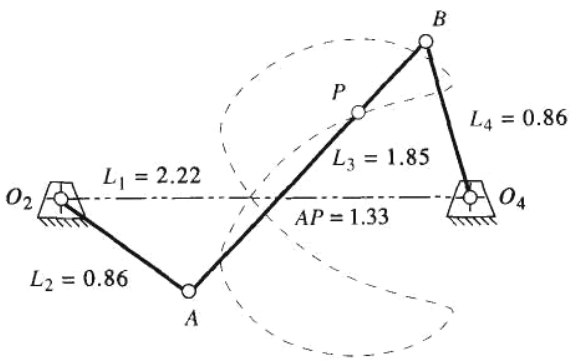


FIGURA P7-13
Problema 7-43

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para solucionarse usando los programas resolvedores de ecuaciones: *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

‡ Estos problemas son adecuados para solucionarse usando el programa *Working Model* que está en el CD-ROM anexo.

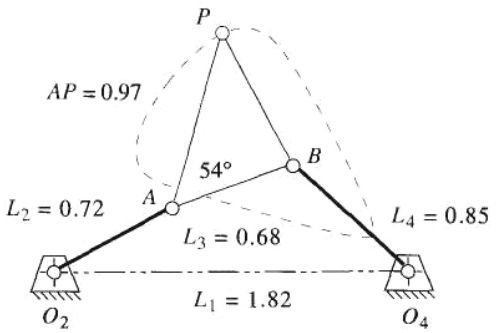


FIGURA P7-14

Problema 7-44

Dibuje un diagrama cinemático del mecanismo, escriba las ecuaciones necesarias, calcule y grafique la aceleración angular del rollo de papel y la aceleración lineal de su centro conforme rueda a través de 90° en SCMR desde la posición mostrada.

†7-48 La figura P7-18 muestra un mecanismo. Haga un diagrama a escala para obtener las dimensiones y encuentre las aceleraciones de los puntos *B, C, E y F* para la posición mostrada.

††7-49 La figura P7-19 muestra un mecanismo de viga viajera. Calcule y grafique la aceleración A_{salida} para una revolución de entrada de la manivela 2 girando a 100 rpm.

††7-50 La figura P7-20 muestra un esmeril. La pieza de trabajo oscila bajo un arco de 90 mm de diámetro de la rueda del esmeril por el eslabonamiento de manivela-corredera que tiene una manivela de 22 mm, una biela de 157 mm y un corrimiento de 40 mm. La

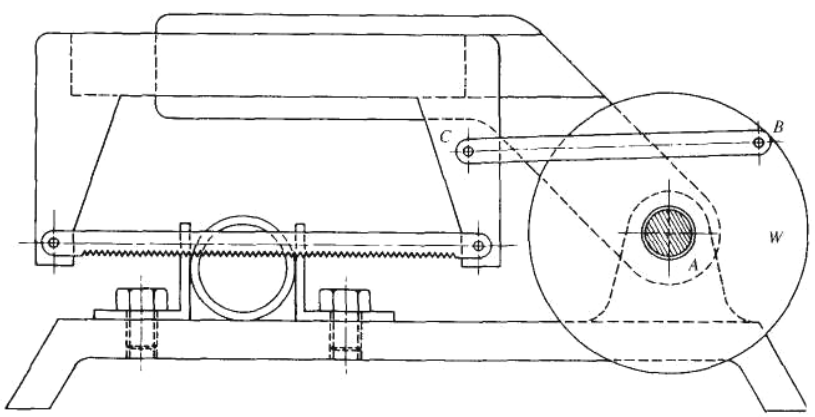


FIGURA P7-15

Problema 7-45 *Tomado de P. H. Hill y W. P. Rule. (1960) Mechanisms Analysis and Design, con autorización*

† Estos problemas son adecuados para solucionarse usando los programas resolvedores de ecuaciones: *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

‡ Estos problemas son adecuados para solucionarse usando el programa *Working Model* que está en el CD-ROM anexo.

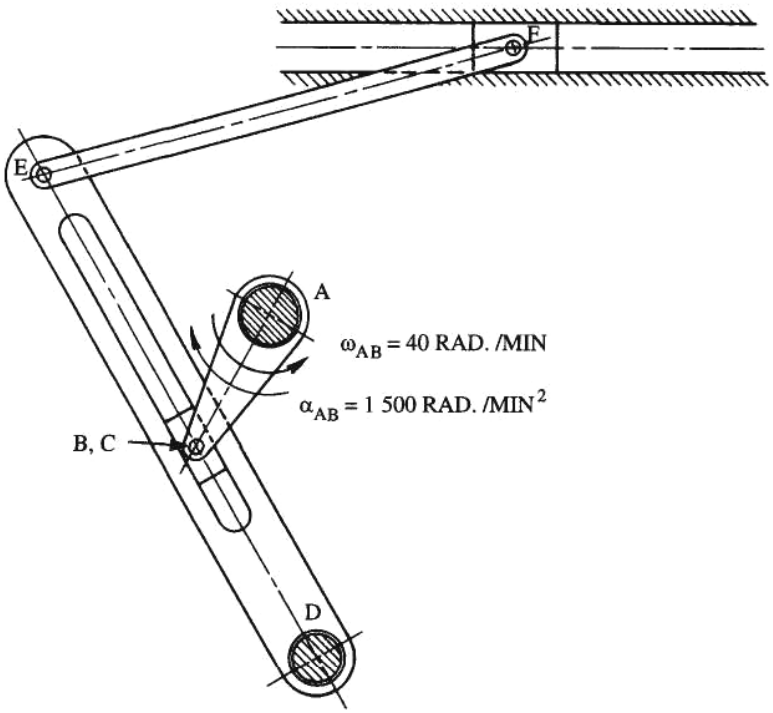


FIGURA P7-18

Problema 7-48 *Tomado de P. H. Hill y W. P. Rule. (1960) Mechanisms: Analysis and Design, con autorización*

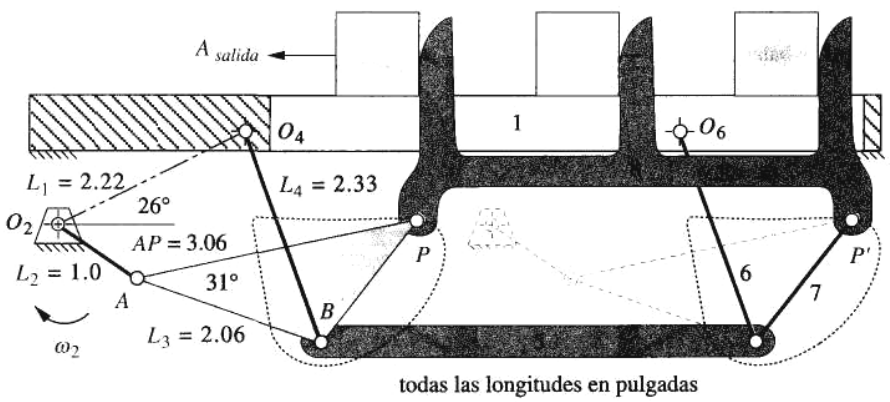


FIGURA P7-19

Problema 7-49. Mecanismo transportador de una viga viajera de ocho barras con movimiento rectilíneo

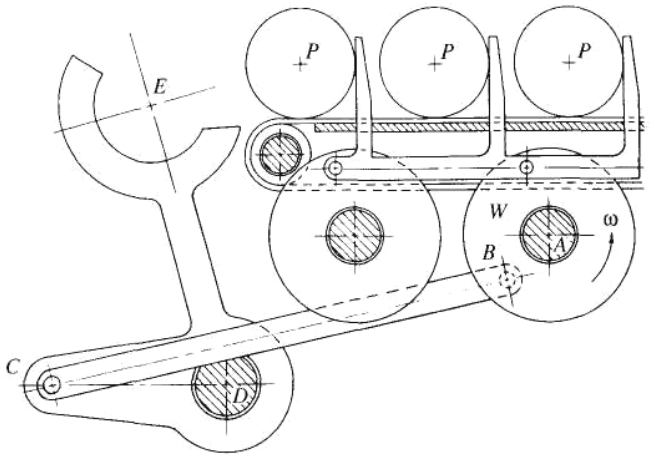


FIGURA P7-16

Problema 7-46 *Tomado de P. H. Hill y W. P. Rule. (1960) Mechanisms: Analysis and Design, con autorización*

manivela gira a 30 rpm, y la rueda esmeriladora a 3 450 rpm. Calcule y grafique la aceleración de la rueda del esmeril desde el punto de contacto con respecto a la pieza de trabajo, en una revolución de la manivela.

†‡7-51 La figura P7-21 muestra un mecanismo de arrastre de eslabón. Haga un diagrama a escala para obtener las dimensiones, escriba las ecuaciones necesarias y resuélvalas

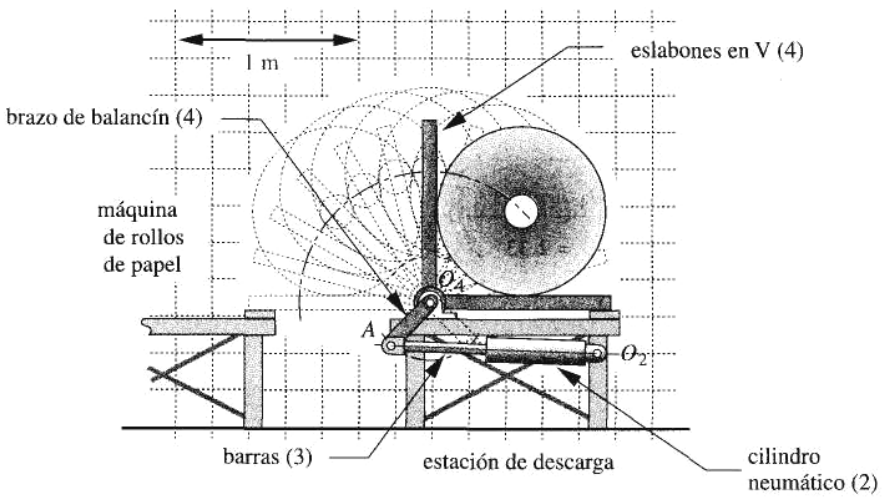


FIGURA P7-17

Problema 7-47

† Estos problemas son adecuados para solucionarse usando los programas resolvedores de ecuaciones: *Mathcad*, *Matlab* o *TKSolver*.

‡ Estos problemas son adecuados para solucionarse usando el programa *Working Model* que está en el CD-ROM anexo.

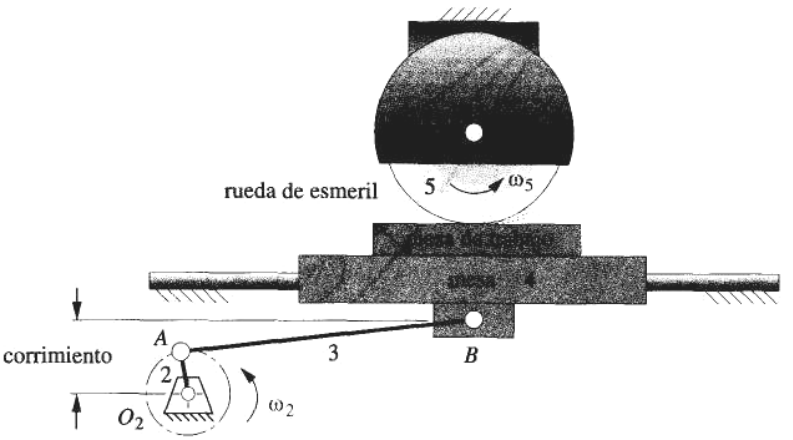


FIGURA P7-20

Problema 7-50. Una esmeriladora de superficies

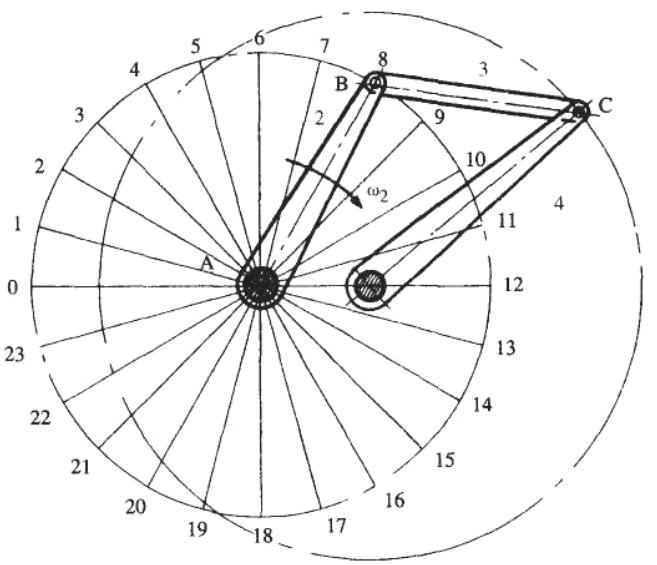


FIGURA P7-21

Problema 7-51 *Tomado de P. H. Hill y W. P. Rule. (1960) Mechanisms: Analysis and Design, con autorización*

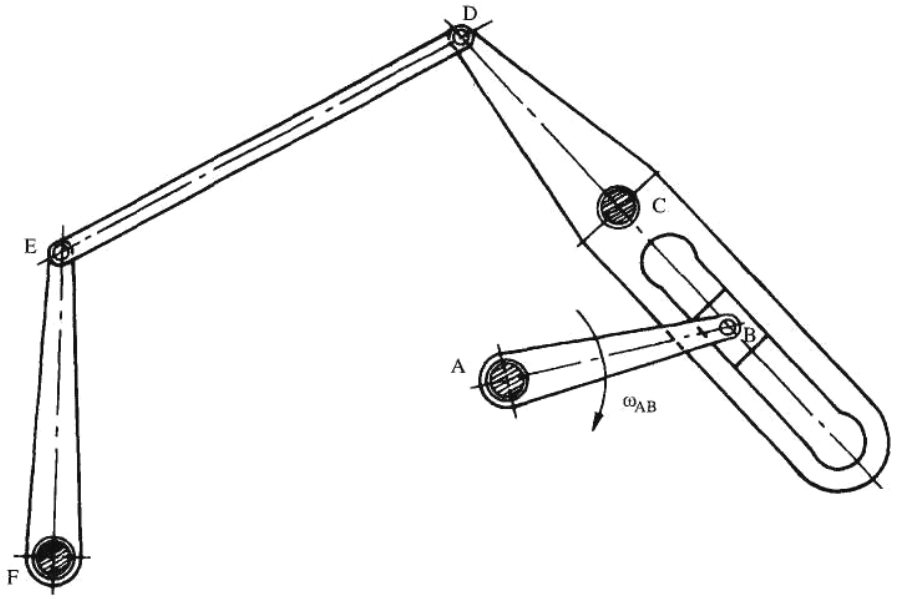


FIGURA P7-22

Problema 7-52 *Tomado de P. H. Hill y W. P. Rule, (1960) Mechanisms: Analysis and Design, con autorización*

para calcular la aceleración angular del eslabón 4 para una entrada de $\omega_2 = 1$ rad/s. Analice los usos de este mecanismo.

7-52 La figura P7-22 muestra un mecanismo. Trace un diagrama a escala para obtener las dimensiones y use un método gráfico para calcular las aceleraciones de los puntos *B*, *D* y *E* para la posición mostrada. $\omega_{AB} = 20$ rad/s.

7-53 La figura P7-23 muestra un mecanismo de retorno rápido. Dibuje un diagrama a escala para obtener las dimensiones y use un método gráfico para calcular las aceleraciones de los puntos *B, C y E* de la posición mostrada. $\omega_{CD} = 10$ rad/s.

†‡7-54 La figura P7-23 muestra un mecanismo de retorno rápido. Haga un diagrama a escala para obtener las dimensiones y use un método analítico para calcular las aceleraciones de los puntos *B, C* y *E* para una revolución del eslabón de entrada. $\omega_{CD} = 10$ rad/s.

†‡7-55 La figura P7-24 muestra un mecanismo de tambor-pedal. $O_2A = 100$ mm a 162° y gira a 171° en A'. $O_2O_4 = 56$ mm, $AB = 28$ mm, $AP = 124$ mm y $O_4B = 64$ mm. La distancia desde O_4 hasta $F_{entrada}$ es de 48 mm. Si la velocidad de entrada, $V_{entrada}$, es una magnitud constante de 3 m/s, encuentre la aceleración de salida sobre el rango de movimiento.

*†‡7-56 Un tractor con remolque se volcó cuando subía una rampa en una autopista de cuota de Nueva York. El camino tiene un radio de 50 pies en ese punto y una pendiente de 3° hacia el exterior de la curva. Las dimensiones de la caja del remolque son de 45 pies de largo, ocho pies de ancho y 8.5 pies de altura (13 pies del piso al techo) y estaba cargado con 44 415 Ib de rollos del papel en dos hileras con dos capas como se

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para solucionarse usando los programas resolvedores de ecuaciones: *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

‡ Estos problemas son adecuados para solucionarse usando el programa *Working Model* que está en el CD-ROM anexo.

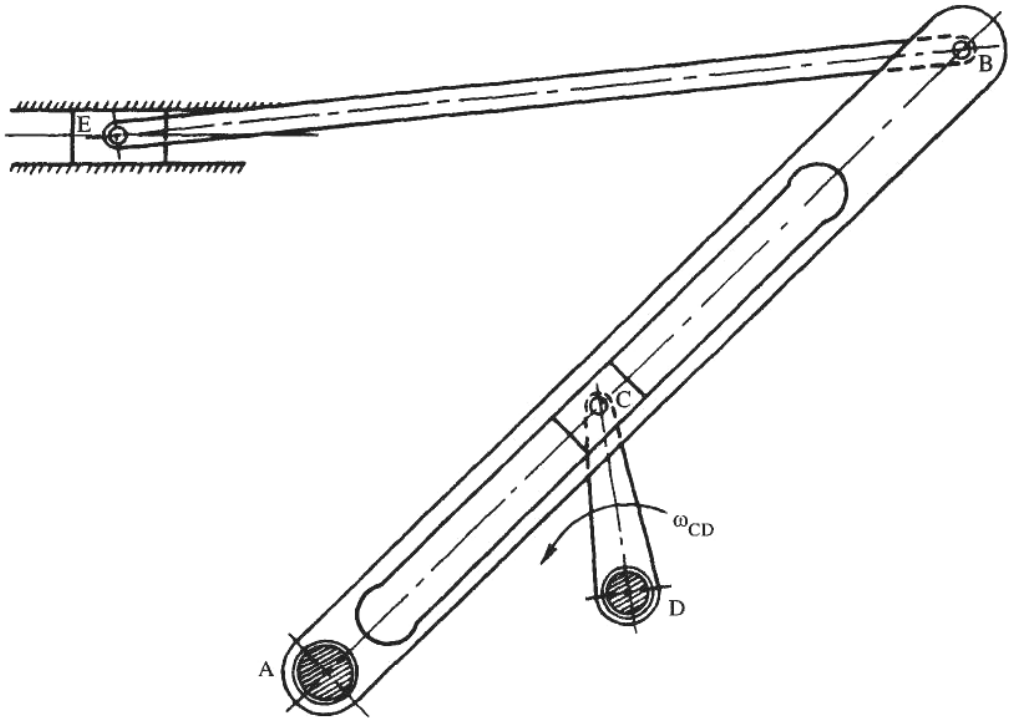


FIGURA P7-23

Problemas 7-53 y 7-54 *Tomado de P. H. Hill y W. P. Rule. (1960) Mechanisms: Analysis and Design, con autorización*

muestra en la figura P7-25. Los rollos son de 40 pulgadas de diámetro por 38 pulgadas de largo, y pesan aproximadamente 900 libras cada uno; están acuñados contra el rodamiento hacia atrás pero no contra el deslizamiento lateral. El remolque vacío pesa 14 000 Ib. El chofer dice que él viajaba a menos de 15 mi/h y que la carga de papel se movió dentro del remolque, golpeó un lado de la caja y volcó al camión. La compañía de papel que cargó al camión dice que la carga fue estibada apropiadamente y que no podría moverse a esa velocidad. Las pruebas independientes de los coeficientes de fricción entre rollos de papel similares y un piso de remolque similar dan un valor de 0.43 ± 0.08. El centro de gravedad compuesto del remolque cargado se estima en 7.5 pies arriba del suelo. Determine la velocidad del camión que causaría que éste se empezara a ladear, y la velocidad a la que los rollos empezarían a deslizarse. ¿Qué piensa usted que causó el accidente?

†7-57 La figura P7-26 muestra una banda de manejo en forma de V. Las poleas tienen diámetros de 150 y 300 mm, respectivamente. La polea más pequeña gira a una velocidad angular constante de 1 750 rpm. Para un elemento diferencial de sección tranversal de la banda escriba las ecuaciones de aceleración de una revolución completa de ambas poleas, incluido su viaje entre las poleas. Calcule y grafique la aceleración del elemento diferencial contra el tiempo para una vuelta alrededor de la

† Estos problemas son adecuados para solucionarse usando los programas resolvedores de ecuaciones: *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

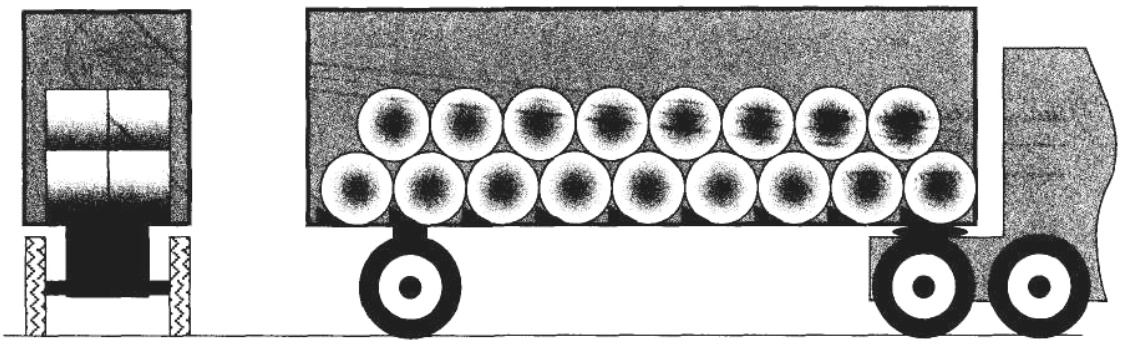


FIGURA P7-25

Problema 7-56

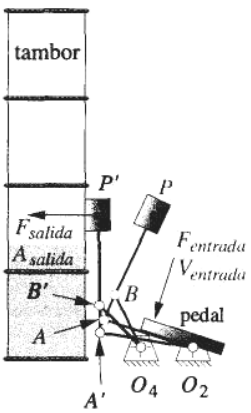


FIGURA P7-24

Problema 7-55

trayectoria de la banda. ¿Qué indica su análisis sobre el comportamiento dinámico de la banda? Relacione sus cálculos con su observación personal de una banda de este tipo en funcionamiento. (Busque en la máquina de venta de su escuela o en el sistema que baja el toldo de un automóvil, ¡pero cuide sus dedos!)

†7-58 Escriba un programa usando un resolvedor de ecuaciones o cualquier lenguaje de computadora para encontrar los desplazamientos, velocidades y aceleraciones en un eslabonamiento de manivela-corredera de corrimiento como el que se muestra en la figura P7-2. Grafique la variación de todos los eslabones angulares y las posiciones lineales de todos los pasadores, velocidades y aceleraciones con una velocidad angular de entrada constante a la manivela, sobre una revolución para ambas configuraciones, abierta y cruzada, del eslabonamiento. Para probar el programa use los datos del renglón *a* de la tabla P7-2. Verifique sus resultados con el programa SLIDER.

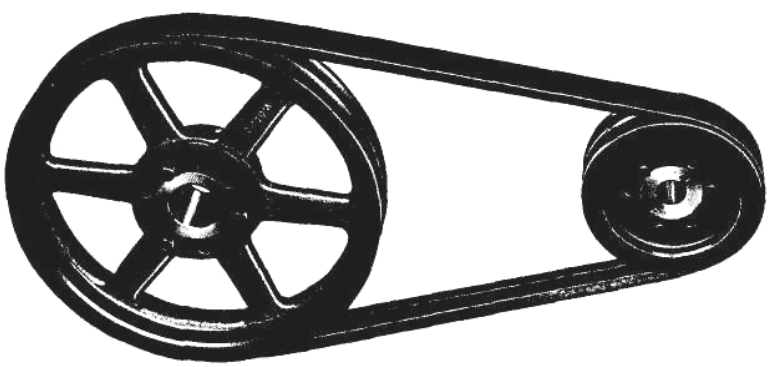


FIGURA P7-26

Problema 7-57. Una banda en forma de V con dos ranuras *Cortesía de T. B. Wood's Sons Co., Chambersburg, Pensilvania*

† Estos problemas son adecuados para solucionarse usando los programas resolvedores de ecuaciones: *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

†7-59 Escriba un programa usando un resolvedor de ecuaciones o cualquier lenguaje de computación para determinar los desplazamientos, velocidades y aceleraciones en un eslabonamiento de manivela-corredera invertida como el que se muestra en la figura P7-3. Grafique la variación en todos los eslabones angulares y todas las posiciones lineales de todos los pasadores, velocidades y aceleraciones con una velocidad angular de entrada constante a la manivela, sobre una revolución para ambas configuraciones, abierta y cruzada, del eslabonamiento. Para probar el programa use los datos del renglón *e* de la tabla P7-3 excepto el valor de α_2 que se dejará en cero para este ejercicio.

†7-60 Escriba un programa usando un resolvedor de ecuaciones o cualquier lenguaje de computación para determinar los desplazamientos, velocidades y aceleraciones en un engranaje con eslabonamiento de cinco barras como el que se muestra en la figura P7-4. Grafique la variación de todos los eslabones angulares y todas las posiciones lineales de todos los pasadores, velocidades y aceleraciones con una velocidad angular de entrada constante a la manivela, sobre una revolución para ambas configuraciones abierta y cruzada del eslabonamiento. Para probar el programa use los datos del renglón *a* de la tabla P7-4. Verifique sus resultados con el programa FIVEBAR.

† Estos problemas son adecuados para solucionarse usando los programas resolvedores de ecuaciones: *Mathcad*, *Matlab* o *TKSolver*.

Capítulo 8



DISEÑO DE LEVAS

Es mucho más fácil diseñar que hacer funcionar.
SAMUEL JOHNSON

8.0 INTRODUCCIÓN

8

Los sistemas de leva-seguidor se usan con frecuencia en todo tipo de máquinas. Las válvulas del motor de su automóvil se abren por levas. Las máquinas que se utilizan en la fabricación de muchos artículos de consumo están llenas de levas. Comparadas con los eslabonamientos, las levas son más fáciles de diseñar para dar una función específica de salida, pero su producción es más difícil y cara que la de un eslabonamiento. Las levas son una forma de eslabonamiento de cuatro barras degradado en el que el eslabón acoplador se remplazó por una semijunta como se observa en la figura 8-1. Este tema se analizó en la sección 2.9, donde se expuso la transformación de eslabonamientos (véase también la figura 2-10). Para cualquier posición instantánea de leva-seguidor se puede sustituir un eslabonamiento efectivo que tendrá el mismo movimiento que el original para dicha posición instantánea. En efecto, la leva-seguidor es un eslabonamiento de cuatro barras con eslabones de longitud variable (efectiva). Ésta es la diferencia conceptual que hace de la leva-seguidor un **generador de función** flexible y útil. Se puede especificar virtualmente cualquier función de salida que se desee y quizá crear una superficie curva en la leva para generar esa función en el movimiento del seguidor. No se está limitado a eslabones de longitud fija como se estaba en la síntesis de eslabonamientos. La leva-seguidor es un dispositivo mecánico sumamente útil, sin el cual las tareas del diseñador de maquinaria serían más difíciles de llevar a cabo. Pero, como en todo en la ingeniería, existen transacciones. Esto se analizará en secciones posteriores. En la tabla 8-1 se proporciona una lista de las variables empleadas en este capítulo.

En este capítulo se presentará el enfoque adecuado para diseñar un sistema de leva-seguidor, y en el proceso también se incluirán algunos diseños inadecuados como ejemplos de los problemas en los que a menudo se meten los diseñadores de levas inexpertos. Se analizarán las consideraciones teóricas de las funciones matemáticas empleadas generalmente para las curvas de levas. Se presentarán los métodos para la derivación de funciones polinomiales comunes que satisfacen cualquier serie de condiciones de fronte-

TABLA 8-1 Notación utilizada en este capítulo

t = tiempo, segundos
θ = ángulo del árbol de levas, grados o radianes (rad)
ω = velocidad angular del árbol de levas, rad/s
β = ángulo total de cualquier segmento, subida, bajada o detenimiento, grados o radianes
h = levantamiento total (subida o bajada) de un segmento cualquiera, unidades de longitud
s o S = desplazamiento del seguidor, unidades de longitud
$v = ds/d\theta$ = velocidad del seguidor, long/rad
$V = dS/dt$ = velocidad del seguidor, long/s
$a = dv/d\theta$ = aceleración del seguidor, long/rad^2
$A = dV/dt$ = aceleración del seguidor, long/s^2
$j = da/d\theta$ = rapidez de aceleración del seguidor, long/rad^3
$J = dA/dt$ = rapidez de aceleración del seguidor, long/s^3
s v a j se refiere al grupo de diagramas, unidades de longitud *versus* radianes
S V A J se refiere al grupo de diagramas, unidades de longitud *versus* unidades de tiempo
R_b = radio del círculo base, unidades de longitud
R_p = radio del círculo primitivo, unidades de longitud
R_f = radio del seguidor de rodillo, unidades de longitud
ε = excentricidad de la leva-seguidor, unidades de longitud
ϕ = ángulo de presión, grados o radianes
ρ = radio de curvatura de superficie de leva, unidades de longitud
ρ_{paso} = radio de curvatura de la curva de paso, unidades de longitud
$\rho_{mín}$ = radio de curvatura mínimo de curva de paso o de superficie de leva, unidades de longitud

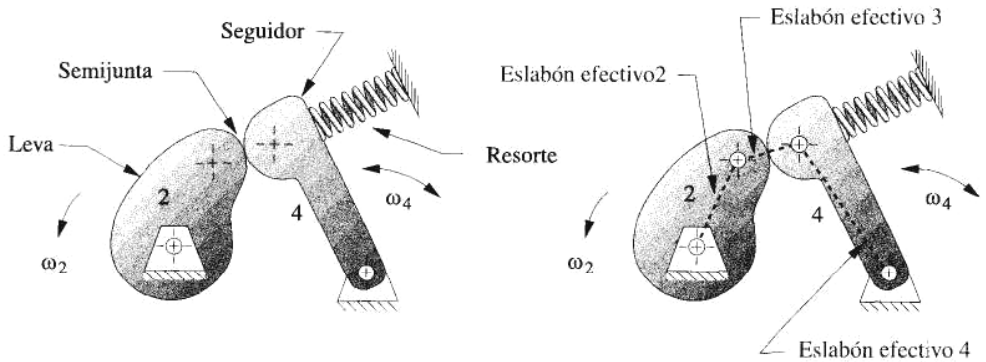
ra. Se estudiará la tarea de dimensionar la leva con consideraciones del ángulo de presión y del radio de curvatura, y se analizarán los procesos de fabricación y sus limitaciones. A lo largo del capítulo se empleará el programa de computadora DYNACAM como una herramienta para presentar e ilustrar los conceptos y soluciones de diseño. En el apéndice A se incluye un manual del usuario para este programa. El lector puede consultar esa sección en cualquier momento, sin perder la continuidad, para acostumbrarse a la operación del programa.

8.1 TERMINOLOGÍA DE LOS MECANISMOS DE LEVA

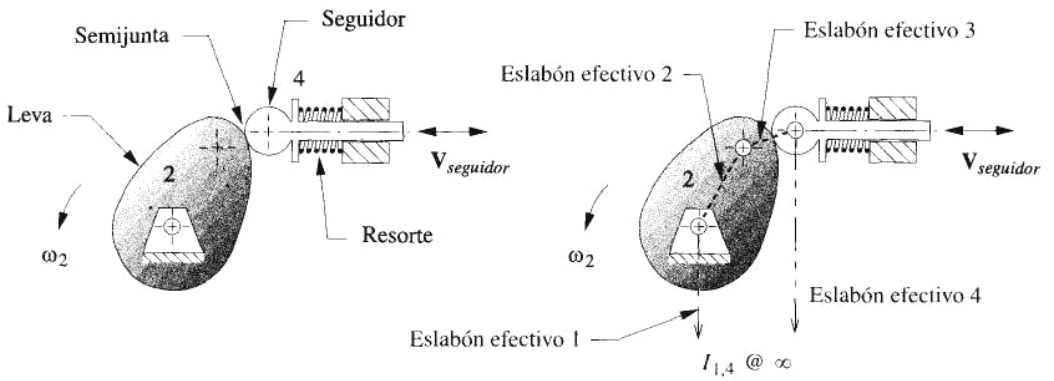
Los sistemas de leva-seguidor se pueden clasificar de diversas maneras: por el *tipo de movimiento del seguidor:* **traslatorio** o **rotatorio** (oscilatorio); por el tipo de leva, radial, cilíndrica, tridimensional; por el *tipo de cierre de junta*, con cierre **de forma** o **de fuerza;** por el *tipo de seguidor*, **curvo** o **plano, rodante** o **deslizante;** por el *tipo de restricciones de movimiento*, **posición extrema crítica (PEC), movimiento en trayectoria crítica** (MTC); por el *tipo de programa de movimiento*, de **subida-bajada (SB), subida-bajada-paro (SBP), subida-paro-bajada-paro** (SPBP). Ahora se analizará con más detalle cada uno de estos esquemas de clasificación.

Tipo de movimiento del seguidor

En la figura 8-la) se muestra un sistema con un **seguidor rotatorio** u oscilatorio. En la figura 8-l¿,) se muestra un **seguidor traslatorio.** Éstos son análogos a los eslabonamientos de cuatro barras de manivela-balancín y de manivela-corredera, respectivamente. Un eslabonamiento de cuatro barras efectivo puede sustituirse por un sistema de leva-seguidor para cualquier posición instantánea. Las longitudes de los eslabones efectivos se determinan por las localizaciones instantáneas de los centros de curvatura de la leva y el seguidor como se muestra en la figura 8-1. Las velocidades y aceleraciones del sistema de leva-seguidor se determinan analizando el comportamiento del eslabonamiento efectivo para cualquier posición. Una prueba de esto se encuentra en la referencia [1]. Desde



a) Una leva-seguidor oscilatoria tiene el equivalente de un eslabonamiento de cuatro barras con juntas de pasador efectivo



b) Una leva-seguidor traslatoria tiene el equivalente de un eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera efectivo

FIGURA 8-1

Eslabonamientos efectivos en la leva-seguidor

luego, los eslabones efectivos cambian de longitud conforme se mueve la leva-seguidor, lo que le da una ventaja sobre un eslabonamiento puro, ya que éste permite mayor flexibilidad al cumplir las restricciones del movimiento deseado.

La opción entre estas dos formas de leva-seguidor generalmente se decide por el tipo de movimiento de salida deseado. Si se requiere de una traslación rectilínea real, entonces se elige el seguidor traslatorio. Si se necesita de una rotación pura de salida, entonces el oscilatorio es la opción obvia. Existen ventajas para cada uno de estos enfoques, independientemente de sus características de movimiento, de acuerdo con el tipo de seguidor elegido. Esto se analizará en una sección posterior.

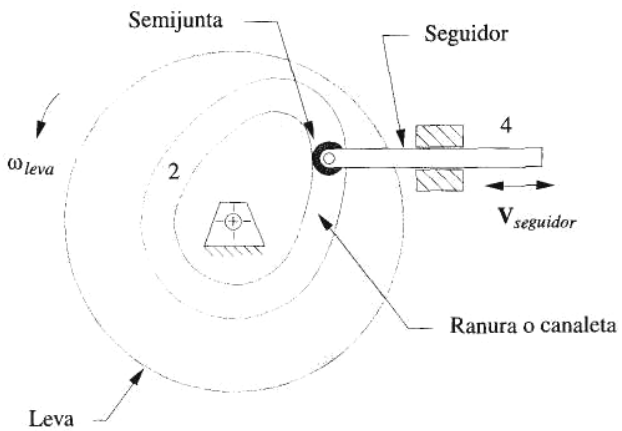
Tipo de cierre de junta

En la sección 2.3, en el tema de juntas, se analizaron los **cierres de fuerza y de forma,** que aquí tienen el mismo significado. El **cierre de fuerza,** como se muestra en la figura 8-1, *requiere que se aplique a la junta una fuerza externa* para mantener los dos eslabones, la leva y el seguidor, en contacto físico. Usualmente esta fuerza es proporcionada por un resorte. No se puede permitir que esta fuerza, definida como positiva en una dirección que cierra la junta, se convierta en negativa. Si esto ocurriera los eslabones habrían perdido contacto debido a que *una junta con cierre de fuerza sólo se puede impulsar, no arrastrar.* El **cierre de forma,** como se muestra en la figura 8-2, *cierra la junta por geometría.* No se requiere de ninguna fuerza externa. En realidad, hay dos superficies de leva en esta combinación, una superficie en cada lado del seguidor. Cada superficie se empuja, en su turno, para impulsar el seguidor en ambas direcciones.

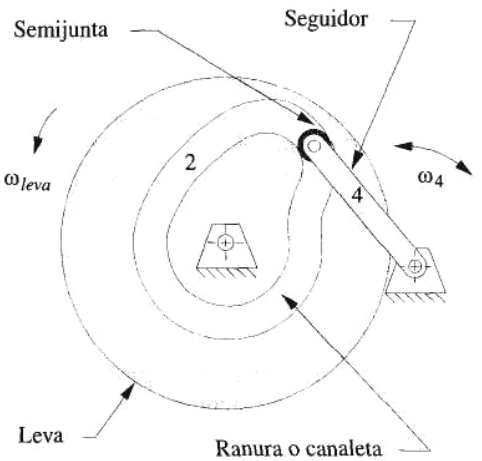
En la figura 8-2a) y *b)* se muestran levas de ranura o pista que toman al seguidor por la ranura y se impulsan y arrastran sobre el seguidor. En la figura 8-2c) se muestra otra variedad de la combinación de leva-seguidor con cierre de forma, denominada de **levas conjugadas.** Hay dos levas fijas sobre un eje común que son conjugados matemáticos entre sí. Dos seguidores rodantes, conectados a un brazo común, se empujan en direcciones opuestas por las levas conjugadas. Cuando se usan levas con cierre de forma en trenes de válvulas de motor de automóvil o motocicleta se llaman **levas desmodrómicas.** Hay ventajas y desventajas para las combinaciones de cierre de forma y de fuerza que se analizarán en una sección posterior.

Tipo de seguidor

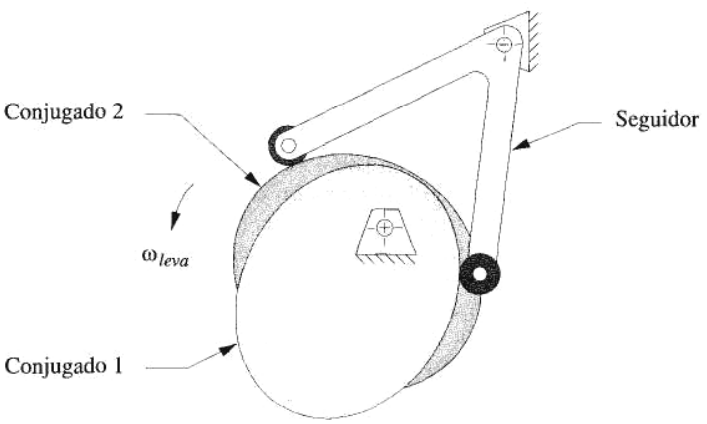
En este contexto el seguidor se refiere solamente a dicha parte del eslabón seguidor que está en contacto con la leva. En la figura 8-3 se muestran tres combinaciones comunes, **de cara plana, de hongo** (curva) y **de rodillo.** El seguidor de rodillo tiene la ventaja de tener fricción baja (rodante) a diferencia del contacto deslizante de los otros dos, pero puede ser más costoso. Los **seguidores de cara plana** pueden compactarse más que los seguidores de rodillo para ciertos diseños de levas, por lo que usualmente suelen preferirse, así como por el costo, en los trenes de válvulas de motores de automóviles. Los **seguidores de rodillo** se usan con más frecuencia en la maquinaria de producción por las ventajas que implica la facilidad de remplazarías y la disponibilidad de existencias de producción de los fabricantes en cualquier cantidad. Las levas de ranura o de pista requieren seguidores de rodillo. Los seguidores de rodillo son esencialmente cojinetes de bolas o rodillos con detalles de montaje a la medida. En la figura 8-5a) se muestran dos tipos comunes de seguidores de rodillo comerciales. Por lo general, los **seguidores de cara plana** o **de hongo** están diseñados a la medida y fabricados para cada aplicación. Para aplicaciones



o) Leva con cierre de forma y seguidor traslatorio



b) Leva con cierre de forma y se;guidor oscilatorio



c) Levas conjugadas en un eje común

FIGURA 8-2

Sistemas de leva-seguidor con cierre de forma

de alto volumen, como en los motores de automóviles, las cantidades son lo suficientemente grandes para garantizar un seguidor diseñado a la medida.

Tipo de leva

La dirección del movimiento del seguidor con respecto al eje de rotación de la leva determina si es una leva **radial** o **axial.** Todas las levas que se muestran en las figuras 8-1 a 8-3 son radiales, debido a que generalmente el movimiento del seguidor está en una dirección radial. A las **levas radiales** abiertas también se les denomina **levas de placa.**

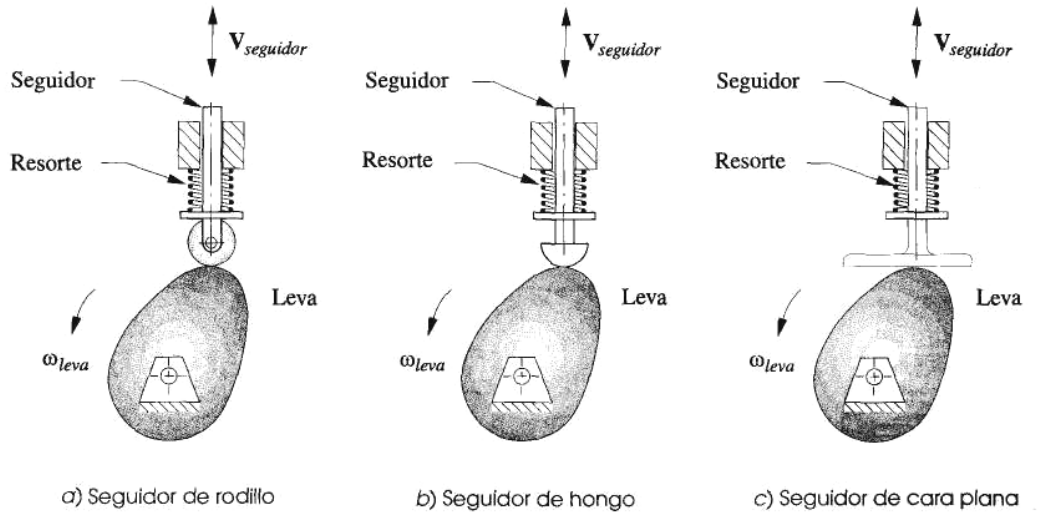


FIGURA 8-3

Tres tipos comunes de leva-seguidor

En la figura 8-4 se muestra una **leva axial** cuyo seguidor se mueve paralelamente al eje de rotación de la leva. A esta combinación se le denomina también leva de **cara** si es abierta (con cierre de fuerza) y leva **cilíndrica** o de **barrilete** si es ranurada o acanalada (con cierre de forma).

En la figura 8-5£») se muestra una selección de levas de diversos tipos. Desde la parte inferior izquierda, en sentido de las manecillas del reloj, son: una leva axial abierta (con

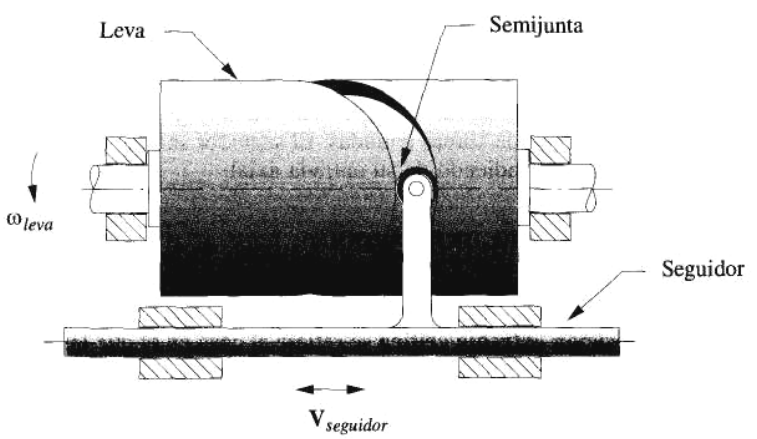
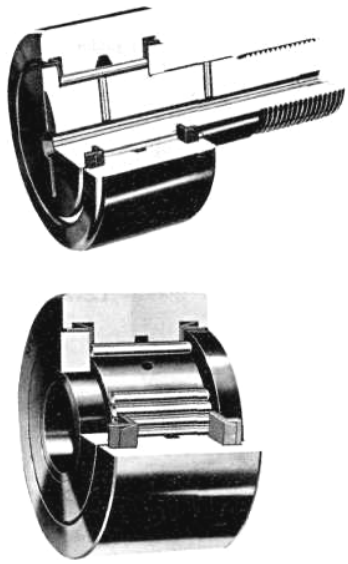
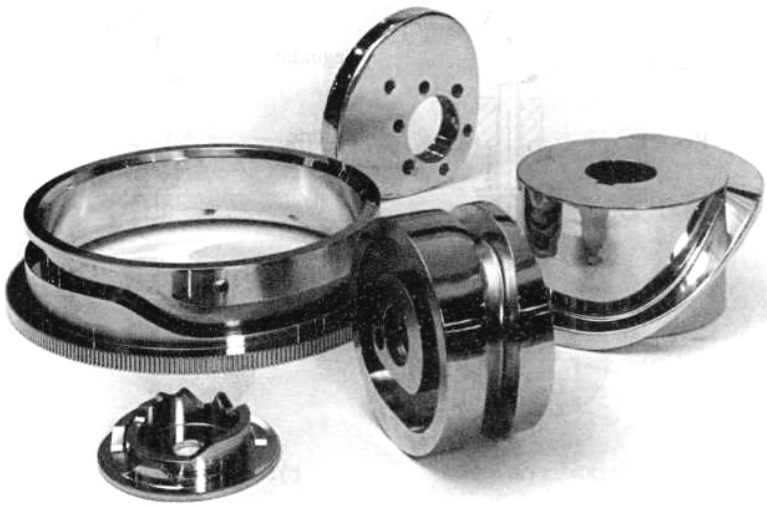


FIGURA 8-4

Leva axial cilíndrica o de barrilete con seguidor traslatorio y cierre de forma



a) Seguidores de rodillo comerciales
Cortesía de McGill Manufacturing Co.
South Bend, Indiana



b) Levas comerciales de varios tipos
Cortesía de The Ferguson Co.
St. Louis, Missouri

FIGURA 8-5
Levas y seguidores de rodillo

cierre de fuerza) o leva de cara; una leva axial (de pista) ranurada (con cierre de forma) con engrane exterior; una leva radial abierta o una leva de placa (con cierre de fuerza); una leva axial acanalada (con cierre de forma); una leva axial ranurada (de barrilete).

Una **leva tridimensional** o **levoide** (no mostrada) es una combinación de levas radiales y axiales. Es un sistema con dos grados de libertad. Las dos entradas son la rotación de la leva con respecto a su eje y la traslación de la leva a lo largo de su eje. El movimiento del seguidor es una función de ambas entradas. El seguidor se mueve a lo largo de una parte diferente de la leva dependiendo de su entrada axial.

Tipos de restricciones de movimiento

Hay dos categorías generales de restricción del movimiento: la **posición extrema crítica** (PEC; también llamada especificación de punto final), y el **movimiento de trayectoria crítica (MTC). La posición extrema crítica** se refiere al caso en el que las especificaciones de diseño definen las posiciones inicial y final del seguidor (es decir, posiciones extremas), pero no especifican ninguna restricción sobre el movimiento de trayectoria entre las posiciones extremas. Este caso se analiza en las secciones 8.3 y 8.4 y es el más fácil de diseñar de los dos, ya que el diseñador tiene una gran libertad para elegir las

funciones de leva que controlan el movimiento entre los extremos. El **movimiento de trayectoria crítica** es un problema más restringido que el PEC debido a que el movimiento de trayectoria, y/o uno o más de sus derivados se definen sobre todo o parte del intervalo de movimiento. Esto es análogo a la **generación de función** en el caso de diseño de eslabonamiento, excepto que con una leva se puede llevar a cabo una función de salida continua para el seguidor. En la sección 8.6 se analiza este caso de MTC. Sólo es posible crear una aproximación de la función específica y aún mantener conveniente el comportamiento dinámico.

Tipo de programa de movimiento

Los programas de movimiento de **subida-bajada (SB), subida-bajada-paro (SBP) y** de **subida-paro-bajada-paro** (SPBP) se refieren principalmente al caso de restricción de movimiento PEC y en efecto definen cuántos detenimientos se presentan en el ciclo completo de movimiento, ya sea ninguno (SB), uno (SPB) o más de uno (SPBP). Los **detenimientos,** definidos como *ningún movimiento de salida durante un periodo especificado de movimiento de entrada,* son una característica importante de los sistemas de leva-seguidor, debido a que es muy fácil crear detenimientos exactos en estos mecanismos. La leva-seguidor es el tipo de diseño escogido siempre que se requiere un detenimiento. En la sección 3.9 se expuso cómo diseñar eslabonamientos con detenimiento, y se encontró que a lo más se podría obtener un detenimiento aproximado. Los eslabonamientos resultantes con detenimiento simple o doble tienden a ser muy grandes para su movimiento de salida y son un poco difíciles de diseñar. (Véase el programa SIXBAR para algunos ejemplos que se incluyen de estos eslabonamientos con detenimiento.) Los sistemas de leva-seguidor tienden a ser más compactos que los eslabonamientos para el mismo movimiento de salida.

Usted necesita tener un movimiento PEC con **subida-bajada** (SB), sin detenimiento, entonces debe estar considerando realmente un eslabonamiento de manivela-balancín en lugar de uno de leva-seguidor para obtener todas las ventajas del eslabonamiento sobre las levas, de seguridad, facilidad de construcción y bajo costo que se analizaron en la sección 2.15. Si lo que necesita es reducir el tamaño valore esas consideraciones, entonces puede justificarse la opción de una leva-seguidor en el caso de SB. O bien, si tiene una especificación de diseño MTC, y el movimiento o sus derivados se definen sobre el intervalo, entonces la opción lógica en el caso de SB sería un sistema de leva-seguidor.

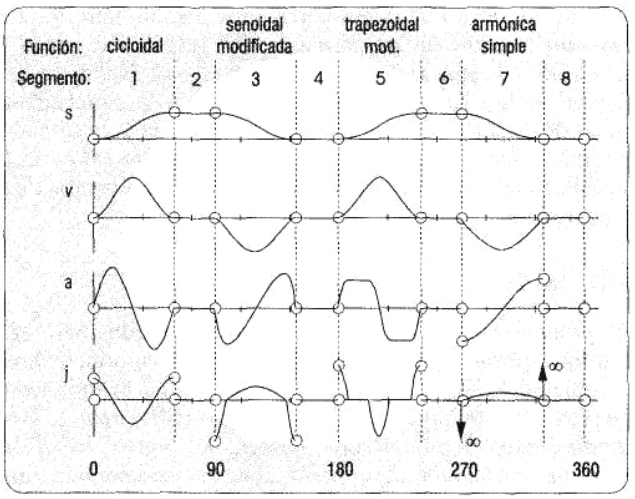
Los casos de **subida-bajada-paro (SBP) y subida-paro-bajada-paro** (SPBP) son opciones obvias de leva-seguidor por las razones antes analizadas. Sin embargo, cada uno de estos dos casos tiene su propio conjunto de restricciones sobre el comportamiento de las funciones de la leva en las interfaces entre los segmentos que controlan la subida, la bajada y los detenimientos. En general, se deben acoplar las **condiciones de frontera** (CF) de las funciones y sus derivadas, en todas las interfaces entre los segmentos de la leva. Este tema se estudiará a fondo en las siguientes secciones.

8.2 DIAGRAMAS *S VA J*

La primera tarea a que se enfrenta el diseñador de levas es seleccionar las funciones matemáticas que se utilizarán para definir el movimiento del seguidor. El enfoque más

Número del segmento	Función utilizada	Ángulo inicial	Ángulo final	Ángulo delta
1	Subida cicloidal	0	60	60
2	Detenimiento	60	90	30
3	Bajada senoidal mod.	90	150	60
4	Detenimiento	150	180	30
5	Subida trap. mod.	180	240	60
6	Detenimiento	240	270	30
7	Baj. armónica simple	270	330	60
8	Detenimiento	330	360	30

a) Especificaciones del programa de levas



b) Gráficas de los diagramas *s v a j* de la leva-seguidor

FIGURA 8-6

Funciones cicloidal, senoidal modificada, trapezoidal modificada y de movimiento armónico simple en una leva con cuatro detenimientos

8

fácil para este proceso es "linealizar" la leva, es decir, "desenrollarla" de su forma circular y considerarla como una función graneada en ejes cartesianos. Se gráfica la función de desplazamiento *s,* su primera derivada velocidad v, su segunda derivada aceleración a y su tercera derivada rapidez de aceleración *j,* todas en ejes alineados como una función del ángulo 0 del árbol de levas como se muestra en la figura 8-6. Advierta que en estas gráficas se puede considerar la variable independiente para ser el tiempo *t* o el ángulo θ del eje, ya que se conoce la velocidad angular constante ω del árbol de levas, y puede convertirse fácilmente de ángulo a tiempo y viceversa.

$$\theta = \omega t \tag{8.1}$$

En la figura 8-6a) se muestran las especificaciones para una leva con cuatro detenimientos que tiene ocho segmentos, SPBPSPBP. En la figura 8-6b) se muestran las curvas *s v a j* para la leva completa sobre 360° de rotación del árbol de levas. El diseño de una leva comienza con la definición de las funciones de leva requeridas y de sus diagramas *s v a j.* Las funciones para los segmentos de las levas sin detenimiento deben elegirse con base en las características de su velocidad, aceleración y rapidez de aceleración, y las relaciones en las interfaces entre los segmentos adyacentes, incluyendo los detenimientos. Estas características de la función se pueden investigar rápida y convenientemente con el programa DYNACAM, el cual generó los datos y las gráficas mostrados en la figura 8-6.

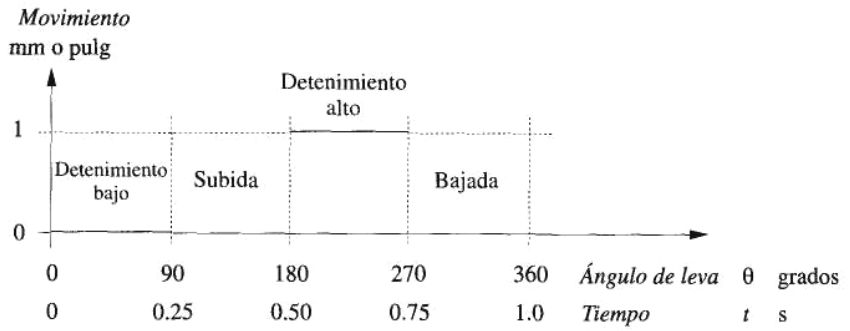


FIGURA 8-7
Diagrama de temporización de leva

8.3 DISEÑO DE LEVAS CON DOBLE DETENIMIENTO. SELECCIÓN DE LAS FUNCIONES *S VA J*

Muchas aplicaciones del diseño de levas requieren detenimientos múltiples. El caso del doble detenimiento es bastante común. Quizá una leva con **doble detenimiento** impulse una estación alimentadora de partes en una máquina de producción de pastas dentales. El seguidor de la leva hipotética alimenta un tubo vacío (durante el detenimiento bajo), luego mueve el tubo vacío a una estación de carga (durante la subida), mantiene el tubo absolutamente inmóvil en una **posición extrema crítica** (PEC) mientras se inyecta la pasta dental en la parte inferior abierta del tubo (durante el detenimiento alto), y luego retrocede el tubo lleno a la posición de partida (cero) y lo mantiene en esta otra posición extrema crítica. En este punto otro mecanismo (durante el detenimiento bajo) sujeta el tubo y lo lleva a la siguiente operación, que quizá sea sellar la parte inferior del tubo. También podría utilizarse una leva similar para alimentar, alinear y alejar el tubo en la estación selladora del fondo.

Las especificaciones de levas como ésta se representan a menudo en un diagrama de temporización como se muestra en la figura 8-7, el cual es una representación gráfica de los eventos especificados en el ciclo de máquina. Un **ciclo de máquina** se define como *una revolución de su eje impulsor maestro.* En una máquina complicada, como la productora de pasta dental, habrá un **diagrama de temporización** para cada subconjunto en la máquina. Las relaciones de tiempo entre todos los subconjuntos están definidas por sus diagramas de temporización que se trazan sobre un eje de tiempo común. Obviamente todas estas operaciones deben mantenerse en sincronía y fase de tiempo precisas para que la máquina opere.

El ejemplo simple que se ilustra en la figura 8-7 es un caso de posición extrema crítica (PEC), debido a que no se especifica nada acerca de las funciones que se utilizarán para obtener desde la posición de detenimiento bajo (un extremo) hasta la posición de detenimiento alto (otro extremo). El diseñador tiene libertad para elegir cualquier función que realizará el trabajo. Observe que estas especificaciones contienen sólo la información acerca de la función de desplazamiento. Las derivadas superiores no están específicamente restringidas en este ejemplo. Ahora se utilizará este problema para investigar muchas maneras diferentes de satisfacer las especificaciones.

EJEMPLO 8-1

Diseño de leva por un novato. Una leva defectuosa.

Problema: Considere la siguiente especificación PEC de diseño de leva:

detenimiento	en desplazamiento cero para 90° (detenimiento bajo)
subida	1 pulg (25 mm) en 90°
detenimiento	en 1 pulg (25 mm) para 90° (detenimiento alto)
bajada	1 pulg (25 mm) en 90°
ω **leva**	2 π rad/s = 1 rev/s

Solución:

! El diseñador de levas novato o inexperto podría proceder a realizar un diseflo como el que se muestra en la figura 8-8a). Tomando literalmente las especificaciones dadas, se ve tentado a limitarse a "conectar los puntos" en el diagrama de temporización para crear el diagrama de desplazamiento *(s).* (Después de todo, cuando este diagrama *s* se encierra en un círculo para construir la leva real parecerá muy "plano" a pesar de las esquinas puntiagudas que lo caracterizan.) El error que comete aquí el diseñador principiante es ignorar el efecto sobre las derivadas superiores de la función de desplazamiento que resulta de este enfoque simplista.

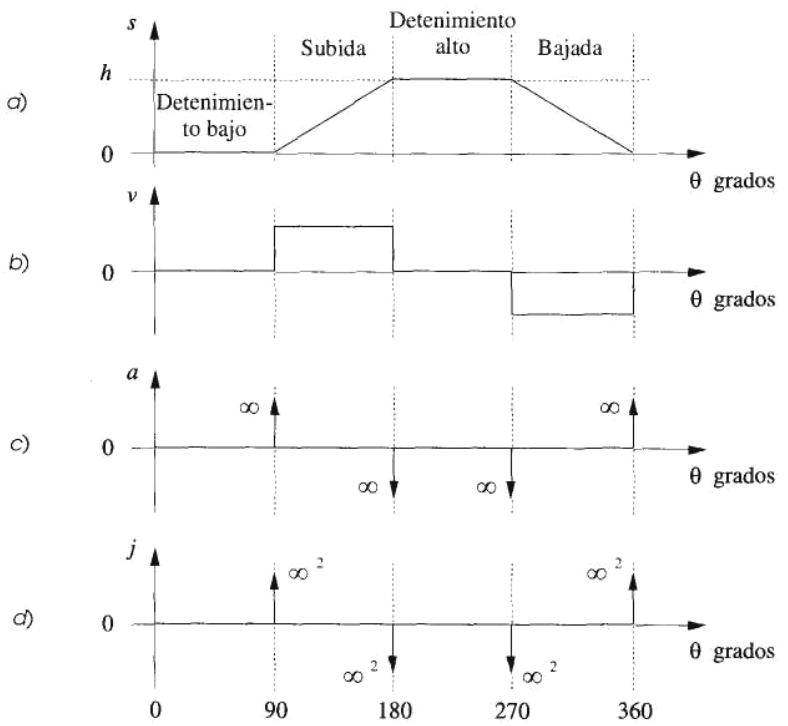


FIGURA 8-8

Diagramas *s v a j* de un diseño de leva "defectuoso"

2 La figura 8-8*b*), *c*) y *d)* ilustra el problema. Observe que se tiene que tratar cada segmento de la leva (subida, bajada, paro) como una entidad separada en el desarrollo de las funciones matemáticas para la leva. Al tomar primero el segmento de subida (núm. 2), la función de desplazamiento en la figura 8-8a) durante esta parte es un polinomio lineal o de primer grado. La ecuación general para una línea recta es:

$$y = mx + b \tag{8.2}$$

donde *m* es la pendiente de la línea y *b* es la intersección y. Al sustituir las variables apropiadas para este ejemplo en la ecuación 8.2, el ángulo θ remplazará la variable independiente *x,* y el desplazamiento s remplazará la variable dependiente y. Por definición, la pendiente constante *m* del desplazamiento es la constante de velocidad K_v.

3 Para el segmento de subida, la intersección y, *b* es cero debido a que por conveniencia se tomó la posición de detenimiento bajo como desplazamiento cero. La ecuación 8.2 se convierte entonces:

$$s = K_v\theta \tag{8.3}$$

4 Derivando con respecto a θ se obtiene una función para la velocidad durante la subida:

$$v = K_v = \text{constante} \tag{8.4}$$

5 Derivando de nuevo con respecto a θ se obtiene una función para la aceleración durante la subida:

$$a = 0 \tag{8.5}$$

Esto parece demasiado bueno para ser verdad (y lo es). La aceleración cero significa fuerza dinámica cero. ¡Esta leva parece no tener fuerzas dinámicas o esfuerzos en ella!

En la figura 8-8 se muestra lo que en realidad está pasando. Si se regresa a la función de desplazamiento y se deriva gráficamente dos veces, se observará que, de la definición de la derivada como la pendiente instantánea de la función, la aceleración es, de hecho, cero **durante el intervalo.** *Pero, en las fronteras del intervalo,* donde la subida encuentra al detenimiento bajo en un lado y al detenimiento alto en el otro, observe que *la función de velocidad es polivalente. Existen discontinuidades en estas fronteras.* El efecto de estas discontinuidades es crear una parte de la curva de velocidad que tiene **pendiente infinita** y duración cero. Esto da como resultado las *puntas infinitas de aceleración* que se muestran en esos puntos.

Estas puntas son llamadas más propiamente **funciones delta de Dirac.** En realidad, la aceleración infinita no puede obtenerse, puesto que requiere de una fuerza infinita. Evidentemente, las fuerzas dinámicas serán muy grandes en estas fronteras y generarán esfuerzos altos y deterioro rápido. De hecho, si se construyese esta leva y funcionara a cualquier velocidad significativa, las esquinas puntiagudas en el diagrama de desplazamiento que crean estas aceleraciones teóricamente infinitas llevarían de inmediato a un contorno más plano por los esfuerzos insostenibles generados en los materiales. *Éste es un diseño inaceptable.*

La inaceptabilidad de este diseño se refuerza por el diagrama de **rapidez de aceleración** que muestra valores teóricos de **infinidad al cuadrado** en las discontinuidades. El problema se ha generado por una opción inadecuada de la función de desplazamiento. De

hecho, al diseñador de levas no debe interesarle tanto la función de desplazamiento como sus derivadas superiores.

Ley fundamental del diseño de levas

Cualquier leva diseñada para operar a velocidades muy bajas debe diseñarse con las siguientes restricciones:

La función de leva debe ser continua por la primera y segunda derivadas del desplazamiento a través de todo el intervalo (360 grados)

corolario:

La función de rapidez de aceleración debe ser finita a través de todo el intervalo (360 grados).

En todas, incluso en la más simple de las levas, el programa de movimiento de leva no se define por una simple expresión matemática, sino que debe definirse por diversas funciones separadas, cada una de las cuales define el comportamiento del seguidor sobre un segmento, o pieza, de la leva. Estas expresiones se denominan algunas veces como *funciones parte por parte.* Estas funciones deben tener **continuidad de tercer orden** (la función más dos derivadas) en todas las fronteras. **Las funciones de desplazamiento, velocidad y aceleración no deben tener discontinuidades en las tonteras.***

Si existiera cualquier discontinuidad en la función de aceleración, entonces habría puntas infinitas, o funciones delta de Dirac, apareciendo en la derivada de la aceleración, rapidez de aceleración. A esto se debe que el corolario se limite a restablecer la ley fundamental del diseño de levas. Nuestro diseñador inexperto falló al reconocer que al iniciar con un polinomio de grado bajo (lineal), como la función de desplazamiento, aparecerían discontinuidades en las derivadas superiores.

Las funciones polinomiales son una de las mejores opciones para las levas como se verá en breve, pero tienen una falla que puede llevar a problemas en esta aplicación. Cada vez que se derivan se reducen en un grado. Eventualmente, después de suficientes derivaciones, los polinomios se degeneran al grado cero (un valor constante) como lo muestra la función de velocidad de la figura 8-8*b*). Por consiguiente, al iniciar con un polinomio de primer grado como una función de desplazamiento, fue inevitable que las discontinuidades aparecieran rápidamente en sus derivadas.

Para obedecer la ley fundamental del diseño de levas se debe comenzar con al menos un polinomio de tercer grado (cúbico) como la función de desplazamiento. Esto se degenerará en una función de primer grado en la aceleración. La función de rapidez de aceleración tendrá discontinuidades, y la derivada (sin nombre) de la rapidez de aceleración tendrá picos infinitos. Esto es aceptable cuando la rapidez de aceleración aún es finita.

* Esta regla la formuló Neklutin,[2] pero algunos otros autores se la adjudican.[3], [4] A pesar de la pequeña controversia sobre este tema, este autor cree que es una buena regla (y simple) a seguir para obtener resultados dinámicos aceptables con levas a alta velocidad.

Movimiento armónico simple (MAS)

El diseñador de levas inexperto reconoció su error al elegir una función lineal para el desplazamiento. También recordó una familia de funciones que había aprendido en un curso de cálculo, las cuales tienen la propiedad de permanecer continuas a lo largo de cualquier número de derivaciones. Estas son las funciones armónicas. En la derivación repetida el seno será coseno, que se convierte en seno negativo, que será un coseno negativo, etcétera, hasta el infinito. Uno nunca se queda sin derivadas con la familia

armónica de curvas. De hecho, la derivación de una función armónica equivale en realidad a un corrimiento de 90° de la función. Sin embargo, esto es como usted lo derivó, como si recortara con unas tijeras una parte diferente de la misma función senoidal continua, que se define del menos infinito al más infinito. Las ecuaciones del movimiento armónico simple (MAS) para un movimiento de subida son:

$$s = \frac{h}{2}\left[1 - \cos\left(\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right] \tag{8.6a}$$

$$v = \frac{\pi}{\beta}\frac{h}{2}\operatorname{sen}\left(\pi\frac{\theta}{\beta}\right) \tag{8.6b}$$

$$a = \frac{\pi^2}{\beta^2}\frac{h}{2}\cos\left(\pi\frac{\theta}{\beta}\right) \tag{8.6c}$$

$$j = \frac{\pi^3}{\beta^3}\frac{h}{2}\operatorname{sen}\left(\pi\frac{\theta}{\beta}\right) \tag{8.6d}$$

donde h es la subida total, o ascenso, θ es el ángulo del árbol de levas y β es el ángulo total del intervalo de subida.

Aquí se ha introducido una notación para simplificar las expresiones. La variable independiente en las funciones de leva es θ, el ángulo del árbol de levas. El periodo de un segmento cualquiera se define como el ángulo β. Desde luego, su valor puede ser distinto para cada segmento. La variable independiente θ se regulara al dividirla entre el periodo del segmento β. Ambas, θ y β, se miden en radianes (o ambas en grados). El valor de θ/β variará entonces desde 0 hasta 1 sobre cualquier segmento. Es una relación adimensional. En las ecuaciones 8.6 se definen, en términos θ/β, el movimiento armónico simple y sus derivadas para este segmento de subida.

Esta familia de funciones armónicas se muestra, a primera vista, como muy adecuada para el problema anterior de diseño de levas. Si se define la función de desplazamiento como una de las funciones armónicas, no debemos "quedarnos sin derivadas" antes de obtener la aceleración.

EJEMPLO 8-2

Diseño superficial* de una leva-movimiento armónico simple-Sigue siendo una leva defectuosa.

Problema: Considere la misma especificación PEC de diseño de leva del ejemplo 8-1:

detenimiento	en desplazamiento cero para 90° (detenimiento bajo)
subida	1 pulg (25 mm) en 90°
detenimiento	en 1 pulg (25 mm) para 90° (detenimiento alto)
bajada	1 pulg (25 mm) en 90°
ω leva	2π rad/s = 1 rev/s

Solución:

1 En la figura 8-9 se muestra una función armónica simple de subida completa† aplicada al segmento de subida del problema de diseño de leva.

* **Sofomórico,** de sofomoro, *def. sabihondo,* del griego, *sofos = sabiduría, moros = tonto.*

† Aunque ésta es en realidad una onda cosenoidal de semiperiodo, se le denominará función armónica simple de *subida completa* (o *bajada completa)* para diferenciarla de la función armónica simple de *media subida* (y *media bajada)* que es en realidad una cosenoidal de un cuarto de periodo (véase la sección 8.6).

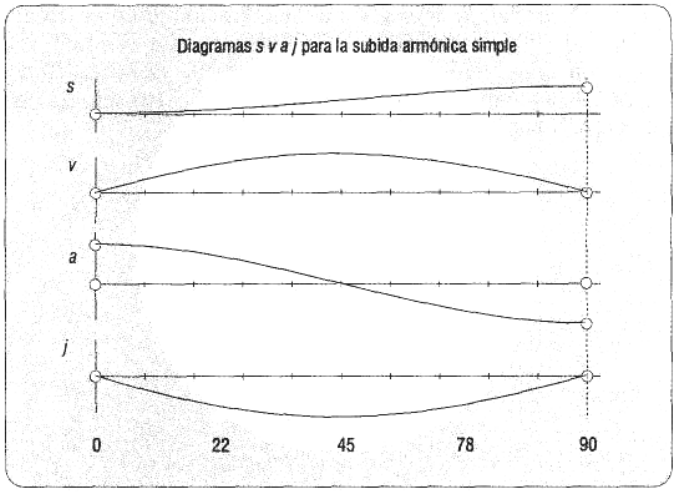


FIGURA 8-9

El movimiento armónico simple con detenimientos tiene aceleración discontinua

2 Observe que la función de velocidad es continua, puesto que toca la velocidad cero de los detenimientos de cada extremo. El valor pico es 6.28 pulg/(160 mm/s) en el punto medio de la subida.

3 No obstante, la función de aceleración no es continua. Ésta es una curva coseno de semiperiodo, y tiene valores diferentes de cero al iniciar y acabar, que son + 78.8 pulg/s^2 (2.0 m/s^2).

4 Desafortunadamente, las funciones de detenimiento que unen esta subida en cada lado tienen aceleración cero como puede verse en la figura 8-6. Por lo que hay discontinuidades en la aceleración en cada extremo del intervalo que emplea esta función armónica simple de desplazamiento.

5 Esto viola la ley fundamental del diseño de levas y genera picos infinitos de rapidez de aceleración en los extremos de este intervalo de bajada. Éste es también un diseño inaceptable.

¿Qué salió mal? Aunque es verdad que las funciones armónicas son derivables hasta el infinito, aquí no se estudiarán las funciones armónicas simples. La función de leva sobre el intervalo completo es una **función parte por parte** (figura 8-6) compuesta por diversos segmentos, algunos de los cuales pueden ser partes del detenimiento u otras funciones. Un detenimiento siempre tendrá velocidad cero y aceleración cero. Por lo tanto, se deben acoplar los valores cero de los detenimientos en los extremos de aquellas derivadas, de cualesquiera segmentos sin detenimiento que los unen. La función armónica simple de desplazamiento, cuando se emplea con detenimientos, **no** satisface la ley fundamental del diseño de levas. Su segunda derivada, la aceleración, es diferente de cero en sus extremos, por lo tanto, no corresponde a los detenimientos requeridos en este ejemplo.

El único caso en el que la función armónica simple de desplazamiento satisfará la ley fundamental es el caso SB sin retroceso rápido, es decir, subida en 180° y bajada en 180° sin detenimientos. Entonces la leva será una excéntrica como se muestra en la figura 8-10. Tal como una función continua individual (no parte por parte), sus derivadas también son continuas. En la figura 8-11 se muestra el desplazamiento (en pulgadas) y las funciones de aceleración (en *g)* de la leva excéntrica que se ilustra en la figura 8-10, como se mide en realidad en el seguidor. El ruido, o "sonido", en la curva de aceleración se debe a pequeños errores de fabricación inevitables. Las limitaciones de fabricación se analizarán en una sección posterior.

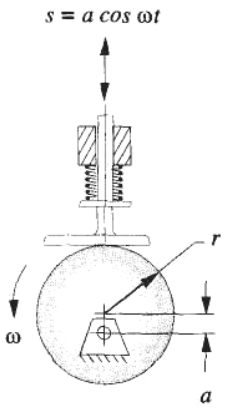


FIGURA 8-10
Una leva excéntrica tiene movimiento armónico simple

Desplazamiento cicloidal

Los dos ejemplos deficientes de diseño de levas que antes se describieron deben llevar al diseñador a la conclusión de que es erróneo considerar sólo la función de desplazamiento cuando se diseña una leva. El mejor método es comenzar por considerar las derivadas superiores, especialmente la aceleración. La función de aceleración, y en menor grado la función de rapidez de aceleración, deben ser el principal interés del diseñador. En algunos casos, en especial cuando la masa del tren del seguidor es grande, o cuando existe una especificación sobre la velocidad, dicha función también debe diseñarse con cuidado.

Con esto en mente se rediseñará la leva para las mismas especificaciones del ejemplo como se hizo antes. Esta vez se empezará con la función de aceleración. La familia armónica de funciones continúa teniendo ventajas que la hacen atractiva para estas aplicaciones. En la figura 8-12 se muestra una senoidal de periodo completo aplicada como la función de aceleración. Cumple la restricción de magnitud cero en cada extremo para acoplar los segmentos de detenimiento que la unen. La ecuación de la senoidal es:

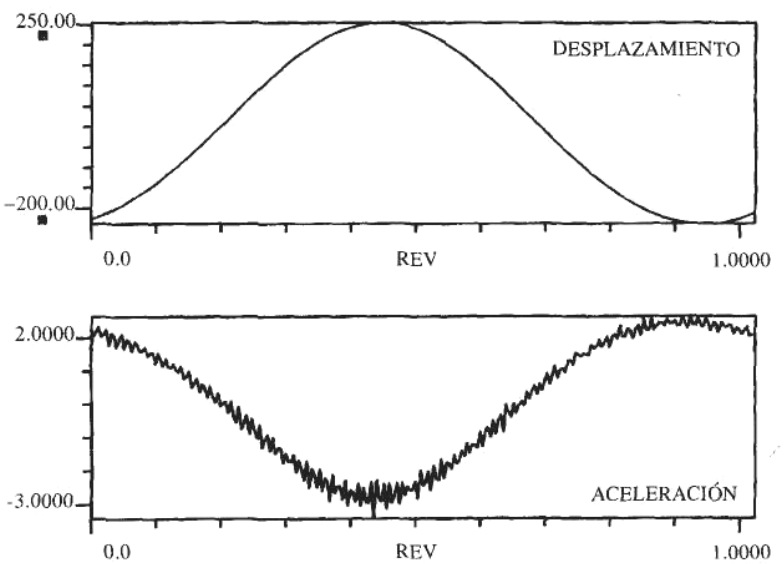


FIGURA 8-11
Desplazamiento y aceleración medidos en el seguidor de una leva excéntrica

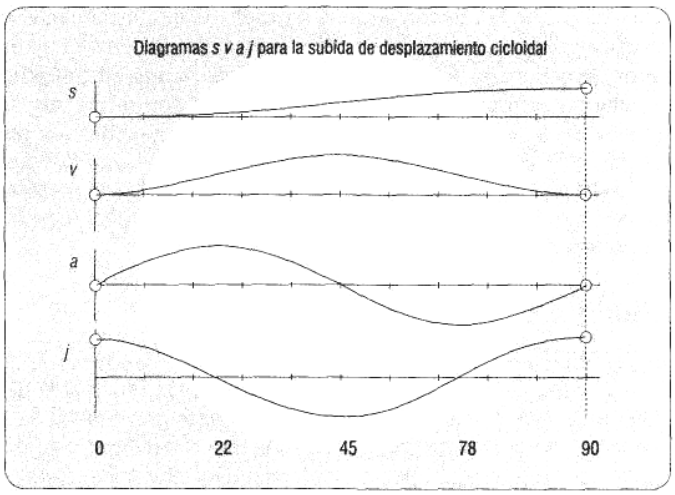


FIGURA 8-12

La aceleración senoidal produce un desplazamiento cicloidal

$$a = C \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{\theta}{\beta}\right) \tag{8.7}$$

Nuevamente se ha regularizado la variable independiente θ al dividirla entre el periodo del segmento β; con θ y β medidos en radianes. El valor de θ/β oscila desde 0 hasta 1 sobre cualquier segmento y es una relación adimensional. Ya que se desea una senoidal de ciclo completo se debe multiplicar el argumento por 2π. El argumento de la función seno variará entonces entre 0 y 2π sin tomar en cuenta el valor de β. La constante C define la amplitud de la senoidal.

Integre para obtener la velocidad:

$$a = \frac{dv}{d\theta} = C \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{\theta}{\beta}\right)$$

$$\int dv = \int C \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{\theta}{\beta}\right) d\theta \tag{8.8}$$

$$v = -C \frac{\beta}{2\pi} \cos\left(2\pi \frac{\theta}{\beta}\right) + k_1$$

donde k_1 es la constante de integración. Para evaluar k_1 se sustituye la condición de frontera $v = 0$ en $\theta = 0$, ya que se debe acoplar la velocidad cero del detenimiento en dicho punto. La constante de integración es entonces:

$$k_1 = C \frac{\beta}{2\pi}$$

y:

$$v = C \frac{\beta}{2\pi} \left[1 - \cos\left(2\pi \frac{\theta}{\beta}\right)\right] \tag{8.9}$$

Note que al sustituir los valores de frontera en el otro extremo del intervalo, $v = 0, \theta = \beta$, se obtendrá el mismo resultado para k_1. Integrando otra vez para obtener el desplazamiento:

$$v = \frac{ds}{d\theta} = C\frac{\beta}{2\pi}\left[1 - \cos\left(2\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right]$$

$$\int ds = \int\left\{C\frac{\beta}{2\pi}\left[1 - \cos\left(2\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right]\right\}d\theta \qquad (8.10)$$

$$s = C\frac{\beta}{2\pi}\theta - C\frac{\beta^2}{4\pi^2}\operatorname{sen}\left(2\pi\frac{\theta}{\beta}\right) + k_2$$

Para evaluar k_2 se sustituye la condición de frontera $s = 0$ en $\theta = 0$, ya que se debe acoplar el desplazamiento cero del detenimiento en dicho punto. Para evaluar la constante de amplitud *C* se sustituye la condición de frontera $s = h$ en $\theta = \beta$, donde *h* es la subida (o ascenso) máxima del seguidor requerida sobre el intervalo, y es una constante para cualquier especificación de leva.

$$k_2 = 0$$

$$C = 2\pi\frac{h}{\beta^2} \qquad (8.11)$$

Sustituyendo el valor de la constante *C* en la ecuación 8.7 para la aceleración se obtiene:

$$a = 2\pi\frac{h}{\beta^2}\operatorname{sen}\left(2\pi\frac{\theta}{\beta}\right) \qquad (8.12a)$$

Derivando con respecto a θ se obtiene la expresión para la rapidez de aceleración.

$$j = 4\pi^2\frac{h}{\beta^3}\cos\left(2\pi\frac{\theta}{\beta}\right) \qquad (8.12b)$$

Sustituyendo los valores de las constantes C y k_1 en la ecuación 8.9 para la velocidad se tiene:

$$v = \frac{h}{\beta}\left[1 - \cos\left(2\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right] \qquad (8.12c)$$

Esta función de velocidad es la suma de un término coseno negativo y un término constante. El coeficiente del término coseno es igual al término constante. Esto da como resultado una curva de velocidad que inicia y finaliza en cero y alcanza una magnitud máxima en $\beta/2$ como se observa en la figura 8-12. Sustituyendo los valores de las constantes C, k_1 y k_2 en la ecuación 8.10 para el desplazamiento se obtiene:

$$s = h\left[\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}\left(2\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right] \qquad (8.12d)$$

Observe que esta expresión del desplazamiento es la suma de una línea recta con pendiente *h* y una senoidal negativa. En efecto, la senoidal se encuentra "envuelta alrededor" de la línea recta como se aprecia en la figura 8-12. La ecuación 8.12 es la expresión de una cicloide. Se hace referencia a esta función de leva como **desplazamiento cicloidal** o **aceleración senoidal.**

En la forma presentada, con θ (en radianes) como la variable independiente, las unidades de la ecuación 8.12d son longitud, de la ecuación 8.12c, longitud/rad, de la ecuación 8.12a, longitud/rad^2 y de la ecuación 8.12b, longitud/rad^3. Para convertir estas ecuaciones a una base de tiempo se multiplica la velocidad v por la velocidad angular del árbol de levas ω (en rad/s), se multiplica la aceleración a por ω^2, y la rapidez de aceleración j por ω^3.

EJEMPLO 8-3

Diseño intermedio de una leva. Desplazamiento cicloidal. Una leva aceptable.

Problema: Considere la especificación PEC de diseño de leva como en los ejemplos 8-1 y 8-2:

detenimiento	en desplazamiento cero para 90° (detenimiento bajo)
subida	1 pulg (25 mm) en 90°
detenimiento	1 pulg (25 mm) para 90° (detenimiento alto)
bajada	1 pulg (25 mm) en 90°
ω **leva**	2π rad/s = 1 rev/s

Solución:

1 La función de desplazamiento cicloidal es la aceptable para esta especificación de leva con doble detenimiento. Sus derivadas son continuas a través de la función de aceleración, como se aprecia en la figura 8-12. La aceleración pico es 100.4 pulg/s^2 (2.55 m/s^2).

2 La curva de rapidez de aceleración en la figura 8-12 es discontinua en sus fronteras pero es de magnitud finita, y esto es aceptable. Su valor pico es de 2 523 pulg/s^3 (64 m/s^3).

3 La velocidad es moderada y se acopla a los ceros del detenimiento en cada extremo. Su valor pico es de 8 pulg/s (0.2 m/s).

4 El único inconveniente de esta función es que tiene magnitudes relativamente grandes de aceleración pico y velocidad pico comparadas con algunas otras funciones posibles para el caso de doble detenimiento.

El lector puede introducir el archivo EO8-O3.cam en el programa DYNACAM para examinar este ejemplo con mayor detalle.

Funciones combinadas

La fuerza dinámica es proporcional a la aceleración. En general convendría minimizar las fuerzas dinámicas, por consiguiente, se debería conseguir minimizar la magnitud de la función de aceleración, además de mantenerla continua. La energía cinética es proporcional al cuadrado de la velocidad. También convendría minimizar la energía cinética almacenada, especialmente con trenes de seguidores de gran masa, por lo tanto, también nos interesaría la magnitud de la función de velocidad.

ACELERACIÓN CONSTANTE Si se desea minimizar el valor pico de la magnitud de la función de aceleración para un problema dado, la función que mejor cumplirá esta

restricción es la onda cuadrada como se muestra en la figura 8-13. A esta función también se le llama **aceleración constante.** La onda cuadrada tiene la propiedad de un valor pico mínimo para un área dada en un intervalo dado. Sin embargo, esta función no es continua. Tiene discontinuidades al inicio, a la mitad y al final del intervalo, de modo que, por sí misma, es **inaceptable como función de aceleración de leva.**

ACELERACIÓN TRAPEZOIDAL Las discontinuidades de onda cuadrada se suprimen simplemente "desprendiendo las esquinas" de la función de onda cuadrada y creando la función de **aceleración trapezoidal** mostrada en la figura 8-14a). El área perdida de las "esquinas desprendidas" debe remplazarse incrementando la magnitud pico sobre la de la onda cuadrada original para mantener las especificaciones requeridas sobre el ascenso y la duración. Pero este incremento en la magnitud pico es pequeño, y la aceleración máxima teórica puede ser significativamente menor que el valor pico teórico de la función de aceleración senoidal (desplazamiento cicloidal). Una desventaja de esta función trapezoidal es su muy discontinua función de rapidez de aceleración, como se muestra en la figura 8-14¿>). Las funciones de rapidez de aceleración uniforme como ésta tienden a provocar el comportamiento vibratorio en el tren seguidor debido a su alta capacidad armónica. La aceleración senoidal de la cicloidal tiene una función coseno de la rapidez de aceleración relativamente más moderada, con sólo dos discontinuidades en el intervalo, y es preferible a las ondas cuadradas de rapidez de aceleración de la trapezoidal. Pero la aceleración pico teórica de la cicloidal será mayor, lo que no es deseable. De modo que las transacciones se deben realizar al seleccionar las funciones de leva.

ACELERACIÓN TRAPEZOIDAL **MODIFICADA** Se puede hacer un mejoramiento a la función de aceleración trapezoidal sustituyendo partes de las ondas senoidales para los lados inclinados de los trapecios, como se muestra en la figura 8-15. Esta función se denomina curva de **aceleración trapezoidal modificada.*** Esta función es una unión de las curvas de aceleración senoidal y de aceleración constante. Conceptualmente, un pe-

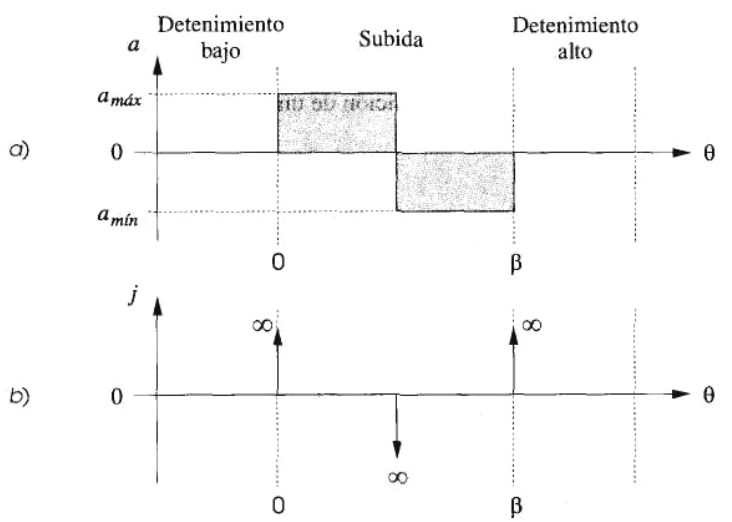


FIGURA 8-13

La aceleración constante produce rapidez de aceleración infinita

*Desarrollado por el C. N. Neklutin de la Universal Match Corp. Véase la referencia [2].

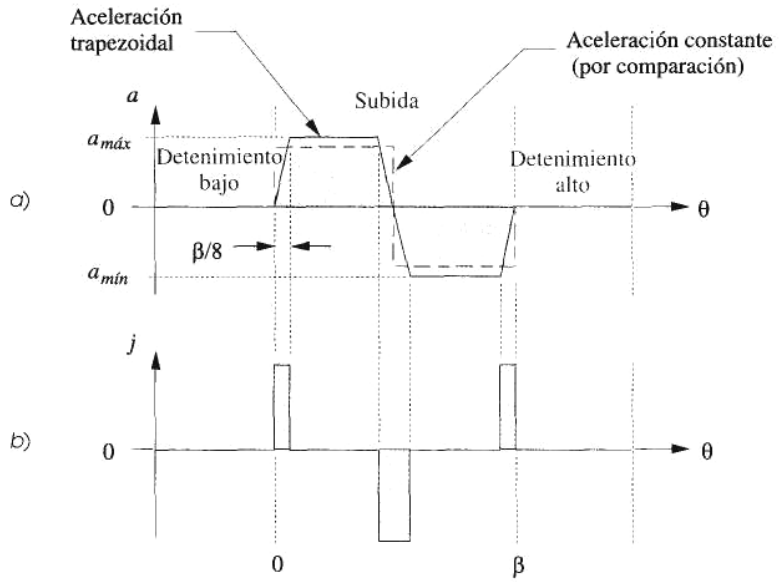


FIGURA 8-14

La aceleración trapezoidal produce rapidez de aceleración finita

riodo completo senoidal se corta en cuartos, y se "pega en" la onda cuadrada para proporcionar una transición moderada desde los ceros en los puntos finales hasta los valores pico máximo y mínimo, y para realizar la transición del máximo al mínimo en el centro del intervalo. Las partes del periodo del segmento total (β) usado para las partes senoidales de la función pueden variar. La disposición más común es cortar la onda cuadrada en $\beta/8$, $3\beta/8$, $5\beta/8$ y $7\beta/8$ para insertar las partes de la senoidal, como se muestra en la figura 8-15. Las fórmulas $s\ v\ a\ j$ para esa disposición de una subida trapezoidal modificada son:

para $0 \le \theta < \frac{1}{8}\beta$

$$s = h\left[0.38898448\frac{\theta}{\beta} - 0.0309544\,\text{sen}\left(4\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right]$$

$$v = 0.38898448\frac{h}{\beta}\left[1 - \cos\left(4\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right] \qquad (8.13a)$$

$$a = 4.888124\frac{h}{\beta^2}\,\text{sen}\left(4\pi\frac{\theta}{\beta}\right)$$

$$j = 61.425769\frac{h}{\beta^3}\cos\left(4\pi\frac{\theta}{\beta}\right)$$

para $\frac{1}{8}\beta \le \theta < \frac{3}{8}\beta$

$$s = h\left[2.44406184\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 - 0.22203097\left(\frac{\theta}{\beta}\right) + 0.00723407\right]$$

$$v = \frac{h}{\beta}\left[4.888124\left(\frac{\theta}{\beta}\right) - 0.22203097\right] \qquad (8.13b)$$

$$a = 4.888124\frac{h}{\beta^2}$$

$$j = 0$$

para $\frac{3}{8}\beta \le \theta < \frac{5}{8}\beta$

$$s = h\left[1.6110154\frac{\theta}{\beta} - 0.0309544\,\text{sen}\left(4\pi\frac{\theta}{\beta} - \pi\right) - 0.3055077\right]$$

$$v = \frac{h}{\beta}\left[1.6110154 - 0.38898448\cos\left(4\pi\frac{\theta}{\beta} - \pi\right)\right]$$

$$a = 4.888124\frac{h}{\beta^2}\text{sen}\left(4\pi\frac{\theta}{\beta} - \pi\right) \qquad (8.13c)$$

$$j = 61.425769\frac{h}{\beta^3}\cos\left(4\pi\frac{\theta}{\beta} - \pi\right)$$

para $\frac{5}{8}\beta \le \theta < \frac{7}{8}\beta$

$$s = h\left[-2.44406184\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + 4.6660917\left(\frac{\theta}{\beta}\right) - 1.2292648\right]$$

$$v = \frac{h}{\beta}\left[-4.888124\left(\frac{\theta}{\beta}\right) + 4.6660917\right] \qquad (8.13d)$$

$$a = -4.888124\frac{h}{\beta^2}$$

$$j = 0$$

para $\frac{7}{8}\beta \le \theta \le \beta$

$$s = h\left[0.6110154 + 0.38898448\frac{\theta}{\beta} + 0.0309544\,\text{sen}\left(4\pi\frac{\theta}{\beta} - 3\pi\right)\right]$$

$$v = 0.38898448\frac{h}{\beta}\left[1 + \cos\left(4\pi\frac{\theta}{\beta} - 3\pi\right)\right] \qquad (8.13e)$$

$$a = -4.888124\frac{h}{\beta^2}\text{sen}\left(4\pi\frac{\theta}{\beta} - 3\pi\right)$$

$$j = -61.425769\frac{h}{\beta^3}\cos\left(4\pi\frac{\theta}{\beta} - 3\pi\right)$$

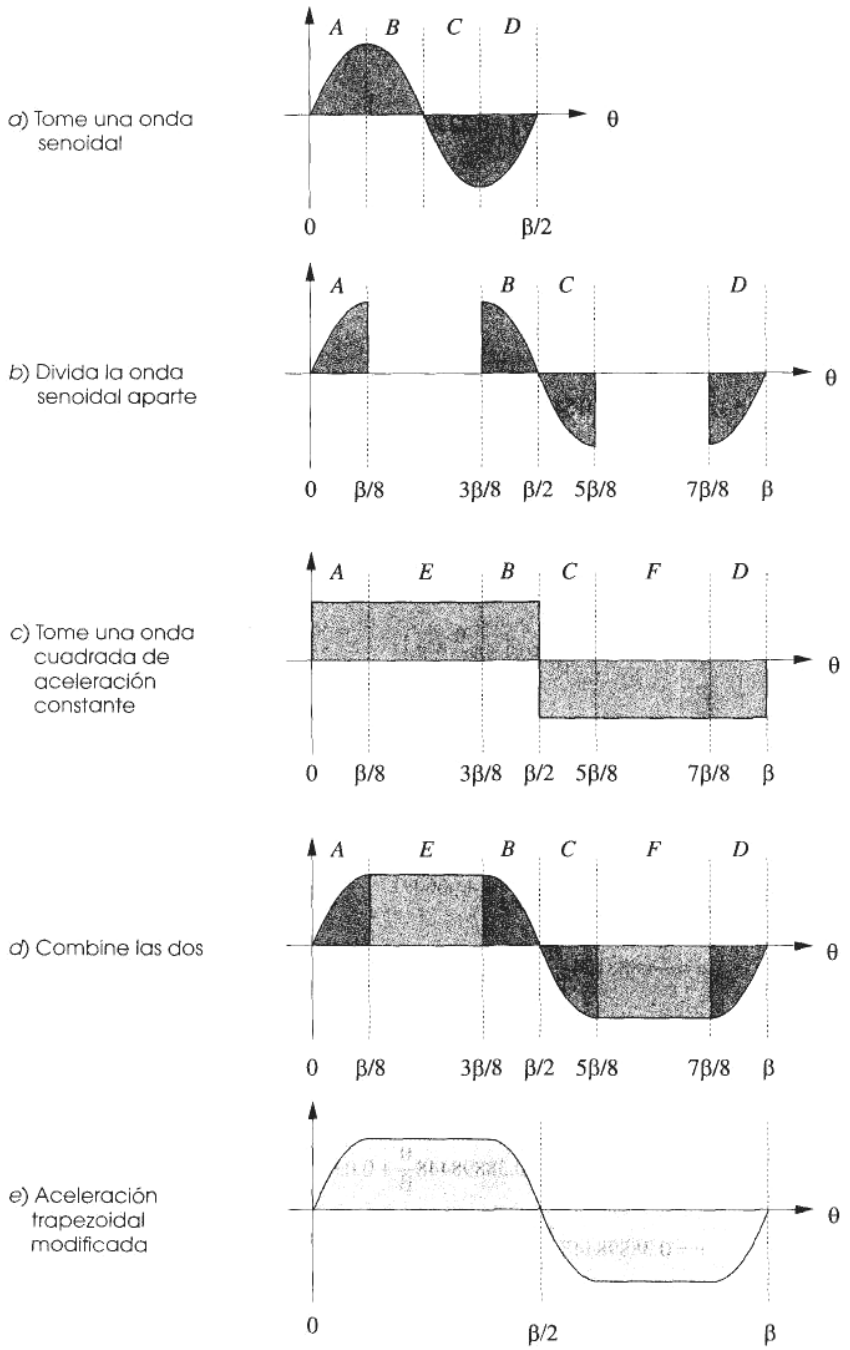


FIGURA 8-15

Creación de la función de aceleración trapezoidal modificada

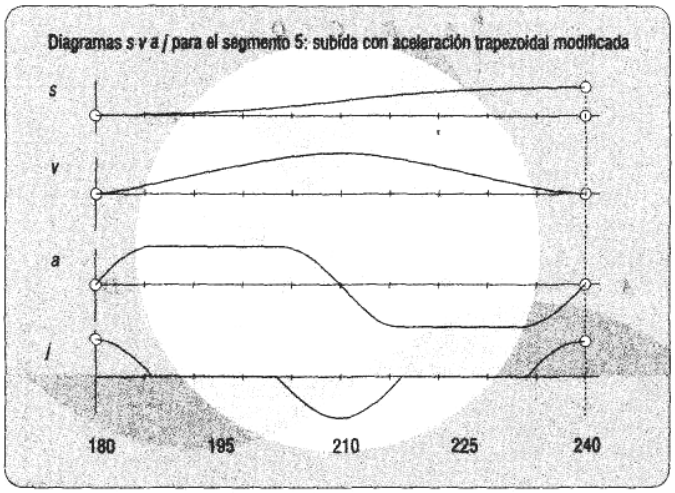


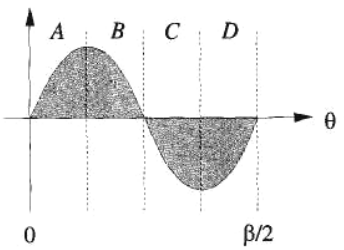
FIGURA 8-16
Aceleración trapezoidal modificada

La función trapezoidal modificada que antes se definió es una de las muchas funciones combinadas generadas para levas mediante la conjunción de diversas funciones, mientras se tiene cuidado de acoplar los valores de las curvas s, v y *a* en todas las interfaces entre las funciones unidas. Tiene la ventaja de una aceleración pico teórica más o menos baia y transiciones razonablemente rápidas y moderadas al comienzo y al final del intervalo. Advierta que en la forma presentada, con θ (en radianes) como la variable independiente, las unidades de las expresiones en las ecuaciones 8.13 son longitud, long/rad, long/rad^2 y long/rad^3 para *s*, *v*, *a*, *j*, respectivamente. Para convertir las ecuaciones 8.13 a una base de tiempo se multiplica la velocidad v por la velocidad angular del árbol de levas ω (en rad/s), la aceleración *a* por ω^2, y la rapidez de aceleración *j* por ω^3. La función de leva trapezoidal modificada es un programa popular y comúnmente utilizado para las levas con doble detenimiento. En la figura 8-16 se muestran sus curvas *s v a j*.

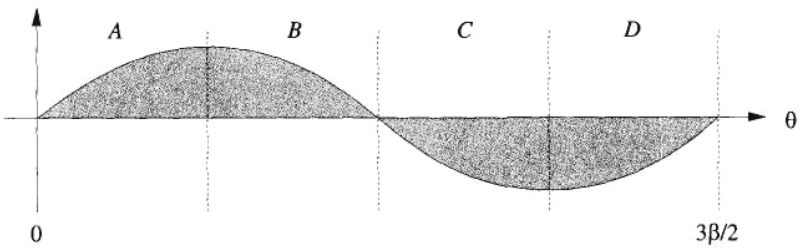
ACELERACIÓN SENOIDAL MODIFICADA* La curva de aceleración senoidal (desplazamiento cicloidal) tiene como ventaja la uniformidad (curva de rapidez de aceleración menos desigual) comparada con la trapezoidal modificada, pero tiene mayor aceleración pico teórica. Al combinar dos curvas armónicas (senoidales) de frecuencias diferentes, se retienen algunas de las características de uniformidad de la cicloide, y se reduce también la aceleración pico. Como un bono adicional se encontrará que la velocidad pico es también menor que la cicloidal o la trapezoidal modificada. En la figura 8-17 se muestra cómo está compuesta la curva de aceleración senoidal modificada por piezas de dos funciones senoidales, una de mayor frecuencia que la otra. El primero y último cuarto de la curva senoidal de alta frecuencia (periodo corto, β/2) se emplean para el Primero y último octavo de la función combinada. El medio centro de la senoidal de baja frecuencia (periodo largo, 3β/2) se usa para llenar los tres cuartos centrales de la curva combinada. Obviamente, las magnitudes de las dos curvas y sus derivadas deben acoplarse en sus interfaces para evitar discontinuidades. Las ecuaciones de la curva senoidal

* Desarrollado por E. H. Schmidt de DuPont.

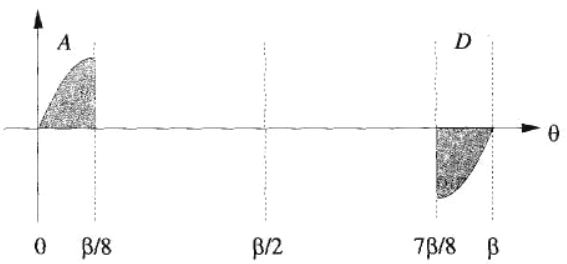
a) Senoide núm. 1 de periodo β/2



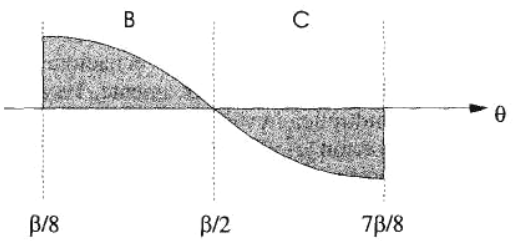
b) Senoide núm. 2 de periodo 3β/2



c) Se toma el primero y el último cuartos del núm. 1



d) Se toma el segundo y el tercer cuartos del núm. 2



e) Se combina para obtener la senoide modificada

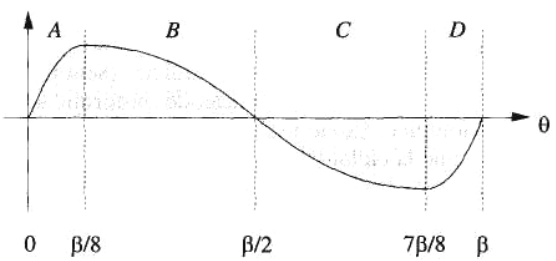


FIGURA 8-17

Creación de una función de aceleración senoidal modificada

modificada para una subida de altura h sobre un periodo β, con las funciones unidas en los puntos $\beta/8$ y $7\beta/8$, son como sigue:

para $0 \le \theta < \frac{1}{8}\beta$

$$s = h\left[0.43990085\frac{\theta}{\beta} - 0.0350062\,\text{sen}\left(4\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right]$$

$$v = 0.43990085\frac{h}{\beta}\left[1 - \cos\left(4\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right] \qquad (8.14a)$$

$$a = 5.5279571\frac{h}{\beta^2}\,\text{sen}\left(4\pi\frac{\theta}{\beta}\right)$$

$$j = 69.4663577\frac{h}{\beta^3}\cos\left(4\pi\frac{\theta}{\beta}\right)$$

para $\frac{1}{8}\beta \le \theta < \frac{7}{8}\beta$

$$s = h\left[0.28004957 + 0.43990085\frac{\theta}{\beta} - 0.31505577\cos\left(\frac{4\pi}{3}\frac{\theta}{\beta} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$v = 0.43990085\frac{h}{\beta}\left[1 + 3\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\frac{\theta}{\beta} - \frac{\pi}{6}\right)\right] \qquad (8.14b)$$

$$a = 5.5279571\frac{h}{\beta^2}\cos\left(\frac{4\pi}{3}\frac{\theta}{\beta} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$j = -23.1553\frac{h}{\beta^3}\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\frac{\theta}{\beta} - \frac{\pi}{6}\right)$$

para $\frac{7}{8}\beta \le \theta \le \beta$

$$s = h\left\{0.56009915 + 0.43990085\frac{\theta}{\beta} - 0.0350062\,\text{sen}\left[2\pi\left(2\frac{\theta}{\beta} - 1\right)\right]\right\}$$

$$v = 0.43990085\frac{h}{\beta}\left\{1 - \cos\left[2\pi\left(2\frac{\theta}{\beta} - 1\right)\right]\right\} \qquad (8.14c)$$

$$a = 5.5279571\frac{h}{\beta^2}\,\text{sen}\left[2\pi\left(2\frac{\theta}{\beta} - 1\right)\right]$$

$$j = 69.4663577\frac{h}{\beta^3}\cos\left[2\pi\left(2\frac{\theta}{\beta} - 1\right)\right]$$

En la figura 8-18 se muestra una comparación de las formas y magnitudes relativas de cinco programas de aceleración de levas, incluyendo las curvas cicloidal, trapezoidal

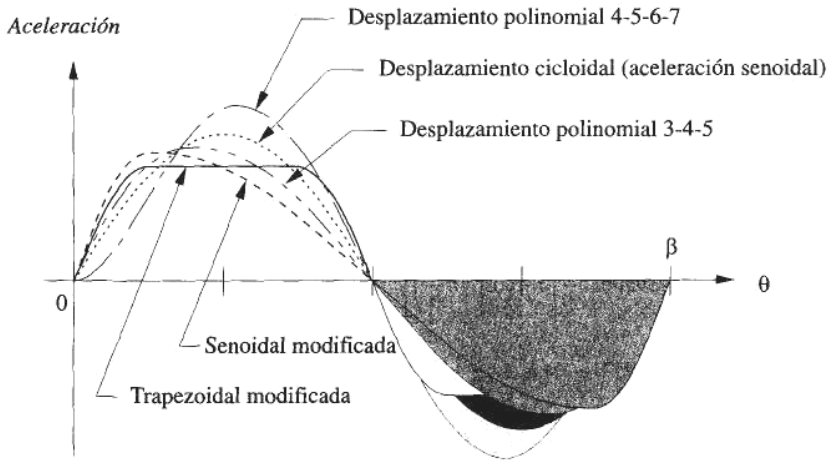


FIGURA 8-18

Comparación de cinco funciones de aceleración de levas con doble detenimiento

modificada y de aceleración senoidal modificada.* La curva cicloidal tiene una aceleración pico teórica que es aproximadamente 1.3 veces la del valor pico de la trapezoidal modificada para la misma especificación de leva. El valor pico de la aceleración para la senoidal modificada se encuentra entre la cicloidal y la trapezoidal modificada. En la tabla 8-2 se listan los valores pico de aceleración, velocidad y rapidez de aceleración para estas funciones en términos de la subida total h y el periodo β.

* Las funciones polinomiales 3-4-5 y 4-5-6-7 que también se muestran en la figura se analizarán más adelante.

TABLA 8-2 Factores de velocidad y aceleración pico de algunas funciones de leva

Función	Velocidad máx.	Aceleración máx.	Rapidez de aceleración máx.	Comentarios
Aceleración constante	2.000 h/β	4.000 h/β^2	infinito	∞ rapidez de aceleración - no aceptable
Desplazamiento armónico	1.571 h/β	4.945 h/β^2	infinito	∞ rapidez de aceleración - no aceptable
Aceleración trapezoidal	2.000 h/β	5.300 h/β^2	44 h/β^3	No es tan bueno como la trapezoidal mod.
Aceleración trapezoidal mod.	2.000 h/β	4.888 h/β^2	61 h/β^3	Aceleración baja pero rapidez de aceleración brusca
Aceleración senoidal mod.	1.760 h/β	5.528 h/β^2	69 h/β^3	Velocidad baja - buena aceleración
Desplazamiento polinomial 3-4-5	1.875 h/β	5.777 h/β^2	60 h/β^3	Combinación apropiada
Desplazamiento cicloidal	2.000 h/β	6.283 h/β^2	40 h/β^3	Aceleración y rapidez de aceleración uniformes
Desplazamiento polinomial 4-5-6-7	2.188 h/β	7.526 h/β^2	52 h/β^3	Rapidez de aceleración uniforme y aceleración alta

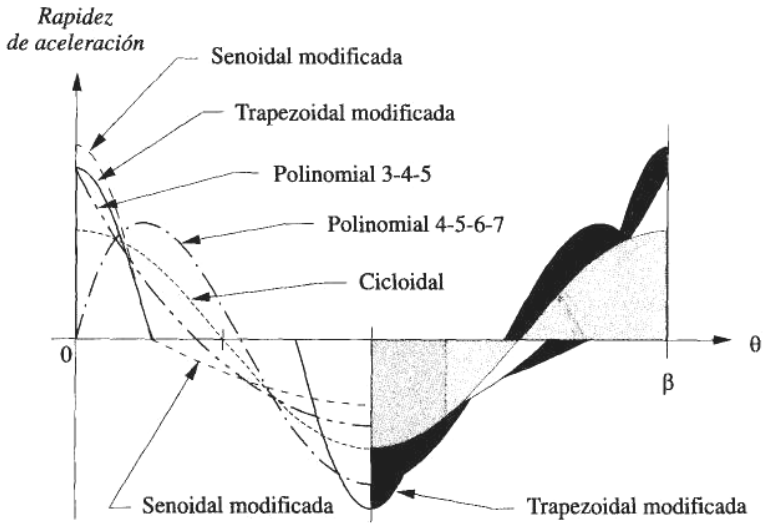


FIGURA 8-19

Comparación de cinco funciones de rapidez de aceleración con doble detenimiento

En la figura 8-19 se comparan las curvas de rapidez de aceleración para las mismas funciones. La senoidal de rapidez de aceleración modificada es un poco menos desigual que la trapezoidal de rapidez de aceleración modificada, pero no tan uniforme corno la de la cicloide, que es una cosenoidal de periodo completo. En la figura 8-20 se comparan sus curvas de velocidad. Las velocidades pico de las funciones cicloidal y trapezoidal modificada son las mismas, de manera que cada una almacenará la misma energía cinética pico en el tren seguidor. La velocidad pico de la senoidal modificada es la menor de las cinco funciones mostradas. Ésta es la ventaja principal de la curva de aceleración senoidal modificada y la razón por la que se elige por lo general para aplicaciones en las que la masa del seguidor es muy grande.

En la figura 8-21 se muestra un ejemplo de dicha aplicación que es un impulsor de mesa indexadora para líneas de montaje automatizadas. La mesa indexadora redonda está montada sobre un eje vertical afilado y se impulsa como parte del tren seguidor por medio de una leva de barrilete cilíndrica con cierre de forma, que la mueve a través de cierto desplazamiento angular, y luego mantiene inmóvil la mesa en un detenimiento (denominado "paro") mientras se realiza una operación de montaje sobre la pieza de trabajo llevada a la mesa. Estas indexadoras pueden tener tres o más paros, cada uno corresponde a una posición de indexado. La mesa (no mostrada) es de acero sólido y puede tener varios pies de diámetro; por lo que su masa es grande. Para minimizar la energía cinética almacenada, que debe disiparse cada vez que la mesa se para, los fabricantes utilizan comúnmente el programa senoidal modificado en estas levas con detenimientos múltiples, debido a su menor velocidad pico.

Trataremos de mejorar el ejemplo de la leva con doble detenimiento con estas funciones combinadas de aceleración trapezoidal modificada y senoidal modificada.

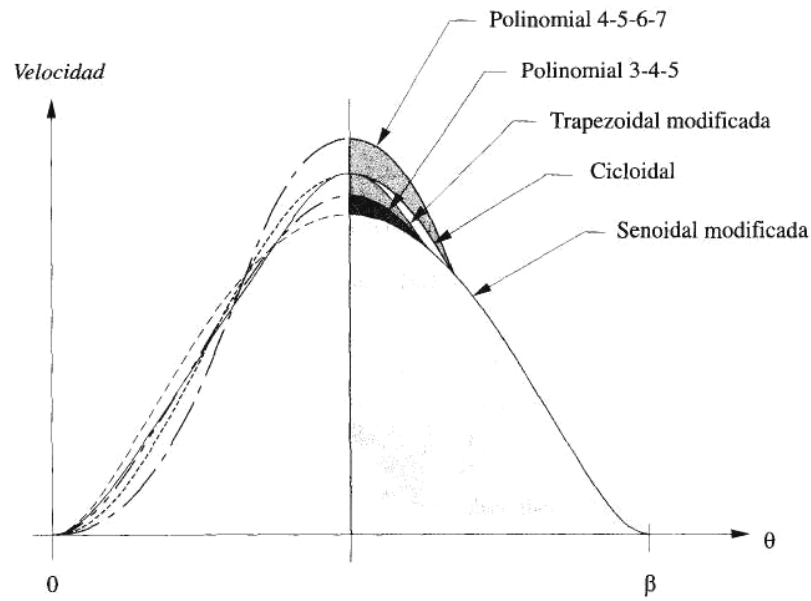


FIGURA 8-20
Comparación de cinco funciones de velocidad de una leva con doble detenimiento

EJEMPLO 8-4

Diseño superior de una leva. Funciones combinadas. Levas mejores.

Problema: Considere la misma especificación PEC del diseño de leva de los ejemplos 8-1 a 8-3:

detenimiento	en desplazamiento cero para 90° (detenimiento bajo)
subida	1 pulg (25 mm) en 90°
detenimiento	en 1 pulg (25 mm) para 90° (detenimiento alto)
bajada	1 pulg (25 mm) en 90°
ω leva	2π rad/s = 1 rev/s

Solución:

1 La función trapezoidal modificada es una función aceptable para esta especificación de leva con doble detenimiento. Sus derivadas son continuas a través de la función de aceleración, como se muestra en las figuras 8-16, 8-18 y 8-20. La aceleración pico es 78.1 pulg/s^2 (1.98 m/s^2).

2 La curva trapezoidal modificada de rapidez de aceleración en las figuras 8-16 y 8-19 es discontinua en sus fronteras pero tiene una magnitud finita de 3 925 pulg/s^3 (100 m/s^3), y esto es aceptable.

3 La velocidad trapezoidal modificada en las figuras 8-16 y 8-20 es uniforme y se acopla a los ceros del detenimiento en cada extremo. Su magnitud pico es de 8 pulg/s (0.2 m/s).

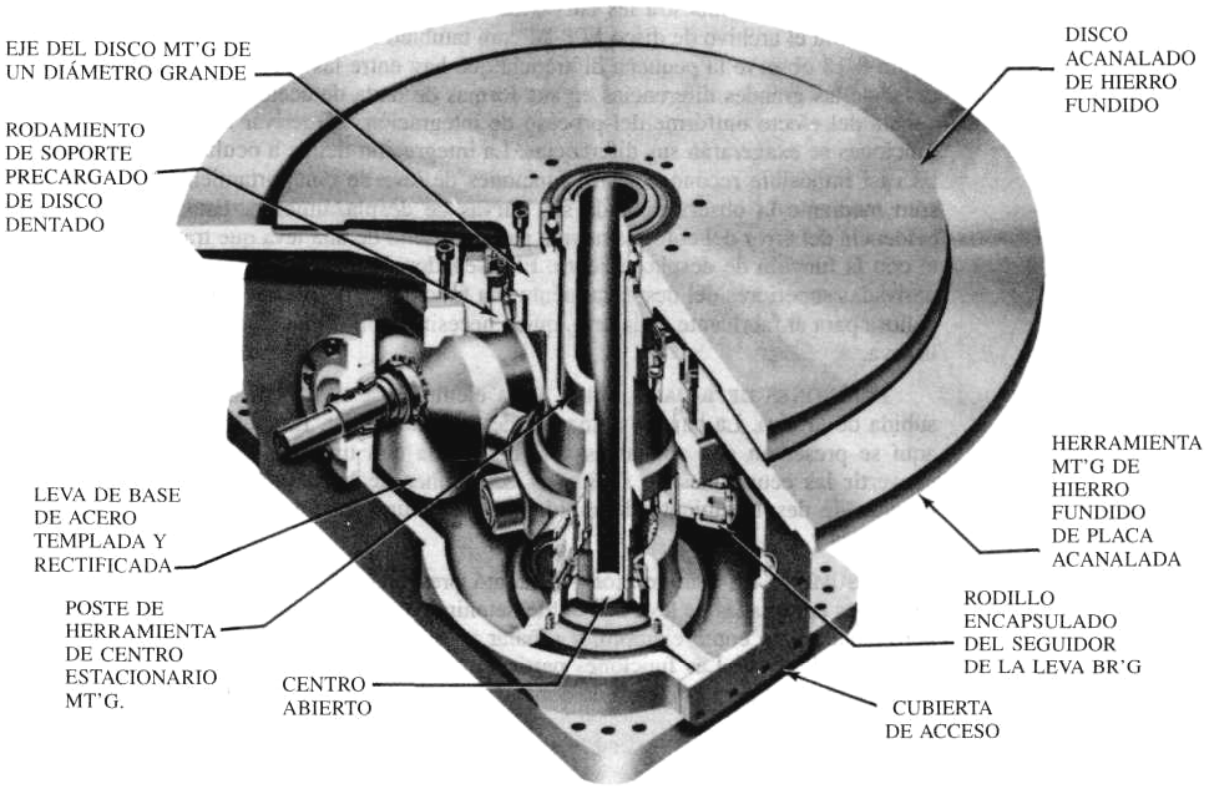


FIGURA 8-21

Indexador rotatorio con múltiples paros *Cortesía de The Ferguson Co., St. Louis, Missouri*

4 La ventaja de esta función trapezoidal modificada es que tiene una aceleración pico más pequeña que la cicloidal, pero su velocidad pico es idéntica a la de la cicloidal.

5 La función senoidal modificada es también una función aceptable para esta especificación de leva con doble detenimiento. Sus derivadas son también continuas a través de la función de aceleración, como se muestra en las figuras 8-18 y 8-20. Su aceleración pico es de 88.3 pulg/s^2 (2.24 m/s^2).

6 La curva senoidal modificada de rapidez de aceleración que se ilustra en la figura 8-19 es discontinua en sus fronteras, pero es de magnitud finita y mayor en magnitud que 4 439 pulg/s^1 (113 m/s^3) y más uniforme que la de la trapezoidal modificada.

7 La velocidad senoidal modificada (figura 8-20) es uniforme, se acopla a los ceros del detenimiento en cada extremo y es menor en magnitud pico que la cicloide o la trapezoidal modificada en 7 pulg/s (0.178 m/s). Ésta es una ventaja para los sistemas con seguidor de gran masa, puesto que reduce la energía cinética. Esto, acoplado con una aceleración pico menor que la de la cicloidal (pero mayor que la trapezoidal modificada), es su ventaja principal.

La figura 8-22 muestra las curvas de desplazamiento para estos tres programas de levas. (Abra el archivo de disco E08-04.cam también en el programa DYNACAM.) En la figura 8-18 observe la pequeña diferencia que hay entre las curvas de desplazamiento, a pesar de las grandes diferencias en sus formas de onda de aceleración. Esta es una evidencia del efecto uniforme del proceso de integración. Al derivar cualquiera de las dos funciones se exagerarán sus diferencias. La integración tiende a ocultar esas diferencias. Es casi imposible reconocer estas funciones de leva de comportamiento muy diferente sólo mediante la observación de sus curvas de desplazamiento. Ésta es también una evidencia del error del enfoque novato para el diseño de una leva que trata exclusivamente con la función de desplazamiento. El diseñador de levas debe estar interesado en las derivadas superiores del desplazamiento. La función de desplazamiento es esencialmente valiosa para el fabricante de la leva, quien necesita su información coordinada para cortar la leva.

FUNCIONES DE BAJADA Para estos ejemplos se utilizó solamente la porción de subida de la leva. La bajada se maneja de manera similar. Las funciones de subida que aquí se presentan son aplicables a la de bajada con una pequeña modificación. Para convertir las ecuaciones de subida en ecuaciones de bajada sólo se necesita restar la función de desplazamiento de subida s de la altura máxima *h* y anular las derivadas superiores v, *a* y *j*

RESUMEN En esta sección se intentó presentar un enfoque para la selección de funciones apropiadas de leva con doble detenimiento utilizando la leva común de subida-paro-bajada-paro como ejemplo, y señalar algunas de las dificultades que le esperan al diseñador de levas. Las funciones particulares descritas son sólo algunas de las que se han desarrollado para este caso de doble detenimiento, durante muchos años, por muchos

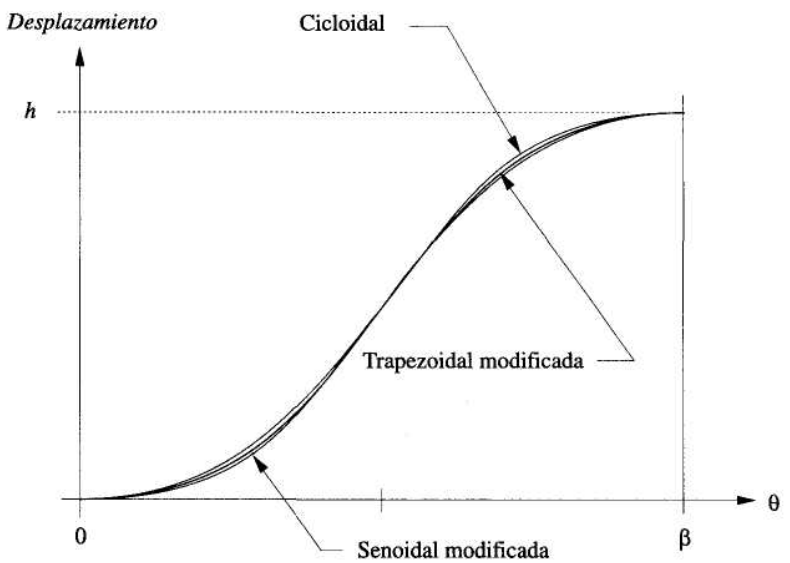


FIGURA 8-22

Comparación de tres funciones de desplazamiento de levas con doble detenimiento

diseñadores, pero quizá son las más utilizadas y más populares entre los diseñadores de levas. La mayoría de ellas se incluye también en el programa DYNACAM. Quedan por considerar muchas transacciones al seleccionar un programa de levas para cualquier aplicación, algunas de ellas ya se han mencionado, por ejemplo la continuidad de función, los valores pico de velocidad y aceleración y la uniformidad de la rapidez de aceleración. Existen aún muchas otras transacciones que se analizarán en las secciones posteriores de este capítulo, las cuales involucran el dimensionamiento y la fabricación de la leva.

8.4 DISEÑO DE UNA LEVA CON DETENIMIENTO SIMPLE. SELECCIÓN DE LAS FUNCIONES *S VA J*

Muchas aplicaciones en maquinaria requieren de un programa de leva con **detenimiento simple, subida-bajada-paro** (SBP). Probablemente se necesite una leva con detenimiento simple para levantar y bajar un rodillo que lleva una bobina móvil de papel a una máquina de producción que hace sobres. Este seguidor de leva levanta el papel hasta una posición extrema crítica en el momento justo para hacer contacto con un rodillo que aplica una capa de pegamento a la solapa del sobre. Sin detenimiento en la posición elevada, la bobina de papel regresa inmediatamente a la posición inicial (cero), y la mantiene en esta otra posición extrema crítica (detenimiento bajo) mientras pasa el resto del sobre. El ciclo se repite para el siguiente sobre a medida que pasa. Otro ejemplo común de una aplicación de detenimiento simple es la leva que abre las válvulas en el motor de su automóvil. Ésta levanta la válvula abierta en la subida, la cierra inmediatamente en la bajada, y luego mantiene la válvula cerrada en un detenimiento mientras toman lugar la compresión y la combustión.

Si se trata de emplear el mismo tipo de programas de levas que se definieron para el caso de una aplicación con doble detenimiento en una aplicación con detenimiento simple, se logrará una solución que puede funcionar pero que no es óptima. No obstante, se efectuará aquí como un ejemplo para señalar los problemas que resultan. Posteriormente se rediseñará la leva para eliminar esos problemas.

EJEMPLO 8-5

Uso de movimiento cicloidal para detenimiento simple.

Problema: Considere las siguientes especificaciones de una leva con detenimiento simple.

subida	1 pulg (25 mm) en 90°
bajada	1 pulg (25 mm) en 90°
detenimiento	en desplazamiento cero para 180° (detenimiento bajo)
ω leva	15 rad/s

Solución:

1 En la figura 8-23 se muestra una subida de desplazamiento cicloidal, y por separado una bajada de desplazamiento cicloidal aplicada a este ejemplo de detenimiento simple. Observe que el diagrama de desplazamiento *(s)* parece aceptable pues mueve al seguidor de la posición baja a la alta y lo regresa durante los intervalos requeridos.

2 La velocidad (v) también parece aceptable en la forma en que lleva al seguidor desde la velocidad cero en el detenimiento bajo, hasta un valor pico de 19.1 pulg/s (0.49 m/s) y lo regresa de nuevo a cero en el desplazamiento máximo, donde se aplica el pegamento.

3 En la figura 8-23 se muestra la función de aceleración para esta solución. Su valor absoluto máximo es de aproximadamente 573 pulg/s^2.

4 El problema es que esta curva de aceleración tiene un **regreso innecesario a cero** en el extremo de la subida. Es innecesario debido a que la aceleración durante la primera parte de la bajada también es negativa. Sería mejor mantenerla en la región negativa en el extremo de la subida.

5 Esta oscilación innecesaria a cero en la aceleración provoca que la rapidez de aceleración tenga cambios más abruptos y discontinuidades. La única justificación real para llevar la aceleración a cero es la necesidad de cambiar su signo (como en el caso del punto intermedio a través de la subida o la bajada) o acoplarse a un segmento adyacente que tenga aceleración cero.

El lector puede introducir el archivo E08-05.cam al programa DYNACAM para investigar con mayor detalle este ejemplo.

En el caso de un detenimiento simple, para la subida convendría una función cuya aceleración no regrese a cero en el extremo del intervalo. La función para la bajada debe empezar con la misma aceleración diferente de cero como terminó la subida y después ser cero en su punto final para acoplarse al detenimiento. Una función que satisface estos criterios es la **armónica doble,** que toma su nombre de sus dos términos coseno, uno de los cuales es una armónica de semiperiodo y el otro es una curva de periodo completo.

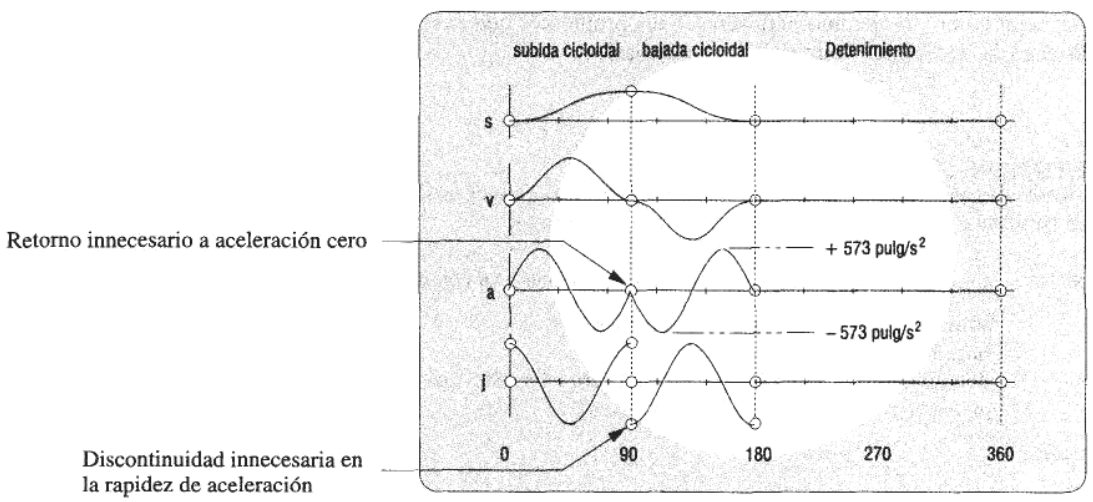


FIGURA 8-23

El movimiento cicloidal (o cualquier programa de doble detenimiento) es una opción deficiente para el caso de un detenimiento

Las ecuaciones para las funciones de armónica doble son:

para la subida:

$$s = \frac{h}{2}\left\{\left[1-\cos\left(\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right]-\frac{1}{4}\left[1-\cos\left(2\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right]\right\}$$

$$v = \frac{\pi}{\beta}\frac{h}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\pi\frac{\theta}{\beta}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right]$$

$$a = -\frac{\pi^2}{\beta^2}\frac{h}{2}\left[\cos\left(\pi\frac{\theta}{\beta}\right)-\cos\left(2\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right] \qquad (8.15a)$$

$$j = -\frac{\pi^3}{\beta^3}\frac{h}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\pi\frac{\theta}{\beta}\right)-2\operatorname{sen}\left(2\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right]$$

para la bajada:

$$s = \frac{h}{2}\left\{\left[1+\cos\left(\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right]-\frac{1}{4}\left[1-\cos\left(2\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right]\right\}$$

$$v = -\frac{\pi}{\beta}\frac{h}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\pi\frac{\theta}{\beta}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right]$$

$$a = -\frac{\pi^2}{\beta^2}\frac{h}{2}\left[\cos\left(\pi\frac{\theta}{\beta}\right)+\cos\left(2\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right] \qquad (8.15b)$$

$$j = \frac{\pi^3}{\beta^3}\frac{h}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\pi\frac{\theta}{\beta}\right)+2\operatorname{sen}\left(2\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right]$$

Observe que estas funciones de armónica doble **nunca** deben utilizarse para el caso de doble detenimiento debido a que su aceleración es distinta de cero en un extremo del intervalo.

EJEMPLO 8-6

Movimiento armónico doble para un detenimiento simple.

Problema: Considere la misma especificación de leva con detenimiento simple como en el ejemplo 8-5:

subida	1 pulg (25 mm) en 90°
bajada	1 pulg (25 mm) en 90°
detenimiento	en desplazamiento cero para 180° (detenimiento bajo)
ω leva	15 rad/s

Solución:

En la figura 8-24 se muestra una subida armónica doble y una bajada armónica doble. La velocidad pico es 19.5 pulg/s (0.50 m/s) la cual es similar a aquella de la solución de la cicloidal del ejemplo 8-5.

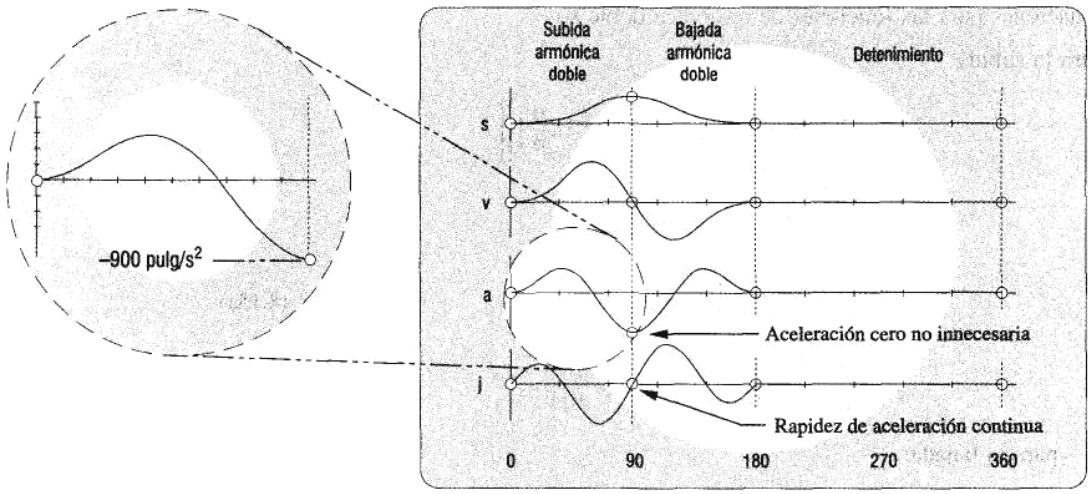


FIGURA 8-24

El movimiento armónico doble puede utilizarse para el caso de un solo detenimiento si la duración de la subida y la bajada son iguales

2 Observe que la aceleración de esta función armónica doble no regresa a cero al final de la subida. Esto la hace más apropiada para un caso de detenimiento simple.

3 La función de rapidez de aceleración armónica doble alcanza un máximo de 36 931 pulg/s^3 (938 m/s^3) y es más uniforme comparada con la solución de la cicloidal.

4 Desafortunadamente, la aceleración pico negativa es 900 pulg/s^2, casi dos veces la de la solución de la cicloidal. Ésta es una función uniforme, pero desarrollará fuerzas dinámicas mayores. Abra el archivo de disco E08-06.cam en el programa DYNACAM para ver este ejemplo con mayor detalle.

Ninguna de las soluciones en los ejemplos 8-5 y 8-6 es óptima. Después de presentar las funciones polinomiales se volverá a ver este problema como ejemplo y se diseñará de nuevo para mejorar su uniformidad y reducir su aceleración pico.

RESUMEN En esta sección se ha presentado un enfoque para la selección de funciones apropiadas de levas con detenimiento simple, y se han señalado algunas de sus limitaciones. Las funciones particulares descritas (cicloidales y armónicas dobles) son sólo dos de las que se han desarrollado para este caso con detenimiento simple. En la siguiente sección se examinará nuevamente este caso de detenimiento simple y se desarrollará una solución superior mediante otras técnicas.

8.5 FUNCIONES POLINOMIALES

La clase de funciones polinomiales es uno de los tipos más versátiles que se emplean para el diseño de levas. No se limitan a aplicaciones de simple o doble detenimiento y pueden

ajustarse a muchas especificaciones de diseño. La forma general de una función polinomial es:

$$s = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5x^5 + C_6x^6 + \cdots + C_nx^n \tag{8.16}$$

donde 5 es el desplazamiento del seguidor; x es la variable independiente, que en este caso se remplazará por θ/β o por el tiempo t. Los coeficientes constantes C_n son las incógnitas por determinar en el desarrollo de la ecuación polinomial particular para que se adapte a una especificación de diseño. El grado de un polinomio se define como la potencia mayor presente en cualquier término. Advierta que un polinomio de grado n tendrá $n + 1$ términos debido a que hay x^0 o término constante con coeficiente C_0, así como también coeficientes a través de, e incluyendo a C_n.

Un problema polinomial de diseño de levas se estructura mediante la decisión de cuántas condiciones de frontera (CF) se desean especificar en los diagramas de $s\ v\ a\ j$. Entonces, el número de CF determina el grado del polinomio resultante. Se puede escribir una ecuación independiente para cada CF sustituyéndola en la ecuación 8.16, o en una de sus derivadas. Se tendrá entonces un sistema de ecuaciones lineales que pueden determinar los coeficientes desconocidos $C_0,\ldots, C_n$. Si k representa el número de condiciones de frontera elegidas, habrá k ecuaciones en k incógnitas $C_0,\ldots, C_n$ y el **grado** del polinomio será $n = k - 1$. El **orden** del polinomio de grado n es igual al número de términos k.

Aplicaciones de polinomios con doble detenimiento

EL POLINOMIO 3-4-5 Regrese al problema de doble detenimiento de la sección 8.3 y resuélvalo con funciones polinomiales. Son posibles muchas soluciones diferentes polinomiales. Se iniciará con la solución más simple para el caso de doble detenimiento.

EJEMPLO 8-7

El polinomio 3-4-5 para el caso de doble detenimiento.

Problema: Considere la misma especificación PEC para el diseño de la leva como en los ejemplos 8-1 a 8-4:

detenimiento	en desplazamiento cero para 90° (detenimiento bajo)
subida	1 pulg (25 mm) en 90°
detenimiento	en 1 pulg (25 mm) para 90° (detenimiento alto)
bajada	1 pulg (25 mm) en 90°
ω leva	2π rad/s = 1 rev/s

Solución:

1 Para satisfacer la ley fundamental del diseño de levas los valores de las funciones de subida (y de bajada), en sus fronteras con los detenimientos, deben acoplarse sin discontinuidades en un mínimo *s, v y a*.

2 En la figura 8-25 se muestran los ejes para los diagramas *s v a j*, de los cuales se trazó la información conocida. Los detenimientos son los únicos segmentos completamente definidos en esta etapa. El requisito para la continuidad a través de la aceleración define un mínimo de

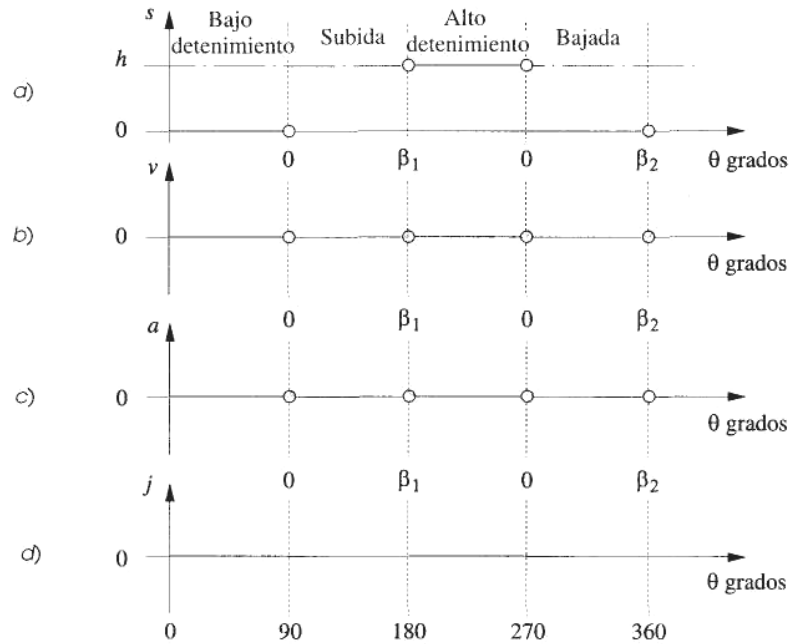


FIGURA 8-25

Condiciones de frontera mínimas para el caso de doble detenimiento

seis **condiciones de frontera** para el segmento de subida y seis más para el de bajada de este problema. En las gráficas se indican como círculos rellenos. Para la generalidad, la subida total especificada se representará por la variable *h.* El conjunto mínimo de CF requeridas para este ejemplo es entonces:

para la subida:

$$\begin{aligned} &\text{cuando} \quad \theta = 0; \quad \text{entonces} \quad s = 0, \quad v = 0, \quad a = 0 \\ &\text{cuando} \quad \theta = \beta_1; \quad \text{entonces} \quad s = h, \quad v = 0, \quad a = 0 \end{aligned} \tag{8.17a}$$

para la bajada:

$$\begin{aligned} &\text{cuando} \quad \theta = 0; \quad \text{entonces} \quad s = h, \quad v = 0, \quad a = 0 \\ &\text{cuando} \quad \theta = \beta_2; \quad \text{entonces} \quad s = 0, \quad v = 0, \quad a = 0 \end{aligned} \tag{8.17b}$$

3 Se usará la subida para la solución de un ejemplo. (La bajada es una derivación similar.) Se tienen seis CF en la subida. Esto requiere seis términos en la ecuación. El término más alto será de quinto grado. Se empleará igual que antes el ángulo normalizado θ/β como la variable independiente. Debido a que las condiciones de frontera comprenden la velocidad y la acele-

ración, así como el desplazamiento, se necesita derivar la ecuación 8.16 con respecto a θ para obtener las expresiones en las que se puedan sustituir esas CF. Reescribiendo la ecuación 8.16 para ajustarse a estas restricciones y derivarse dos veces se obtiene:

$$s = C_0 + C_1\left(\frac{\theta}{\beta}\right) + C_2\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + C_3\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 + C_4\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4 + C_5\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^5 \tag{8.18a}$$

$$v = \frac{1}{\beta}\left[C_1 + 2C_2\left(\frac{\theta}{\beta}\right) + 3C_3\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + 4C_4\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 + 5C_5\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4\right] \tag{8.18b}$$

$$a = \frac{1}{\beta^2}\left[2C_2 + 6C_3\left(\frac{\theta}{\beta}\right) + 12C_4\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + 20C_5\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3\right] \tag{8.18c}$$

4 Al sustituir las condiciones de frontera $\theta = 0,\ s = 0$ en la ecuación 8.18a:

$$0 = C_0 + 0 + 0 + \cdots$$

$$C_0 = 0 \tag{8.19a}$$

5 Al sustituir $\theta = 0,\ v = 0$ en la ecuación 8.18b:

$$0 = \frac{1}{\beta}[C_1 + 0 + 0 + \cdots]$$

$$C_1 = 0 \tag{8.19b}$$

6 Al sustituir $\theta = 0,\ a = 0$ en la ecuación 8.18c:

$$0 = \frac{1}{\beta^2}[C_2 + 0 + 0 + \cdots]$$

$$C_2 = 0 \tag{8.19c}$$

7 Al sustituir $\theta = \beta,\ s = h$ en la ecuación 8.18a:

$$h = C_3 + C_4 + C_5 \tag{8.19d}$$

8 Al sustituir $\theta = \beta,\ v = 0$ en la ecuación 8.18b:

$$0 = \frac{1}{\beta}[3C_3 + 4C_4 + 5C_5] \tag{8.19e}$$

9 Al sustituir $\theta = \beta,\ a = 0$ en la ecuación 8.18c:

$$0 = \frac{1}{\beta^2}[6C_3 + 12C_4 + 20C_5] \tag{8.19f}$$

10 Tres de las incógnitas son cero, lo que deja por determinar tres incógnitas, C_3, C_4 y C_5. Las ecuaciones 8.19d, e y f se resuelven simultáneamente para obtener.

$$C_3 = 10h; \qquad C_4 = -15h; \qquad C_5 = 6h \tag{8.19g}$$

11 La ecuación para este desplazamiento de diseño de leva es entonces:

$$s = h\left[10\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 - 15\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4 + 6\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^5\right] \tag{8.20}$$

12 Las expresiones para la velocidad y aceleración se obtienen sustituyendo los valores de C_3, C_4 y C_5 en las ecuaciones 8.18b y c. Esta función es referida como **polinomio 3-4-5** de acuerdo con sus exponentes. Abra el archivo E08-07.cam en el programa DYNACAM para examinar con mayor detalle este ejemplo.

En la figura 8-26 se muestran los diagramas resultantes *s* v *a j* para una función de **subida del polinomio 3-4-5** del programa DYNACAM. Observe que la aceleración es continua, pero la rapidez de aceleración no, ya que no se colocó ninguna restricción en los valores de frontera de la función de rapidez de aceleración. También es interesante notar que la forma de la onda de aceleración es muy similar a la senoidal de aceleración de la función cicloidal en la figura 8-12. La figura 8-18 muestra las aceleraciones pico relativas de este polinomio 3-4-5 en comparación con otras cuatro funciones con la misma h y β. En la tabla 8-2 se listan los factores para la máxima velocidad, la aceleración y la rapidez de la aceleración de estas funciones.

EL POLINOMIO 4-5-6-7 En el ejemplo anterior no se restringió la rapidez de aceleración. Ahora se volverá a diseñar la leva para las mismas especificaciones, pero también se restringirá la función de rapidez de aceleración como cero en ambos extremos de la subida. Entonces se acoplará a los detenimientos en la función de rapidez de aceleración sin discontinuidades. Esto da ocho condiciones de frontera y genera un polinomio de séptimo grado. El procedimiento de solución para hallar los ocho coeficientes desconocidos es idéntico al que se empleó en el ejemplo anterior. Se escribe el polinomio con el

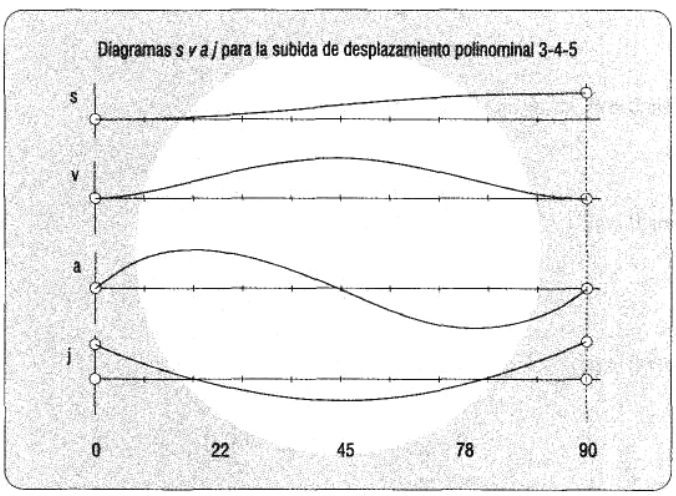


FIGURA 8-26

Subida polinomial 3-4-5. Su aceleración es muy similar a la senoide de movimiento cicloidal

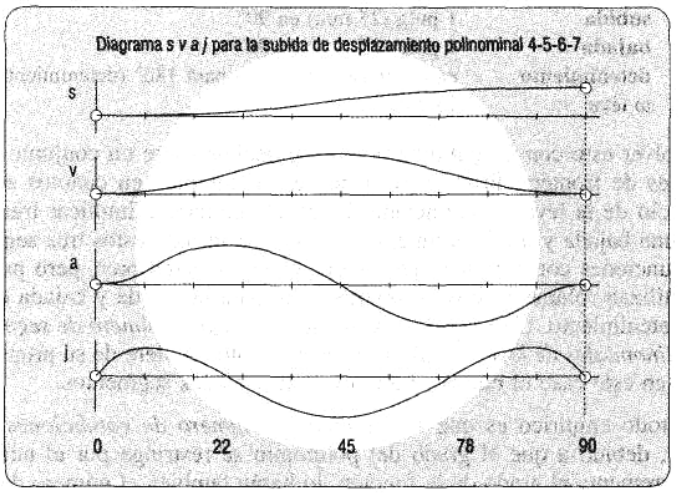


FIGURA 8-27

Subida polinomial 4-5-6-7. Su rapidez de aceleración es continua parte por parte con los detenimientos

número apropiado de términos. Se deriva para obtener las expresiones para todos los órdenes de las condiciones de frontera. Se sustituyen las condiciones de frontera y se resuelve el sistema resultante de ecuaciones simultáneas.* Este problema se reduce a cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, puesto que los coeficientes C_0, C_1, C_2 y C_3 son cero. Para este conjunto de condiciones de frontera la ecuación de desplazamiento para la subida es:

$$s = h\left[35\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4 - 84\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^5 + 70\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^6 - 20\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^7\right] \qquad (8.21)$$

A esto se le conoce como **polinomio 4-5-6-7,** de acuerdo con sus exponentes. En la figura 8-27 se muestran los diagramas *s v a j* para esta función. Compárelas con las funciones del polinomio 3-4-5 mostradas en la figura 8-26. Observe que la aceleración del polinomio 4-5-6-7 comienza lentamente, con una pendiente cero (como se requirió con la CF de rapidez de aceleración cero), y como resultado llega a un valor máximo de aceleración para remplazar el área que falta en el borde frontal.

Esta función del **polinomio 4-5-6-7** tiene la ventaja de una rapidez de aceleración menor para un mejor control de la vibración, en comparación con el **polinomio 3-4-5,** la **cicloidal** y todas las otras funciones analizadas hasta ahora (excepto la armónica doble), pero paga un precio alto en la forma de una aceleración significativamente mayor que la de todas esas funciones. Véase también la tabla 8-2.

Aplicaciones de polinomios con un solo detenimiento

Se regresará al ejemplo con un detenimiento empleado en la sección anterior y se intentará resolverlo con una función polinomial de leva. Exponiendo el problema original como referencia:

* Cualquier calculadora resolvedora de matrices o resolvedores de ecuaciones tales como *Matlab, Mathcad* o *TKSolver* o los programas MATRIX y DYNACAM (que se incluyen en este texto) realizará por usted la solución de ecuaciones simultáneas. Los programas MATRIX y DYNACAM se analizan en el apéndice A. Sólo necesita proporcionar al programa DYNACAM las condiciones de frontera deseadas y se calcularán los coeficientes. Se le sugiere al lector efectuar esto y examinar los problemas de los ejemplos presentados aquí con el programa DYNACAM.

subida	1 pulg (25 mm) en 90°
bajada	1 pulg (25 mm) en 90°
detenimiento	en desplazamiento cero para 180° (detenimiento bajo)
ω leva	15 rad/s

Para resolver esto con un polinomio se debe decidir sobre un conjunto conveniente de condiciones de frontera. Primero se debe decidir también en cuántos segmentos se dividirá el ciclo de la leva. El enunciado del problema parece implicar tres segmentos: una subida, una bajada y un detenimiento. Se podrían utilizar estos tres segmentos para generar las funciones como se hizo en los dos ejemplos anteriores, pero para un mejor enfoque se utilizan solamente **dos segmentos,** uno para la subida y bajada combinada y uno para el detenimiento. *Como regla general se minimiza el número de segmentos en las funciones polinomiales de levas.* Cualquier detenimiento requiere de su propio segmento. Por lo tanto, en este caso el número mínimo posible es dos segmentos.

Otro método empírico es que *se minimice el número de condiciones de frontera especificadas,* debido a que el grado del polinomio se restringe por el número de CF. Conforme incrementa el grado de la función, lo harán también el número de sus **puntos de inflexión** y su número de **mínimos y máximos.** El proceso de derivación del polinomio garantizará que la función pase por todas las CF especificadas, pero no dice nada acerca del comportamiento de la función entre las CF. *Una función de alto grado puede tener oscilaciones no deseadas entre sus CF.*

Con estas suposiciones se selecciona un conjunto de condiciones de frontera para una solución de ensayo. Primero se volverá a plantear el problema para reflexionar sobre la configuración de dos segmentos:

8

EJEMPLO 8-8

Diseño de un polinomio para el caso de detenimiento simple.

Problema: Redefina la especificación PEC de los ejemplos 8-5 y 8-6.

subida-bajada	1 pulg (25 mm) en 90° y una bajada de 1 pulg (25 mm) en 90° para un total de 180°
detenimiento	en desplazamiento cero para 180° (detenimiento bajo)
ω leva	15 rad/s

Solución:

1 En la figura 8-28 se muestra el conjunto mínimo de siete CF para este problema, que dará un polinomio de sexto grado. El detenimiento en cualquier lado del segmento de subida-bajada combinado tiene valores cero de *s, v, a y j.* La ley fundamental del diseño de levas requiere que se acoplen estos valores de cero a través de la función de aceleración, en cada extremo del segmento de subida-bajada.

2 Entonces éstos explican las seis CF; $s,\ v,\ a = 0$ en cada extremo del segmento de subida-bajada.

3 También se debe especificar un valor de desplazamiento en el pico de 1 pulgada de subida que tiene lugar a 90°. Ésta es la séptima CF.

Número de segmento	Función utilizada	Ángulo inicial	Ángulo final	Ángulo delta
1	Poly 6	0	180	180

Condiciones de frontera impuestas				Ecuación resultante	
Función	Teta	% Beta	Condiciones de frontera	Exponente	Coeficiente
Desplazamiento	0	0	0	0	0
Veloc	0	0	0	1	0
Aceleración	0	0	0	2	0
Desplazamiento	180	1	0	3	64
Veloc	180	1	0	4	–192
Aceleración	180	1	0	5	192
Desplazamiento	90	0.5	1	6	–64

FIGURA 8-28

Condiciones de frontera y coeficientes para una aplicación polinomial con un solo detenimiento

4 En la figura 8-28 se muestran también los coeficientes de polinomio de desplazamiento que resultan de la solución simultánea de las ecuaciones para las CF elegidas. Por generalización se ha sustituido la variable *h* para la subida específica de 1 pulgada. La función será un polinomio 3-4-5-6 cuya ecuación es:

$$s = h\left[64\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 - 192\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4 + 192\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^5 - 64\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^6\right] \tag{8.22}$$

En la figura 8-29 se muestran los diagramas *s v a j* para esta solución con sus valores máximos señalados. Compare esta aceleración y las curvas *s v a j* con las soluciones armónica doble y cicloidal del mismo problema en la sección 8.4 (figuras 8-23 y 8-24). Observe que esta función polinomial de sexto grado es tan uniforme como las funciones armónicas dobles (figura 8-24) y no regresa innecesariamente la aceleración a cero en el punto superior de la subida como lo hizo en la cicloidal (figura 8-23). El polinomio tiene una aceleración pico de 547 pulg/s^2, que es menor que una solución cicloidal o armónica doble. El polinomio 3-4-5-6 es una solución superior a cualquiera de las presentadas para el mismo problema en la sección 8.4, y es un ejemplo de cómo se pueden adaptar fácilmente las funciones polinomiales a especificaciones de diseño particulares. El lector puede abrir el archivo EO8-O8.cam en el programa DYNACAM para analizar este ejemplo con más detalle.

RESUMEN Esta sección ha presentado las funciones polinomiales como el enfoque más versátil de aquellos que se mostraron, virtualmente para cualesquiera de los problemas de diseño de levas. Esto es posible sólo a partir del desarrollo y la disponibilidad general de las computadoras, que han hecho de uso práctico estas funciones, puesto que los cálculos que resuelven las ecuaciones simultáneas frecuentemente están fuera del

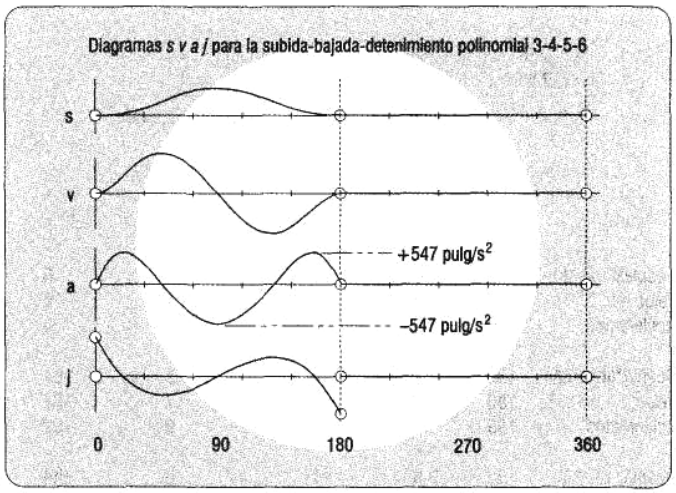


FIGURA 8-29

Función polinomial 3-4-5-6 de sexto grado para una leva de dos segmentos de subida-bajada y con un solo detenimiento

alcance de las habilidades del cálculo manual. Con la disponibilidad de un asistente de diseño para resolver ecuaciones, tal como el programa DYNACAM, los polinomios se han convertido en una manera práctica y preferible para resolver muchos problemas de diseño de levas. Las **funciones segmentarias,** en las que los polinomios son un subconjunto, ofrecen aún mayor flexibilidad para satisfacer las restricciones de frontera y otros criterios de función de levas.[151m] El espacio no permite realizar una descripción detallada de las funciones segmentarias como se aplican aquí a los sistemas de levas. Véase las referencias para mayor información.

8.6 MOVIMIENTO DE TRAYECTORIA CRÍTICA (MTC)

Quizá la aplicación más común en las especificaciones del **movimiento de trayectoria crítica** (MTC) en el diseño de maquinaria de producción, es la necesidad de un **movimiento de velocidad constante.** Existen dos tipos generales de maquinaria de producción automatizada de uso común, las máquinas de ensamble de **movimiento intermitente** y las máquinas de ensamble de **movimiento continuo.**

Las **máquinas de ensamble de movimiento intermitente** llevan los productos fabricados de una estación de trabajo a otra, deteniendo la pieza o subensamble en cada estación mientras se realiza otra operación sobre ésta. La velocidad del rendimiento de este tipo de máquina de producción automatizada se limita comúnmente por las fuerzas dinámicas debidas a las aceleraciones y desaceleraciones de la masa de las partes móviles de la máquina y de sus piezas de trabajo. El movimiento de la pieza de trabajo puede darse en línea recta como en un transportador, o en círculo como en una mesa rotatoria, según se muestra en la figura 8-21.

Las **máquinas de ensamble de movimiento continuo** no permiten que se detenga la pieza de trabajo, por consiguiente, son capaces de tener altas velocidades de rendimiento. Todas las operaciones se realizan sobre una pieza móvil. Todas las herramientas que operan sobre el producto tienen que "irrumpir" la línea de ensamble móvil para efectuar su trabajo. Como la línea de ensamble (generalmente una banda o cadena transportadora, o una mesa rotatoria) se mueve a cierta velocidad constante, se necesitan mecanismos que proporcionen un movimiento de velocidad constante, acoplados exactamente al transportador, para llevar las herramientas junto a éste durante el tiempo suficiente para realizar su trabajo. Estos mecanismos de leva de "irrupción" deben entonces regresar la herramienta rápidamente a su posición inicial para encontrar la siguiente parte o subensamble en el transportador (de retroceso rápido). Existe una motivación en la fabricación para convertir las máquinas de movimiento intermitente en movimiento continuo, e incrementar las tasas de producción. Por ello hay una demanda considerable de este tipo de mecanismo de velocidad constante. El sistema de leva-seguidor se ajusta muy bien a este problema y la función de leva polinomial resulta particularmente adaptable a esta tarea.

Polinomios utilizados en el movimiento de trayectoria crítica

EJEMPLO 8-9

Diseño de un polinomio para un movimiento en trayectoria crítica a velocidad constante.

Problema: Considere el siguiente planteamiento de un problema de movimiento en trayectoria crítica (MTC).

Acelere	el seguidor de cero a 10 pulg/s
Mantenga	una velocidad constante de 10 pulg/s durante 0.5 s
Desacelere	el seguidor hasta la velocidad cero
Regrese	el seguidor a la posición inicial
Tiempo de ciclo	exactamente 1 s

Solución:

1 Este planteamiento no estructurado del problema es común en los problemas de diseño reales, según se analizó en el capítulo 1. No se da ninguna información referente a los medios que se utilizarán para acelerar o desacelerar el seguidor con respecto a los periodos del tiempo disponible para realizar dichas tareas. Una pequeña reflexión provocará que el ingeniero reconozca que la especificación del tiempo del ciclo total define, en efecto, la velocidad del árbol de levas como su recíproco o **una revolución por segundo.** Al convertir a las unidades apropiadas, tal revolución corresponde a una velocidad angular de 2π rad/s.

2 La porción de velocidad constante emplea la mitad del periodo total de 1 segundo en este ejemplo. Posteriormente, el diseñador debe decidir cuánto de los 0.5 segundos restantes se dedicarán a otra fase del movimiento requerido.

3 El planteamiento del problema parece implicar que se necesitan cuatro segmentos. Advierta que el diseñador tiene que seleccionar en cierto modo arbitrario las longitudes de los segmentos individuales (excepto el de velocidad constante). Se puede requerir una iteración que optimice el resultado. El programa DYNACAM vuelve rápido y fácil el proceso de iteración.

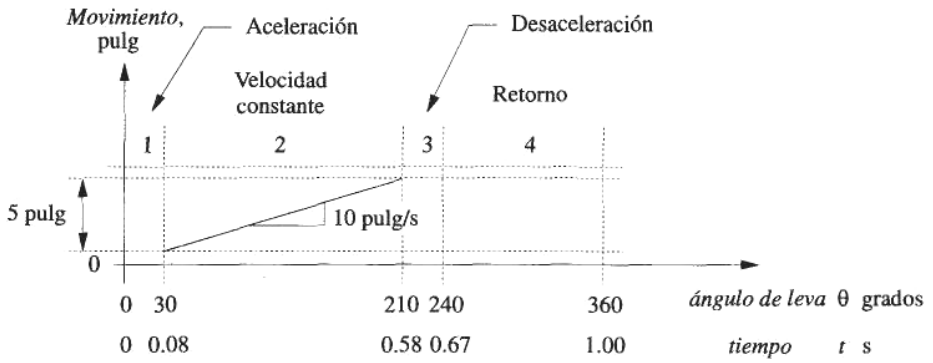


FIGURA 8-30
Diagrama de temporización de una leva con velocidad constante

4 Suponiendo cuatro segmentos, el diagrama de temporización en la figura 8-30 muestra una fase de aceleración, una fase de velocidad constante, una fase de desaceleración y una fase de retroceso, indicados como los segmentos 1 a 4.

5 Se supone que los ángulos de segmento (β), para una primera aproximación, son de 30° para el segmento 1; de 180° para el 2, de 30° para el 3, y de 120° para el 4, como se muestran en la figura 8-31. Estos ángulos pueden necesitar ajustes en iteraciones posteriores, excepto para el segmento 2 que se ciñe rígidamente a las especificaciones.

6 En la figura 8-31 se muestra un diagrama *s v a j* tentativo. Los círculos sólidos indican un conjunto de condiciones de frontera que restringirá la función continua a estas especificaciones. Éstas son para el segmento 1:

$$\begin{array}{llllll} \text{cuando} & \theta = 0°; & s = 0, & v = 0, & \textit{ninguno} & \\ \text{cuando} & \theta = 30°; & \textit{ninguno}, & v = 10, & a = 0 & \end{array} \qquad (a)$$

7 Advierta que el desplazamiento en $\theta = 30°$ se deja sin especificar. La función polinomial resultante proporcionará los valores de desplazamiento en ese punto, los cuales se utilizan como una condición de frontera en el segmento siguiente para realizar las funciones continuas globales según se requiera. La aceleración en $\theta = 30°$ debe ser cero para acoplarla con la del segmento 2 de velocidad constante. La aceleración en $\theta = 0$ se deja sin especificar. El valor resultante se empleará posteriormente para acoplarse al final de la aceleración del último segmento.

8 Al introducir estas cuatro CF para el segmento 1 en el programa DYNACAM se produce una función cúbica, cuyos diagramas *s v aj* se muestran en la figura 8-32. Su ecuación es:

$$s = 0.83376\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 - 0.27792\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 \qquad (8.23a)$$

El desplazamiento máximo sucede en $\theta = 30°$. Éste se utilizará como una CF para el segmento 2. El conjunto total para el segmento 2 es:

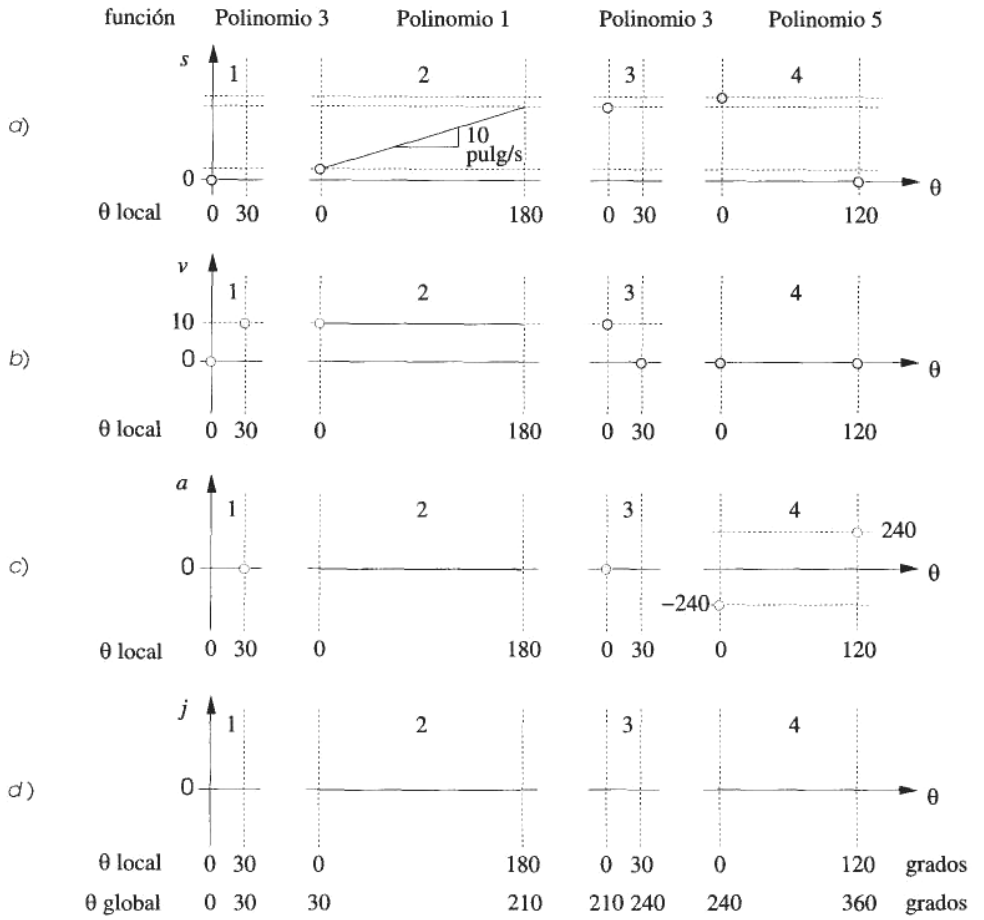


FIGURA 8-31

Un conjunto posible de condiciones de frontera para la solución de velocidad constante para cuatro segmentos

cuando $\theta = 30°$; $s = 0.556$, $v = 10$

cuando $\theta = 210°$; *ninguno*, *ninguno* (*b*)

9 Advierta que en las derivaciones y en el programa DYNACAM los ángulos locales de cada segmento van desde cero hasta β. Por lo tanto, los ángulos locales para el segmento 2 van de 0° a 180°, que corresponden globalmente de 30° a 210° en este ejemplo. Se dejaron sin especificar el desplazamiento, la velocidad y la aceleración en el extremo del segmento 2. Se determinarán mediante el cálculo.

10 Como éste es un segmento de velocidad constante, su integral, la función de desplazamiento, debe ser un polinomio de primer grado, es decir, una línea recta. Si se especifican más de dos

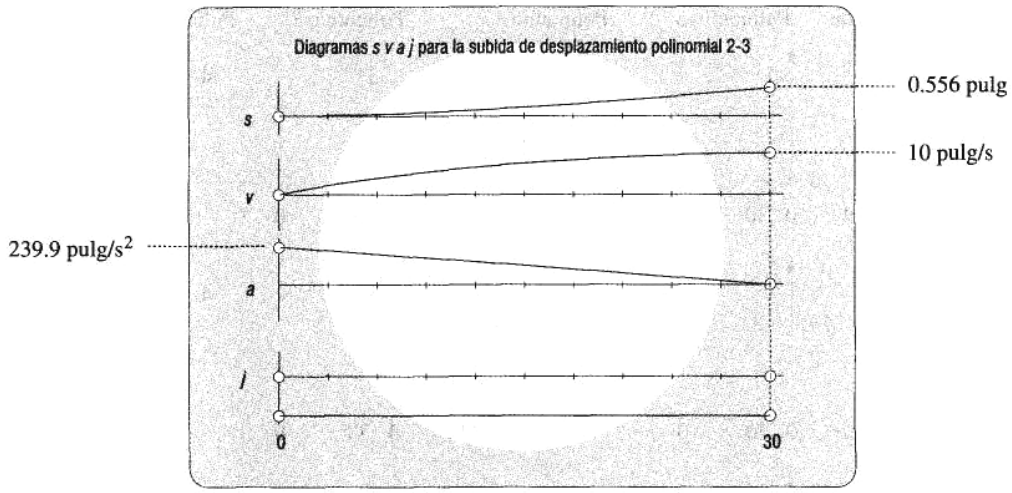


FIGURA 8-32

Segmento uno para la solución de cuatro segmentos del problema de velocidad constante

CF, se obtendrá una función de grado superior al de la que pasará por los puntos finales especificados, pero también puede variar entre ellas y desviarse de la velocidad constante deseada. Por lo tanto, *sólo* se proporcionan 2 CF, una pendiente y una intersección, como se define en la ecuación 8.2. Pero, se debe proporcionar al menos una condición de frontera de desplazamiento, para calcular el coeficiente C_0 de la ecuación 8.16. Especificar las dos CF en un solo extremo del intervalo es perfectamente aceptable. La ecuación para el segmento 2 es:

$$s = 5\left(\frac{\theta}{\beta}\right) + 0.556 \tag{8.23b}$$

II En la figura 8-33 se muestran las gráficas de desplazamiento y velocidad del segmento 2. La aceleración y la rapidez de aceleración son cero. El desplazamiento resultante er $\theta = 210°$ es 5.556.

12 El desplazamiento al final del segmento 2 se conoce ahora a partir de su ecuación. Las cuatro condiciones de frontera para el segmento 3 son entonces:

$$\begin{array}{llll} \text{cuando} & \theta = 210°; & s = 5.556, & v = 10, \quad a = 0 \\ \text{cuando} & \theta = 240°; & \textit{ninguno}, & v = 0, \quad \textit{ninguno} \end{array} \tag{c}$$

13 Esto genera una función de desplazamiento cúbico como se muestra en la figura 8-34. Su ecuación es:

$$s = -0.27792\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 + 0.83376\left(\frac{\theta}{\beta}\right) + 5.556 \tag{8.23c}$$

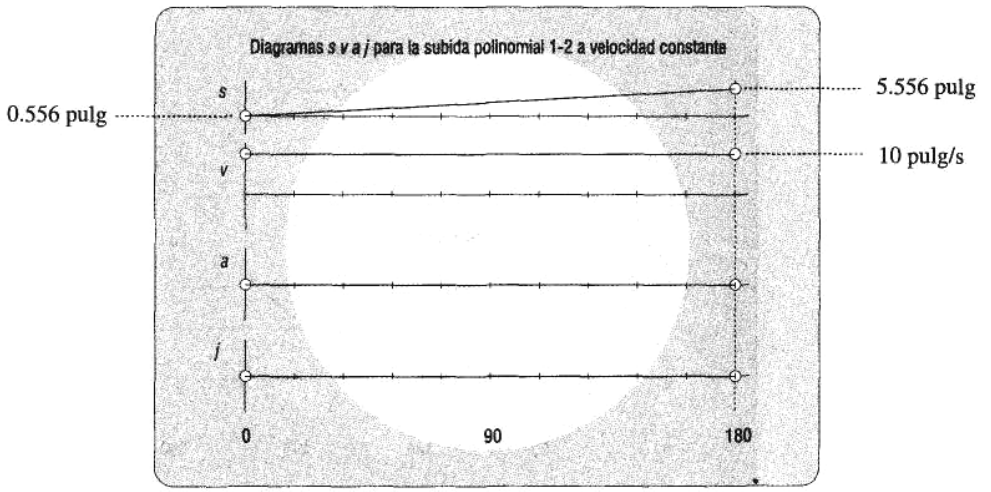


FIGURA 8-33

Segmento dos para la solución de cuatro segmentos del problema de velocidad constante

14 Ahora se definen las condiciones de frontera para el segmento 4, puesto que deben acoplarse a las del final del segmento 3 y a las del inicio del segmento 1. El desplazamiento al final del segmento 3 se determina a partir del cálculo en el programa DYNACAM que es s = 6.112 en $\theta = 240°$, y la aceleración en dicho punto es -239.9. Se deja sin especificar la aceleración al inicio del segmento 1. A partir de la segunda derivada de la ecuación para el desplazamiento en ese segmento, se encuentra que la aceleración es 239.9 en $\theta = 0°$. Las CF para el segmento 4 son entonces:

$$\begin{array}{llllll} \text{cuando} & \theta = 240°; & s = 6.112, & v = 0, & a = -239.9 & \\ \text{cuando} & \theta = 360°; & s = 0, & v = 0, & a = 239.9 & \end{array} \qquad (d)$$

15 La ecuación para el segmento 4 es entonces:

$$s = -9.9894\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^5 + 24.9735\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4 - 7.7548\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 - 13.3413\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2 + 6.112 \qquad (8.23d)$$

En la figura 8-34 se muestran los diagramas *s v a j* para la leva completa. Esto obedece la ley fundamental del diseño de levas, debido a que las funciones parte por parte son continuas a través de la aceleración. El valor máximo de la aceleración es 257 pulg/s^2. La velocidad máxima negativa es -29.4 pulg/s. Ahora se tienen 4 funciones parte por parte y continuas, las ecuaciones 8.23, las cuales satisfarán las especificaciones de operación para este problema.

El lector puede abrir el archivo E08-09.cam en el programa DYNACAM para investigar este ejemplo con más detalle.

Aunque este diseño resulta aceptable, puede mejorarse. Una estrategia útil en el diseño de levas polinomiales consiste en minimizar el número de segmentos, siempre que

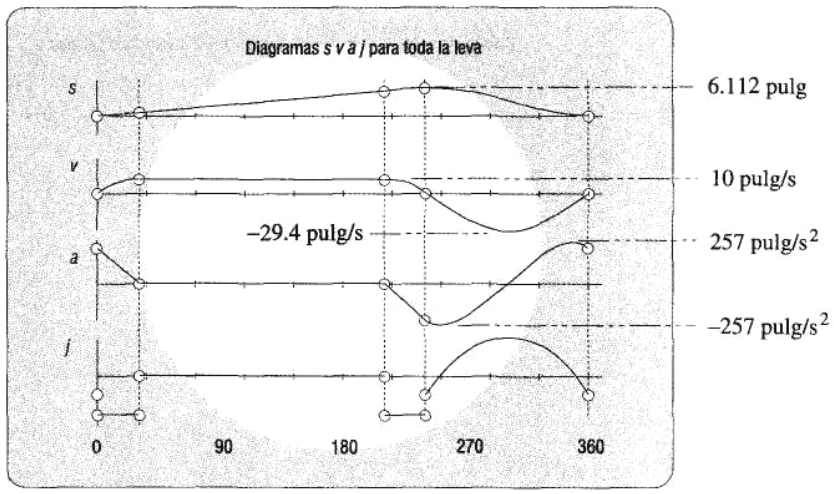


FIGURA 8-34

Solución de cuatro segmentos del problema de velocidad constante que muestra valores máximos

esto no resulte en las funciones de grado alto, tal que se compartan incorrectamente entre las condiciones de frontera. Otra estrategia consiste en empezar siempre con el segmento del que se tiene la mayor información. En este ejemplo, la parte de velocidad constante es la más restringida y debe ser un segmento separado, así como un detenimiento también debe constituir un segmento separado. El resto del movimiento de la leva sólo existe para que el seguidor regrese al segmento de velocidad constante para el siguiente ciclo. Si se empieza por diseñar el segmento de velocidad constante, posiblemente la leva se complete con sólo un segmento adicional. Ahora, dicha leva se volverá a diseñar, con las mismas especificaciones, pero únicamente con dos segmentos, según se observa en la figura 8-35.

EJEMPLO 8-10

Diseño de un polinomio óptimo para el movimiento de trayectoria crítica a velocidad constante.

Problema: Redefina el planteamiento del problema del ejemplo 8-9 para obtener sólo dos segmentos.

Mantenga	una velocidad constante de 10 pulg/s durante 0.5 s
Desacelere	**y acelere** el seguidor a velocidad constante
Tiempo del ciclo	exactamente 1 s

Solución:

I Las CF para el primer segmento, de velocidad constante, serán similares a la solución anterior excepto por los valores globales de sus ángulos y porque el desplazamiento empezará en cero. Estas CF son:

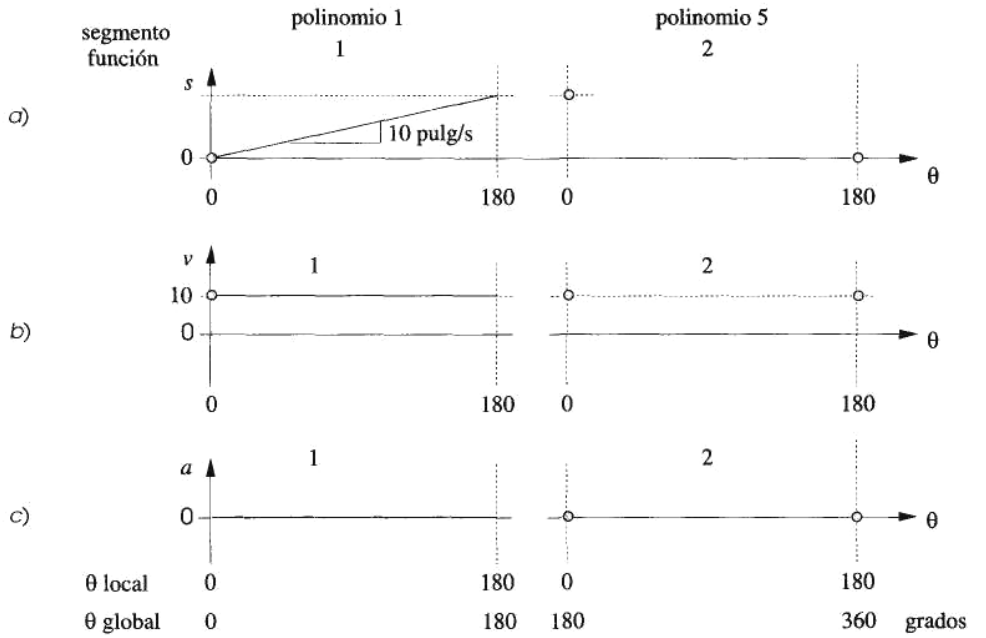


FIGURA 8-35

Condiciones de frontera para la solución de dos segmentos a velocidad constante

$$\begin{array}{llll} \text{cuando} & \theta = 0°; & s = 0, & v = 10 \\ \text{cuando} & \theta = 180°; & \textit{ninguno}, & \textit{ninguno} \end{array} \qquad (a)$$

2 Las gráficas de desplazamiento y velocidad para este segmento son idénticas a las mostradas en la figura 8-33, excepto que el desplazamiento comienza en cero. La ecuación para el segmento 1 es:

$$s = 5\left(\frac{\theta}{\beta}\right) \qquad (8.24a)$$

3 El programa calcula que el desplazamiento al final del segmento 1 es de 5.00 pulgadas. Esto define dicha CF para el segmento 2. El conjunto de CF para el segmento 2 es entonces:

$$\begin{array}{llllll} \text{cuando} & \theta = 180°; & s = 5.00, & v = 10, & a = 0 \\ \text{cuando} & \theta = 360°; & s = 0, & v = 10, & a = 0 \end{array} \qquad (b)$$

La ecuación para el segmento 2 es:

$$s = -60\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^5 + 150\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^4 - 100\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^3 + 5\left(\frac{\theta}{\beta}\right)^1 + 5 \qquad (8.24b)$$

4 Los diagramas *s v aj* para este diseño se muestran en la figura 8-36. Advierta que son mucho más planos que el diseño de cuatro segmentos. La aceleración máxima en este ejemplo es ahora 230 pulg/s^2 y la velocidad negativa máxima es -27.5 pulg/s. Ambas son menores que en el diseño anterior del ejemplo 8-9.

5 El hecho de que el desplazamiento en este diseño contenga valores negativos como se muestra en el diagrama í de la figura 8-36 no resulta de ningún interés. Esto se debe a que se empieza con el inicio de la parte de velocidad constante como desplazamiento cero. El seguidor debe colocarse en una posición negativa para tener la distancia de aceleración nuevamente hasta la velocidad. Simplemente se correrán las coordenadas de desplazamiento por tal cantidad negativa para construir la leva. Para hacer esto calcule simplemente las coordenadas de desplazamiento para la leva. Observe el valor del desplazamiento negativo más grande. Sume este valor a las condiciones de frontera de desplazamiento para todos los segmentos y vuelva a calcular las funciones de la leva con DYNACAM. (No cambie las CF por las derivadas superiores.) El perfil de desplazamiento de la leva terminada se correrá hacia arriba de manera que el valor mínimo ahora será cero.

Entonces, ahora no solamente se tiene una leva más plana, sino que las fuerzas dinámicas y la energía cinética almacenada son menores. Advierta que no se tuvo que realizar ninguna suposición en relación con las porciones del tiempo de velocidad no constante disponible, para que se dediquen a acelerar o desacelerar. Todo esto sucedió automáticamente desde que elegimos sólo dos segmentos y la especificación del conjunto mínimo de condiciones de frontera necesarias. Evidentemente, éste es un diseño superior a los intentos previos y es en realidad una solución de polinomio óptima para las especificaciones dadas. Se recomienda al lector que examine el archivo E08-10.cam en el programa DYNACAM para examinar este ejemplo con mayor detalle.

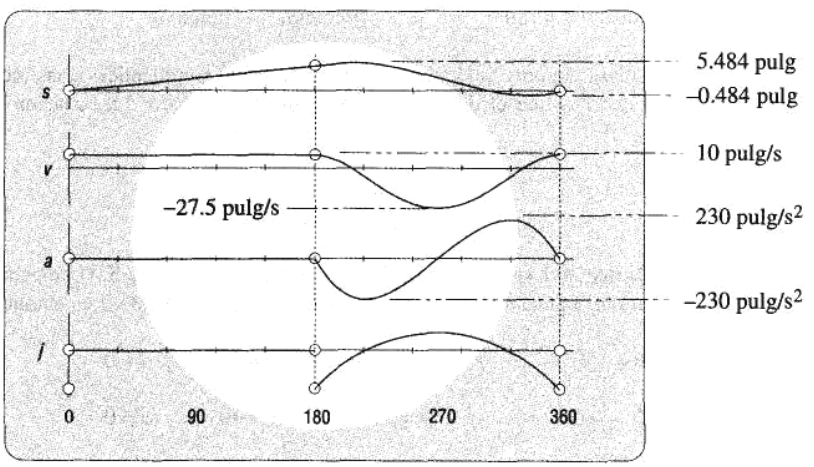


FIGURA 8-36

Solución de dos segmentos del problema de velocidad constante mostrando los valores máximos

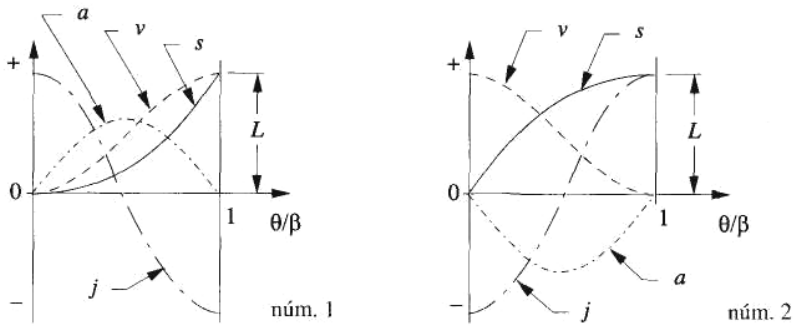


FIGURA 8-37

Funciones semicicloidales para uso en un segmento de subida

Funciones de la familia de armónicas de semiperiodo

Las funciones senoidales de subida completa cicloidal y subida completa modificada son generalmente apropiadas sólo para los casos de doble detenimiento, puesto que tienen aceleración cero en cada extremo. Sin embargo, partes de estas funciones se utilizan para acoplarse a otras funciones, como los segmentos de velocidad constante, de manera similar a la empleada para integrar las senoidales modificadas de las dos armónicas de diferente frecuencia. Las funciones de subida completa antes mencionadas (excepto la armónica simple) contienen un periodo completo en su velocidad y aceleración. La armónica simple (figura 8-9) no tiene aceleración cero en sus extremos, pero las aceleraciones de la senoidal modificada y cicloidal (figura 8-12) comienzan y finalizan en cero. Para acoplarse a una velocidad distinta de cero, como en el ejemplo anterior, se podría utilizar la mitad de cualquiera de estas funciones de familia armónicas y diseñarlas para que se acoplen a la velocidad constante deseada del segmento adyacente.

Como un ejemplo de este enfoque, en la figura 8-37 se muestran las funciones *s v a j* para una función núm. 1 de subida **semicicloidal,** que tiene velocidad cero en el inicio del intervalo y velocidad diferente de cero al final. Observe que su desplazamiento empieza en cero y termina en un valor positivo, pero su aceleración es cero en ambos extremos. Esto posibilita que se acople esta función a un segmento de velocidad constante y que la velocidad deseada y su aceleración cero se acoplen en la frontera. El desplazamiento total requerido de la semicicloide "se resolverá" cuando las condiciones de frontera de velocidad y duración se apliquen a este caso particular. Las ecuaciones para esta semicicloide núm. 1 son:

$$s = L\left[\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\left(\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right] \tag{8.25a}$$

$$v = \frac{L}{\beta}\left[1 - \cos\left(\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right] \tag{8.25b}$$

$$a = \frac{\pi L}{\beta^2}\operatorname{sen}\left(\pi\frac{\theta}{\beta}\right) \tag{8.25c}$$

$$j = \frac{\pi^2 L}{\beta^3}\cos\left(\pi\frac{\theta}{\beta}\right) \tag{8.25d}$$

En la figura 8-37 también se muestran las funciones *s v a j* para la función de subida **semicloidal** núm. 2 con velocidad diferente de cero al principio del intervalo y velocidad cero al final. Las ecuaciones para esta semicicloide núm. 2 son:

$$s = L\left[\frac{\theta}{\beta} + \frac{1}{\pi}\text{sen}\left(\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right] \tag{8.26a}$$

$$v = \frac{L}{\beta}\left[1 + \cos\left(\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right] \tag{8.26b}$$

$$a = -\frac{\pi L}{\beta^2}\text{sen}\left(\pi\frac{\theta}{\beta}\right) \tag{8.26c}$$

$$j = -\frac{\pi^2 L}{\beta^3}\cos\left(\pi\frac{\theta}{\beta}\right) \tag{8.26d}$$

Para una bajada en lugar de una subida, se restan las expresiones de desplazamiento de subida de la subida total L y se anulan todas las derivadas superiores.

Para que estas funciones se ajusten a una situación particular de velocidad constante se resuelve la ecuación 8.25b u 8.26b (dependiendo de qué función se desee) para el valor de L que resulta de la especificación de la velocidad constante conocida v que se acoplará en $\theta = \beta$ o $\theta = 0$. Tendrá que elegir un valor de β para el intervalo de este semicicloide que es el apropiado para el problema. En el ejemplo anterior el valor de $\beta = 30°$ usado en el primer segmento del polinomio de cuatro piezas, podría tratarse de una primera iteración. Una vez que se conocen L y β todas las funciones están definidas.

El mismo enfoque se toma con las funciones **senoidal modificada y armónica simple.** En cualquier mitad de sus funciones de subida completa se pueden dimensionar para que corresponda con un segmento de velocidad constante. La función semisenoidal semimodificada que se acopla con un segmento de velocidad constante tiene la ventaja de baja velocidad pico, que resulta práctica con grandes cargas de inercia. Cuando se acopla a una velocidad constante, la semiarmónica simple tiene la misma desventaja de la rapidez de aceleración infinita, tal como cuando su contraparte de subida completa se acopla a un detenimiento, por lo tanto, no es recomendable.

Ahora resolveremos el problema del ejemplo anterior de velocidad constante mediante funciones semicicloidales de velocidad constante y senoidales modificadas de bajada completa.

EJEMPLO 8-11

Uso de semicicloldes para acoplar el movimiento de trayectoria crítica a velocidad constante.

Problema: Considere el mismo planteamiento de problema que el del ejemplo 8-9.

Acelere el seguidor desde cero hasta 10 pulg/s

Mantenga	una velocidad constante de 10 pulg/s durante 0.5 s
Desacelere	el seguidor hasta la velocidad cero
Regrese	el seguidor a la posición inicial
Tiempo de ciclo	exactamente 1 s

Solución:

1 La velocidad constante especificada se debe expresar en unidades de longitud por radián. La velocidad angular es 2π rad/s:

$$v = 10\frac{\text{pulg}}{\text{s}}\left(\frac{1}{2\pi}\frac{\text{s}}{\text{rad}}\right) = \frac{5}{\pi}\frac{\text{pulg}}{\text{rad}} \qquad \text{(a)}$$

2 En este ejemplo la porción de velocidad constante utiliza la mitad del periodo total de 1 s o π radianes. El diseñador debe decidir cuántos de los 0.5 s restantes se dedicarán a cada una de las otras fases del movimiento requerido. Se supone, como una primera aproximación, que los ángulos del segmento β son: de 25° para el segmento 1, de 180° para el segmento 2, de 25° para el segmento 3, y de 130° para el segmento 4. Estos ángulos necesitan ajustarse en iteraciones posteriores para equilibrar y minimizar las aceleraciones (excepto en el segmento 2 que está restringido en las especificaciones).

3 Los segmentos consistirán en:

Segmento	β (grados)	β (radianes)	Función	Movimiento
1	25	0.43633	Semicicloide núm. 1	Subida
2	180	3.14159	Polinomio de 1°	Subida
3	25	0.43633	Semicicloide núm. 2	Subida
4	130	2.26893	Senoidal modificada	Bajada

4 Para determinar la subida total L de la semicicloide necesaria que se acople con la velocidad constante especificada resuelva la ecuación 8.25b para L en $\theta = \beta$, donde debe acoplarse a la velocidad constante v.

$$L = \frac{\beta v}{1-\cos\left(\pi\frac{\theta}{\beta}\right)} = \frac{0.43633\left(\frac{5}{\pi}\right)}{1-\cos\left(\pi\frac{\beta}{\beta}\right)} = 0.34722 \qquad \text{(b)}$$

5 Este valor de L se sustituye en la ecuación 8.25a para obtener el desplazamiento del primer segmento:

$$s = 0.3472\left[\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{\pi}\text{sen}\left(\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right] \qquad \text{(c)}$$

6 El segmento de velocidad constante se encuentra de la misma manera que en el ejemplo 8-9. En este caso el desplazamiento inicial del segmento 2 es el valor de L y la ecuación del segmento 2 es:

$$s = 5\left(\frac{\theta}{\beta}\right) + 0.3472 \qquad \text{(d)}$$

La subida total dentro de este segmento, como antes, es de 5 pulg.

7 El segmento 3 es una semicicloide núm. 2. Su coeficiente *L* es idéntico al del segmento 1 debido a que se utilizó el mismo valor de β para ambos. Pero debe correrse por la suma del desplazamiento de los segmentos 2 y 3 o L + 5. El programa DYNACAM proporciona la especificación de este corrimiento. El ascenso para este segmento es 0.3472 y el corrimiento es 5.3472. La ecuación para el segmento 3 (a partir de la ecuación 8.26a) es entonces:

$$s = 0.3472\left[\frac{\theta}{\beta} + \frac{1}{\pi}\text{sen}\left(\pi\frac{\theta}{\beta}\right)\right] + 5.3472 \qquad \text{(e)}$$

8 El segmento 4 es una senoidal modificada de periodo completo que regresará al seguidor desde su desplazamiento máximo de h = 0.3472 + 5.0 + 0.3472 = 5.6944. Véase la ecuación 8.14.

9 El conjunto completo de datos necesarios para calcular estas funciones dentro (o fuera) del programa DYNACAM es:

Segmento	β (grados)	β (radianes)	Función	Inicio (pulg)	Movimiento	Movimiento (pulg)
1	25	0.43633	Semicicloide núm. 1	0	Subida	0.3472
2	180	3.14159	Polinomio de 1°	0.3472	Subida	5.0000
3	25	0.43633	Semicicloide núm. 2	5.3472	Subida	0.3472
4	130	2.26893	Senoidal modificado	5.6944	Bajada	5.6944

10 Los diagramas *s* v *aj* resultantes se muestran en la figura 8-38. La aceleración pico es 241 pulg/s^2, y la velocidad pico es -28 pulg/s.

Estos resultados son casi tan bajos como los valores de la solución polinomial de dos segmentos del ejemplo 8-10. El factor que hace de éste un diseño de leva inferior al del ejemplo 8-10 son los retrocesos innecesarios a cero en la forma de onda de la aceleración. Esto genera una función de rapidez de aceleración más "desigual" que incrementará los problemas de vibración. Como comúnmente ocurre en el diseño de levas, este enfoque polinomial es superior al de las otras soluciones presentadas en este caso. El lector puede abrir el archivo E08-ll.cam en el programa DYNACAM para investigar este ejemplo con más detalle.

8.7 DIMENSIONADO DE LA LEVA: ÁNGULO DE PRESIÓN Y RADIO DE CURVATURA

Una vez definidas las funciones *s v aj*, el siguiente paso consiste en dimensionar la leva. Hay dos factores principales que afectan la dimensión de una leva, el **ángulo de presión**

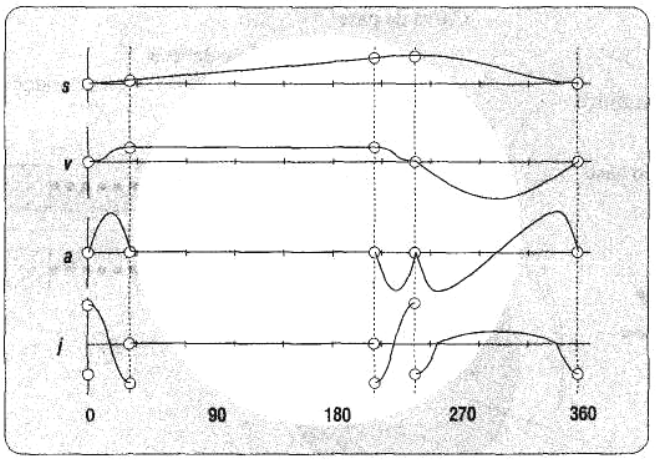


FIGURA 8-38
Funciones semicicloidales utilizadas como transiciones a velocidad constante (ejemplo 8-11)

y el **radio de curvatura.** Ambos implican al **radio del círculo base** en la *leva* (R_b) cuando se utilizan seguidores de cara plana, o al **radio de circulo primitivo (o primo)** en la leva (R_p) cuando se utilizan seguidores de rodillos o curvos.

Los centros del círculo base y del círculo primo se encuentran en el centro de rotación de la leva. El círculo base se define como *el círculo más pequeño que puede trazarse tangente a la superficie física de la leva* como se muestra en la figura 8-39. Todas las levas radiales tendrán un círculo base, sin importar el tipo de seguidor usado.

El círculo primitivo es sólo aplicable a levas con seguidores de rodillo o de hongo, y se mide hasta el centro del seguidor. El **círculo primario (o primo)** se define como *la menor circunferencia que puede trazarse tangente al lugar geométrico de la línea central del seguidor,* como se muestra en la figura 8-39. El lugar geométrico de la línea central del seguidor se denomina **curva de paso.** De hecho, las levas con seguidores de rodillo se definen para la fabricación respecto a la curva de paso en vez de respecto a la superficie física de la leva. Las levas con seguidores de cara plana deben definirse para la fabricación en relación con su superficie física, puesto que no hay curva de paso.

El proceso de construcción de la leva física a partir del diagrama s puede visualizarse conceptualmente imaginando que el diagrama *s* se recortará de un material flexible, como el caucho. El eje *x* del diagrama í representa la circunferencia del círculo, que podría ser el **círculo base** o el **círculo primitivo** alrededor del cual se "envolverá" el diagrama í de "caucho". Se tiene la libertad de elegir la longitud inicial del eje *x* del diagrama *s,* aunque la función de desplazamiento de la leva que se ha elegido fija la altura de la curva de desplazamiento. En efecto, el radio del círculo base o primo se elegirá como un parámetro de diseño y se alargará la longitud de los ejes del diagrama *s* para que se ajuste a la circunferencia del círculo elegido.

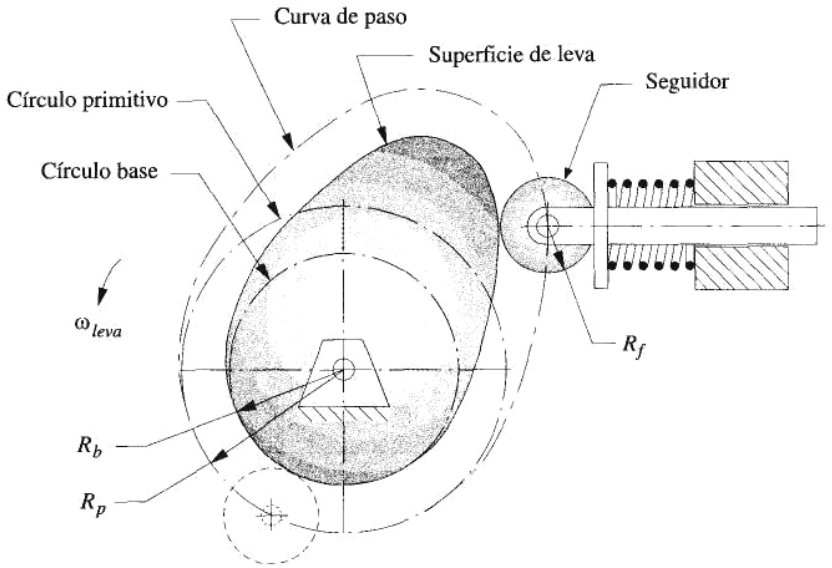


FIGURA 8-39

Círculo base R_b, círculo primitivo R_p y curva de paso de una leva radial con seguidor de rodillo

Ángulo de presión: seguidores de rodillo

El **ángulo de presión** definido en la figura 8-40, es el complemento del ángulo de transmisión que se estableció para los eslabonamientos en capítulos anteriores y tiene un significado semejante respecto a la operación leva-seguidor. Por conveniencia, el ángulo de presión se emplea para levas, en vez del ángulo de transmisión. La fuerza sólo se puede transmitir de la leva al seguidor o viceversa, a lo largo del **eje de transmisión** que es perpendicular al **eje de deslizamiento** o tangente común.

ÁNGULO DE PRESIÓN **El ángulo de presión** ϕ es *el ángulo entre la dirección del movimiento (velocidad) del seguidor y la dirección del eje de transmisión** Cuando $\phi = 0$, toda la fuerza transmitida comienza el movimiento del seguidor, pero no la velocidad de deslizamiento. Cuando ϕ se vuelva de 90° no habrá movimiento del seguidor. Como método empírico convendría que el ángulo de presión esté entre 0^o y aproximadamente 30° para los seguidores traslatorios, con lo que se evitaría una carga lateral excesiva sobre el seguidor deslizante. Si el seguidor oscila sobre un brazo pivoteado, un ángulo de presión hasta de 35° es aceptable. Los valores de ϕ mayores que esta carga incrementan el deslizamiento del seguidor o la fricción del pivote a niveles no deseados y tienden a atascar el seguidor traslatorio en sus guías.

EXCENTRICIDAD En la figura 8-41 se muestra la geometría de una leva y un seguidor de rodillo traslatorio en una posición arbitraria. Esto muestra el caso general en el que el eje de movimiento del seguidor no interseca el centro de la leva. Existe una **excentricidad** e definida como *la distancia perpendicular entre el eje de movimiento del seguidor y el centro de la leva.* A menudo esta excentricidad e será cero, lo que hará de éste un **seguidor alineado,** que es el caso especial.

* Dresner señala que esta definición es válida únicamente para los sistemas con un solo grado de libertad. Para sistemas con múltiples entradas se requiere una definición y un cálculo del ángulo de presión (o ángulo de transmisión) más complicados. Para mayor información véase Dresner, T. L., y K. W. Buffington (1991). "Definition of Pressure and Transmission Angles Applicable to Multi-Input Mechanisms". *Journal of Mechanical Design,* 113(4), p. 495.

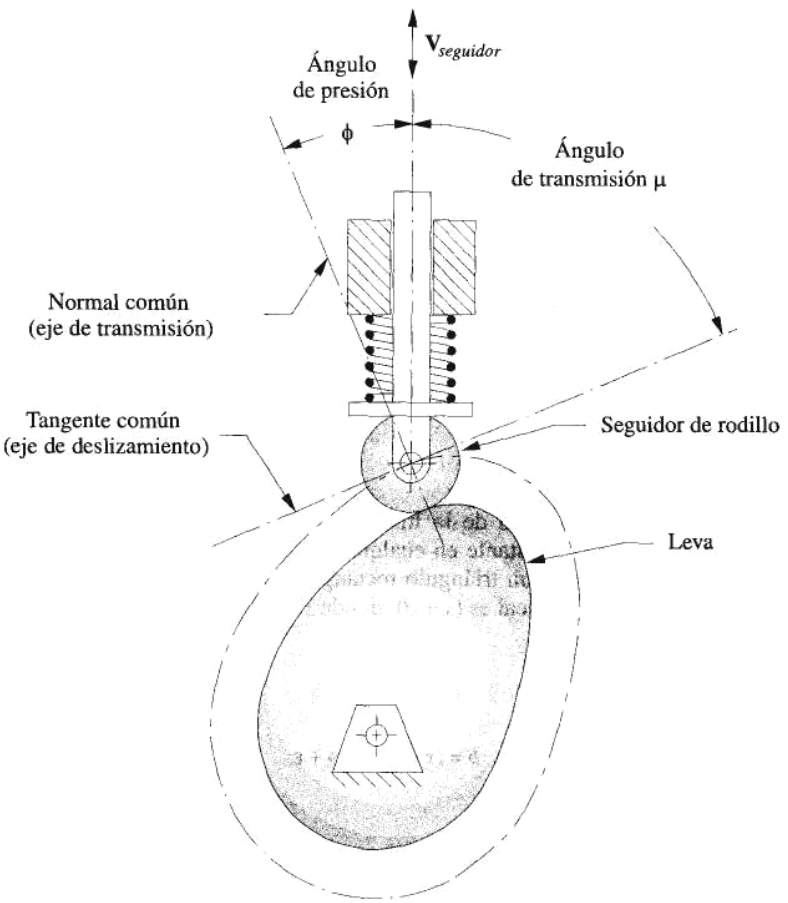


FIGURA 8-40
Ángulo de presión de una leva

En la figura se extiende el eje de transmisión para intersecar el eslabón efectivo 1, que es el eslabón de fijación. (Véase la sección 8.0 y la figura 8-1 para un análisis de los eslabones efectivos en los sistemas de levas.) Esta intersección es el centro instantáneo $I_{2,4}$ (indicado como *B)* que, por definición, tiene la misma velocidad en el eslabón 2 (la leva) y en el eslabón 4 (el seguidor). Debido a que el eslabón 4 se encuentra en traslación pura, todos los puntos sobre él tienen velocidades idénticas $V_{seguidor}$, que son iguales a la velocidad de $I_{2,4}$ en el eslabón 2. Se puede escribir una expresión para la velocidad de $I_{2,4}$ en términos de la velocidad angular de leva y el radio *b* del centro de leva a $I_{2,4}$,

$$V_{I_{2,4}} = b\omega = \dot{s} \tag{8.27}$$

donde *s* es el desplazamiento instantáneo del seguidor del diagrama *s*, y *punto s* es su derivada de tiempo en unidades de long/s. (Observe que las letras mayúsculas *SVAJ* denotan las variables basadas en tiempo, en vez de las funciones del ángulo de leva.)

Pero $$\dot{s} = \frac{ds}{dt}$$

y $$\frac{ds}{dt}\frac{d\theta}{d\theta} = \frac{ds}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{d\theta}\omega = v\omega$$

así $$b\omega = v\omega$$

entonces $$b = v \tag{8.28}$$

Ésta es una relación interesante que establece que la **distancia** *b* **al centro instantáneo** $\mathbf{I_{2,4}}$ **es numéricamente igual a la velocidad del seguidor** v en unidades de longitud por radián, según se derivó en secciones anteriores. Esta expresión se ha reducido a una geometría pura, independiente de la velocidad angular ω de la leva.

Advierta que se puede expresar la distancia *b* en términos del radio del círculo primo R_p y la excentricidad ε, por medio de la construcción que aparece en la figura 8-41. Se balancea el arco del radio R_p hasta que interseca el eje de movimiento del seguidor en el punto *D*. Ello define la longitud de la línea *d* desde el eslabón efectivo 1 hasta esta intersección. El eslabón es constante en cualquier radio elegido del círculo primitivo . R_p. Los puntos A, C e $I_{2,4}$ forman un triángulo rectángulo cuyo ángulo superior es el ángulo de presión ϕ y cuyo cateto vertical es $(s + d)$, donde *s* es el desplazamiento instantáneo del seguidor. De este triángulo:

$$c = (s + d)\tan\phi$$

y $$b = (s + d)\tan\phi + \varepsilon \tag{8.29a}$$

Entonces de la ecuación 8.28,

$$v = (s + d)\tan\phi + \varepsilon \tag{8.29b}$$

y del triángulo CDO_2,

$$d = \sqrt{R_P^2 - \varepsilon^2} \tag{8.29c}$$

Al sustituir la ecuación 8.29c en la ecuación 8.29b y al determinar ϕ se obtiene una expresión del ángulo de presión en términos de desplazamiento *s*, velocidad v, excentricidad ε y del círculo primitivo R_p.

$$\phi = \arctan\frac{v - \varepsilon}{s + \sqrt{R_P^2 - \varepsilon^2}} \tag{8.29d}$$

La velocidad v en esta expresión está en unidades de long/rad, y las otras cantidades están en unidades de longitud compatibles. Comúnmente se ha definido s y v para esta etapa del proceso de diseño de levas y se desea operar con R_p y ε para obtener un ángulo ϕ de presión máxima aceptable. Cuando R_p se incremente, ϕ se reducirá. Las únicas restricciones contra los grandes valores de R_p son las restricciones prácticas de la dimensión del conjunto y el costo. A menudo habrá cierto límite superior en la dimensión del conjunto leva-seguidor impuesto por su entorno. Siempre habrá una restricción de costo que será "más grande" = "más pesado" = "más caro".

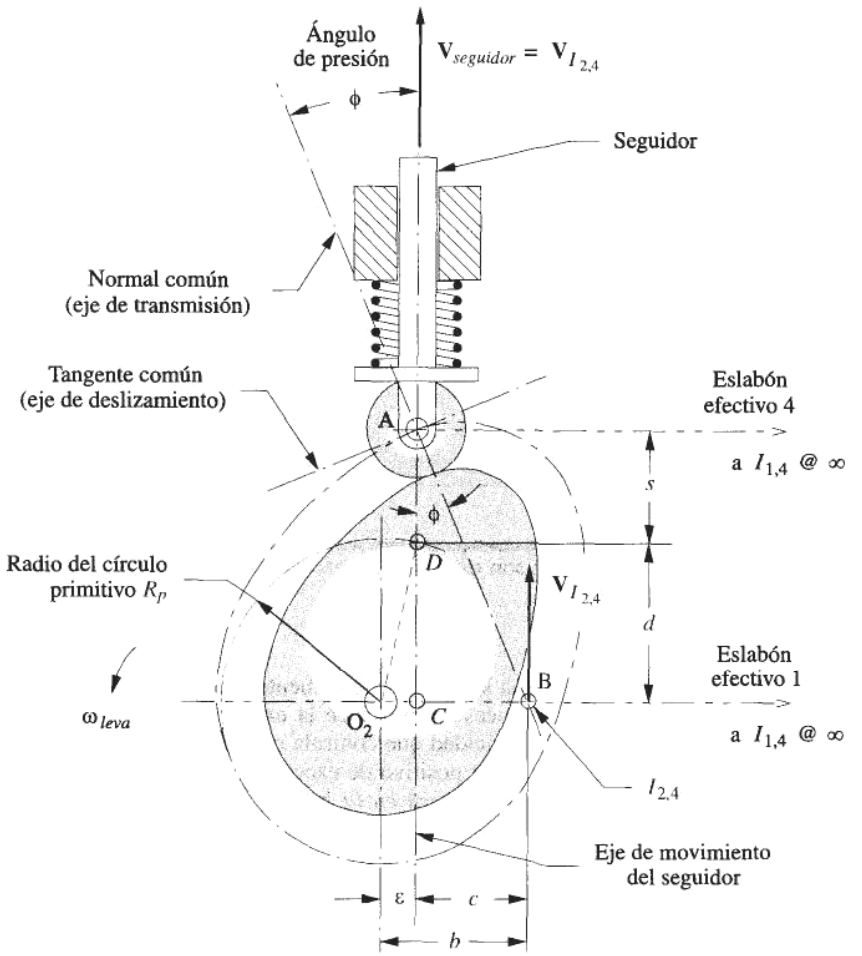


FIGURA 8-41

Geometría para la obtención de la ecuación del ángulo de presión

Elección de un radio de círculo primitivo

R_p y ε se encuentran dentro de una expresión trascendental en la ecuación 8.29d, por lo que no se pueden resolver convenientemente de un modo directo. El enfoque más simple es suponer un valor de ensayo para R_p y una excentricidad inicial de cero; utilizar el programa DYNACAM; su propio programa o un resolvedor de ecuaciones como *Matlab*, *TKSolver* o *Mathcad* con el que calcule rápidamente los valores de ϕ para la leva entera, y luego ajuste R_p y repita el calculo hasta que se encuentre una combinación aceptable. La figura 8-42 muestra los ángulos de presión calculados para una leva con cuatro detenimientos. Observe la semejanza en forma de las funciones de velocidad para la misma leva en la figura 8-6, ya que dicho término es dominante en la ecuación 8.29d.

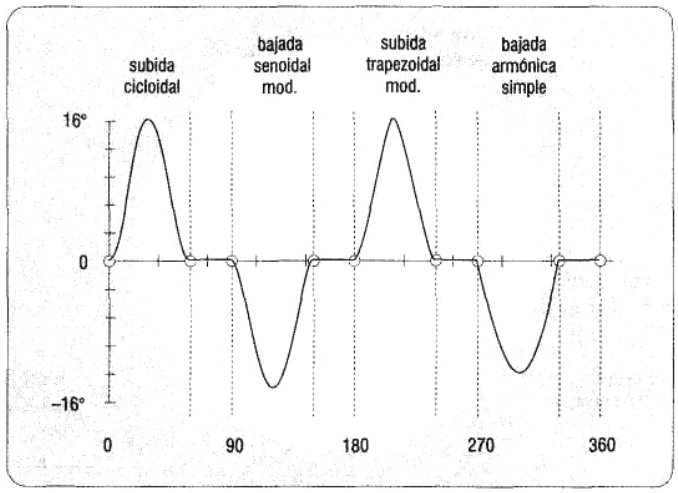


FIGURA 8-42

Las funciones del ángulo de presión son de forma similar a las funciones de velocidad. (Véase la figura 8-6)

8

USO DE EXCENTRICIDAD Si una leva convenientemente pequeña no se obtiene con un ángulo de presión aceptable, entonces se introduce la excentricidad para cambiar el ángulo de presión. El uso de la excentricidad que controla el ángulo de presión tiene sus limitaciones. En una co positiva, un valor positivo de excentricidad *disminuirá el ángulo de presión en la subida,* pero *lo incrementará en la bajada.* La excentricidad negativa provoca lo contrario.

La excentricidad tiene poco valor con una leva con cierre de forma (de ranura o de pista), puesto que impulsa al seguidor en ambas direcciones. Para una leva con cierre de fuerza y retorno de resorte, a veces se tiene un ángulo de presión mayor en la bajada que en la subida, debido a que la energía almacenada en el resorte intenta acelerar el árbol de levas durante la bajada, mientras la leva almacena dicha energía en el resorte durante la subida. El límite de esta técnica puede ser el grado de exceso de velocidad alcanzado con un ángulo de presión mayor en la bajada. Las variaciones resultantes de la velocidad angular de la leva pueden resultar inaceptables.

El mayor valor ganado cuando se agrega excentricidad al seguidor, se alcanza en situaciones en las que el programa de la leva es asimétrico y existen diferencias significativas (sin excentricidad) entre los ángulos de presión máximos en la subida y la bajada. Al introducir la excentricidad se balancean los ángulos de presión en esta situación, y se crea una leva de accionamiento uniforme.

Si los ajustes a R_p o a ε no producen ángulos de presión aceptables, el único recurso consiste en regresar a una etapa anterior del proceso de diseño y redefinir el problema. Un ascenso en menos o más tiempo de subida o bajada reducirá las causas del ángulo de presión mayor. Diseñar es, después de todo, un proceso iterativo.

Momento de volteo: seguidor de cara plana

En la figura 8-43 se muestra un seguidor de cara plana traslatorio que funciona con una leva radial. Se puede ver que el ángulo de presión es cero para todas las posiciones de la leva-seguidor. Esto parece desproporcionado, lo cual no es cierto. A medida que el punto de contacto se mueve a la izquierda o a la derecha, el punto de aplicación de la fuerza entre la leva y el seguidor también se mueve. Existe un momento de volteo en el seguidor asociado con esta fuerza descentrada que tiende a atascar el seguidor en sus guías, además de que se agrandó demasiado un ángulo de presión en el caso del seguidor de rodillo. Convendría entonces mantener la leva tan pequeña como sea posible para minimizar el brazo de momento de la fuerza. La excentricidad afectará el valor promedio del momento, pero no la variación de pico a pico del momento en relación con dicho promedio. Las

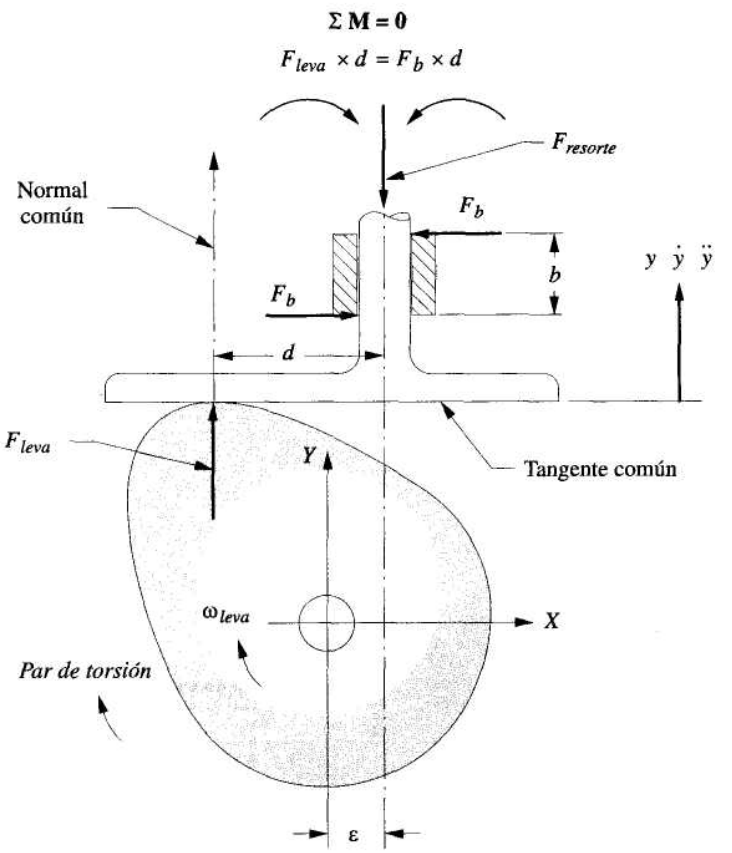


FIGURA 8-43
Momento de volteo en un seguidor de cara plana

consideraciones de un ángulo de presión demasiado grande no limitan la dimensión de esta leva, pero otros factores sí lo hacen. El radio de curvatura mínimo de la superficie de la leva (véase lo que sigue) debe mantenerse suficientemente grande para evitar el rebaje. Esto resulta cierto a pesar del tipo de seguidor empleado.

Radio de curvatura: seguidor de rodillo

El **radio de curvatura** es una *propiedad matemática de una función.* Su valor y uso no se limita a las levas, pero tiene una gran importancia en su diseño. El concepto es simple. Sin importar qué tan complicada sea la forma de una curva ni qué tan alto sea el grado de la función que la describe tendrá un radio instantáneo de curvatura en cada punto sobre la curva. Estos radios de curvatura tendrán centros instantáneos (que pueden estar en el infinito), y el radio de curvatura de cualquier función es por sí misma una función que puede calcularse y granearse. Por ejemplo, el radio de curvatura de una línea recta es infinito en todo lugar; el de un círculo es un valor constante. Una parábola tiene un radio de curvatura constantemente variable que aproxima al infinito a lo largo de las asíntotas de la parábola. Una curva cúbica tendrá radios de curvatura que son a veces positivos (convexos) y a veces negativos (cóncavos). En general, a mayor grado de una función, mayor variedad potencial en su radio de curvatura.

Los contornos de la leva son a menudo funciones de alto grado. Cuando están envueltas alrededor de sus círculos base o primitivos tienen porciones cóncavas, convexas o planas. Las pequeñas caras planas infinitesimales de radio infinito se presentarán en todos los puntos de inflexión sobre la superficie de la leva donde cambia de cóncava a convexa, o viceversa.

El radio de curvatura de la leva terminada resulta de interés, a pesar del seguidor tipo, pero los intereses son distintos para los diferentes seguidores. En la figura 8-44 se aprecia un problema obvio con un seguidor de rodillo cuyo propio radio (constante) de curvatura R_f es demasiado largo para seguir al radio cóncavo ¡ocalmente menor $-\rho$ en la leva.

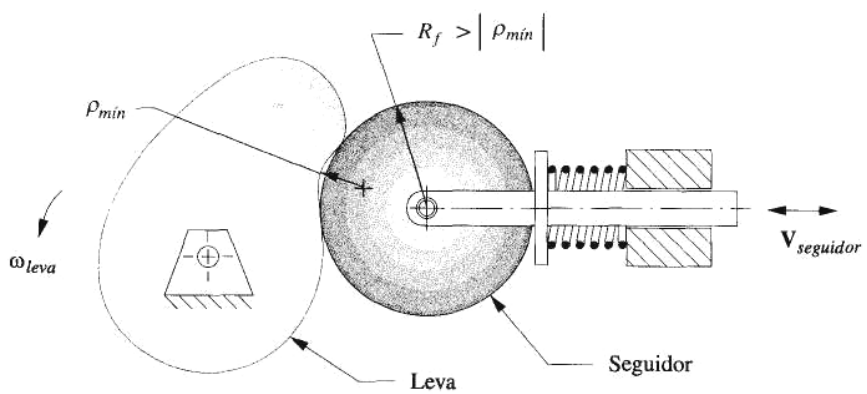
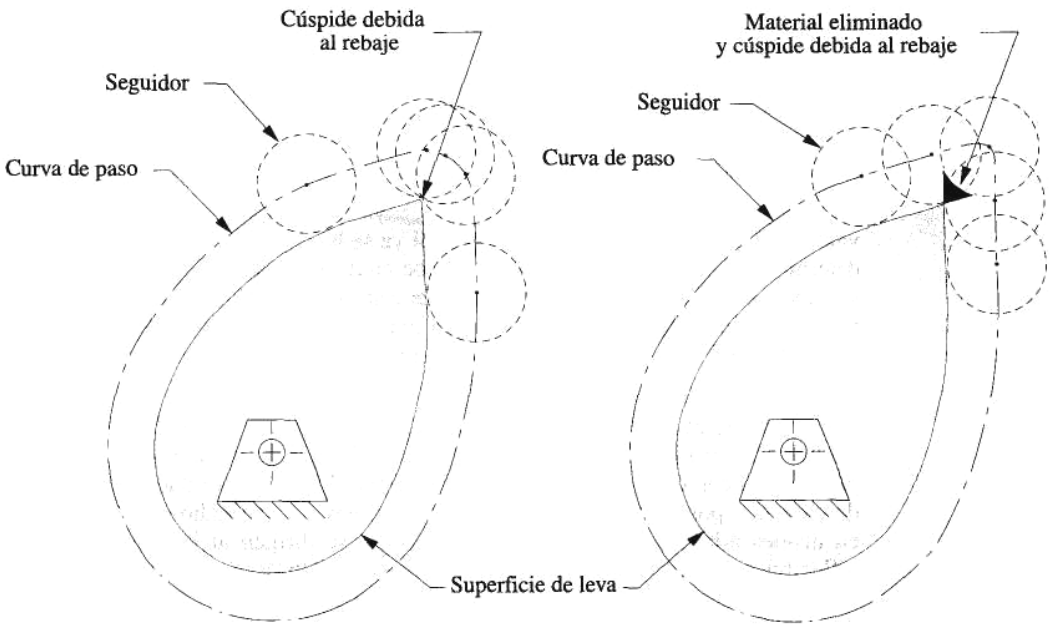


FIGURA 8-44

El resultado de utilizar un seguidor de rodillo mayor que con el que se diseñó la leva

Un problema más sutil se presenta cuando el radio R_f del seguidor de rodillo es mayor que el radio local (convexo) positivo menor $+\rho$ en la leva. Este problema se denomina **rebaje** y se describe en la figura 8-45. Recuerde que para una leva con seguidor de rodillo el contorno de la leva se define en realidad como el lugar geométrico del centro del seguidor de rodillo, o **curva de paso.** Al mecánico se le proporcionan los datos de las coordenadas x, y (en cinta o disco de computadora), y se le señala también el radio del seguidor R_f. El mecánico recortará entonces la leva con un cortador del mismo radio efectivo del seguidor R_f siguiendo las coordenadas de la curva de paso con el centro del cortador.

En la figura 8-45 se muestra la situación en la que el radio del seguidor R_f (cortador) está en un punto exactamente igual al radio mínimo de curvatura convexo de la leva $(+\rho_{min})$. El cortador crea un punto agudo perfecto o **cúspide** en la superficie de la leva. ¡Esta leva no se desplazará adecuadamente a velocidad! En la figura 8-45 se muestra la situación en la que el radio del seguidor (cortador) es mayor que el radio mínimo de curvatura convexo de la leva. El cortador ahora rebaja o remueve el material necesario para los contornos de la leva en distintas localizaciones y crea también un punto agudo o cúspide en la superficie de la leva. Esta leva ya no tendrá la misma función de desplazamiento que usted diseñó tan cuidadosamente.



a) El radio de curvatura de la curva de paso es igual al radio del seguidor de rodillo

fc>) El radio de curvatura de la curva de paso es menor que el radio del seguidor de rodillo

FIGURA 8-45

Un radio de curvatura pequeño positivo puede causar un rebaje

El método empírico consiste en mantener el valor absoluto del radio mínimo de curvatura $\rho_{mín}$ de la curva de paso de la leva, preferentemente al menos 2 o 3 veces del tamaño del radio del seguidor de rodillo R_f.

$$|\rho_{mín}| >> R_f \tag{8.30}$$

Una derivación para el radio de curvatura puede encontrarse en cualquier texto de cálculo. Para el caso de un seguidor de rodillo se puede escribir la ecuación del radio de curvatura de la curva de paso de la leva como:

$$\rho_{paso} = \frac{\left[(R_P + s)^2 + v^2\right]^{3/2}}{(R_P + s)^2 + 2v^2 - a(R_P + s)} \tag{8.31}$$

En esta expresión, *s*, v y *a* son el desplazamiento, la velocidad y la aceleración del programa de levas como se definió en la sección anterior. Sus unidades son longitud, long/rad y long/rad^2, respectivamente. R_p es el radio de círculo primitivo. **No confunda** este *radio de círculo primario* R_p con el *radio de curvatura,* ρ_{paso}. R_p es un **valor constante** que usted eligió como el parámetro de diseño y ρ_{paso} es el radio de curvatura constantemente variable que resulta de sus elecciones de diseño.

Tampoco confunda R_p, el *radio de círculo primitivo con* R_f, el *radio del seguidor de rodillo.* Véase en la figura 8-39 las definiciones. Puede elegir al valor de R_f para adaptarse al problema, por lo que puede pensarse que es sencillo satisfacer la ecuación 8.30 al seleccionar sólo un seguidor de rodillo con un pequeño valor de R_f. Por desgracia es más complicado que eso, ya que un pequeño seguidor de rodillo no puede ser suficientemente resistente a las fuerzas dinámicas de la leva. El radio del pasador sobre el que se pivotea el seguidor de rodillo es sustancialmente menor que R_f, debido al espacio necesario para los cojinetes de bolas o de rodillos dentro del seguidor. Las fuerzas dinámicas se estudiarán en capítulos posteriores en los que se volverá a citar el problema.

La ecuación 8.31 se resuelve con ρ_{paso}, ya que se conocen *s*, *v* y *a* para todos los valores de θ, y se elige un R_p de ensayo. Si ya se ha calculado el ángulo de presión, el R_p determinado de sus valores aceptables debe emplearse para calcular también ρ_{paso}. **Si no** se puede determinar un radio de seguidor adecuado que satisfaga la ecuación 8.30 con los valores mínimos de ρ_{paso} calculados en la ecuación 8.31, entonces se necesitará una iteración adicional que posiblemente incluya una redefinición de las especificaciones de la leva.

El programa DYNACAM calcula ρ_{paso} de todos los valores de θ para un radio de círculo primario R_p proporcionado por el usuario. En la figura 8-46 se muestra la ρ_{paso} para la leva con cuatro detenimientos de la figura 8-6. Observe que esta leva tiene radios de curvatura positivos y negativos. Los valores mayores del radio de curvatura se truncan en niveles arbitrarios de la gráfica puesto que se dirigen al infinito en los puntos de inflexión entre las porciones convexa y cóncava. Observe que en estos puntos de inflexión el radio de curvatura sale del infinito positivo y regresa al negativo y viceversa (quizás después de un viaje redondo por el universo).

Una vez que se determina un radio de círculo primario aceptable y uno de seguidor de rodillo, con base en las consideraciones del ángulo de presión y de los radios de curvatura, se traza la leva en la forma terminada y subsecuentemente se fabrica. En la figura 8-47 se exhibe el perfil de la leva con cuatro detenimientos de la figura 8-6. El contorno de la superficie de la leva se omitirá por la envolvente de las posiciones del

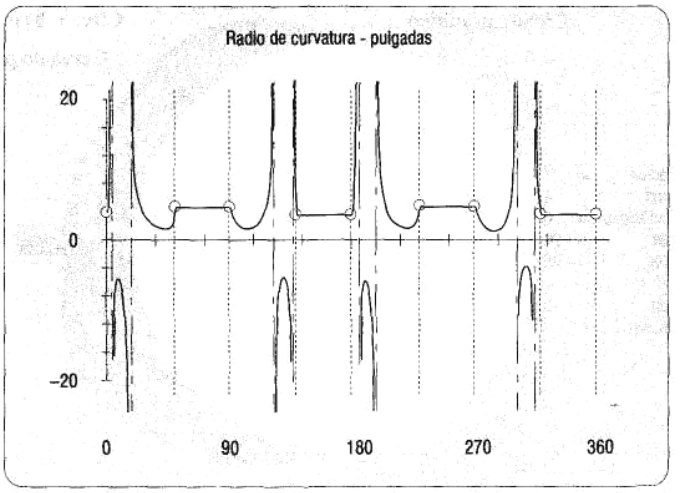


FIGURA 8-46
Radio de curvatura de una leva con cuatro detenimientos

seguidor, justo cuando el cortador construya la leva de metal. La barra lateral muestra los parámetros para el diseño, lo cual resulta aceptable. El $\rho_{mín}$ es 1.7 veces R_f y los ángulos de presión son menores que 30 . Los contornos en la superficie de la leva parecen planos, sin esquinas puntiagudas. En la figura 8-48 aparece la misma leva con sólo un cambio. El radio del seguidor R_f es igual que el radio de curvatura mínimo, $\rho_{mín}$. Las esquinas puntia-

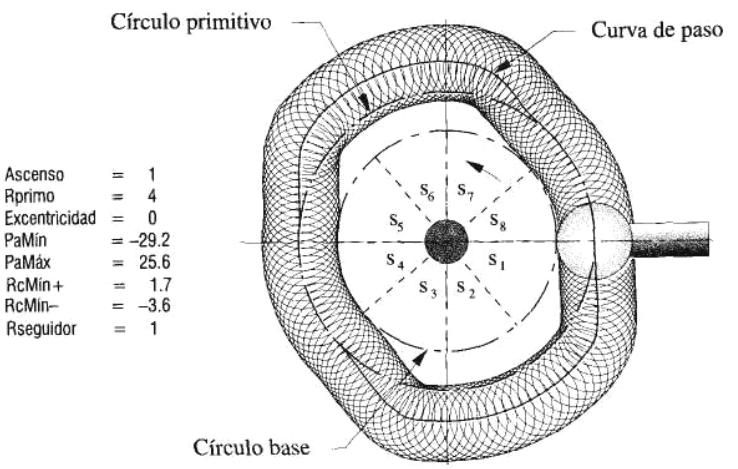


FIGURA 8-47
El perfil de una leva de placa radial se genera por el lugar geométrico del seguidor de rodillo (o cortador)

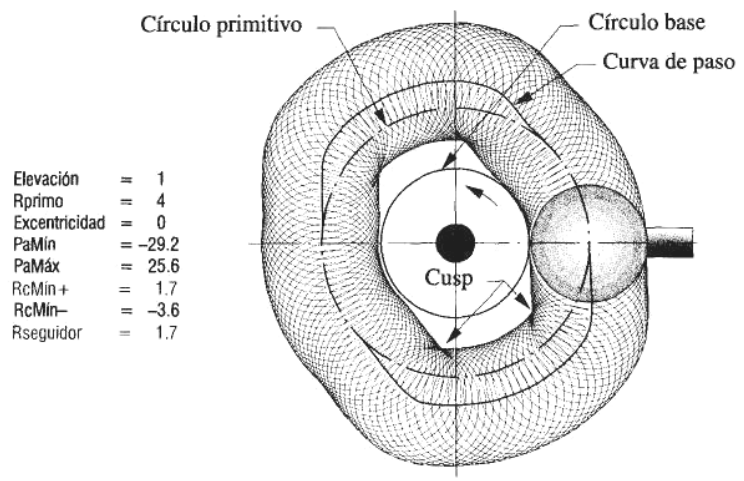


FIGURA 8-48

Cúspides formadas por rebaje debido al radio del seguidor, $R_f \geq$ radio de curvatura de la leva ρ.

gudas o cúspides en los diversos lugares indican el rebaje. Esto es ahora una **leva inaceptable,** *debido simplemente a que un seguidor de rodillo es demasiado grande.*

Las coordenadas para el contorno de la leva, medidas desde el lugar geométrico del centro del seguidor o la **curva de paso** como se muestra en la figura 8-47, se definen por las siguientes expresiones referentes al centro de rotación de la leva. Véase la figura 8-42 para la nomenclatura. La resta del ángulo θ de entrada de la leva del valor 2π resulta necesaria puesto que el movimiento del seguidor con respecto a la leva es opuesto al de la leva de acuerdo con el seguidor. En otras palabras, para definir el contorno de la línea central de la trayectoria del seguidor alrededor de una leva estacionaria debe desplazarse el seguidor (y también el cortador para formar la leva) en la dirección opuesta a la rotación de la leva.

$$x = \cos\lambda\sqrt{(d+s)^2 + \varepsilon^2}$$

$$y = \operatorname{sen}\lambda\sqrt{(d+s)^2 + \varepsilon^2} \tag{8.32}$$

donde:

$$\lambda = (2\pi - \theta) - \arctan\left(\frac{\varepsilon}{d+s}\right)$$

Radio de curvatura: seguidor de cara plana

Esta situación con un seguidor de cara plana es diferente de la que se presenta con un seguidor de rodillo. Un radio de curvatura negativo en la leva no se resuelve con un seguidor de cara plana. Obviamente, el seguidor de cara plana no puede seguir una leva

cóncava. El rebaje se presentará cuando el radio de curvatura sea negativo si es que se construye una leva con dicha condición.

En la figura 8-49 aparecen una leva y un seguidor de cara plana en una posición arbitraria. El origen del sistema coordenado global *XY* se localiza en el centro de rotación de la leva, y el eje *X* se define como paralelo a la tangente común, que es la superficie del seguidor plano. El vector **r** se conecta a la leva, gira con ésta y sirve de línea de referencia para medir el ángulo θ de la leva respecto del eje *X*. El punto de contacto A se define por el vector de posición $\mathbf{R}_A$. El centro de curvatura instantáneo se encuentra en *C* y el radio de curvatura es ρ. R_b es el radio del círculo base y *s* es el desplazamiento del seguidor para el ángulo θ. La excentricidad es ε.

La localización del punto de contacto *A* se define a partir de dos lazos vectoriales (en notación compleja).

$$\mathbf{R}_A = x + j(R_b + s)$$

y

$$\mathbf{R}_A = ce^{j(\theta+\alpha)} + j\rho$$

así:

$$ce^{j(\theta+\alpha)} + j\rho = x + j(R_b + s) \tag{8.33a}$$

El equivalente de Euler (ecuación 4.4a) se sustituye en la ecuación 8.33a, y se separan las partes real e imaginaria.

real:

$$c\cos(\theta+\alpha) = x \tag{8.33b}$$

imaginaria:

$$c\,\text{sen}(\theta+\alpha) + \rho = R_b + s \tag{8.33c}$$

El centro de curvatura C permanece **estacionario** en la leva, lo que significa que las magnitudes *c* y ρ, y el ángulo α no cambian para pequeñas variaciones en el ángulo θ de la leva. (Estos valores no son constantes, pero se encuentran en valores estacionarios. Sus primeras derivadas respecto a θ son cero, pero sus derivadas superiores no lo son.)

Derivando la ecuación 8.3a con respecto a θ se obtiene entonces:

$$jce^{j(\theta+\alpha)} = \frac{dx}{d\theta} + j\frac{ds}{d\theta} \tag{8.34}$$

Se sustituye el equivalente de Euler (ecuación 4.4a) en la ecuación 8.34 y se separan las partes real e imaginaria.

real:

$$-c\,\text{sen}(\theta+\alpha) = \frac{dx}{d\theta} \tag{8.35}$$

imaginaria:

$$c\cos(\theta+\alpha) = \frac{ds}{d\theta} = v \tag{8.36}$$

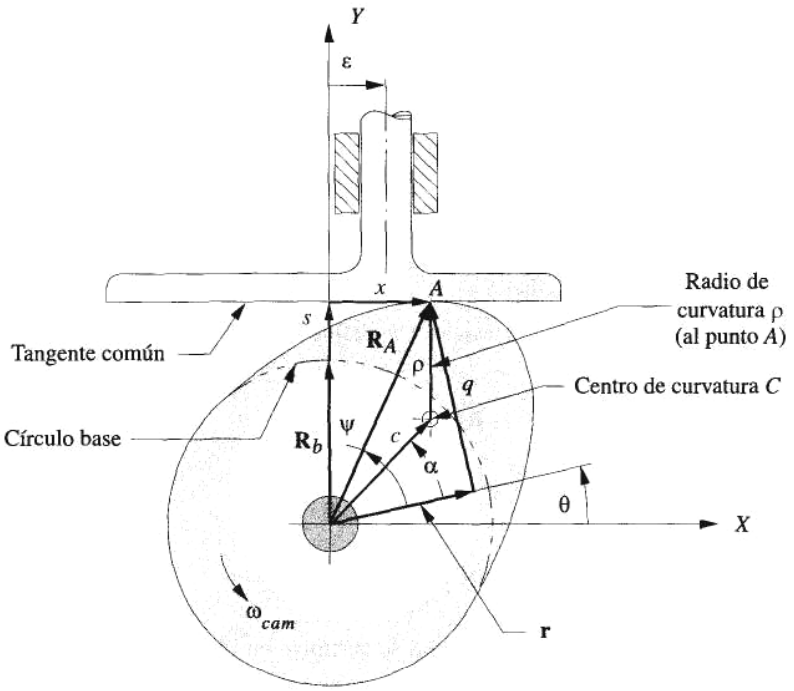


FIGURA 8-49

Geometría para la obtención de un radio de curvatura y el contorno de la leva con seguidor de cara plana

La inspección de las ecuaciones 8.33b y 8.36 demuestra que:

$$x = v \tag{8.37}$$

Esta interesante relación expresa que la posición x del punto de contacto entre la leva y el seguidor es numéricamente igual a la velocidad del seguidor en long/rad. Ello significa que el diagrama v da una medida directa del ancho de cara mínimo necesario del seguidor plano.

$$ancho\ de\ cara > v_{máx} \quad v_{mín} \tag{8.38}$$

Si la función de velocidad es asimétrica, entonces un seguidor de ancho mínimo también tendrá que ser asimétrico para que no se desprenda de la leva.

Derivando la ecuación 8.37 respecto a θ se tiene:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dv}{d\theta} = a \tag{8.39}$$

Las ecuaciones 8.33c y 8.35 pueden resolverse simultáneamente, y la ecuación 8.39 se sustituye en el resultado para obtener:

$$\rho = R_b + s + a \tag{8.40}$$

CÍRCULO BASE Observe que la ecuación 8.40 define el radio de curvatura en términos del radio del círculo base, y las funciones de desplazamiento y aceleración únicamente de los diagramas *s* v *aj.* Debido a que p no puede ser negativa con un seguidor de cara plana se formula una relación de esta ecuación que pronosticará el radio mínimo del círculo base R_b necesario para evitar el rebaje. La aceleración, *a*, constituye el único factor en el lado derecho de la ecuación 8.40 que no es negativo. Se ha definido que s siempre es positiva, así como R_b. Por consiguiente, el peor caso para el rebaje se presentara cuando *a* alcance su **valor negativo mayor,** $a_{mín}$, cuyo valor se conoce por el diagrama *a*. El radio mínimo del círculo base puede entonces definirse como:

$$R_{b_{\text{mín}}} > \rho_{\text{mín}} - s_{@a_{\text{mín}}} - a_{\text{mín}} \tag{8.41}$$

Observe que el valor de *s* en esta ecuación se toma en el ángulo θ de la leva correspondiente al de $a_{mín}$. El valor de $a_{mín}$ es negativo y también se anula en la ecuación 8.41, por lo que domina la expresión. Para emplear esta relación se elige un radio de curvatura mínimo $\rho_{mín}$ para la superficie de la leva como parámetro de diseño. Ya que los esfuerzos de contacto hertzianos en el punto de contacto constituyen una función del radio de curvatura local, este criterio puede emplearse para seleccionar $\rho_{mín}$. Dicho tema se encuentra fuera del alcance de este texto, por lo que no se profundizará en su estudio. Véase la referencia 1 para mayor información sobre los esfuerzos de contacto.

CONTORNO DE LA LEVA Para una leva con seguidor de cara plana, sus coordenadas de superficie física se proporcionan al mecánico, pues no existe ninguna curva de paso para trabajar. En la figura 8-49 se muestran dos vectores ortogonales, r y q, que definen las coordenadas cartesianas del punto de contacto *A* entre la leva-seguidor con respecto al sistema coordenado de ejes rotatorio incrustado en la leva. El vector r es el eje rotatorio "*x*" de este sistema coordenado adherido. El ángulo ψ define la posición del vector R_A en este sistema. Dos ecuaciones de lazo vectorial se escriben e igualan para definir las coordenadas de todos los puntos en la superficie de la leva como una función del ángulo θ de la leva.

$$\mathbf{R}_A = x + j(R_b + s)$$

y

$$\mathbf{R}_A = re^{j\theta} + qe^{j}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

así:

$$re^{j\theta} + qe^{j}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = x + j(R_b + s) \tag{8.42}$$

Al dividir ambos lados entre $e^{j}\theta$:

$$r + jq = xe^{-j\theta} + j(R_b + s)e^{-j\theta} \tag{8.43}$$

Se separan en las componentes real e imaginaria, y se sustituye v por *x* en la ecuación 8.37:

real (componente *x):*

$$r = (R_b + s) \operatorname{sen} \theta + v \cos \theta \tag{8.44a}$$

imaginaria (componente *y):*

$$q = (R_b + s) \cos \theta - v \operatorname{sen} \theta \tag{8.44b}$$

Las ecuaciones 8.44 pueden emplearse para maquinar la leva de un seguidor de cara plana. Estas componentes *x,y* se encuentran en el sistema de coordenadas rotatorio incrustado en la leva.

Observe que ninguna de las ecuaciones desarrolladas anteriormente para este caso se relacionan con la excentricidad, e. Ésta sólo constituye un factor en la dimensión de la leva cuando se emplea un seguidor de rodillo. Ello no afecta la geometría de una leva con seguidor plano.

En la figura 8-50 se muestra el resultado de utilizar un seguidor de cara plana en una leva con un radio de curvatura negativo. Si el seguidor tuviera contacto con la leva en todos los puntos necesarios para controlar el seguidor de la función del diagrama *s,* la superficie de la leva se desarrollaría por la envolvente de líneas rectas. Sin embargo, estos lugares geométricos de la cara del seguidor se cortan en contornos de la leva necesarios para otros ángulos de la leva. La línea que corre por el intrincamiento de lugares geométricos del seguidor es el contorno teórico de la leva necesario para este diseño. El rebaje puede verse claramente como las piezas faltantes de forma creciente en cuatro lugares entre el contorno de la leva y los lugares geométricos del seguidor.

RESUMEN La tarea de dimensionar una leva es un excelente ejemplo de la necesidad de la iteración en el diseño y de su valor. El recálculo rápido de las ecuaciones relevantes con una herramienta como el programa DYNACAM permite llegar fácil y

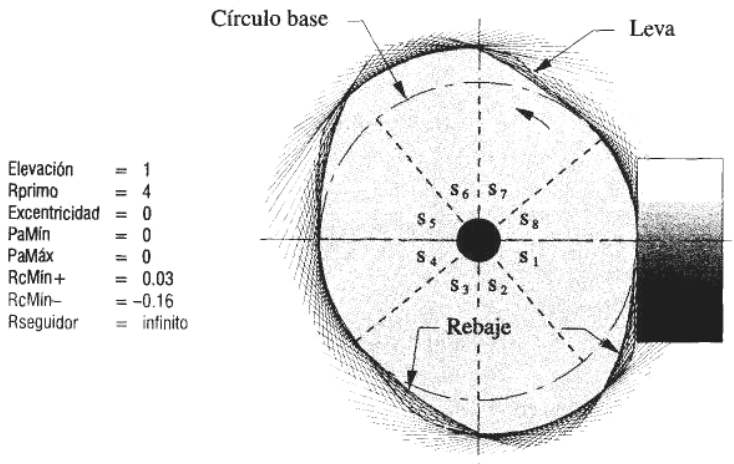


FIGURA 8-50

Rebaje debido al radio de curvatura negativo utilizado con un seguidor de cara plana

rápidamente a una solución aceptable mientras se balancean los frecuentes requerimientos contrarios de las restricciones del ángulo de presión y radio de curvatura. En cualquier leva las consideraciones del ángulo de presión y radio de curvatura establecerán la dimensión mínima de la leva. Ambos factores deben verificarse. La elección del tipo de seguidor, de rodillo o de cara plana hace una gran diferencia en la geometría de levas. Los programas de levas que generan radios de curvatura negativos son inadecuados para el seguidor del tipo de cara plana a menos que se utilicen círculos base muy grandes para forzar a ρ para que siempre sea positivo.

8.8 CONSIDERACIONES EN LA FABRICACIÓN DE LEVAS

Las secciones anteriores ilustran que existe un número de factores por considerar cuando se diseña una leva. Se necesita tener mucho cuidado en el diseño para obtener una buena combinación de todos los factores, algunos de ellos conflictivos. Una vez que se termina el diseño de una leva, un nuevo conjunto total de consideraciones debe tratarse con el que implica la fabricación de la leva. Después de todo, si su diseño no se puede fabricar en metal en una manera que represente realmente las funciones teóricas elegidas, sus beneficios no podrán realizarse. A diferencia de los eslabonamientos, que son fáciles de construir, las levas son propiamente un reto en la fabricación.

Por lo general, las levas se construyen de materiales fuertes y duros tales como los **aceros de medio a alto carbono** (templado superficial o total) o **hierro dúctil fundido** o **hierro fundido gris** (templado superficial). Las levas para cargas y velocidades bajas o aplicaciones marinas a veces se fabrican de latón o bronce. Incluso las levas de plástico se utilizan en dichas aplicaciones como temporizador de máquinas lavadoras donde la leva acciona precisamente un interruptor eléctrico en el tiempo correcto. Aquí se concentrará en las situaciones de cargas y velocidades elevadas, para las que el acero o hierro fundido/dúctil son las únicas opciones prácticas. Estos materiales oscilan de moderadamente difíciles a muy difíciles de maquinar, dependiendo de la aleación. Como mínimo se necesita una fresadora razonablemente exacta para construir una leva. Es preferible un centro mecanizado controlado por computadora y es la opción más frecuente para una producción importante de levas.

Por lo común, las levas se fresan con unos cortadores rotatorios que en efecto "desprenden" el metal dejando una superficie casi perfectamente uniforme en un nivel microscópico. Para un mejor acabado y una mayor precisión geométrica, la leva se pule después del fresado eliminando el máximo de material innecesario. El tratamiento térmico se necesita comúnmente para obtener la dureza suficiente que evite el desgaste rápido. Las levas de acero se endurecen por lo común aproximadamente un grado Rockwell Re 50-55. El tratamiento térmico presenta cierta distorsión geométrica. A menudo el rectificado se realiza después del tratamiento térmico para corregir el contorno y mejorar el acabado.* El rectificado casi duplica el costo de una pieza ya de por sí costosa, por lo que frecuentemente este paso se omite para ahorrar dinero. Una leva templada pero no pulida tendrá cierto error de distorsión térmica, a pesar del fresado preciso antes del templado. En la tabla 8-3 se muestran diversos métodos de fabricación de levas de uso común.

* Algunos árboles de levas de automotores se rectifican suavemente, después se templan y pulen para eliminar la capa de carbonización del proceso de templado. La razón de esto es evitar la posibilidad de que se "queme" la superficie durante el rectificado que endurecería localmente el material y fallaría por el desgaste prematuro de la superficie.

Generación geométrica

La generación geométrica se refiere al "barrido" continuo de una superficie, como se labra un cilindro en un torno. Esto es quizá el camino ideal para construir una leva,

debido a que produce una superficie realmente continua con una precisión limitada sólo por la calidad de la máquina y las herramientas empleadas. Desafortunadamente existen muy pocos tipos de levas que se fabrican con este método. La más obvia es la leva excéntrica (figura 8-10) que puede labrarse y esmerilarse en un torno. Una cicloide también se genera geométricamente, entre otras pocas curvas. Como la presencia de detenimientos hace muy difícil aplicar este método que se usa muy pocas veces para levas. Sin embargo, cuando se puede, como en el caso de la leva excéntrica de la figura 8-10, la aceleración resultante, aunque no es perfecta, es muy cercana a la onda teórica del coseno, como se aprecia en la figura 8-11. Esta leva excéntrica se fabricó al labrarse y esmerilarse en un torno de alta calidad. Esto es lo mejor que se puede obtener en una fabricación de levas. Observe que la función de desplazamiento es virtualmente perfecta. Los errores sólo son visibles en la medición de la función de aceleración más sensible.

Mecanizado manual o NC según coordenadas de levas (corte por empuje)

La **manufactura asistida por computadora** (FAC) se convirtió en el modelo virtual para el maquinado de alta precisión en Estados Unidos. La maquinaria de control numérico (CN) se presenta en muchos tipos. Tornos, fresadoras, rectificadoras, etcétera, todas están disponibles con computadora integrada que controlan la posición de la pieza de trabajo, la herramienta, o ambas. El tipo más sencillo de máquina CN desplaza la herramienta (o pieza de trabajo) a una localización específica de *x,y,* y después impulsa hacia abajo la herramienta (un taladro por ejemplo) por la pieza de trabajo para hacer un agujero o barreno. Este proceso se repite tantas veces como sea necesario para fabricar la pieza. Este proceso simple se identifica como CN para distinguirlo del control numérico continuo (CNC).

Este proceso CN se utiliza a veces para la fabricación de levas, e incluso para las levas maestras, como se describe más abajo. Esto, de hecho, es sólo una versión computarizada del viejo método manual del fresado de levas, que a menudo se denomina **corte por empuje** para referirse al empuje que el cortador de fresado rotatorio hace por debajo de la pieza de trabajo. Ésta no es la mejor manera de maquinar una leva, ya que deja "melladuras" en la superficie como se muestra en la figura 8-51 debido a que el mecánico solamente *empuja* en un número discreto de posiciones alrededor de la leva. En efecto, la función de desplazamiento que se desarrolló tiene que ser "discretizada" o muestreada en cierto número finito de lugares alrededor de la leva. La eficacia limita este proceso de digitalización a incrementos de casi 1/2 a 1 grado. Con un proceso CN el incremento se reduce a 1/4 o 1/10 de grado. En cierto punto se presentarán los "rendimientos decrecientes", puesto que la habilidad de la máquina para discernir posiciones estrechas limitará la

TABLA 8-3 Métodos comunes de fabricación de levas

1	Generación geométrica
2	Maquinado manual o de **C**ontrol **N**umérico (**CN**) a las coordenadas de la leva (corte por empuje)
3	**C**ontrol **N**umérico **C**ontinuo (**CNC**) con **i**nterpolación **l**ineal (**IL**)
4	**C**ontrol **N**umérico **C**ontinuo (**CNC**) con una **i**nterpolación **c**ircular (**IC**)
5	**D**uplicación **A**náloga (**DA**) de una leva maestra acabada a mano

exactitud. Se puede esperar que las máquinas fresadoras estándar den exactitudes en el rango de tolerancia de 0.001 pulgadas. Los centros de maquinado de calidad industrial, las perforadoras de plantillas y las rectificadoras pueden alcanzar tanto como dos a 20 veces dicha precisión [tolerancia de 0.0005 pulg abajo hasta 0.000050 pulgadas (50 millonésimas)].

Las melladuras que quedan sobre la leva después del corte por empuje se deben eliminar mediante acabados manuales con limas y piedras de rectificar. Esto obviamente introduce más error. Incluso si los fondos de las melladuras en los incrementos de ejemplo fuesen exactamente correctos, todos los puntos intermedios se someten a las irregularidades del trabajo manual. Con este método de manufactura resulta pequeña la probabilidad de alcanzar exactamente las funciones de diseño *s v a j*, en especial las derivadas superiores.

Control numérico continuo con interpolación lineal

En una máquina CNC la herramienta se encuentra en contacto constante con la pieza de trabajo, que siempre está cortando, mientras que la computadora controla el movimiento de la pieza de trabajo de posición a posición como está almacenada en su memoria. Éste constituye un **proceso de corte continuo** contrario al corte discreto de CN. Sin embargo, la función de desplazamiento de la leva debe todavía discretizarse o mostrarse en cierto incremento angular. Los incrementos comunes son 1/4, 1/2 y 1 grado. Ya que la máquina sólo tiene información acerca de las localizaciones *x,y* de estos 360, 720 o 1 440 puntos alrededor de la leva, debe determinar cómo desplazarse de un punto a otro mientras se corta. El método utilizado más comúnmente para "llenar" los datos faltantes es la **interpolación lineal** (IL). La computadora de la máquina calcula la línea recta entre cada par de puntos de datos y después impulsa al cortador (o pieza de trabajo) de manera que se mantenga tan cerca de la línea recta como se pueda. Si esto se pudiera hacer perfectamente (lo cual no ocurre), se obtendría una aproximación continua de primer orden al contorno de la leva. Esto introduciría discontinuidades en la pendiente que en teoría generarían pulsaciones infinitas de aceleración. Regresaríamos a la *"leva defectuosa diseñada por un diseñador novato"* del ejemplo 8-1 que tiene aceleración infinita, a pesar de la función real seleccionada.

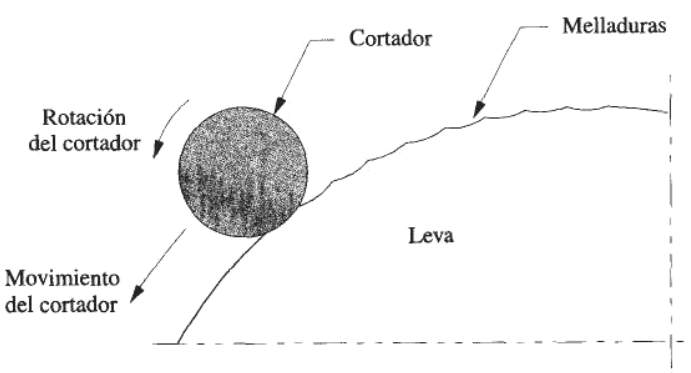


FIGURA 8-51

El corte por empuje de una leva deja melladuras en su superficie

Se puede efectuar un mejoramiento en este esquema de interpolación lineal ajustando una curva cúbica ranurada a los datos de las coordenadas de la leva y luego volver a mostrar esta aproximación ranurada en el pequeño espaciamiento debajo de la solución angular de la máquina. Este conjunto de datos concentrado se emplea entonces para impulsar el cortador, que aún debe cruzar las trayectorias aproximadas en línea recta entre los puntos de los datos espaciados estrechamente. Por lo general se ajusta y se vuelve a mostrar la curva en la etapa de fabricación.

Afortunadamente, en la dinámica del proceso de corte todas las funciones de velocidad, alimentación, precisión de la herramienta, vibración de la herramienta, deformación del eje o husillo, etcétera, se conjuntan para impedir la formación de series de distintas "caras planas" que dieron las derivadas mostradas en la figura 8-8. Más bien, el tipo de la curva de aceleración que en realidad resulta de una leva que fue fresada (pero no esmerilada) en un centro de maquinado CNC de alta calidad, usando interpolación lineal de 1 grado, es como se muestra en la figura 8-52. El programa es una armónica simple excéntrica sin detenimientos. Las curvas dinámicas se midieron con instrumentos en el seguidor de rodillo mientras la leva giraba a 600 rpm en un sistema de pruebas dinámicas de levas de diseño a la medida (SPDL).[81]E1 desplazamiento real es muy cercano al teórico, pero la aceleración tiene una cantidad significativa de ruido vibratorio presente que distorsiona la función de su forma de onda cosenoidal teórica. La aceleración se expresa mediante *g*. Comparando los valores pico a pico en la figura 8-52 (8 *g)* con el mismo diseño de levas efectuado con generación geométrica en la figura 8-11, (5g). El error es del orden de 3 *g* sobre una base de 5 *g*. Estos errores en la aceleración se deben a la combinación de factores de manufactura como se describió antes. Se encontró que el uso

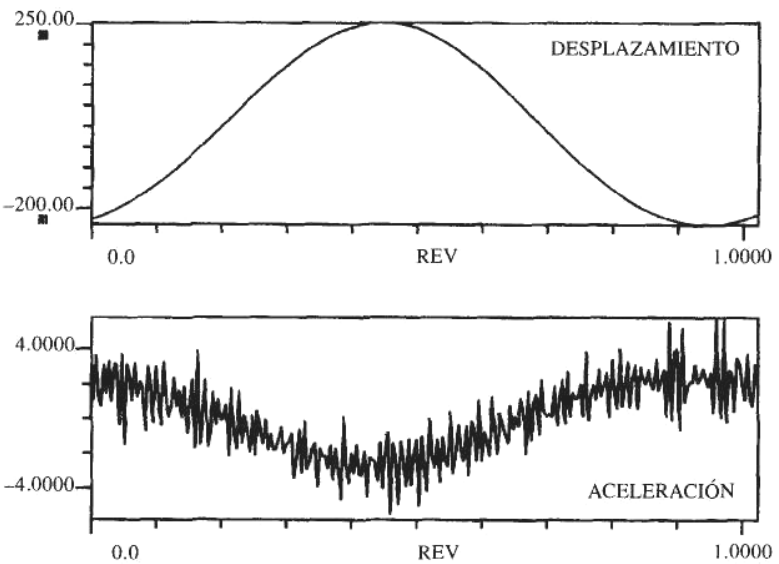


FIGURA 8-52

Desplazamiento y aceleración de una leva excéntrica fabricada con interpolación lineal CNC de 1°

de incrementos de digitalización de 1/4, 1/2 o 1 grado en el dimensionamiento de la leva* no generaba una diferencia estadísticamente significativa en la fidelidad de la función de aceleración real a su forma de onda teórica.[81]

La fidelidad física de la superficie de la leva excéntrica con interpolación lineal de 1 grado a una leva de referencia generada geométricamente (torneada y esmerilada) se observa en la figura 8-53 que es una sección alargada de una porción de las levas, medida con una precisión de 0.005 pulgadas. Los ejes están calibrados en pulgadas. Estas figuras muestran que la interpolación lineal CNC es un método razonablemente exacto de fabricación de levas.

Control numérico continuo con interpolación circular

Este proceso es similar al CNC con interpolación lineal excepto que se utiliza un algoritmo de **interpolación circular** (IC) entre los puntos de datos. Este potencial permite tener una base de datos escasa (por lo tanto, pequeña) en la máquina, lo que puede ser una ventaja. La computadora intenta adaptar un arco de circunferencia a tantos puntos de datos adyacentes como sea posible, sin exceder una banda de error seleccionada alrededor de la función del desplazamiento real. Esto reduce a tres el número (variable) de puntos de datos ajustados para cualquier segmento de arco, un radio y sus dos coordenadas centrales. La mayoría de las máquinas CNC tienen un algoritmo integrado para generar (cortar) rápida y eficientemente los arcos circulares, lo cual constituye un requisito común en el maquinado normal.

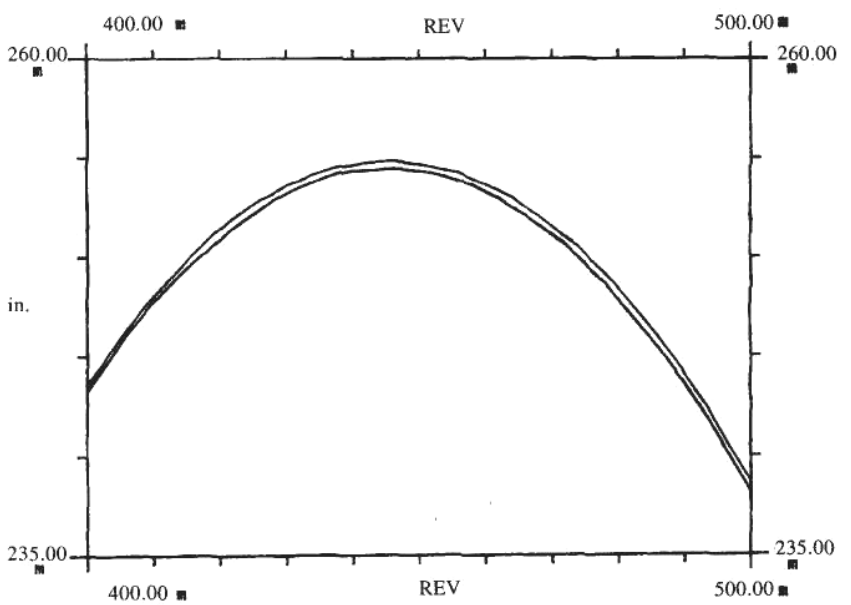


FIGURA 8-53

Contornos de 2 levas: una torneada y otra rectificada; una fresada con interpolación lineal CNC de 1º

* Estas levas tenían aproximadamente un diámetro de 8 pulg (200 mm). Si el diámetro de leva es mayor, entonces se requerirán incrementos angulares más pequeños de digitalización, ya que la distancia a lo largo de la curva de paso entre los puntos de datos para cualquier incremento angular aumenta linealmente con el diámetro del círculo primitivo.

En la figura 8-54 se muestra el mismo diseño de leva que en las figuras 8.11 y 8.52 realizado en el mismo centro de maquinado de la misma barra de acero, pero con interpolación circular (IC). El error en la aceleración es mayor que la leva torneada y esmerilada (TE) pero menor que en la de interpolación lineal (IL). En la figura 8-55 se muestra el contorno de la leva IC comparado con la leva TE. Con base en el funcionamiento dinámico, la leva de interpolación circular tiene un error de aceleración menor que la leva de interpolación lineal y la diferencia es estadísticamente significativa. La "indicación visual" en la mitad del periodo se debe al pequeño risco formado en el punto donde el cortador comienza e interrumpe su barrido continuo alrededor del contorno de la leva.

Duplicación analógica

El último método listado, la **duplicación analógica,** incluye la fabricación de una leva maestra, algunas veces mayor que la escala natural, y se utiliza subsecuentemente en una máquina duplicadora de levas para producir grandes cantidades de levas terminadas. Algunos árboles de levas automotoras se siguen fabricando por este método, aunque los métodos CNC están remplazando las máquinas duplicadoras de levas automotoras. La duplicación analógica constituye el método más económico en el que se producen grandes cantidades.

Una máquina duplicadora de levas tiene dos ejes o husillos. La leva maestra se monta en uno y la pieza de trabajo se coloca en el otro. Un cortador ficticio montado en una manivela de un eslabonamiento pantógrafo se utiliza como un seguidor con leva maestra. El cortador real se monta en la otra manivela del eslabonamiento pantógrafo. Se puede introducir una relación de multiplicación entre el seguidor ficticio y el real para dimen-

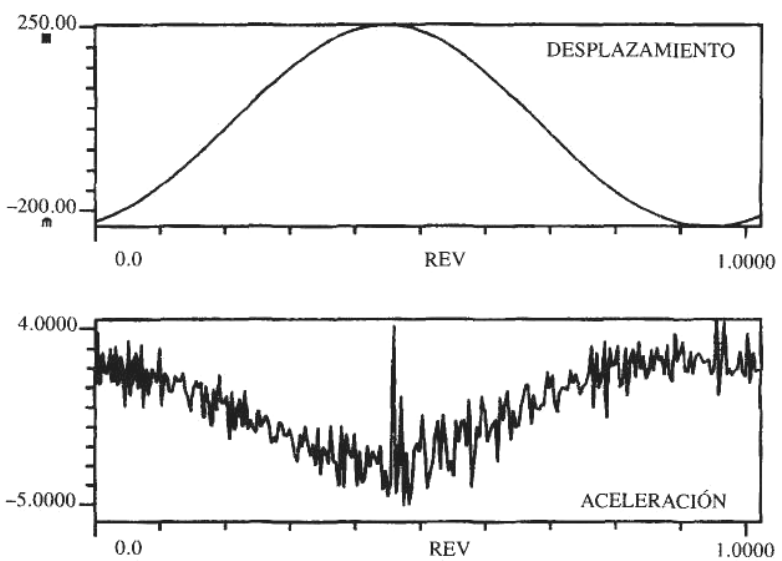


FIGURA 8-54

Desplazamiento y aceleración de una leva excéntrica fabricada con interpolación circular CNC

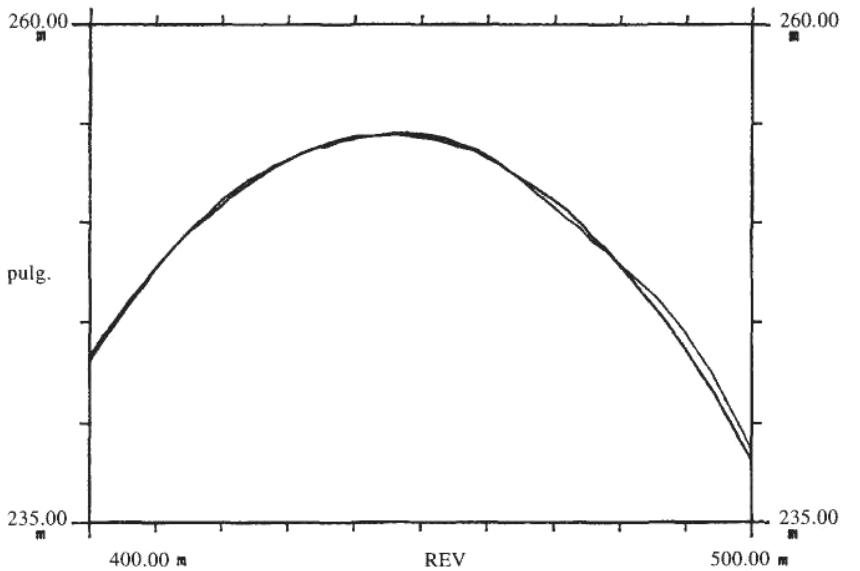


FIGURA 8-55
Contornos de 2 levas: una torneada y rectificada: una fresada con interpolación circular CNC

sionar la leva terminada con respecto a la leva maestra. Esto permite que se empleen levas maestras de mayor tamaño, lo que incrementa la exactitud. Conforme la leva maestra y la secundaria giran lentamente, en sincronía y en fase, el cortador ficticio sigue el contorno de la leva maestra y corta la pieza de trabajo para ajustarse. Este proceso se hace con el fresado (corte) o rectificado de la superficie de la leva. Generalmente se corta la leva sin mucha precisión, y después se trata térmicamente y se rectifica hasta su acabado y dimensión final. Algunas levas se dejan sin fresar sin ningún rectificado posterior al tratamiento térmico.

Este método de duplicación analógica puede crear obviamente una leva mejor o tan buena como la leva maestra. En el proceso de duplicación se presentarán algunos errores debido a deformaciones de la herramienta o de las partes de la máquina, pero la calidad de la leva maestra determina finalmente la calidad de las levas terminadas. Por lo general la leva maestra se fabrica por uno de los otros métodos incluidos en la tabla 8-3, cada uno de los cuales tiene sus limitaciones. La leva maestra puede requerir de cierto acabado a mano con limas o rectificadoras para pulir su superficie. En una leva de corte por empuje se efectúa mucho trabajo de acabado a mano, en tanto que en las levas CNC éste es mucho menor. De un acabado a mano resulta una superficie muy uniforme, aunque son mínimas las probabilidades de que el contorno resultante sea una representación exacta de las funciones diseñadas *svaj*, en especial las derivadas superiores. Entonces, posiblemente la leva terminada no será una representación exacta del diseño.

En la figura 8-56 se muestra el mismo diseño de leva que en las figuras 8-52 y 8-54 realizado en el mismo centro de maquinado de la misma barra de acero, pero con duplicación analógica de una leva maestra con corte por empuje y rectificada a mano. Esto

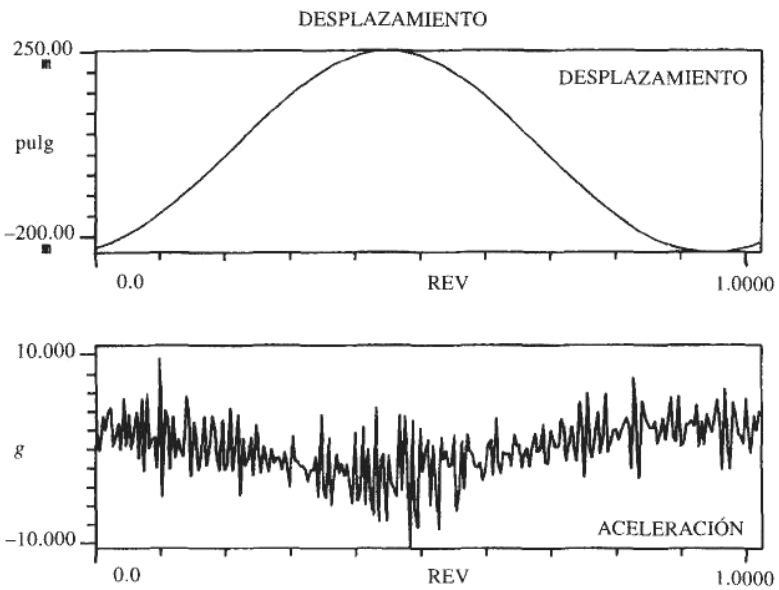


FIGURA 8-56

Desplazamiento y aceleración de una leva excéntrica fabricada con la duplicación analógica de una leva maestra acabada a mano

representa el peor caso en términos de error de fabricación. El error en la aceleración es mayor que en cualquiera de las otras levas. En la figura 8-57 se muestra el contorno de la leva con fresado analógico comparada con la leva torneada y rectificada. La primera resulta mucho menos exacta que cualquiera de las versiones de CNC. Con base en el funcionamiento dinámico, la leva fresada analógicamente a partir de una pieza maestra, con corte por empuje y acabada a mano tiene un mayor error de aceleración que cualquier otra leva analizada y la diferencia es estadísticamente significativa. Si la leva maestra se fabricase con un método más exacto, la exactitud de la producción de las levas podría ser mejor pero seguiría siendo potencialmente inferior a la fabricada con el CNC directo.

Funcionamiento real de una leva comparado con el funcionamiento teórico

Las aceleraciones pico relativas de diversas funciones comunes de leva de doble detenimiento se analizaron en la sección 8.3 y se resumieron en la tabla 8-2. Dicho análisis también recalcó la importancia de una función de rapidez de aceleración uniforme para minimizar las vibraciones. Las diferencias teóricas entre las aceleraciones de pico de las diferentes funciones de levas se modificarán por la presencia de ruido vibratorio en las formas de onda de aceleración reales. Tal perturbación se deberá en parte a los errores presentados en el proceso de fabricación como se analizó anteriormente, pero también existirán diferencias inherentes debidas al grado en el que la función de rapidez de acele-

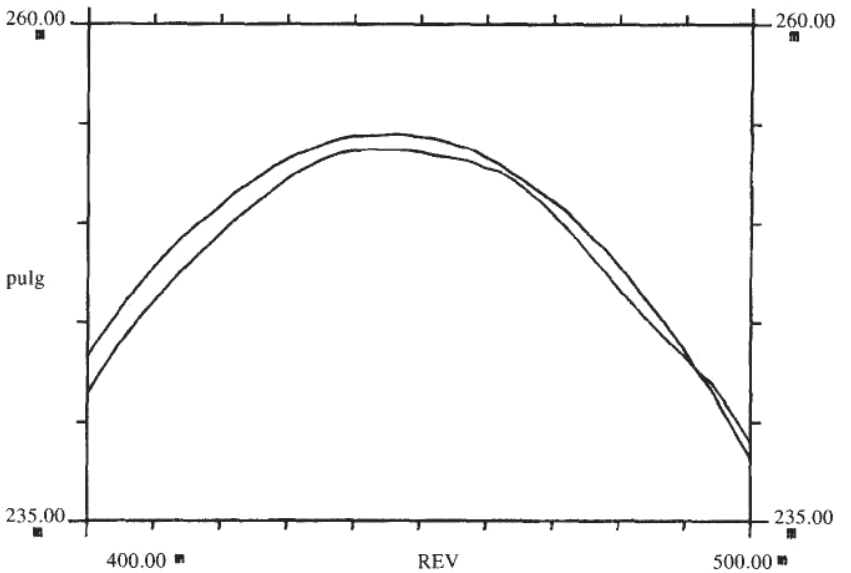


FIGURA 8-57

Contornos de 2 levas: una torneada y rectificada; otra fresada con una duplicación analógica de una leva maestra acabada a mano

ración provoca vibraciones en el tren de leva-seguidor. Estas vibraciones estarán fuertemente influidas por las características dinámicas estructurales del mismo tren seguidor. En general, un tren seguidor demasiado rígido y masivo vibrará menos que uno ligero y flexible, pero la presencia en la función de la leva de frecuencias cercanas a las frecuencias naturales del tren seguidor exacerbarán el problema.

En la figura 8-58 se muestran las formas de onda de aceleración reales de cuatro programas comunes de levas con doble detenimiento: **trapezoidal modificado, senoidal modificado, cicloidal y polinomial 4-5-6-7,** las cuales se aplicaron en la misma leva con cuatro detenimientos. Estas formas de onda se midieron con un acelerómetro montado en el tren seguidor rígido de un sistema de pruebas dinámicas de levas (SPDL) diseñado especialmente para tener baja vibración y ruido. Estas levas de prueba las construyó un especialista en la fabricación de levas mediante la interpolación lineal CNC con un incremento digitalizado de un 1/4 de grado en un maquinado de alta calidad y con un equipo rectificador. Después del templado, el contorno de la leva se esmeriló para una superficie acabada con una rugosidad promedio (R_a) de 0.125 mieras. Al comparar estas funciones en la misma leva, fabricada en la misma maquinaria de producción y que opera con el mismo sistema seguidor, se obtiene un medio de medición de sus diferencias reales en aceleraciones relativas.

Las cuatro formas de onda de aceleración presentan cierta cantidad de raido vibratorio que se aprecia como ondulaciones o rizos en las curvas. Compare estas curvas con sus equivalentes teóricos exactos en la figura 8-18. En la tabla 8-4 se compara la aceleración

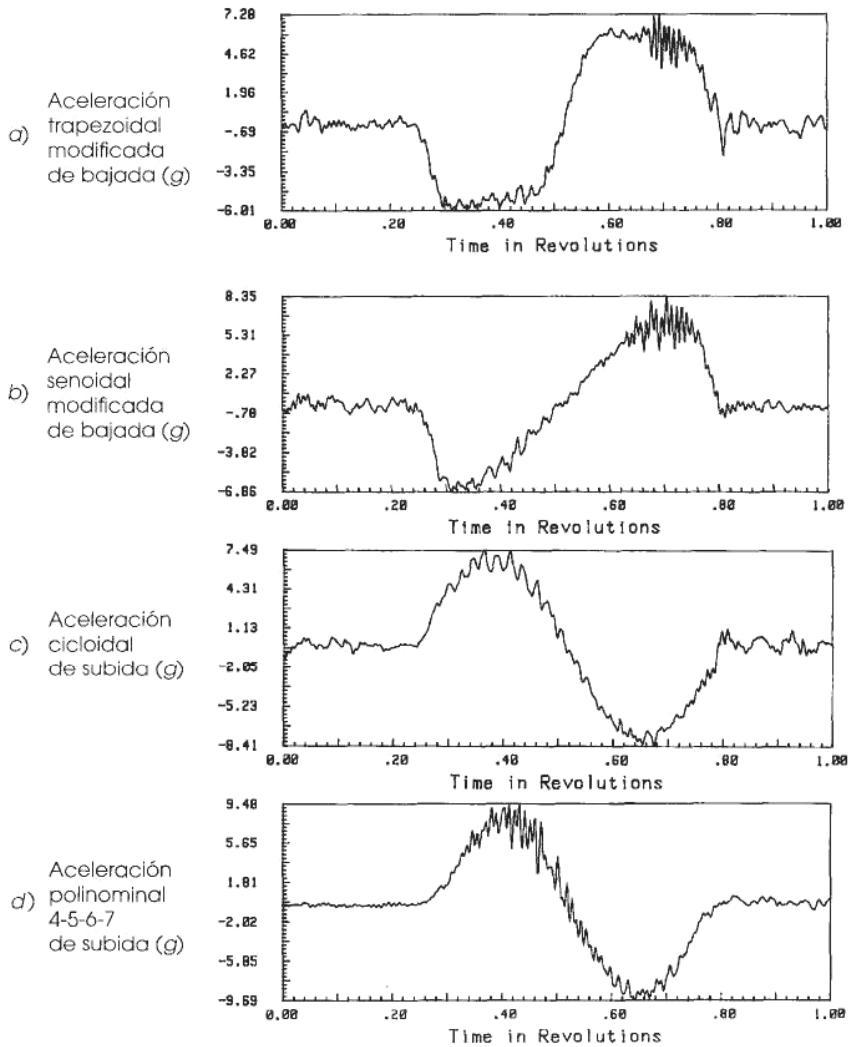


FIGURA 8-58

Curvas de aceleración, mediciones reales de un seguidor con cuatro programas de doble detenimiento

teórica pico a pico esperada $A_{teóricapp}$ para cada leva (columna 2) con su aceleración media real pico a pico A_{realpp} (columna 3). El error se encuentra en la columna 4 como un factor multiplicador de aceleración A_{fm} definido como:

$$A_{mf} = \frac{A_{pp_{real}}}{A_{pp_{teórica}}} \tag{8.45}$$

TABLA 8-4 Aceleración pico real comparada con la teórica
para diversos programas de levas de doble detenimiento (*g*)

Programa de leva	A_{pp} teórica *g*	A_{pp} real *g*	Relación A_{mf} (ecuación 8.45)	Factor de aceleración teórica*	Factor de aceleración real
Aceleración trapezoidal mod.	11.78	13.29	1.13	4.888 h/β^2	5.514 h/β^2
Aceleración senoidal mod.	13.32	15.21	1.14	5.528 h/β^2	6.313 h/β^2
Desplazamiento cicloidal	15.14	15.90	1.05	6.283 h/β^2	6.597 h/β^2
Desplazamiento polinomial 4-5-6-7	18.14	19.17	1.06	7.526 h/β^2	7.954 h/β^2

* De la tabla 8-2

En la columna 5 de la tabla 8-4 se muestran los factores de aceleración máxima para estas cuatro funciones tomadas de la tabla 8-2. La última columna (la sexta) muestra los valores de aceleración máxima real con base en estos datos de prueba, y representa el producto de las columnas cuatro y cinco.

Estos valores de aceleración máxima real presentan pequeñas diferencias entre las funciones que se pronostican por sus formas de onda teóricas. La trapezoidal modificada que tiene la menor aceleración teórica tiene una desventaja de ruido de 13% debida a la vibración. La senoidal modificada tiene una desventaja de ruido de 14%, mientras que las funciones cicloidal y polinomial 4-5-6-7 tienen sólo de 5 a 6% de ruido. Esto se debe a que las dos últimas funciones tienen formas de onda de rapidez de aceleración más planas que las dos primeras. La forma de onda cicloidal, con su función cosenoidal de rapidez de aceleración, es una buena opción para operaciones a alta velocidad. En realidad, su aceleración es sólo 19% mayor que la trapezoidal modificada y 5% mayor que la senoidal modificada, al contrario de los diferenciales de 28 y 14% pronosticados en los valores pico teóricos.

8.9 CONSIDERACIONES PRÁCTICAS DE DISEÑO

El diseñador de levas a menudo se enfrenta con muchas decisiones confusas, especialmente en una primera etapa del proceso de diseño. Muchas de estas decisiones, por lo común un poco arbitrarias y no muy pensadas, después pueden tener consecuencias significativas y costosas en el diseño. Lo siguiente consiste en un análisis de algunas de las transacciones implicadas en tales decisiones, con la posibilidad de que se proveerá al diseñador de levas de cierta orientación para la toma de decisiones.

¿Un seguidor traslatorio u oscilatorio?

Existen muchos casos, en particular al inicio de un diseño, en los cuales el movimiento traslatorio o rotatorio puede adecuarse como la salida de la leva. A menudo un movimien-

to aproximadamente rectilíneo resulta adecuado y puede obtenerse de un seguidor de balancín de gran radio. El balancín o seguidor oscilatorio ofrece una ventaja significativa sobre el seguidor traslatorio cuando se utiliza un seguidor de rodillo. Un seguidor traslatorio gira libremente alrededor de su eje de traslación y puede necesitar un dispositivo guía antirrotatorio (tal como uno de cuña o ranura) que impida la desalineación de un seguidor de rodillo con la leva.

Por el contrario, el seguidor oscilatorio mantendrá al seguidor de rodillo alineado en el mismo plano que la leva, sin ninguna guía además de su propio pivote. También la fricción de dicho pivote en un seguidor oscilatorio generalmente cuenta con un brazo de momento pequeño en comparación con el momento de la fuerza de la leva sobre el brazo seguidor. Pero, la fuerza de fricción en un seguidor traslatorio tiene una razón geométrica 1:1 con la fuerza de la leva. Esto puede tener un efecto indeseado mayor sobre el sistema.

Por otra parte, los seguidores traslatorios de cara plana a menudo se ajustan deliberadamente con su eje un poco fuera del plano de la leva para producir una rotación con respecto a su propio eje debido al momento de fricción que resulta del corrimiento. El seguidor de cara plana cambiará entonces de dirección alrededor de su propio eje y distribuirá el desgaste sobre toda la superficie de su cara. Esto constituye una práctica común en las levas de las válvulas automotoras que emplean seguidores de cara plana o "levanta válvulas".

8

¿Cierre de fuerza o de forma?

Una leva con cierre de forma (de pista o de ranura) es más costosa de fabricar que una leva con cierre de fuerza (abierta) simplemente porque hay dos superficies que maquinar y esmerilar. El tratamiento térmico por lo común deformará la pista de una leva con cierre de forma, estrechándola o ensanchándola de tal manera que el seguidor de rodillo no se ajuste apropiadamente. Esto requiere un rectificado de levas de pista posterior al tratamiento térmico para volver a dimensionar la ranura. Una leva abierta (con cierre de fuerza) se deformará también con el tratamiento térmico, pero seguirá siendo utilizable sin el rectificado.

SALTO DEL SEGUIDOR La principal ventaja de una leva con cierre de forma (de pista) es que no necesita un resorte de retorno, por consiguiente, puede operar a mayores velocidades que una leva con cierre de fuerza cuyo resorte y masa del seguidor entrarán en resonancia a cierta velocidad, produciendo un salto del seguidor potencialmente destructivo. Este fenómeno se investigará en el capítulo 15 sobre dinámica de levas. Los motores de automóviles y de motocicletas de carreras con frecuencia utilizan trenes de levas de válvulas con cierre de forma (desmodrómicos) para permitir mayores rpm del motor sin incurrir en una "flotación" de válvula o salto del seguidor.

CHOQUE TRANSVERSAL Aunque la falta de un resorte de retorno puede representar una ventaja, tiene, como es usual, una transacción. En una leva con cierre de forma (de pista) habrá un choque transversal cada vez que la aceleración cambie de signo. El choque transversal describe la fuerza del impacto que ocurre cuando el seguidor salta repentinamente de un lado de la pista al otro en el momento en que la fuerza dinámica *(ma)* se invierte de signo. En este sistema no existe ningún resorte flexible para absorber la inversión de la fuerza como en el caso del cierre de fuerza. Las altas fuerzas de impacto en el choque transversal provocan ruido, esfuerzos elevados y desgaste local. Del mismo modo, el seguidor de rodillo tiene que invertir la dirección en cada choque transversal, lo que causa deslizamiento y acelera el desgaste del seguidor. Diversos estudios han demos-

trado que los seguidores de rodillo que operan con una leva radial abierta bien lubricada tienen tasas de deslizamiento menores que 1%.[91]

¿Leva radial o axial?

Esta elección se dicta en gran parte por la configuración global de la máquina para la que se diseña la leva. Si el seguidor debe moverse paralelamente al eje del árbol de levas, entonces se dictará una leva axial. Si no hay tal restricción, es posible que una leva radial sea una mejor opción, simplemente porque es una leva menos complicada y, por consiguiente, más económica de fabricar.

¿Seguidor de rodillo o de cara plana?

El seguidor de rodillo es una opción mejor desde el punto de vista de un diseño de levas simplemente porque acepta un radio de curvatura negativo en la leva. Esto permite mayor variedad en el programa de la leva. Del mismo modo, para cualquier cantidad de producción, el seguidor de rodillo tiene la ventaja de estar disponible entre diversos fabricantes en cualquier cantidad de uno a un millón. Para cantidades menores no es usualmente económico diseñar y construir su propio seguidor a la medida. Además, los remplazos de seguidores de rodillo se pueden obtener a corto plazo de los proveedores cuando se necesitan reparaciones. Tampoco son particularmente costosos, incluso en pequeñas cantidades.

Es probable que los mayores usuarios de los seguidores de cara plana sean los fabricantes de motores automotrices. Sus cantidades resultan suficientemente elevadas para permitir cualquier diseño que se desee. En tal caso se fabrican o compran en gran cantidad y pueden ser menos costosas que un seguidor de rodillo. También, con levas para válvulas de motor, un seguidor de cara plana puede ahorrar más espacio que uno de rodillo. Sin embargo, muchos fabricantes han cambiado a seguidores de rodillo en motores automotrices para reducir la fricción y mejorar el rendimiento del combustible. Los motores diesel han empleado desde hace mucho tiempo seguidores de rodillo (levantaválvulas), como los de carreras, que "drogan" a los motores para obtener alto rendimiento.

Las levas utilizadas en la maquinaria automatizada de línea de producción usan los seguidores de rodillo en existencia casi exclusivamente. La facilidad de cambiar de inmediato un seguidor desgastado por uno nuevo del almacén sin perder mucho tiempo de producción en la "línea", representa un argumento fuerte en este ambiente. Los seguidores de rodillo vienen en diversas presentaciones (véase figura 8-5a)). Están basados en cojinetes de rodillo o de bolas. Las versiones de cojinetes simples están también disponibles para requerimientos de ruido bajo. La superficie exterior, que rueda contra la leva, tiene forma cilíndrica o esférica. La "corona" en el seguidor esférico es pequeña, pero garantiza que el seguidor pasará cerca del centro de una leva plana, a pesar de la exactitud del alineamiento de los ejes de rotación de ambos. Si se elige un seguidor cilíndrico, y no se tiene cuidado de alinear los ejes de la leva y el seguidor de rodillo, el seguidor pasará por un borde y se desgastará rápidamente.

Los seguidores de rodillo comerciales se fabrican por lo común de una aleación de acero con alto carbono, tales como AISI 52100, y se templan a grados Rockwell Re 60-62. La aleación 52100 es muy apropiada en secciones delgadas que deben tratarse térmicamente para una dureza uniforme. Debido a que el rodillo efectúa muchas revoluciones por cada rotación de la leva, su tasa de desgaste puede ser mayor que la de la leva. Al

cromar el seguidor se mejora apreciablemente su vida. El cromo es más duro que el acero a un grado de casi Re 70. Las levas de acero comúnmente se templan a un rango de Re 50-55.

¿Usar detenciones o no?

La necesidad de un detenimiento a menudo es evidente a partir de las especificaciones del problema. Si el seguidor debe mantenerse estacionario cada cierto tiempo, entonces se requiere de un detenimiento. Algunos diseñadores de levas tienden a insertar detenimientos en situaciones donde no se necesitan específicamente para la inmovilidad del seguidor, por la creencia errónea de que es preferible a proporcionar un movimiento de subida y retorno cuando esto es lo que en realidad se necesita. Si el diseñador trata de utilizar un programa de doble detenimiento en un caso de un detenimiento, entonces quizá se justifique su motivación por "dejar que las vibraciones se estabilicen" cuando proporciona un "detenimiento corto" al final del movimiento. Sin embargo, probablemente deberían utilizar otro programa de levas, tal vez uno polinomial adaptado a las especificaciones. Tomar la aceleración como cero, durante un instante o durante un "detenimiento corto", generalmente resulta innecesario e indeseable. (Véanse los ejemplos 8-5, 8-6 y 8-8.) Un detenimiento se debe utilizar sólo cuando se requiere que el seguidor sea estacionario durante un lapso mensurable. Por otra parte, si no se necesita ningún detenimiento, considere en su lugar el uso de un eslabonamiento. Éstos son más fáciles y más económicos de fabricar.

¿Rectificar o no?

Muchas levas para maquinaria de producción se usan para fresar y no se rectifican. Las levas para válvulas automotoras están rectificadas. Las razones son consideraciones en gran parte debidas al costo y la cantidad, así como a las altas velocidades de las levas automotoras. No hay duda que una leva rectificada es superior a una leva fresada; la cuestión en cada caso es reconocer si la ventaja vale el precio. En pequeñas cantidades, comunes en la maquinaria de producción, al rectificar una leva casi se duplica su costo. Las ventajas en términos de uniformidad y del silenciamiento de la operación, así como de desgaste, no están en la misma relación que la diferencia de costos. Una leva bien maquinada puede operar casi como una leva bien rectificada, y mucho mejor que una deficientemente rectificada.[181]

Las levas automotoras se fabrican en grandes cantidades, funcionan a velocidad muy elevada y se espera que duren por mucho tiempo con mantenimiento mínimo. Ésta constituye una especificación muy desafiante, y hace un gran honor a la ingeniería de estas levas, que rara vez fallan en 100 000 millas o más de operación. Las levas se fabrican con equipo especializado que mantiene en un mínimo el costo de su rectificado.

¿Lubricar o no?

Las levas necesitan mucha lubricación. Las levas automotoras literalmente se ahogan en un flujo de aceite de motor. Muchas levas de máquinas de producción operan inmersas en un baño de aceite. Éstas son levas razonablemente apropiadas. Otras no son tan afortunadas. Las levas que operan muy próximas al producto en una máquina de ensamble, en la que el aceite causaría la contaminación del producto (productos alimenticios o productos personales) a menudo funcionan en seco. Los mecanismos de cámaras, que

están llenos de eslabonamientos y levas, a menudo operan en seco. Eventualmente el lubricante podría llegar a la película.

A menos que exista alguna buena razón para evitar la lubricación, una leva-seguidor debe proveerse de un abastecimiento generoso de lubricante limpio, preferiblemente un aceite de tipo hipoidal que contenga aditivos para las condiciones de lubricación de frontera. La geometría de una junta de leva-seguidor (semijunta) se encuentra entre lo peor considerando una lubricación. A diferencia de un cojinete en pista, que tiende a retener una película del lubricante dentro de la junta, la semijunta trata continuamente de sacar por sí misma el lubricante. Esto resulta en un estado de lubricación de frontera o de frontera mezclada EHD* en el que se presentará cierto contacto de metal a metal. El lubricante debe reabastecerse continuamente en la junta. Otro propósito del lubricante líquido es el de eliminar el calor de la fricción de la junta. Si se operara en seco se producirían temperaturas significativamente altas en el material, y, en consecuencia, aceleramiento en el desgaste y quizá falla temprana.

8.10 REFERENCIAS

1 **McPhate, A. J. y L. R. Daniel** (1962). "A Kinematic Analysis of Fourbar Equivalent Mechanisms for Plañe Motion Direct Contact Mechanisms". *Proc. of Seventh Conference on Mechanisms,* Universidad de Purdue, pp. 61-65.

2 **Neklutin,** C. N. (1954). "Vibration Analysis of Cams". *Machine Design,* **26,** pp. 190-198.

3 **Wiederrich, J. L. y B. Roth** (1978). "Design of Low Vibration Cam Pretiles". *Cams and Cam Mechanisms,* Jones, J. R. editor, Institution of Mechanical Engineers, Londres, pp. 3-8.

4 **Chew, M. y C. H. Chuang** (1995). "Minimizing Residual Vibrations in High Speed Cam-Follower Systems Over a Range of Speeds". *Journal of Mechanical Design,* **117(1), p.** 166.

5 **MacCarthy, B. L.** (1985). "Evaluation of Spline Functions for Use in Cam Design". *Proc Instn Mech Engrs,* **199(C3),** pp. 239-248.

6 **MacCarthy, B. L.** (1988). "Quintic Splines for Kinematic Design". *Computer-Aided Design,* **20(7),** pp. 406-415.

7 Tsay, D. M. **y** C. O. **Huey** (1993). "Application of Rational B-Splines to the Synthesis of Cam-Follower Motion Programs". *Journal of Mechanical Design,* **115(3),** p. 621.

8 **Norton, R. L.** (1988). "Effect of Manufacturing Method on Dynamic Performance of Cams". *Mechanism and Machine Theory,* 23(3), pp. 191-208.

9 **Norton, R. L. y colaboradores** (1988). "Analysis of the Effect of Manufacturing Methods and Heat Treatment on the Performance of Double Dwell Cams". *Mechanism and Machine Theory,* **23(6),** pp. 461-473.

8.11 PROBLEMAS

Se puede utilizar los programas DYNACAM y MATRIX para resolver estos problemas o para verificar su solución donde sea apropiado.

* EHD = Elastohidrodinámica.

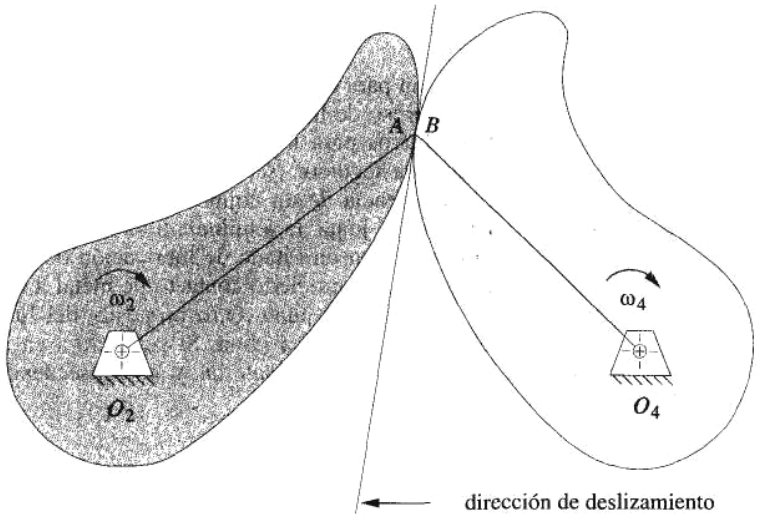


FIGURA P8-1

Problemas 8-1 y 8-2 *Adaptado de P.H. Hill y Rule, W. P. (1960) Mechanisms: Analysis and Design*

8

*8-1 En la figura P8-1 se muestra la leva y el seguidor del problema 6-65. Mediante métodos gráficos determine y trace el eslabonamiento de cuatro barras correspondiente a esta posición de la leva y seguidor.

8-2 En la figura P8-1 se muestra la leva y seguidor del problema 6-65. Mediante métodos gráficos encuentre el ángulo de presión en la posición mostrada.

8-3 En la figura P8-2 se muestra una leva y seguidor. Usando métodos gráficos encuentre y trace el eslabonamiento de cuatro barras equivalente a esta posición de la leva y seguidor.

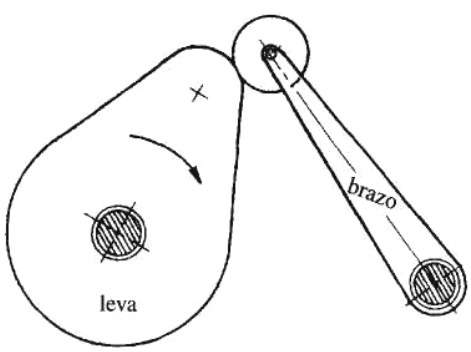


FIGURA P8-2

Problemas 8-3 y 8-4

* Respuestas en el apéndice F.

8-4 En la figura P8-2 se muestra una leva y seguidor. Mediante métodos gráficos encuentre el ángulo de presión en la posición mostrada.

8-5 En la figura P8-3 se muestra una leva y seguidor. Mediante métodos gráficos encuentre y trace el eslabonamiento de cuatro barras correspondiente a esta posición de la leva y seguidor.

8-6 En la figura P8-3 se muestra una leva y seguidor. Mediante métodos gráficos encuentre el ángulo de presión en la posición mostrada.

‡8-7 Diseñe una leva con doble detenimiento para mover un seguidor desde 0 hasta 2.5 pulgadas en 60°, con detenimiento para 120°, bajada de 2.5 pulgadas en 30° y detenimiento para el resto. El ciclo total debe tomar 4 s. Elija los programas adecuados para la subida y la bajada que minimicen las aceleraciones. Grafique los diagramas *s v aj*.

‡8-8 Diseñe una leva con doble detenimiento para mover un seguidor desde 0 hasta 1.5 pulgadas en 45°, con detenimiento para 150°, bajada de 1.5 pulgadas en 90° y detenimiento para el resto. El ciclo total debe tomar 6 s. Elija los programas adecuados para la subida y la bajada que minimicen las aceleraciones. Grafique los diagramas *s v aj*.

‡8-9 Diseñe una leva con un solo detenimiento para mover un seguidor desde 0 hasta 2.5 pulgadas en 60°, bajada de 2 pulgadas en 90° y detenimiento para el resto. El ciclo total debe tomar 2 s. Elija los programas adecuados para la subida y la bajada que minimizan las aceleraciones. Grafique los diagramas *s v a j*.

‡8-10 Diseñe una leva con tres detenimientos para mover un seguidor desde 0 hasta 2.5 pulgadas en 40°, detenimiento para 100°, bajada de 1.5 pulgadas en 90°, un detenimiento para 20°, bajada de 1 pulgada en 30° y un detenimiento para el resto. El ciclo total debe tomar 10 s. Elija los programas adecuados para la subida y la bajada que minimicen las velocidades. Grafique los diagramas *s v a j*.

‡8-11 Diseñe una leva con cuatro detenimientos para mover un seguidor desde 0 hasta 2.5 pulgadas en 40°, con detenimiento para 100°, bajada de 1.5 pulgadas en 90°, detenimiento para 20°, bajada de 0.5 pulgadas en 30°, detenimiento para 40°, bajada de 0.5 pulgadas en 30° y detenimiento para el resto. El ciclo total debe tomar 15 s. Elija los programas adecuados para la subida y la bajada que minimicen las velocidades. Grafique los diagramas *s v a j*.

‡8-12 Dimensione la leva del problema 8-7 para un seguidor de rodillo con un radio de 1 pulgada, considerando el ángulo de presión y el radio de curvatura. Utilice la excentricidad sólo si necesita equilibrar dichas funciones. Grafique ambas funciones. Trace el perfil de la leva. Repita para un seguidor de cara plana. ¿Cuál emplearía usted?

‡8-13 Dimensione la leva del problema 8-8, para un seguidor de rodillo con un radio de 1.5 pulgadas, considerando el ángulo de presión y el radio de curvatura. Utilice la excentricidad sólo si necesita balancear dichas funciones. Grafique ambas funciones. Trace el perfil de la leva. Repita para un seguidor de cara plana. ¿Cuál emplearía usted?

‡8-14 Dimensione la leva del problema 8-9 para un seguidor de rodillo con un radio de 0.5 pulgadas, considerando el ángulo de presión y el radio de curvatura. Utilice la excentricidad sólo si necesita balancear dichas funciones. Grafíquelas. Trace el perfil de la leva. Repita para un seguidor de cara plana. ¿Cuál emplearía usted?

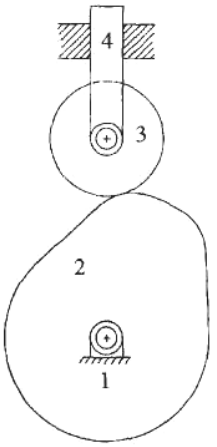


FIGURA P8-3
Problemas 8-5 y 8-6

‡ Estos problemas son adecuados para resolverse mediante el programa DYNACAM, que se anexa en el CD-ROM.

‡8-15 Dimensione la leva del problema 8-10, para un seguidor de rodillo con radio de 2 pulgadas, considerando el ángulo de presión y el radio de curvatura. Utilice la excentricidad sólo si necesita balancear dichas funciones. Grafíquelas. Trace el perfil de la leva. Repita para un seguidor de cara plana. ¿Cuál emplearía usted?

‡8-16 Dimensione la leva del problema 8-11, para un seguidor de rodillo con radio de 0.5 pulgadas, considerando el ángulo de presión y el radio de curvatura. Utilice la excentricidad sólo si necesita balancear dichas funciones. Grafíquelas. Trace el perfil de la leva. Repita para un seguidor de cara plana. ¿Cuál emplearía usted?

‡8-17 Se impulsará una carga de inercia alta y de gran fricción. Se desea mantener baja la velocidad pico. Combine los segmentos de los desplazamientos cicloidales de semiperiodo con un segmento de velocidad constante en la subida y la bajada, con la finalidad de reducir la velocidad máxima por debajo de la obtenible, con sólo una aceleración senoidal modificada de periodo completo (es decir, sin porción de velocidad constante). La subida es de 1 pulgada en 90°, detenimiento para 60°, bajada en 50° y detenimiento para el resto. Compare los dos diseños y comente. Utilice una ω de 1 para compararlos.

‡8-18 Una velocidad constante de 0.4 pulg/s debe igualarse durante 1.5 s. Luego, el seguidor debe regresar al punto inicial que usted eligió y detenerse durante 2 s. El tiempo del ciclo total es de 6 s. Diseñe una leva para un radio de seguidor de 0.75 pulgadas y un ángulo de presión máximo de 30° en valor absoluto.

‡8-19 Una velocidad constante de 0.25 pulg/s debe igualarse durante 3 s. Luego, el seguidor debe regresar al punto inicial que usted eligió y detenerse durante 3 s. El tiempo del ciclo total es de 12 s. Diseñe una leva para un radio de seguidor de 1.25 pulgadas y un ángulo de presión máximo de 35° en valor absoluto.

‡8-20 Una velocidad constante de 2 pulg/s debe igualarse durante 1 s. Luego, el seguidor debe regresar al punto inicial que usted eligió. El tiempo del ciclo total es de 2.75 s. Diseñe una leva para un radio de seguidor de 0.5 pulgadas y un ángulo de presión máximo de 25° en valor absoluto.

†8-21 Escriba un programa de computadora o utilice un resolvedor de ecuaciones como *Mathcad* o *TKSolver para* calcular y graficar los diagramas *s v a j de* una función de leva de aceleración trapezoidal modificada para cualquier valor especificado de ascenso y duración. Pruébelo usando un ascenso de 20 mm sobre 60° a 1 rad/s.

†8-22 Escriba un programa de computadora o utilice un resolvedor de ecuaciones como *Mathcad* o *TkSolver* para calcular y graficar los diagramas *s v a j* de una función de leva de aceleración senoidal modificada para cualquier valor especificado de ascenso y duración. Pruébelo usando un ascenso de 20 mm sobre 60° a 1 rad/s.

†8-23 Escriba un programa de computadora o utilice un resolvedor de ecuaciones como *Mathcad* o *TkSolver* para calcular y graficar los diagramas *s* v *a j* de una función de leva de desplazamiento cicloidal para cualquier valor especificado de ascenso y duración. Pruébelo usando un ascenso de 20 mm sobre 60° a 1 rad/s.

†8-24 Escriba un programa de computadora o utilice un resolvedor de ecuaciones como *Mathcad* o *TKSolver* para calcular y graficar los diagramas *s v a j* de una función de leva de desplazamiento polinomial 3-4-5 para cualquier valor especificado de ascenso y duración. Pruébelo usando un ascenso de 20 mm sobre 60° a 1 rad/s.

† Estos problemas son adecuados para resolverse mediante programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

‡ Estos problemas son adecuados para resolverse mediante el programa DYNACAM, que se anexa en el CD-ROM.

†8-25 Escriba un programa de computadora o utilice un resolvedor de ecuaciones como *Mathcad o TKSolver* para calcular y graficar los diagramas í v *a j* de una función de leva de desplazamiento polinomial 4-5-6-7 en cualquier valor especificado de ascenso y duración. Pruébelo usando un ascenso de 20 mm sobre 60° a 1 rad/s.

†8-26 Escriba un programa de computadora o utilice un resolvedor de ecuaciones como *Mathcad* o *TKSolver* para calcular y graficar los diagramas *s v a j de* una función de leva de desplazamiento armónico simple con cualquier valor especificado de ascenso y duración. Pruébelo usando un ascenso de 20 mm sobre 60° a 1 rad/s.

†8-27 Escriba un programa de computadora o utilice un resolvedor de ecuaciones como *Mathcad* o *TKSolver* para calcular y graficar el ángulo de presión y el radio de curvatura de una función de leva de aceleración trapezoidal modificada para cualquier valor especificado de ascenso, duración, excentricidad y radio del círculo primo. Pruébelo usando un ascenso de 20 mm sobre 60° a 1 rad/s y determine el radio del círculo primo necesario para obtener un ángulo de presión máximo de 20°. ¿Cuál es el diámetro mínimo del seguidor de rodillo necesario para evitar el rebaje con estos datos?

†8-28 Escriba un programa de computadora o utilice un resolvedor de ecuaciones como *Mathcad* o *TKSolver* para calcular y graficar el ángulo de presión y el radio de curvatura de una función de leva de aceleración senoidal modificada para cualquier valor especificado de ascenso, duración, excentricidad y radio del círculo primo. Pruébelo usando un ascenso de 20 mm sobre 60° a 1 rad/s y determine el radio del círculo primo necesario para obtener un ángulo de presión máximo de 20°. ¿Cuál es el diámetro mínimo del seguidor de rodillo necesario para evitar el rebaje con estos datos?

†8-29 Escriba un programa de computadora o utilice un resolvedor de ecuaciones como *Mathcad* o *TkSolver* para calcular y graficar el ángulo de presión y el radio de curvatura de una función de desplazamiento cicloidal para cualquier valor especificado de ascenso, duración, excentricidad y radio del círculo primo. Pruébelo usando un ascenso de 20 mm sobre 60° a 1 rad/s y determine el radio del círculo primo necesario para obtener un ángulo de presión máximo de 20°. ¿Cuál es el diámetro mínimo del seguidor de rodillo necesario para evitar el rebaje con estos datos?

†8-30 Escriba un programa de computadora o utilice un resolvedor de ecuaciones como *Mathcad* o *TKSolver* para calcular y graficar el ángulo de presión y el radio de curvatura de una función de leva de desplazamiento polinomial 3-4-5 para cualquier valor especificado de ascenso, duración, excentricidad y radio del círculo primo. Pruébelo usando un ascenso de 20 mm sobre 60° a 1 rad/s y determine el radio del círculo primo necesario para obtener un ángulo de presión máximo de 20°. ¿Cuál es el diámetro mínimo del seguidor de rodillo necesario para evitar el rebaje con estos datos?

†8-31 Escriba un programa de computadora o utilice un resolvedor de ecuaciones como *Mathcad* o *TKSolver* para calcular y graficar el ángulo de presión y el radio de curvatura de una función de leva de desplazamiento polinomial 4-5-6-7 para cualquier valor especificado de ascenso, duración, excentricidad y radio del círculo primo. Pruébelo usando un ascenso de 20 mm sobre 60° a 1 rad/s y determine el radio del círculo primo necesario para obtener un ángulo de presión máximo de 20°. ¿Cuál es el diámetro mínimo del seguidor de rodillo necesario para evitar el rebaje con estos datos?

† Estos problemas son adecuados para resolverse mediante programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad*, *Matlab* o *TKSolver*.

†8-32 Escriba un programa de computadora o utilice un resolvedor de ecuaciones como *Mathcad* o *TKSolver* para calcular y grafícar el ángulo de presión y el radio de curvatura de una función de leva de desplazamiento armónico simple para cualquier valor especificado de ascenso, duración, excentricidad y radio de] círculo primo. Pruébelo usando un ascenso de 20 mm sobre 60° a 1 rad/s y determine el radio del círculo primo necesario para obtener un ángulo de presión máximo de 20°. ¿Cuál es el diámetro mínimo del seguidor de rodillo necesario para evitar el rebaje con estos datos?

8-33 Derive la ecuación 8-21 para la función polinomial 4-5-6-7.

8-34 Derive una expresión para el ángulo de presión de una leva de barrilete con excentricidad cero.

‡8-35 Diseñe una leva de placa radial para mover un seguidor de rodillo de 30 mm en 30°, con un detenimiento para 100°, bajada de 10 mm en 10°, detenimiento para 20°, bajada en 20 mm en 20°, y detenimiento para el resto. La a) del árbol de levas = 200 rpm. Minimice la velocidad pico del seguidor y determine el radio mínimo del círculo primo que dé un ángulo de presión máximo de 25°. Determine los radios de curvatura mínimos en la curva de paso.

‡8-36 Repita el problema 8-35, pero esta vez minimice la aceleración pico del seguidor.

‡8-37 Repita el problema 8-35, pero esta vez minimice la rapidez de aceleración pico del seguidor.

‡8-38 Diseñe una leva de placa radial para elevar un seguidor de rodillo traslatorio a través de 10 mm en 65°, regreso a 0 en 65° y detenimiento para el resto. La ω del árbol de levas = 3 500 rpm. Minimice la dimensión de la leva mientras no exceda un ángulo de presión de 25°. ¿Qué dimensión requiere el seguidor de rodillo?

‡8-39 Diseñe un mecanismo accionado por una leva de retroceso rápido para una relación de tiempo de 3:1. El seguidor de rodillo traslatorio debe moverse hacia adelante y hacia atrás 50 mm y detenerse en la posición de retroceso para 80°. Debe tardarse un tercio del tiempo para regresar y para moverse hacia adelante. La ω del árbol de levas = 100 rpm. Minimice la dimensión del conjunto mientras se mantiene un ángulo de presión máximo de 25°. Trace un dibujo de su diseño y proporcione los diagramas $s\ v\ a\ j$, ϕ y ρ.

‡8-40 Diseñe un sistema de leva-seguidor para impulsar un pistón traslatorio lineal a velocidad constante para 200° a través de una carrera de 100 mm a 60 rpm. Minimice la dimensión del conjunto mientras se mantiene un ángulo de presión máximo de 25°. Trace un dibujo de su diseño y proporcione los diagramas $s\ v\ a\ j$, ϕ y ρ.

† Estos problemas son adecuados para resolverse mediante programas resolvedores de ecuaciones como *Mathcad*, *Matlab* o *TKSolver*.

‡ Estos problemas son adecuados para resolverse mediante el programa DYNACAM, que se anexa en el CD-ROM.

8.12 PROYECTOS

Estos enunciados de proyecto de gran escala, deliberadamente carecen de detalles y estructura y se plantean sin mucha precisión. Por lo tanto, son similares al tipo de "identificación de necesidades" o planteamientos de problemas encontrados comúnmente en la práctica de la ingeniería. Se deja al estudiante estructurar el problema mediante investigación de fondo y crear un planteamiento de objetivo claro y un conjunto de especificaciones de tarea antes de intentar diseñar una solución. Este proceso de diseño se detalló en el capítulo 1 y debe seguirse en todos estos ejemplos. Todos los resultados

Diagrama de temporización

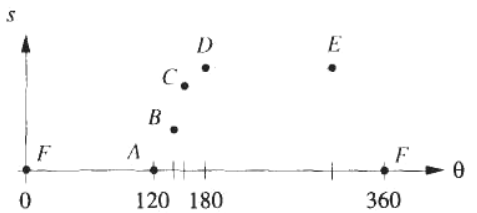


Tabla de desplazamiento

Ángulo de leva,°	Punto	s
120	A	0
140	B	2
150	C	3
180	D	3.5
300	E	3.5
360	F	0

FIGURA P8-4
Datos para el diseño de leva del proyecto P8-1

deben documentarse en un reporte técnico profesional. (Véase la bibliografía del capítulo I para información acerca del reporte escrito.)

‡P8-1 En la figura P8-4 se muestra un diagrama de temporización para un dispositivo de inserción de filamento de faros de un auto del tipo de halógeno. Se especifican cuatro puntos. El punto *A* es el inicio de la subida. En el *B* las tenazas se cierran para sujetar al filamento y sacarlo de su contenedor. El filamento entra en su casquillo en *C y* se inserta por completo en *D.* El detenimiento alto de *D* a *E* mantiene al filamento estacionario mientras se suelda en su lugar. El seguidor regresa a su posición inicial desde *E* hasta *F.* De *F* a *A* el seguidor permanece estacionario mientras se indexa el siguiente bulbo hacia su posición. Se desea tener velocidad baja a cero, en el punto *B,* donde las tenazas se cierran en el frágil filamento. La velocidad en C no debe ser tan alta como para "doblar el filamento en acción". Diseñe y dimensione un sistema completo de leva-seguidor para efectuar este trabajo.

‡P8-2 Para el equipo computarizado de monitoreo de una sala de operaciones se necesita una bomba accionada por una leva para simular la presión aórtica humana, para que sirva como una entrada seudohumana repetible y consistente, y que se pruebe diariamente. En la figura P8-5 se muestra una curva común de la presión aórtica y una curva característica de presión-volumen de bombeo. Diseñe una leva para impulsar el pistón y dé una aproximación lo más cercana a la curva de presión aórtica mostrada, que se obtiene sin violar la ley fundamental del diseño de levas. Simule el movimiento de la muesca dicrótica lo mejor que pueda.

‡P8-3 Un fabricante de calzado para atletismo desea un dispositivo para probar la capacidad de los tacones de hule de resistir millones de ciclos de fuerza similares a las que aplica un pie humano en el suelo mientras camina. En la figura P8-6 se muestra una función común fuerza-tiempo de un caminante y una curva de presión-volumen para un acumulador de pistón. Diseñe un sistema de leva-seguidor para impulsar el pistón de tal manera que cree una función fuerza-tiempo en el tacón, similar al mostrado. Elija los diámetros de pistón adecuados en cada extremo.

‡P8-4 Una máquina de producción de lámparas de bulbos fluorescentes mueve 5 500 lámparas por hora a través de un horno a 550°C sobre un transportador de cadena que se encuentra en movimiento constante. Las lámparas están en líneas centrales de 2 pulgadas. Los bulbos deben rociarse internamente con un baño de óxido de estaño conforme salen del horno, aún calientes. Esto requiere un dispositivo operado por una

‡ Estos problemas son adecuados para resolverse mediante el programa DYNACAM, que se anexa en el CD-ROM.

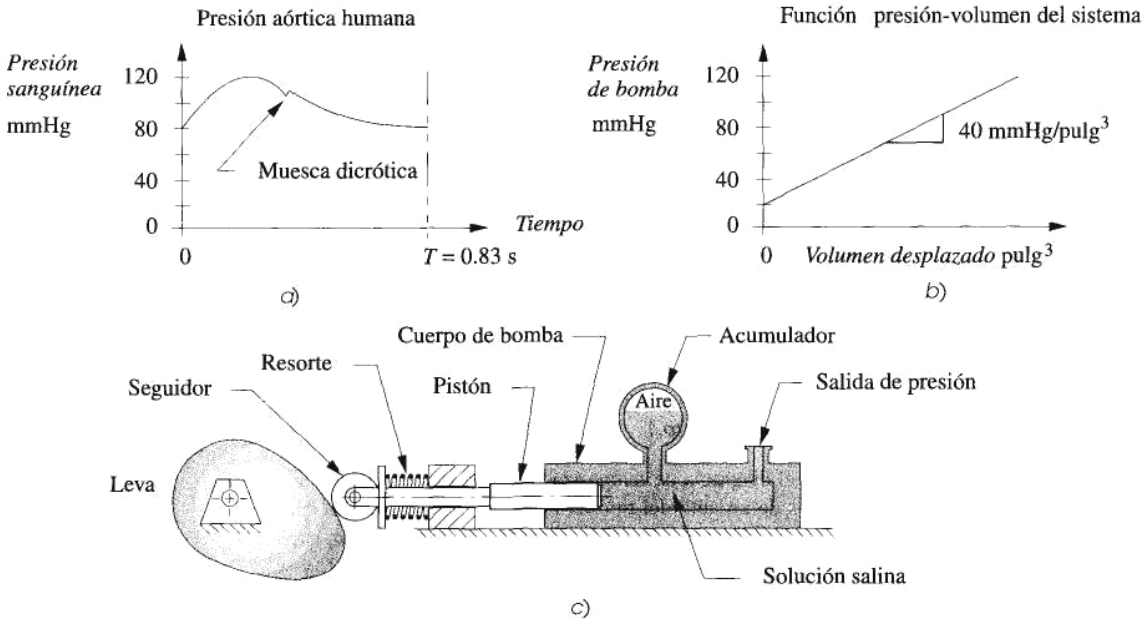


FIGURA P8-5
Datos para el diseño de leva del proyecto P8-2

leva para mantener los bulbos a una velocidad constante durante 0.05 s requeridos para rociarlos. Los atomizadores se colocarán en una mesa de 6 x 10 pulgadas. La aspersión genera ácido clorhídrico, por lo que todas las partes expuestas deben resistir ese ambiente. El dispositivo transportador de atomizadores se impulsará desde el transportador de cadena por un eje que tiene una rueda Catarina de 28 dientes engranada con la cadena. Diseñe un ensamble transportador completo de atomizadores según estas especificaciones.

‡P8-5 Para estudiar la forma de las gotas de agua conforme caen a través del aire se utilizará una torre de goteo de 30 pies de alto. Se va a transportar una cámara por un eslabonamiento operado por una leva, que seguirá el movimiento de la gota desde el punto a 8 pies, hasta el punto a 10 pies en su caída (medidos desde el punto de salida en la parte superior de la torre). Las gotas se liberan cada 1/2 segundo. Se filmará cada gota. Diseñe una leva y un eslabonamiento que sigan a estas gotas igualando sus velocidades y aceleraciones en la ventana de filmación de un pie.

‡P8-6 Se necesita un dispositivo para acelerar un vehículo de 3 000 libras hacia una barrera con velocidad constante para probar sus defensas a 5 mi/h. El vehículo partirá del reposo, avanzará y tendrá una velocidad constante durante la última parte de su movimiento antes de chocar contra la barrera con la velocidad especificada. Diseñe un sistema de leva-seguidor para efectuar esto. El vehículo perderá contacto con su seguidor justo antes del choque.

‡ Estos problemas son adecuados para resolverse mediante el programa DYNACAM, que se anexa en el CD-ROM.

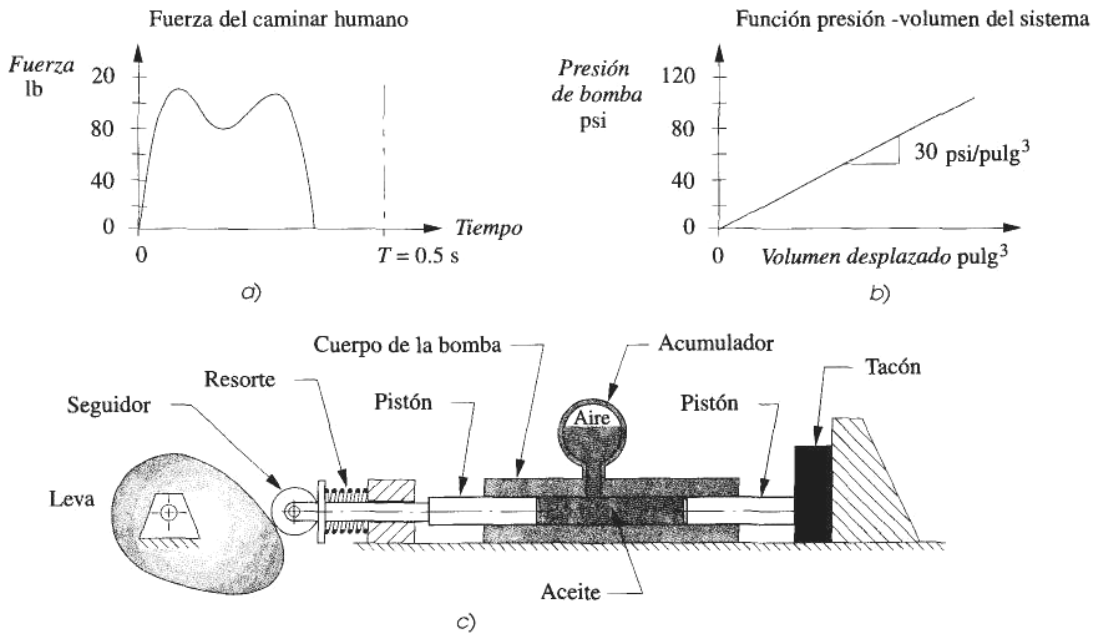


FIGURA P8-6

Datos para el diseño de leva del proyecto P8-3

Capítulo 9



TRENES DE ENGRANES

Ciclo y epiciclo, orbe en orbe.
JOHN MILTON, EL PARAÍSO PERDIDO

9.0 INTRODUCCIÓN

La primera referencia conocida de los trenes de engranes está en un tratado de Herón de Alejandría (año 100 a.C.)- Los trenes de engranes se usan ampliamente en todos los tipos de mecanismos y máquinas, desde abrelatas hasta barcos portaaviones. Siempre que sea necesario un cambio en la velocidad o en el par de torsión de un dispositivo de giro, normalmente se usará un tren de engranes o algunos de sus "primos", mecanismos de transmisiones de banda o de impulso de cadena. En este capítulo se estudiará la teoría de acción de los dientes del engrane y el diseño de estos dispositivos ubicuos para el control del movimiento. Los cálculos implicados son triviales comparados con los de levas o eslabonamientos. La forma de los dientes de los engranes se ha estandarizado por buenas razones de cinemática que aquí se describirán.

Muchos fabricantes tienen rápidamente disponibles engranes de varios tamaños y estilos. Las cajas de engranes ensambladas para relaciones particulares también son artículos en existencia. El diseño cinemático de los trenes de engranes está principalmente implicado en la selección de relaciones apropiadas y diámetros de los engranes. Un diseño de tren de engranes completo necesariamente implica consideraciones de resistencia de materiales y de los complicados estados de tensión a los que se someten los dientes del engrane. En este libro no se tratarán aspectos del análisis de tensión del diseño de engranes. Hay muchos libros que lo hacen; algunos se incluyen en la bibliografía al final de este capítulo. Aquí se analizará la teoría cinemática de los dientes del engrane, los tipos de engranes y el diseño cinemático de los engranajes y los trenes de engranes de los tipos simple, compuesto, con reversión y epicíclico. También se analizarán las transmisiones de cadena y bandas y se presentarán ejemplos del uso de estos dispositivos.

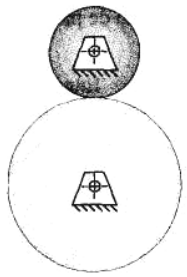
9.1 CILINDROS RODANTES

El medio más simple de transmitir movimiento giratorio de un eje a otro es un par de cilindros rodantes. Éstos pueden ser un conjunto externo de cilindros rodantes como el que se muestra en la figura 9-la), o un conjunto interno como el de la figura *9-lb).* Siempre que haya suficiente fricción en la interfaz de contacto, este mecanismo trabajará adecuadamente. No se presentará ningún deslizamiento entre los cilindros hasta que se exceda la fuerza de fricción máxima disponible en la junta por demandas del par de torsión de transmisión.

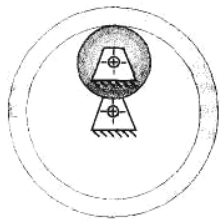
Una variación de este mecanismo es el que ocasiona que un automóvil o una bicicleta se muevan en el camino. Un cilindro rodante es el neumático, y el otro (de radio muy grande) es el camino. La fuerza de fricción es la que evita el deslizamiento entre ambos y funciona bien a menos que el coeficiente de fricción se reduzca por la presencia de hielo u otras sustancias resbaladizas. En efecto, algunos de los primeros automóviles tenían cilindros rodantes dentro de la transmisión, igual que algunos barredores de nieve y tractores de jardín actuales usan una cubierta de caucho que rueda contra un disco de acero para transmitir la potencia del motor a las ruedas.

Una variante de los cilindros rodantes de transmisión es la banda plana o en forma de V que se muestra en la figura 9-2. Este mecanismo también transfiere potencia por fricción y es capaz de hacerlo a niveles muy elevados, siempre que la banda tenga una sección transversal suficiente. Se usan bandas de fricción en una gran variedad de aplicaciones para máquinas de coser pequeñas, en el alternador de un automóvil, en generadores de multipotencia y en las bombas. Siempre que no se requiera un enfase o sincronía absolutos, y que los niveles de potencia sean moderados, es preferible la transmisión de banda de fricción. Su funcionamiento es relativamente silencioso, no requiere lubricación y es barata comparada con las transmisiones de engranes o de cadena.

Ambas transmisiones, tanto las de cilindros rodantes como las de banda (o cadena) tienen eslabonamientos efectivos equivalentes a la que se muestra en la figura 9-3. Estos eslabonamientos efectivos resultan válidos únicamente para una posición instantánea, no



a) Conjunto externo



b) Conjunto interno

FIGURA 9-1
Cilindros rodantes

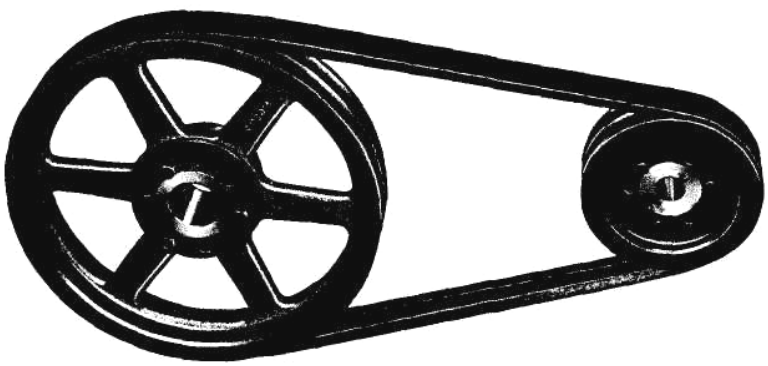


FIGURA 9-2
Un impulsor con banda en V de dos ranuras *Cortesía de T. B. Wood's Sons Co., Chambersburg, Pennsylvania*

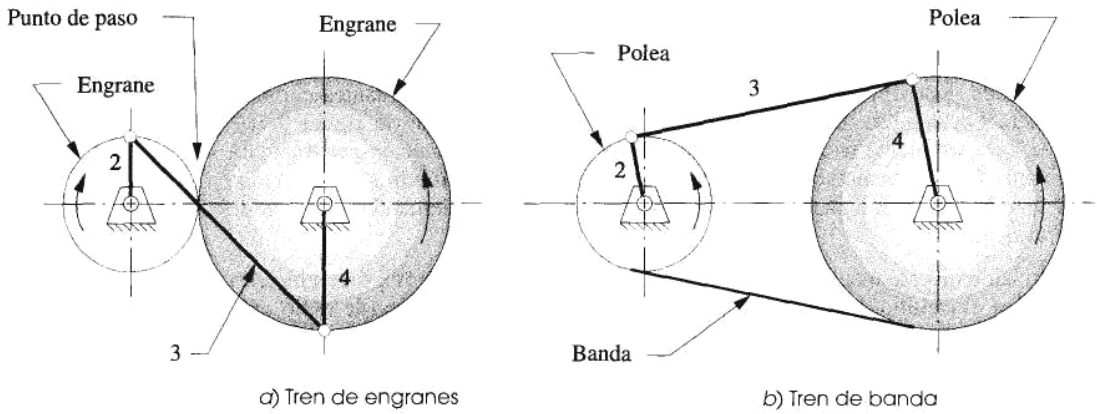


FIGURA 9-3

Trenes de engranes y de banda, cada uno con un eslabonamiento equivalente de cuatro barras en cualquier posición instantánea

obstante, se muestra que tales dispositivos en apariencia son sólo una variación del eslabonamiento de cuatro barras.

Los inconvenientes principales de la transmisión de cilindros rodantes (o de banda lisa) son su capacidad relativamente baja de par de torsión y la posibilidad de deslizamiento que presentan. Algunas transmisiones requieren enfase absoluto de los ejes de entrada y salida con propósitos de sincronía. Un ejemplo común es la transmisión de válvulas en un motor de automóvil. Las levas de la válvula deben conservarse en fase con el movimiento del pistón, de otra manera el motor no funcionará apropiadamente. Una conexión de banda lisa o de cilindros rodantes del cigüeñal al árbol de levas no garantiza el enfasamiento correcto. En este caso se necesita algún medio para evitar el deslizamiento.

Lo anterior normalmente significa agregar algunos dientes del engranado de los cilindros rodantes. Éstos se convertirán en engranes como los de la figura 9-4; el mecanismo resultante se llama *engranaje.* Cuando dos engranes se acoplan para formar un mecanismo de engranes como éste, resulta convencional referirse al más pequeño de los dos como el *piñón* y al otro como el *engrane.*

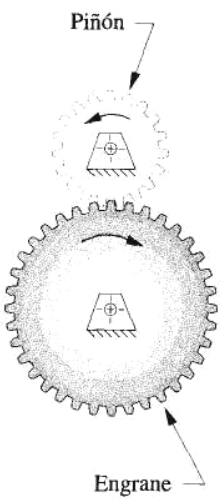


FIGURA 9-4

Un engranaje externo

9.2 LEY FUNDAMENTAL DEL ENGRANAJE

Conceptualmente, los dientes de cualquier forma evitan el deslizamiento. Los molinos impulsados por agua y los viejos molinos de viento usaban engranes de madera cuyos dientes eran sólo espigas de madera redondas fijas a la periferia de los cilindros. Si se ignora la crudeza de la construcción de estos primeros ejemplos de engranajes, no existía ninguna posibilidad de una transmisión suave de la velocidad, ya que la geometría del diente "espigas" violaba la **ley fundamental del engranaje** que expresa: *la razón de la velocidad angular entre los engranes de un engranaje permanece constante en toda la conexión.* En la página 471 se da una definición más completa y formal de esta ley.

La relación de la velocidad angular (m_v) a que se refiere esta ley es la misma que se derivó para el eslabonamiento de cuatro barras de la sección 6.4 y de la ecuación 6.10. Es igual que la relación del radio del engrane de entrada con el radio del engrane de salida.

$$m_V = \frac{\omega_{salida}}{\omega_{entrada}} = \pm\frac{r_{entrada}}{r_{salida}} = \pm\frac{d_{entrada}}{d_{salida}} \tag{9.1a}$$

$$m_T = \frac{\omega_{entrada}}{\omega_{salida}} = \pm\frac{r_{salida}}{r_{entrada}} = \pm\frac{d_{salida}}{d_{entrada}} \tag{9.1b}$$

La **relación del par de torsión** (m_T) se mostró en la ecuación 6.12 como el recíproco de la relación de velocidad (m_V), de modo que un engranaje resulta esencialmente un dispositivo para cambiar el par de torsión por velocidad o viceversa. Debido a que no se aplican fuerzas como en el eslabonamiento, sino sólo pares de torsión a los engranes; la **ventaja mecánica** m_A de un engranaje es igual a la relación del par de torsión m_T. La aplicación más común es para reducir la velocidad y aumentar el par de torsión que impulsa las cargas pesadas, por ejemplo en la transmisión de un automóvil. Otras aplicaciones requieren un aumento en la velocidad, por lo que se debe aceptar una reducción en el par de torsión. En cualquier caso, normalmente resulta deseable mantener una razón constante entre los engranes cuando éstos giran. Cualquier variación en la relación presentará una oscilación en la velocidad y en el par de torsión de salida, aun con valores de entrada constantes.

Los radios de las ecuaciones 9.1 son los de los cilindros rodantes a los que se agregaron dientes. El signo positivo o negativo corresponde a una conexión interna o externa, según se ilustra en la figura 9-1. Una conexión externa invierte el sentido de rotación entre los cilindros y requiere el signo negativo. En un engranaje interno o transmisión de banda o de cadena la rotación entre los ejes de entrada y salida tiene el mismo sentido y requiere el signo positivo en las ecuaciones 9.1. Las superficies de contacto de los cilindros rodantes serán los **círculos de paso,** y sus diámetros, los **diámetros de paso** de los engranes. El punto de contacto entre los cilindros se localiza en la línea de centros como se muestra en la figura 9-3a), y se le llama **punto de paso.**

Con la finalidad de cumplir la ley fundamental del engranaje, los perfiles de los dientes que engranan deben conjugarse entre sí. Puede usarse un número infinito de pares conjugados posibles, pero sólo algunas curvas tienen aplicación práctica en los dientes de engrane. La **cicloide** se usa aún como perfil de diente en los relojes de pulsera o de mesa, pero en la mayoría de los engranes se usa la curva que por su forma se conoce como **involuta.**

Forma de involuta para clientes de engrane

La involuta es una curva que se genera al desenrollar una cuerda tirante desde un cilindro de enrollado (llamado *la evoluta),* según se muestra en la figura 9-5. Observe lo siguiente acerca de la curva involuta:

La cuerda siempre es tangente al cilindro.

El centro de curvatura de la involuta siempre está en el punto de tangencia de la cuerda con el cilindro.

Una tangente a la involuta es entonces siempre perpendicular a la cuerda, cuya longitud es el radio de curvatura instantáneo de la curva involuta.

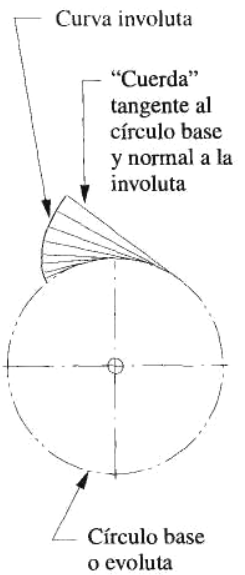


FIGURA 9-5
Desarrollo de la involuta de un círculo

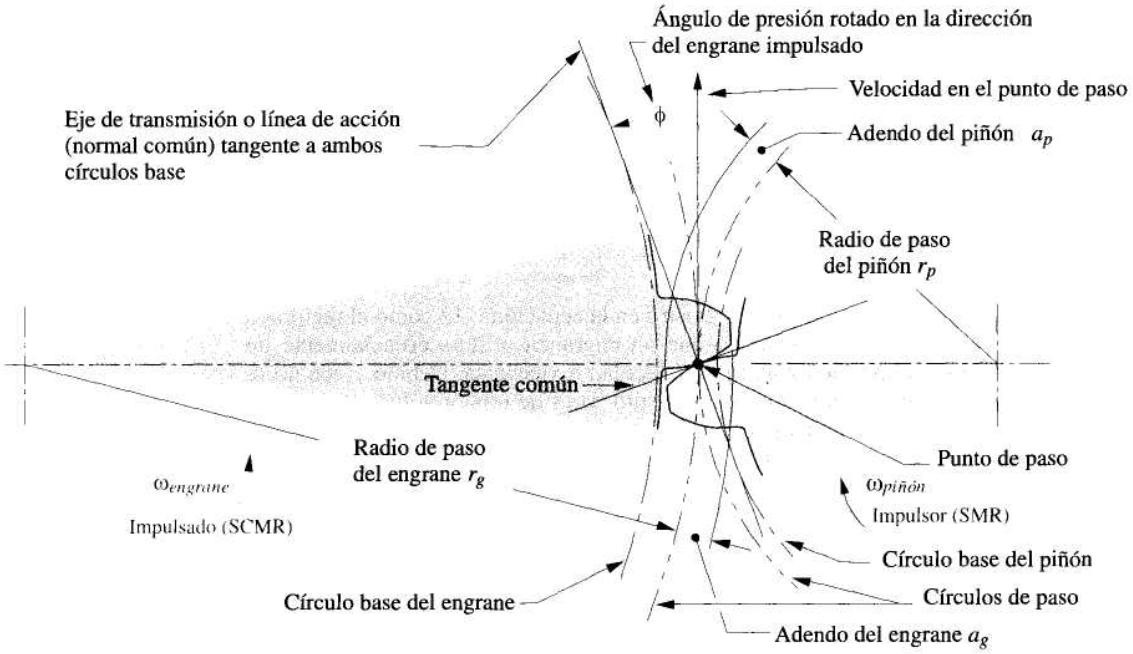


FIGURA 9-6

Contacto geométrico y ángulo de presión en los dientes de engrane de involuta

9

En la figura 9-6 se muestran dos involutas en cilindros separados en contacto o "engranados". Éstas representan los dientes del engrane. Los cilindros desde los cuales se desenrollan las cuerdas se llaman **círculos base** de los respectivos engranes. Observe que los círculos base son necesariamente más pequeños que los círculos de paso, los cuales están en los radios de los cilindros rodantes originales, r_p y r_g. Los dientes del engrane deben proyectarse hacia abajo y hacia arriba de la superficie del cilindro rodante (círculo de paso) y la *involuta sólo existe fuera del círculo base.* La cantidad de diente que pega fuera del círculo de paso es el **adendo,** y se designan a_p para el piñón y a_g para el engrane. Éstos son iguales para los dientes de engranes estándar, de profundidad llena.

La geometría en esta interfaz diente-diente resulta semejante a la de la junta entre leva-seguidor, como se definió en la figura 8-40. Hay una **tangente común** a ambas curvas en el punto de contacto y una **normal común** perpendicular a la tangente común. Observe que la normal común en realidad constituye las "cuerdas" de ambas involutas, que son colineales. Así, la normal común que también es el **eje de transmisión** siempre pasa por el punto de paso, independientemente de dónde estén en contacto los dos dientes engranados.

En la figura 9-7 se muestra un par de perfiles de dientes de involuta en dos posiciones: antes de iniciar el contacto y en el punto final de éste. Las normales comunes en ambos puntos de contacto tienen aún el mismo punto de paso. Esta propiedad de la invo-

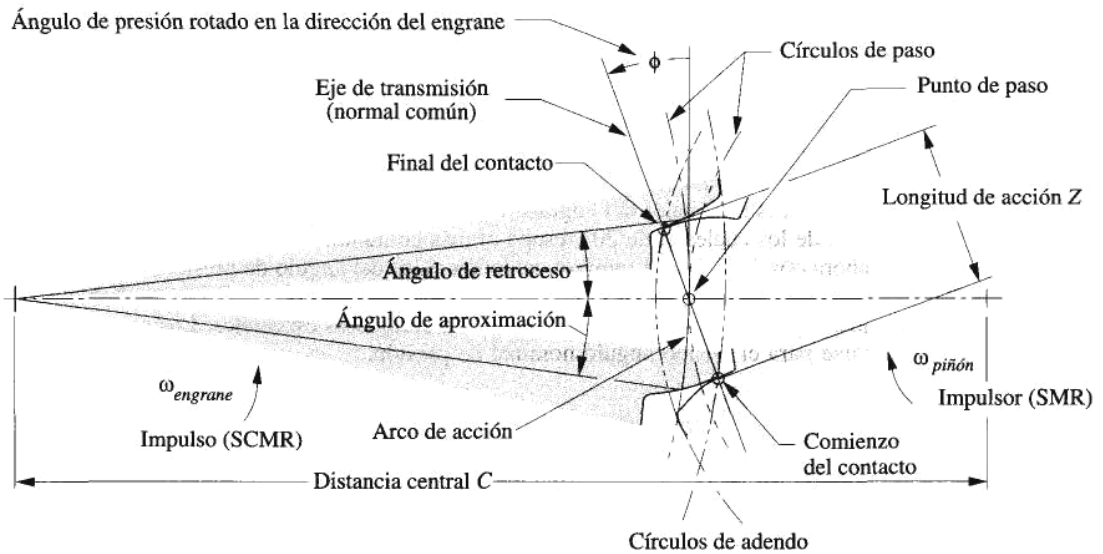


FIGURA 9-7

Punto de paso, círculos de paso, ángulo de presión, longitud de acción, arco de acción y ángulos de aproximación y hueco durante el engranado de un engrane y un piñón

luta provoca que obedezca la ley fundamental del engranaje. La razón del radio del engrane impulsor, con el radio del engrane impulsado, permanece constante a medida que los dientes entran y salen del engranado.

A partir de esta observación del comportamiento de la involuta se puede enunciar también **la ley fundamental del engranaje,** de una manera más formal cinemáticamente: *la normal común a los perfiles de los dientes en todos los puntos de contacto dentro del engranado deben pasar siempre por un punto fijo en la línea de centros, llamado punto de paso.* La razón de velocidad del engranaje será entonces una constante definida por el cociente de los radios respectivos de las ruedas dentadas hasta el punto de paso.

Los puntos de inicio y de salida del contacto definen el **engranado** del piñón y el engrane. La distancia a lo largo de la línea de acción entre estos puntos dentro del engranado se llama **longitud de acción,** Z, definida por las intersecciones de los círculos de adendo respectivos con la línea de acción, como se muestra en la figura 9-7.

$$Z = \sqrt{(r_p + a_p)^2 - (r_p \cos\phi)^2} + \sqrt{(r_g + a_g)^2 - (r_g \cos\phi)^2} - (C \operatorname{sen}\phi) \qquad (9.2)$$

La distancia a lo largo del círculo de paso dentro del engranado es el **arco de acción,** y los ángulos subtendidos por estos puntos y la línea de centros son el **ángulo de aproximación** y de retroceso. Éstos, para simplificar, se muestran únicamente en el engrane de la figura 9-7, pero existen ángulos similares para el piñón. El arco de acción tanto en los círculos de paso del piñón y del engrane debe tener la misma longitud de deslizamiento cero entre los cilindros rodantes teóricos.

Ángulo de presión

El **ángulo de presión** en un engranaje se define exactamente igual que en el mecanismo de leva y seguidor, como el ángulo entre el eje de transmisión o línea de acción (normal común) y la dirección de la velocidad en el punto de paso como se muestra en las figuras 9-6 y 9-7. Los fabricantes de engranes han estandarizado los ángulos de presión en los engranajes en unos pocos valores. Estos ángulos están definidos por la distancia entre los centros nominales del engranaje hasta el corte. Los valores estándar son 14.5°, 20° y 25°, de los cuales el de 20° resulta el más comúnmente usado y el de 14.5° se considera ahora obsoleto. Puede tomarse cualquier valor del ángulo de presión, pero el costo mayor comercial de uno de los engranes con ángulos de presión estándar probablemente no se justifique. Se requiere la construcción de cortadores especiales. Los engranes deben cortarse para el mismo ángulo nominal de presión.

Cambio de la distancia entre centros

Cuando en un cilindro se cortan los dientes de involuta (o cualquier diente) con respecto a un círculo base particular, se crea un engrane único, y no se tiene aún un círculo de paso. El círculo de paso resulta cuando se conecta ese cilindro con otro para constituir un par de engranes o engranaje. Con un cierto intervalo de distancias de centro a centro se logra el engranado de las ruedas dentadas. Una distancia entre los centros ideal *(DC)* también aportará los diámetros de paso nominales para los que se diseñaron los engranes. Sin embargo, las limitaciones del proceso de manufactura dan una probabilidad baja de que se tendrá exactamente dicha distancia entre centros en todos los casos. Con más probabilidad, se presentará un cierto error en la distancia, aun si es pequeña.

¿Qué sucederá con la adherencia con respecto a la ley fundamental del engranaje si existe un error en la localización de los centros de engranes? Si el perfil de diente de engrane **no** es de involuta, entonces un error en la distancia entre los centros violaría la ley fundamental y ocurriría una variación u "onda" en la velocidad de salida. La velocidad angular de salida no será constante para una velocidad de entrada constante. No obstante, en el caso **de un perfil de involuta,** *los errores en la distancia entre centros no afectan la relación de velocidad.* Ésta constituye la ventaja principal de la involuta sobre el resto de las formas posibles de diente y la razón por la que se utiliza casi umversalmente para los dientes de engrane. En la figura 9-8 se muestra lo que sucede cuando la distancia entre los centros varía en un engranaje de involuta. Observe que la normal común todavía pasa por un punto de paso común a todos los puntos de contacto dentro del engranado. Pero el cambio en la distancia entre centros afecta al ángulo de presión.

En la figura 9-8 se muestran también los ángulos de presión para dos diferentes distancias entre centros. A medida que tal distancia aumenta, también lo hace el ángulo de presión y viceversa, como resultado del cambio o error en la distancia entre los centros cuando se utilizan dientes de involuta. Observe que ley fundamental de engranaje aún vale en el caso de la distancia entre centros modificada. La normal común se mantiene tangente a los dos círculos base y atraviesa aún el punto de paso. Este último se ha desplazado, pero en proporción al cambio en la distancia entre los centros y los radios de engrane. La relación de velocidad no cambia a pesar del desplazamiento de la distancia entre los centros. De hecho, el cociente de los diámetros de los círculos base, que son invariables una vez que se ha formado el engrane, lo determina la relación de velocidad de los engranes de involuta.

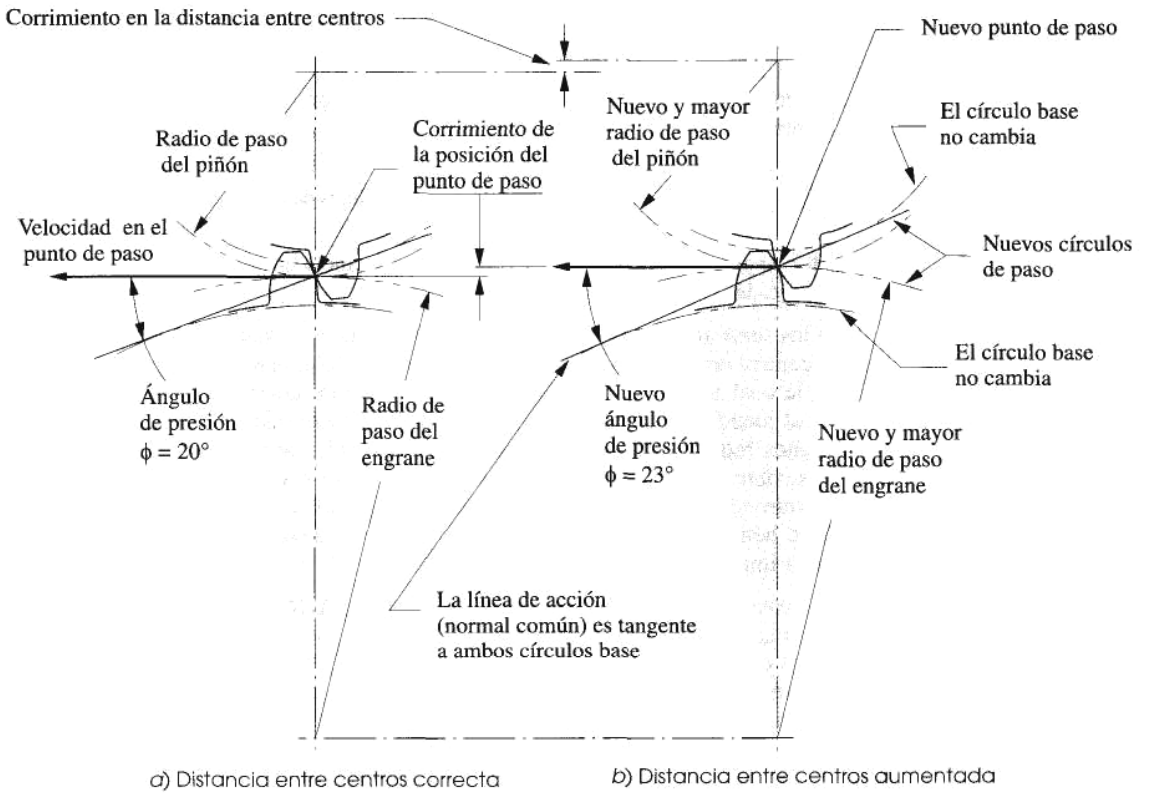


FIGURA 9-8

El cambio en la distancia entre los centros de los engranes de la involuta cambia el ángulo de presión y los diámetros de paso

Juego

Otro factor que se afecta por el cambio en la distancia entre centros es el juego. El aumento de la *DC* incrementa el juego y viceversa. El **juego** se define como *la medida de la holgura entre los dientes engranados sobre la circunferencia del círculo de paso.* Las tolerancias de fabricación evitan una holgura cero, ya que todos los dientes no pueden tener exactamente las mismas dimensiones y todos deben engranar. Así que debe existir una pequeña diferencia entre el espesor de diente y la anchura de espacio entre los dientes (véase la figura 9-9). En tanto el engranaje opere con un par de torsión no reversible, el juego no representa un problema. Pero cuando el par de torsión cambia de signo, los dientes se mueven de modo que el contacto cambia de un lado a otro de los dientes. El espacio de juego se recorrerá en sentido contrario y ocurrirá un choque que produce un ruido perceptible, lo cual es el mismo fenómeno que el choque transversal en la leva con cierre de forma. Igual que esfuerzos y desgaste mayores, el juego puede causar errores de

posición indeseables en algunas aplicaciones. Si la distancia entre centros se acopla exactamente con el valor teórico del engranaje, la tolerancia de juego compuesta diente a diente está en el rango de 0.0001 a 0.0007 pulgadas para engranes de precisión. El aumento en el juego angular como una función del error en la distancia central es aproximadamente

$$\theta_B = 43200(\Delta C)\frac{\tan\phi}{\pi d} \text{ minutos de arco} \tag{9.3}$$

donde ϕ = ángulo de presión, ΔC = error en la distancia entre centros y d - diámetro de paso del eje del engrane donde se mide el juego.

En los servomecanismos, donde hay motores que accionan, por ejemplo, las superficies de control en los aviones, el juego origina una "oscilación" potencialmente destructiva, en la cual el sistema de control trata en vano de corregir los errores de posición debidos al juego "movimiento por huelgo" en el sistema de impulsión mecánica. Tales aplicaciones requieren **engranes antijuego,** los cuales son dos piezas que se montan adosados sobre el mismo eje, que giran un poco entre sí en el conjunto y luego se fijan para contrarrestar el juego. En aplicaciones menos críticas, como es el caso de la impulsión de la hélice de una lancha o bote de motor, el juego que se produce al invertir la marcha es imperceptible.

La *American Gear Manufacturers Association* **(AGMA)** define las normas para el diseño y manufactura de engranes. Ha establecido una gama de valores de calidad y tolerancias que van desde la más baja precisión (3) a la más alta (16). Obviamente, el costo de un engrane estará en función directa de este índice de calidad.

9.3 NOMENCLATURA DE LOS ENGRANES

En la figura 9-9 se muestran dos dientes de un engrane con su terminología estándar. El **círculo de paso y** el **círculo base** ya se han definido antes. La altura total de un diente se define como el **adendo** *(que se suma)* y el **dedendo** *(que se resta),* referidos al círculo de paso nominal. El dedendo es ligeramente mayor que el adendo y ello proporciona la **holgura,** entre el tope de un diente **(círculo de adendo)** y el fondo del espacio entre dientes del engrane conectado **(círculo del dedendo). El espesor de diente** es su extensión medida sobre el círculo de paso y el **ancho del espacio** es ligeramente mayor que el espesor del diente. La diferencia entre ambas dimensiones es el **juego. El ancho de cara** de un diente de engrane se mide a lo largo del eje del engrane. El **paso circular** es la longitud de arco en el círculo de paso, que va desde un punto dado en un diente, hasta el punto análogo en el diente contiguo. El paso circular es una medida que determina el tamaño de los dientes de un engrane. Otras dimensiones del diente se han estandarizado con base en otro concepto de paso, como se muestra en la tabla 9-1. La definición del **paso circular** p_c es:

$$P_c = \frac{\pi d}{N} \tag{9.4a}$$

donde d = diámetro de paso y N = número de dientes. El diente de paso también se puede medir a lo largo de la circunferencia base y se conoce como la **base de paso** p_b.

$$p_b = p_c \cos\phi \tag{9.4b}$$

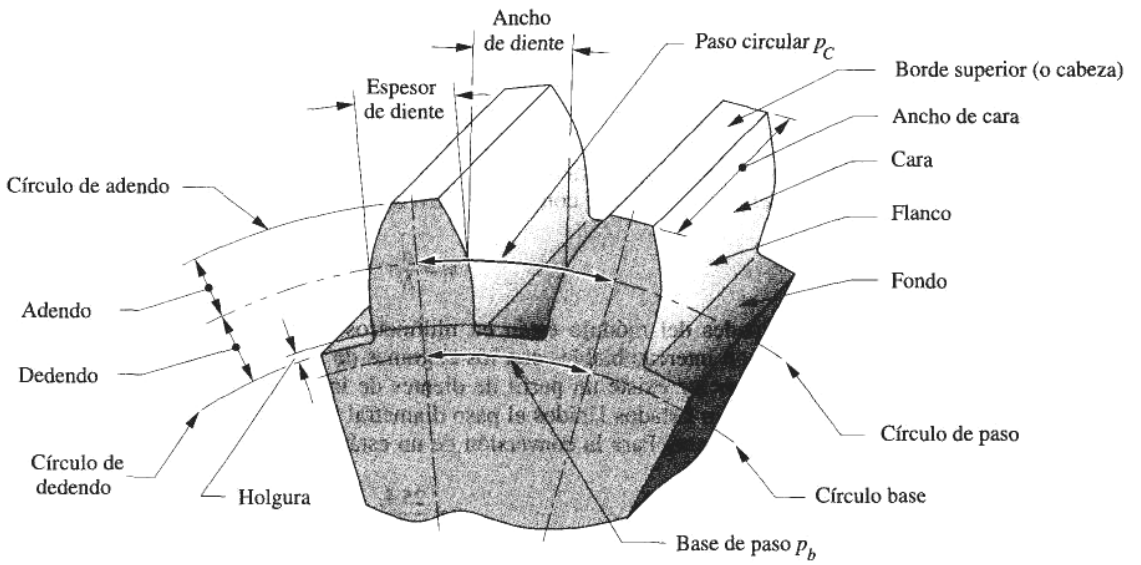


FIGURA 9-9
Nomenclatura de los dientes de engrane

Las unidades de p_c son pulgadas o milímetros. Un modo más conveniente de establecer y definir el tamaño de los dientes de un engrane es en relación con el diámetro del círculo de paso, en lugar de respecto a su circunferencia. El **paso diametral** p_d es:

$$P_d = \frac{N}{d} \tag{9.4c}$$

Las unidades de p_d son pulgadas recíprocas, o número de dientes por pulgada. Esta medida se usa solamente en las especificaciones de los engranes en Estados Unidos. Al

TABLA 9-1 Especificaciones AGMA para dientes de engrane de altura total

Parámetro	Paso grueso ($p_d < 20$)	Paso fino ($p_d \geq 20$)
Ángulo de presión ϕ	20° o 25°	20°
Adendo a	1.000 / p_d	1.000 / p_d
Dedendo b	1.250 / p_d	1.250 / p_d
Profundidad de trabajo	2.000 / p_d	2.000 / p_d
Profundidad total	2.250 / p_d	2.200 / p_d + 0.002 pulg
Espesor de diente circular	1.571 / p_d	1.571 / p_d
Radio de filete: cremallera básica	0.300 / p_d	No estandarizado
Holgura básica mínima	0.250 / p_d	0.200 / p_d + 0.002 pulg
Ancho mínimo de tope	0.250 / p_d	No estandarizado
Holgura (dientes esmerilados o pulidos)	0.350 / p_d	0.350 / p_d + 0.002 pulg

combinar las ecuaciones 9.4a y 9.4c se obtiene la siguiente relación entre el círculo de paso y el paso diametral.

$$p_d = \frac{\pi}{p_c} \tag{9.4d}$$

El SI usa engranes métricos; define un parámetro llamado módulo, el cual es el *recíproco del paso diametral* con el diámetro de paso medido en milímetros.

$$m = \frac{d}{N} \tag{9.4e}$$

Las unidades del módulo están en milímetros. Desafortunadamente, los engranes métricos no son intercambiables con los engranes de Estados Unidos, a pesar de que en ambos normalmente existe un perfil de dientes de involuta, pero los tamaños de diente son diferentes. En Estados Unidos el paso diametral o el módulo especifican los tamaños de diente de engrane. Para la conversión de un estándar en otro se usa

$$m = \frac{25.4}{p_d} \tag{9.4f}$$

La relación de velocidad m_V y la relación del par de torsión m_T de un engranaje se expresa en una forma más conveniente al sustituir la ecuación 9.4c en las ecuaciones 9.1, mientras se observa que el paso diametral de los engranes en el engranado debe ser el mismo.

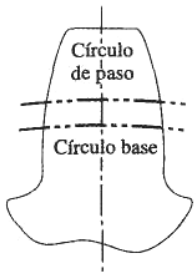
$$m_V = \pm\frac{d_{entrada}}{d_{salida}} = \pm\frac{N_{entrada}}{N_{salida}} \tag{9.5a}$$

$$m_T = \pm\frac{d_{salida}}{d_{entrada}} = \pm\frac{N_{salida}}{N_{entrada}} \tag{9.5b}$$

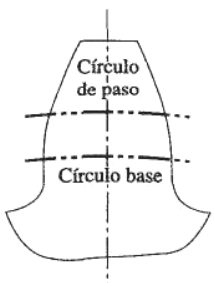
La relación de velocidad y la relación del par de torsión se calculan entonces por el número de dientes en los engranes conectados, que son cantidades enteras. Observe que un signo negativo implica un engranaje de conexión exterior y uno positivo, un engranaje de conexión interior, como se muestra en la figura 9-1. La relación de engrane m_G siempre es > 1 y puede expresarse en términos de la relación de velocidad o de la relación del par de torsión, dependiendo de cuál es mayor que 1. De este modo, m_G expresa la razón global de la transmisión de engranes independientemente de que cambie en dirección de la rotación o en la del flujo de potencia por la transmisión cuando opera como un reductor o un aumentador de velocidad.

$$m_G = |m_V| \text{ o } m_G = |m_T|, \text{ para } m_G \geq 1 \tag{9.5c}$$

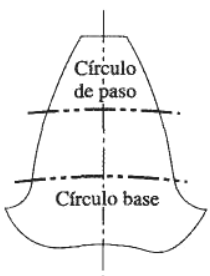
ESTANDARIZACIÓN DE DIENTES DE ENGRANE Los dientes de engranes de profundidad completa usuales tienen adendos iguales en el piñón y el engrane, con el dedendo ligeramente más grande en los espacios. Las dimensiones comunes se definen en términos del diámetro de paso. En la tabla 9-1 se muestran las definiciones de las dimensiones para dientes de engrane de profundidad completa estándar según las establece la AGMA; y en la figura 9-10 se encuentran las formas de los tres ángulos de presión normales. En la figura 9-11 se observan los tamaños reales de un ángulo de presión de 20° estándar, de los dientes de profundidad completa estándar p_d = 4 a 80. Observe la relación inversa



a) $\phi = 14.5°$



b) $\phi = 20°$



c) $\phi = 25°$

FIGURA 9-10
Perfiles AGMA de dientes de profundidad completa para tres ángulos de presión

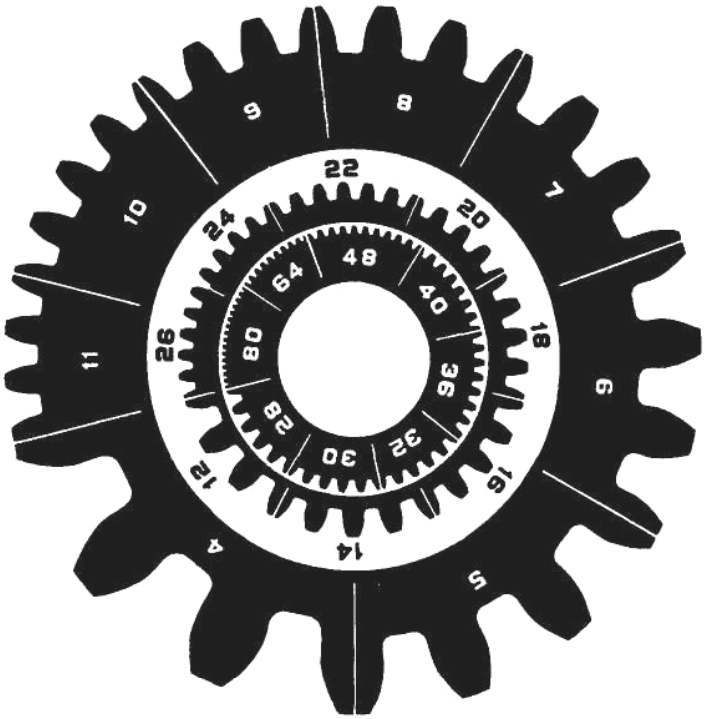


FIGURA 9-11

Tamaños reales de dientes para pasos diametrales *Cortesía de Barber-Colman Co., Loves Park, Illinois*

TABLA 9-2
Pasos diametrales estándar

Grueso ($p_d < 20$)	Fino ($p_d \geq 20$)
1	20
1.25	24
1.5	32
1.75	48
2	64
2.5	72
3	80
4	96
5	120
6	
8	
10	
12	
14	
16	
18	

entre p_d y el tamaño del diente. Mientras no exista ninguna restricción teórica en los posibles valores del paso diametral, un conjunto de valores usuales se define con base en las herramientas disponibles para cortar los engranes. Estos tamaños estándar de diente aparecen en la tabla 9-2 en términos del paso diametral y la tabla 9-3 en términos del módulo métrico.

9.4 INTERFERENCIA Y REBAJE ENTRE DIENTES

El perfil de involuta sólo se define fuera del círculo base. En algunos casos el dedendo será suficientemente grande para extenderse por debajo de tal círculo. Entonces la porción de diente abajo del círculo base no será de involuta, e interferirá con la punta del diente del engrane conectado, que sí es de involuta. Si el engrane ha sido cortado con un "cortador" estándar, la herramienta de corte también interferirá con la porción del diente situada debajo del círculo base y desprenderá el material de interferencia. Como resultado se obtiene el rebaje en la superficie lateral de los dientes que se muestra en la figura 9-12. Esta penetración debilita un diente por la remoción de material en su raíz. El momento máximo y la fuerza cortante máxima en el diente, considerado como un elemento voladizo, ocurren en esta región. Un rebaje severo ocasionará la ruptura o falla temprana en un diente de engrane.

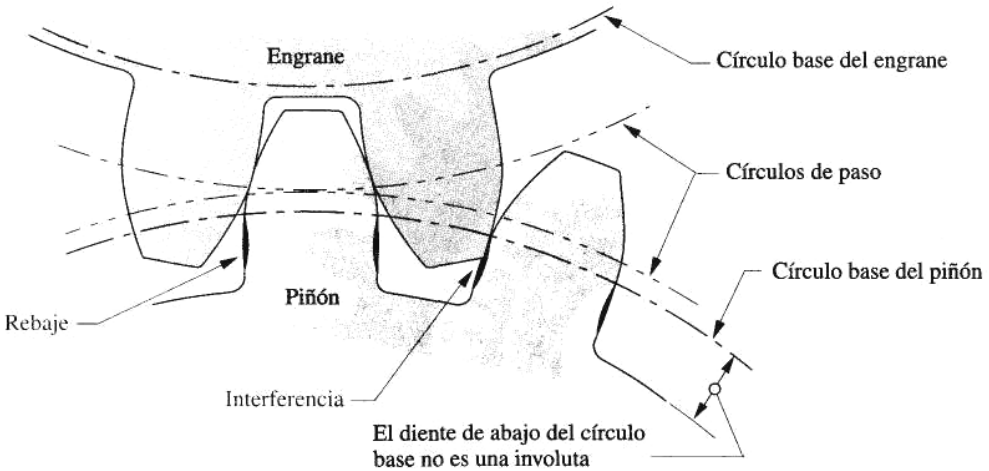


FIGURA 9-12
Interferencia y rebaje de los dientes debajo del círculo base

TABLA 9-3
Módulos métricos estándar

Módulo métrico (mm)	Equivalente (p_d pulg $^{-1}$)
0.3	84.67
0.4	63.50
0.5	50.80
0.8	31.75
1	25.40
1.25	20.32
1.5	16.93
2	12.70
3	8.47
4	6.35
5	5.08
6	4.23
8	3.18
10	2.54
12	2.12
16	1.59
20	1.27
25	1.02

El rebaje o interferencia se puede impedir con sólo evitar el uso de engranes con muy pocos dientes. Si un engrane tiene un número grande de dientes, resultarán pequeños comparados con su diámetro. Si el número de dientes se reduce a un diámetro fijo del engrane, el tamaño de los dientes aumentará. En algún momento el dedendo excederá la distancia radial entre el círculo base y el círculo de paso y ocurrirá la interferencia.

En la tabla 9-4 se presenta el número mínimo necesario de dientes para que no haya rebaje en la cremallera estándar, en función del ángulo de presión. En la tabla 9-5 se muestra el número mínimo de dientes de piñón de profundidad completa que pueden usarse contra una selección de engranes de profundidad completa de varios tamaños (para $\phi = 20°$). Cuando el engrane de la unión disminuye, el piñón tiene menos dientes y aun así evita la interferencia.

Formas de dientes de adendo desigual

Para evitar la interferencia en los piñones pequeños se cambia la forma del diente de su forma normal en la forma de profundidad completa de la figura 9-10, que tiene los adendos iguales en ambos piñones y engrana con una forma de involuta con un adendo más largo en el piñón y uno más corto en los denominados **perfiles de cambio de los engranes.** La AGMA establece que los coeficientes de modificación del adendo, x_1 y x_2, siempre que se suman dan cero, y son iguales en magnitud, con signo contrario. El coeficiente positivo x_1 se aplica para aumentar el adendo del piñón, y el negativo x_2 para disminuir el adendo del engrane en la misma cantidad. La profundidad total del diente permanece igual. Esto cambia el círculo de piñón del dedendo fuera de su círculo base y elimina esa parte de no involuta del diente del piñón debajo del círculo base. Los coeficientes estándar son ±0.25 y ±0.50, que se suman o restan a 25 o a 50% del adendo estándar. El límite de esta aproximación ocurre cuando el diente del piñón se señala.

Hay beneficios secundarios a esta técnica. El diente del piñón se engrosa en su base, por consiguiente, se fortalece. El diente del engrane se debilita correspondientemente, pero ya que un diente de engrane de profundidad completa es más fuerte que un diente de piñón de profundidad completa, este cambio iguala su resistencia aún más. Una desventaja del perfil de dientes de adendo desigual consiste en que el adendo aumenta la velocidad de deslizamiento en la punta del diente. El porcentaje de deslizamiento entre los dientes es mayor que en los dientes de adendo igual, los cuales aumentan las tensiones de los dientes de superficie. Las pérdidas por fricción en el acoplamiento del engrane aumentan también por velocidades de deslizamiento superiores. En la figura 9-13 se exhiben los contornos de los perfiles de dientes de la involuta corrida; compárelos con las formas de diente estándar de la figura 9-10.

TABLA 9-4
Número mínimo de dientes del piñón
Para evitar la interferencia entre un piñón con diente de profundidad completa y una cremallera de profundidad completa

Ángulo de presión (grados)	Número mínimo de dientes
14.5	32
20	18
25	12

9.5 RELACIÓN DE CONTACTO

La relación de contacto m_P define el número promedio de dientes en contacto en cualquier momento como:

$$m_p = \frac{Z}{p_b} \tag{9.6a}$$

donde Z es la longitud de acción de la ecuación 9.2 y p_b es la base de paso de la ecuación 9.4b. Sustituyendo las ecuaciones 9.4b y 9.4d en la ecuación 9.6a se define el m_p en términos de p_d:

$$m_p = \frac{p_d Z}{\pi \cos\phi} \tag{9.6b}$$

Si la relación de contacto es 1, entonces un diente deja el contacto y el próximo le comienza. Esto se debe a los indeseables errores ligeros en el espaciamiento de los dien-

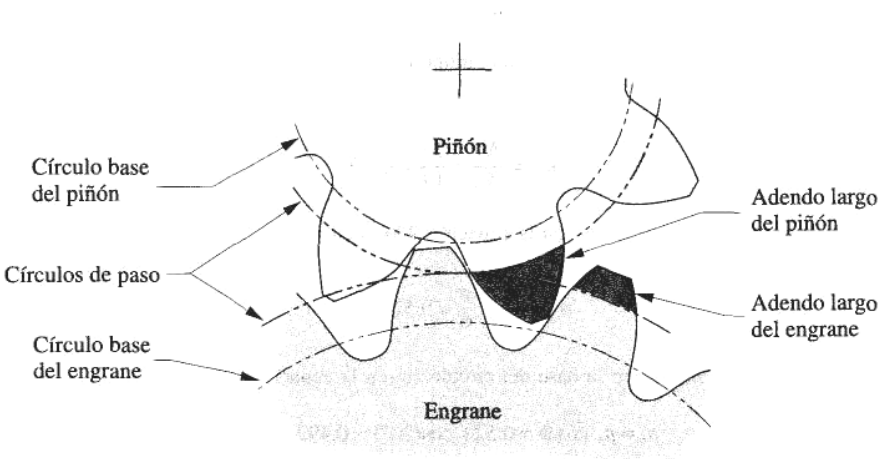


FIGURA 9-13
Perfil corrido del diente con adendos largos y cortos para evitar la interferencia y el rebaje

TABLA 9-5
Número mínimo de dientes del piñón
Para evitar la interferencia entre un piñón con diente de profundidad completa a 20° y los engranes de profundidad completa de varios tamaños

Número mínimo de dientes de piñón	Número máximo de dientes de engranes
17	1 309
16	101
15	45
14	26
13	16

tes que causará oscilaciones en la velocidad, vibración y ruido. Además, la carga se aplicará en la punta del diente, creando un posible momento de flexión más grande. En las relaciones de contacto más grandes que 1 existe la posibilidad de que la carga se comparta entre los dientes. En las relaciones de contacto entre 1 y 2, comúnmente para engranes rectos, algunas veces durante el engranado un par de dientes tomará la carga entera. Sin embargo, esto ocurrirá en el centro de la región del engranado donde la carga está aplicada en una posición más baja del diente, en lugar de en su punta. A este punto se le llama el **punto más alto de contacto de un solo diente** (PMACSD). La relación de contacto mínima aceptable para el funcionamiento suave es 1.2. Se prefiere una razón de contacto mínimo de 1.4, y si es más grande es mejor. La mayoría de los engranajes rectos tendrán razones de contacto 1.4 y 2. La ecuación 9.6b muestra que para un diente pequeño (p_d grande) y ángulo de presión grande, la relación de contacto será muy elevada.

EJEMPLO 9-1

Determinación del diente de engrane y de los parámetros de engranaje.

Problema: Encuentre la proporción del engrane, el paso circular, el paso de base, los diámetros de paso, los radios de paso, la distancia entre centros, el adendo, el dedendo, la profundidad total, la holgura, los diámetros exteriores y la relación de contacto de un engranaje con los parámetros dados. Si la distancia del centro se incrementa 2%, ¿cuál es el nuevo ángulo de presión y aumento en el juego?

Datos: Un 6 p_d con 20° de ángulo de presión y 19 dientes de piñón se acopla con un engrane de 37 dientes.

Hipótesis: Los dientes forman un perfil de involuta AGMA de profundidad completa.

Solución:

1 La relación de engrane se encuentra en el número de dientes del piñón y el engrane usando la ecuación 9.5b.

$$m_G = \frac{N_g}{N_p} = \frac{37}{19} = 1.947 \tag{a}$$

2 El círculo de paso se encuentra en la ecuación 9.4a o en la 9.4c.

$$p_c = \frac{\pi}{p_d} = \frac{\pi}{6} = 0.524 \text{ pulg} \tag{b}$$

3 La base de paso medida en la base del círculo es (en la ecuación 9.4b):

$$p_b = p_c \cos\phi = 0.524 \cos(20°) = 0.492 \text{ pulg} \tag{c}$$

4 Los diámetros y los radios de paso del piñón y del engrane se encuentran en la ecuación 9.4 c.

$$d_p = \frac{N_p}{p_d} = \frac{19}{6} = 3.167 \text{ pulg}, \qquad r_p = \frac{d_p}{2} = 1.583 \text{ pulg} \tag{d}$$

$$d_g = \frac{N_g}{p_d} = \frac{37}{6} = 6.167 \text{ pulg}, \qquad r_g = \frac{d_g}{2} = 3.083 \text{ pulg} \tag{e}$$

5 La distancia central nominal C es la suma de los radios de paso:

$$C = r_p + r_g = 4.667 \text{ pulg} \tag{f}$$

6 El adendo y el dedendo se encuentran en las ecuaciones de la tabla 9-1:

$$a = \frac{1.0}{p_d} = 0.167 \text{ pulg}, \qquad b = \frac{1.25}{p_d} = 0.208 \text{ pulg} \tag{g}$$

7 La profundidad total h_t es la suma del adendo y del dedendo.

$$h_t = a + b = 0.167 + 0.208 = 0.375 \text{ pulg} \tag{h}$$

8 La holgura es la diferencia entre el adendo y el dedendo.

$$c = b - a = 0.208 - 0.167 = 0.042 \text{ pulg} \tag{i}$$

9 El diámetro exterior de cada engrane es el diámetro de paso más los dos adendos:

$$D_{o_p} = d_p + 2a = 3.500 \text{ pulg}, \qquad D_{o_g} = d_g + 2a = 6.500 \text{ pulg} \tag{j}$$

10 La relación de contacto se encuentra en las ecuaciones 9.2 y 9.6a.

$$Z = \sqrt{\left(r_p + a_p\right)^2 - \left(r_p \cos\phi\right)^2} + \sqrt{\left(r_g + a_g\right)^2 - \left(r_g \cos\phi\right)^2} - C \operatorname{sen}\phi$$

$$= \sqrt{(1.583 + 0.167)^2 - (1.583\cos 20°)^2}$$

$$+ \sqrt{(3.083 + 0.167)^2 - (3.083\cos 20°)^2} - 4.667 \text{ sen } 20° = 0.798 \text{ pulg}$$

$$m_p = \frac{Z}{p_b} = \frac{0.798}{0.492} = 1.62 \tag{k}$$

11 Si la distancia central aumenta su valor nominal debido a los errores de ensamble o a otros factores, los radios efectivos de paso cambiarán en el mismo porcentaje. Las bases de los radios de engranes serán las mismas. El nuevo ángulo de presión se encuentra al cambiar la geometría. Para un 2% de aumento en la distancia central (1.02x):

$$\phi_{nuevo} = \cos^{-1}\left(\frac{r_{\text{base del círculo}\,p}}{1.02 r_p}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{r_p \cos\phi}{1.02 r_p}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\cos 20°}{1.02}\right) = 22.89° \tag{l}$$

12 El cambio en el juego como se mide en el piñón se encuentra en la ecuación 9.3.

$$\theta_B = 43\,200(\Delta C)\frac{\tan\phi}{\pi d} = 43\,200(0.02)(4.667)\frac{\tan(22.89°)}{\pi(3.167)} = 171 \text{ minutos de arco} \tag{m}$$

9.6 TIPOS DE ENGRANES

Los engranes se fabrican en muchas configuraciones para aplicaciones particulares. Esta sección describe algunos de los tipos más comunes.

Engranes rectos, helicoidales y espirales

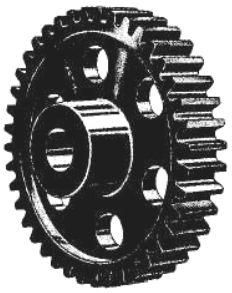


FIGURA 9-14
Engrane cilindrico recto
Cortesía de Martin Sprocket and Gear Co., Arlington, Texas

ENGRANES RECTOS Son aquellos en los cuales *los dientes son paralelos al eje de simetría del engrane.* Son los más simples y de menor costo de fabricación. Sólo pueden conectarse si sus ejes de rotación son paralelos. En la figura 9-14 se muestra un engrane recto.

ENGRANES HELICOIDALES Son aquellos en los cuales sus dientes están a un ángulo ψ respecto al eje del engrane como se muestra en la figura 9-15a). En la figura 9-16 se muestra un par de **engranes helicoidales** de orientación opuesta* engranados. Sus ejes son paralelos. Dos **engranes helicoidales cruzados** de la misma orientación se conectan con sus ejes formando un ángulo como el que se muestra en la figura 9-17. Los ángulos de hélice se diseñan de modo que permitan cierto ángulo de desvío entre los ejes de rotación que no se intersecan.



FIGURA 9-16
Engranes helicoidales de ejes paralelos
Cortesía de Martin Sprocket and Gear Co., Arlington, Texas

Los engranes helicoidales son más costosos que los rectos, pero ofrecen algunas ventajas. Son de operación más silenciosa que éstos, debido al contacto más suave y gradual entre las superficies anguladas de los dientes cuando entran en contacto. En los engranes rectos, los dientes entran de inmediato en contacto sobre todo el ancho de cara. El impacto repentino de un diente contra otro produce una vibración particular que se oye como el "chillido" característico de los engranajes rectos en operación, el cual no se percibe con los engranajes helicoidales. También, para los mismos diámetros de engrane y diámetro de paso, un engranaje helicoidal resulta más resistente por la forma ligeramente más gruesa del diente en un plano perpendicular al eje de rotación.

ENGRANES ESPINALES Se constituyen al unir cara a cara o adosar dos engranes helicoidales de idéntico paso y diámetro, pero con orientaciones opuestas, montados sobre el mismo eje. Los dos conjuntos de dientes suelen formarse en la misma pieza base de engrane. Su ventaja respecto a los helicoidales simples es la cancelación interna del empuje axial, pues en cada "mitad" helicoidal de un engrane espinal se presenta una carga axial opuesta a la de la otra. De modo que no se necesitan cojinetes contra el

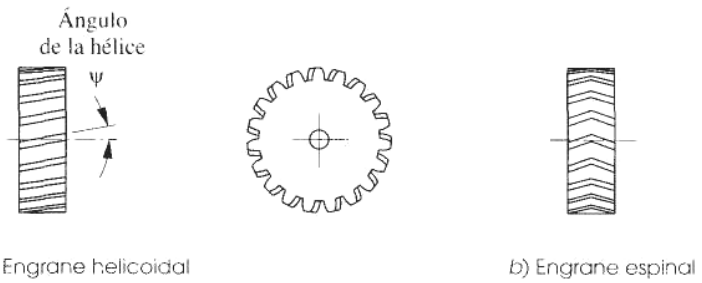


FIGURA 9-15
Engrane helicoidal y engrane espinal

* Los engranes helicoidales son derechos o izquierdos. Observe que el engrane de la figura 9-15a) es izquierdo porque, si se pusiera cualquier cara del engrane en una superficie horizontal, sus dientes se inclinarían a la izquierda.

empuje axial para el eje, sino de soporte transversal. Este tipo de engranaje es mucho más costoso que uno helicoidal y tiende a utilizarse en aplicaciones de gran potencia de transmisión, como en la impulsión de barcos, en la cual, las pérdidas por fricción derivadas de cargas axiales resultarían prohibitivas. En la figura *9-l5b)* se muestra un engrane espinal. Su vista de frente es la misma que la del helicoidal.

EFICIENCIA La definición general de eficiencia es la *potencia de salida'potencia de entrada* expresada como un porcentaje. Un engranaje recto puede tener una eficiencia de 98 a 99%. Uno helicoidal es menos eficiente que uno recto por la fricción deslizante a lo largo del ángulo de la hélice. Presenta también una fuerza de reacción a lo largo del eje de rotación, lo que no ocurre en un engranaje recto. Así, una transmisión de engranes helicoidales se debe montar en cojinetes de empuje además de los radiales para evitar que sus ejes de soporte se desplacen axialmente. Se presentan también algunas pérdidas por rozamiento en los cojinetes de empuje axial. Un engranaje helicoidal paralelo tendrá una eficiencia de cerca de 96 a 98%, y uno cruzado, una de 50 a 90%. El juego paralelo helicoidal (con orientación opuesta pero con el mismo ángulo de hélice) tiene contacto lineal entre los dientes y opera con cargas elevadas a altas velocidades. El cruzado helicoidal tiene contacto puntual y un gran componente de deslizamiento que limita su aplicación en situaciones de carga ligera.



FIGURA 9-17

Engranes helicoidales de ejes cruzados
Cortesía de la Boston Gear Division of IMO Industries, Quincy, Massachusetts

Si los engranajes se han de conectar y desconectar del engranado mientras están en movimiento, los engranes rectos son más convenientes que los helicoidales, ya que el ángulo de la hélice interfiere con el movimiento axial de separación y de contacto. (Por supuesto, los engranes espinales no se desconectan axialmente.) Por tal razón, las transmisiones en las camionetas suelen tener engranes rectos, en tanto que las transmisiones de los automóviles estándar usan engranes helicoidales de conexión constante para un funcionamiento más silencioso y poseen un mecanismo de sincroconexión que permite el desplazamiento. Tales aplicaciones de los engranajes se describirán en una sección posterior.

Engranes de tornillos sin fin

Si el ángulo de hélice se aumenta lo suficiente, el engrane helicoidal se convierte en un **mecanismo de tornillos sin fin,** el cual tiene sólo un diente dispuesto continuamente alrededor de la pieza cilíndrica, con varias vueltas, igual que en la rosca de un tornillo. Este mecanismo de tornillos sin fin se conecta a un elemento especial llamado **engrane de gusano (o corona sin fin),** cuyo eje de rotación es perpendicular al del mecanismo de tornillo sin fin, según se observa en la figura 9-18. Como el mecanismo de tornillo sin fin impulsor tiene sólo un diente, la relación de engranaje es igual a uno dividido entre el número de dientes del engrane del mecanismo de tornillo sin fin (véase las ecuaciones 9.5). Estos dientes no son de involuta sobre toda la cara, lo que significa que la distancia central debe mantenerse exactamente fija para garantizar la acción conjugada.

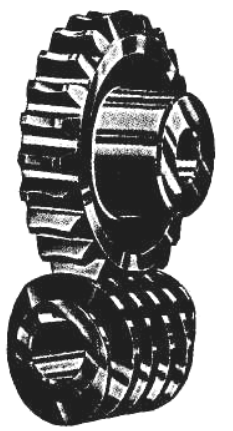


FIGURA 9-18

Un tornillo sin fin y un engrane de tomillo sin fin (o rueda de tornillo sin fin)
Cortesía de Martin Sprocket and Gear Co., Arlington, Texas

Los tornillos sin fin y las ruedas se fabrican y remplazan por conjuntos específicos. Tienen la ventaja de poseer relaciones de engranaje muy altas en un pequeño volumen de conjunto y pueden soportar cargas muy elevadas, especialmente en sus formas de envolventes simple o doble. De **envolvente simple** significa que los dientes del engrane recubren periféricamente al tornillo sin fin. De **envolvente doble** indica también que el tornillo sin fin envuelve el engranaje, lo que hace que el tornillo sin fin tenga forma de reloj de arena. Ambas técnicas aumentan el área de contacto entre el tomillo sin fin y la rueda, incrementando así la capacidad de carga y también el costo. Una desventaja en cualquier

conjunto de tornillo sin fin es que tiene muy altos deslizamientos y cargas de empuje, lo que hace que su eficiencia baje de 40 a 85%.

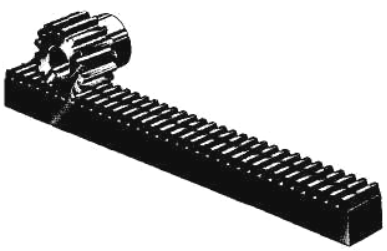
Quizá la ventaja principal de un mecanismo de tornillo sin fin es que puede diseñarse para que sea imposible el **movimiento de retroceso.** Un engranaje recto o uno helicoidal puede impulsarse desde uno u otro eje, a manera de un dispositivo de elevación o reducción de velocidad. Aunque esto resulta deseable en muchos casos, si la carga impulsada debe permanecer en su lugar una vez que la potencia motriz se interrumpe, no puede emplearse engranaje recto o helicoidal porque la "retrocederían". Lo anterior los vuelve inadecuados en aplicaciones como en un gato para levantar un automóvil, a menos que se agregue al diseño un freno que sostenga la carga en la posición detenida. Por otro lado, el mecanismo de tornillo sin fin sólo puede ser impulsado desde el sin fin. La fuerza de fricción llega a ser tan alta como para impedir el retroceso desde la rueda. Por ello este dispositivo se usa sin freno en sistemas sostenedores de carga, como los gatos mecánicos y los montacargas.

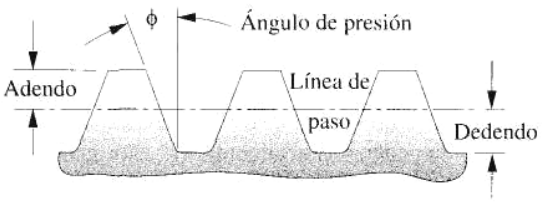
Mecanismos de piñón y cremallera

Si el diámetro del círculo base de un engrane aumenta sin límite, el círculo base será una línea recta. Si la "cuerda" alrededor de ese círculo base, que genera a la involuta, permanece en su sitio después de ampliarlo hasta un radio infinito, la cuerda quedaría pivotada en el infinito y generaría así una involuta que es una línea recta. Este engrane lineal se llama **cremallera.** No obstante, sus dientes tienen perfil trapezoidal, son verdaderas involutas. Este hecho facilita la creación de una herramienta de corte que forme dientes de involuta en engranes circulares, y fabrique con precisión una cremallera, la temple y afile para que realice el corte o tallado de dientes de engrane. El giro de la pieza base de un engrane común respecto a la cremallera cortante, mientras ésta oscila axialmente en la pieza base, desarrollará un verdadero diente de involuta para el engrane circular.

9

En la figura 9-19 se muestra una **cremallera y** un **piñón.** La aplicación más común de este mecanismo es la conversión de movimiento rotatorio a rectilíneo o viceversa. En este dispositivo puede ocurrir retroimpulsión (retroceso), de modo que requiere un freno si se emplea para sostener una carga. Un ejemplo de su uso es el mecanismo de **dirección de piñón y cremallera** de los automóviles. El piñón está unido al extremo inferior de la





Cremallera estándar de involuta de profundidad completa

FIGURA 9-19

Mecanismo de piñón y cremallera *Foto cortesía de Martin Sprocket and Gear Co., Austin, Texas*

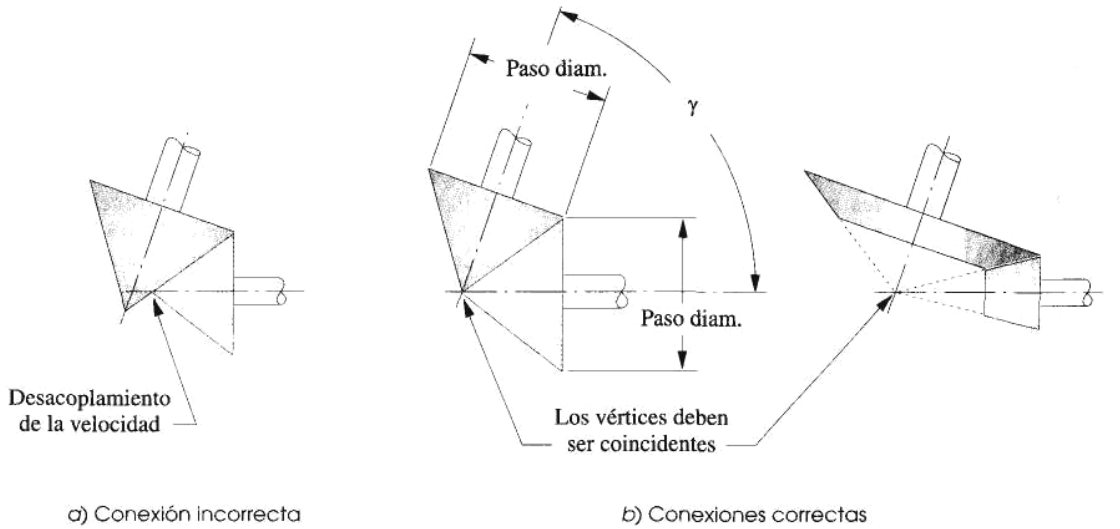


FIGURA 9-20
Los engranes cónicos se basan en conos rodantes

columna del volante de dirección y gira cuando éste lo hace. La cremallera conectada se desplaza hacia la izquierda o hacia la derecha según el volante gire. La cremallera es también un eslabón de un eslabonamiento de barras múltiples que convierte la traslación lineal de la cremallera en el desplazamiento angular respectivo de un balancín fijado al ensamble de las ruedas delanteras, lo que permite dirigir el movimiento del auto.

Engranes cónicos e hipoidales

ENGRANES CÓNICOS En las transmisiones de engranes en ángulo recto se usan los engranajes helicoidales cruzados o los conjuntos de tornillos sin fin. Para cualquier ángulo entre ejes, incluso el de 90°, los engranes cónicos representan la solución. Así como los engranes rectos se basan en cilindros rodantes, los engranes cónicos están basados en conos rodantes como se muestra en la figura 9-20. El ángulo entre los ejes de los conos y los ángulos en el vértice de éstos tienen cualquier valor compatible, en tanto coincidan los vértices de las superficies cónicas. Si no lo hacen, ocurre un desacoplamiento de velocidad en la interfaz. El vértice de cada cono tiene un radio de rotación nulo y, por lo tanto, velocidad igual a cero. El resto de puntos de la superficie cónica tendrá velocidades diferentes de cero. La relación de velocidad en los engranes cónicos se define por la ecuación 9.1 usando los diámetros de paso en cualquier punto de intersección común de diámetros del cono.



FIGURA 9-21
Engranes cónicos rectos
Cortesía de Martin Sprocket and Gear Co., Arlington, Texas

ENGRANES CÓNICOS ESPIRALES Si los dientes se encuentran paralelos al eje del engrane se tendrá un engrane cónico recto como el de la figura 9-21. Si los dientes están angulados respecto al eje se tendrá un engrane cónico espiral (véase la figura 9-22) análogo al engrane helicoidal. Los ejes de los conos y los vértices deben intersecarse en ambos casos. Las ventajas y desventajas de los engranes cónicos rectos y espirales son semejantes a las de los engranes cilíndricos rectos y helicoidales, respectivamente, en lo



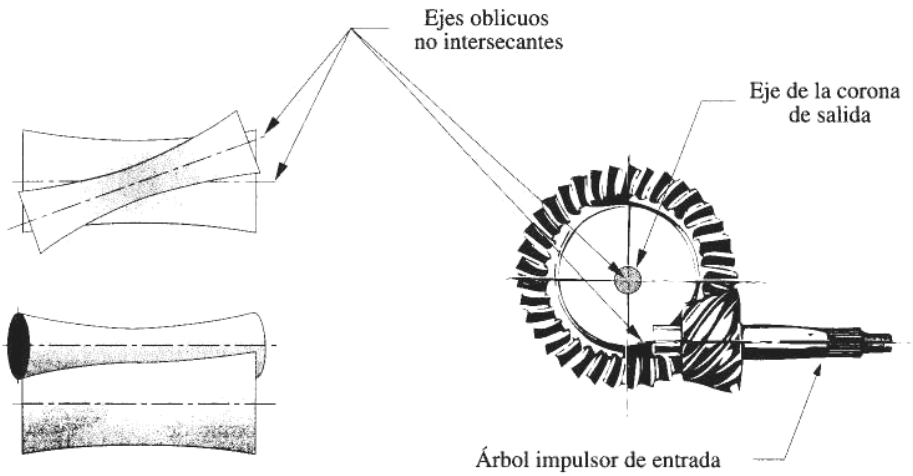
FIGURA 9-22
Engranes cónicos espirales
Cortesía del Boston Gear Division of IMO Industries, Quincy, Massachusetts

que respecta a resistencia, silenciosidad y costo. El perfil de los dientes de los engranes cónicos no es de involuta, sino que se basa en una curva llamada "octoidal". Deben adquirirse o remplazarse en pares (engranajes), pues no son universal mente intercambiables y sus distancias intercentrales se deben mantener con exactitud.

ENGRANES HIPOIDAI.ES Si los ejes entre los engranes no son paralelos ni se intersecan, no se usan los engranajes cónicos. Un **engranaje hipoidal** permitirá esa conexión. Sus engranes se basan en superficies llamadas hiperboloides de revolución, como se muestra en la figura 9-23. (El término "hipoidal" es una contracción de hiperboloidal.) El perfil de los dientes no es una involuta. En la impulsión final de un automóvil con motor al frente y tracción en las ruedas traseras se usa un engranaje hipoidal, con la finalidad de descender el eje geométrico del árbol impulsor por debajo del centro del eje trasero y reducir la "joroba del árbol" del asiento trasero.

Engranes no circulares

Estos engranes se basan en los centrados de un eslabonamiento de cuatro barras de doble manivela de Grashof. Los centrados son los lugares geométricos de los centros instantáneos del eslabonamiento que se describieron en la sección 6.5. En la figura 6-15¿») se muestra un par de centrados que se usan para engranes no circulares; a sus periferias pueden agregarse dientes, del mismo modo que se agregaron a los cilindros rodantes en que se basan los engranes circulares. Los dientes evitan así el deslizamiento. Por supuesto, la relación de velocidad de los engranes no circulares no es constante. Su propósito consiste en proporcionar una función de salida variable en el tiempo, en respuesta a una entrada de velocidad constante. Su relación de velocidad instantánea se define en la



a) Hiperboloides de revolución rodantes

b) Engranaje hipoidal en la transmisión final de un automóvil
Cortesía de General Motors Co., Detroit, Michigan

FIGURA 9-23
Los engranajes hipoidales se basan en hiperboloides de revolución

ecuación 6.11f. Estos dispositivos se usan en cierta maquinaria rotatoria, como una prensa tipográfica o de imprenta en la que se requiere la variación en la velocidad angular de los rodillos en una base cíclica.

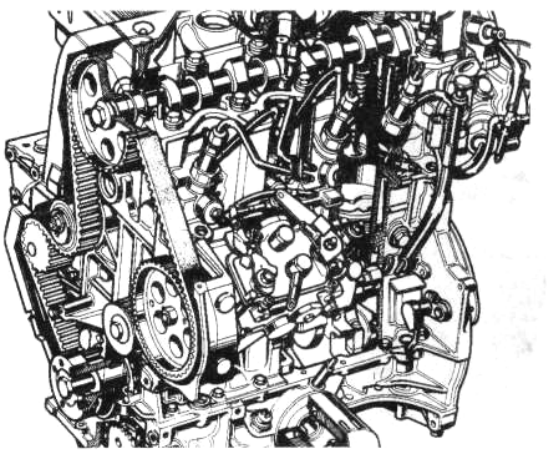
Transmisiones de banda y de cadena

TRANSMISIONES EN FORMA DE V Se muestra una transmisión de **banda en forma de V** en la figura 9-2. Las bandas en forma de V se hacen con materiales elastoméricos (hule sintético) reforzados con cuerdas de plástico o alambres metálicos para mayor resistencia. Las poleas se ranuran en forma de V con lo que se sujeta la banda, ya que la tensión la hunde en las ranuras. Las transmisiones de banda plana que corre sobre poleas lisas abombadas se usan aún en algunas aplicaciones. Como se explicó antes, es posible que en este mecanismo ocurra un deslizamiento entre la banda y las poleas, y así el enfasamiento no puede ser garantizado.

BANDAS SINCRONIZANTES (TEMPORIZADAS) Una transmisión de **banda sincronizante** resuelve el problema del enfasamiento mientras mantiene las ventajas de la operación silenciosa de banda trapezoidal, y cuesta menos que una de engranes o de cadena. En la figura 9-24a) se observa una transmisión sincronizante (o dentada) de banda y sus poleas o ranuras especiales. Estas bandas son de un material semejante al caucho, reforzadas con alambres de acero o cuerdas sintéticas de gran resistencia, y tienen dientes moldeados que entran en las ranuras de las poleas para un manejo más adecuado. Pueden transmitir altos valores del par de rotación y potencia y se usan frecuentemente en la impulsión de los ejes de levas en motores de automóvil, como se observa en la figura 9-24¿>). Resultan más costosas que las bandas en forma de V convencionales. En los



a) Transmisión de banda sincronizante del tipo estándar
Cortesía de T. B. Woods Sons Co., Chambersburg, Pennsylvania



b) Transmisión sincronizada para el árbol de levas de un automotor
Cortesía de Chevrolet Division, General Motors Co., Detroit, Michigan

FIGURA 9-24
Bandas dentadas sincronizantes y sus poleas dentadas

catálogos de los fabricantes puede verse información detallada acerca de las bandas trapeciales y de las dentadas sincronizantes para diversas aplicaciones.

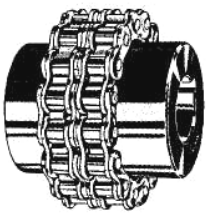


FIGURA 9-25
Cadena de rodillos utilizada como acoplamiento de ejes
Cortesía de Martin Sprocket and Gear Co., Arlington, Texas

TRANSMISIONES DE CADENA Se usan a menudo en casos donde se necesita la transmisión en fase, y los altos niveles de par de torsión o de alta temperatura impiden el uso de las bandas sincronizantes. Cuando los ejes de entrada y de salida se encuentran muy distantes, la transmisión de cadena resulta la solución más económica. En los transportadores de cadena se usan estos sistemas de transmisión para conducir las piezas en la línea de ensamble. Una cadena de acero opera y resiste en muchos ambientes hostiles de carácter químico o térmico (pero no en todos). Se han diseñado numerosos tipos de cadena, que van desde la aplicación en la cadena de rodillos de una bicicleta o una motocicleta, hasta los más costosos sistemas de "cadena silenciosa" empleados en automotores de lujo para accionar ejes de levas. En la figura 9-25 se exhibe el empleo distinto de una cadena de rodillos doble, como el acoplamiento de dos ejes. En la figura 9-26 se muestra una rueda Catarina típica para la transmisión de cadena de rodillos. Observe que los dientes de la Catarina no son como los de un engrane y no tienen perfil de involuta. La forma de un diente de Catarina la dicta la necesidad de que la porción de cadena que se aloja en las ranuras se adapte al contorno. En este caso los rodillos cilíndricos se adaptan a las ranuras también de contorno cilíndrico en la rueda.

La única limitación de una transmisión de cadena es su **"acción de la cuerda".** Los eslabones de la cadena forman una serie de cuerdas cuando se envuelven alrededor de la circunferencia de la Catarina. A medida que tales elementos entran y salen de la rueda, le imparten un movimiento irregular al eje impulsado, lo que ocasiona una variación, o pulsación, en la velocidad de salida. Una transmisión de cadena de rodillos no cumple exactamente con la ley fundamental del engranaje. Si se requiere una velocidad de salida constante, muy exacta, dicha transmisión no es la mejor.

9

9.7 TRENES DE ENGRANES DE TIPO SIMPLE

Un tren de engranes es un conjunto de dos o más engranes conectados. El tren de tipo simple es aquel en el que cada eje tiene sólo un engrane, el más básico, en la figura 9-4 se muestra un ejemplo de dos engranes. La *relación de velocidad* (algunas veces llamada *relación de tren de engranes)* del engranaje se encuentra desarrollando la ecuación 9.5a. En la figura 9-27 se muestra un tren de engranes simple de cinco elementos en serie. La expresión de la relación de velocidad para este tren simple es:

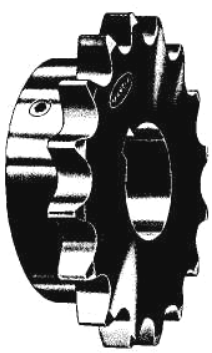


FIGURA 9-26
Rueda Catarina para cadena de rodillos
Cortesía de Martin Sprocket and Gear Co., Arlington, Texas

$$m_V = \left(-\frac{N_2}{N_3}\right)\left(-\frac{N_3}{N_4}\right)\left(-\frac{N_4}{N_5}\right)\left(-\frac{N_5}{N_6}\right) = +\frac{N_2}{N_6}$$

o en términos generales:

$$m_V = \pm\frac{N_{entrada}}{N_{salida}} \tag{9.7}$$

la cual es la misma que la ecuación 9.5a para un engranaje simple.

Cada engranaje contribuye potencialmente a la relación de velocidad total, pero en cualquier caso de un tren simple (en serie), se cancelan los efectos numéricos de todos los engranes, excepto el primero y el último. La relación de un tren simple es siempre la que existe entre el primero y el último engrane. Sólo el signo de la relación global es afectado

por los engranes intermedios, que se denominan *locos* porque comúnmente no toman potencia de sus ejes. Si todos los engranes de un tren son de conexión externa y hay un número par, el sentido de rotación en el de salida es opuesto al del engrane de entrada. Si el número de engranes externos del tren es impar, la salida estará en la misma dirección que la entrada. Así, sólo un engrane externo loco, de *cualquier diámetro*, puede servir para cambiar el sentido del engrane final de salida sin alterar su velocidad.

Un engranaje simple con engranes rectos, helicoidales o cónicos *usualmente estará limitado a una razón de aproximadamente* 10:1, porque tal transmisión resultaría muy grande, costosa y difícil de ensamblar por encima de esta relación si el piñón se mantiene por arriba de los números mínimos de dientes señalados en la tabla 9-4. Si se necesita una relación de tren de engranes mayor que la que puede obtenerse con un engranaje simple, es claro por la ecuación 9.6 que el tren simple no será útil.

Es práctica común insertar un solo engrane loco para cambiar el sentido de la rotación, pero más de uno resulta superfluo. No se justifica lo suficiente diseñar un tren de engranes como el de la figura 9-27. Si se requiriera conectar dos ejes muy alejados, podría usarse un tren simple con muchos engranes, pero resultaría mucho más costoso que una transmisión de banda o de cadena para la misma aplicación. La mayoría de los engranes no son baratos.

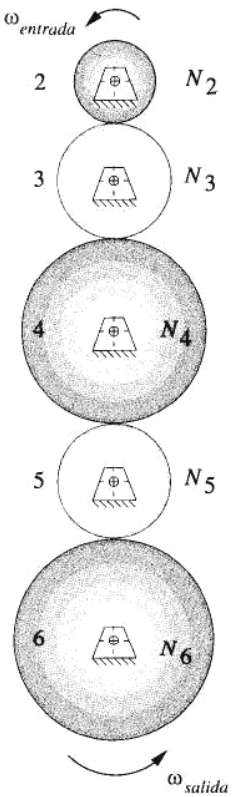


FIGURA 9-27
Tren de engranes de tipo simple

9.8 TRENES DE ENGRANES DE TIPO COMPUESTO

Para obtener una relación de tren de engranes mayor que 10:1, con engranes rectos, helicoidales o cónicos (o una combinación de ellos) se necesita **un tren de engranes de tipo compuesto** (o bien un tren epicíclico, véase la sección 9.9). Un **tren compuesto** *es aquel en el que al menos un eje tiene más de un engrane.* Se tiene así una disposición en paralelo o en serie-paralelo, en vez de las conexiones en serie pura del tren de engranes simple. En la figura 9-28 se muestra un tren de tipo compuesto con cuatro engranes, dos de los cuales, los engranes 3 y 4, están fijos sobre el mismo eje y tienen así la misma velocidad angular.

La relación del tren de engranes es ahora:

$$m_V = \left(-\frac{N_2}{N_3}\right)\left(-\frac{N_4}{N_5}\right) \tag{9.8a}$$

Ésta puede generalizarse para cualquier número de engranes en el tren como:

$$m_V = \pm \frac{\text{producto del número de dientes en engranes impulsores}}{\text{producto del número de dientes en engranes impulsados}} \tag{9.8b}$$

Observe que estas relaciones intermedias no se cancelan y que la relación de tren de engranes total es el producto de las relaciones de los engranajes en paralelo. Así, se obtiene una relación mayor en un tren compuesto, a pesar de la limitación de aproximadamente 10:1 que se tiene para las razones de engranajes individuales. El signo más o menos de la ecuación 9.8b depende del número y tipo de las conexiones que hay en el tren, ya sea externas o internas. Escribir la expresión en la forma de la ecuación 9.8a y observar cuidadosamente el signo de cada relación intermedia en la expresión misma, permite obtener el signo algebraico correcto para la relación total del tren de engranes.

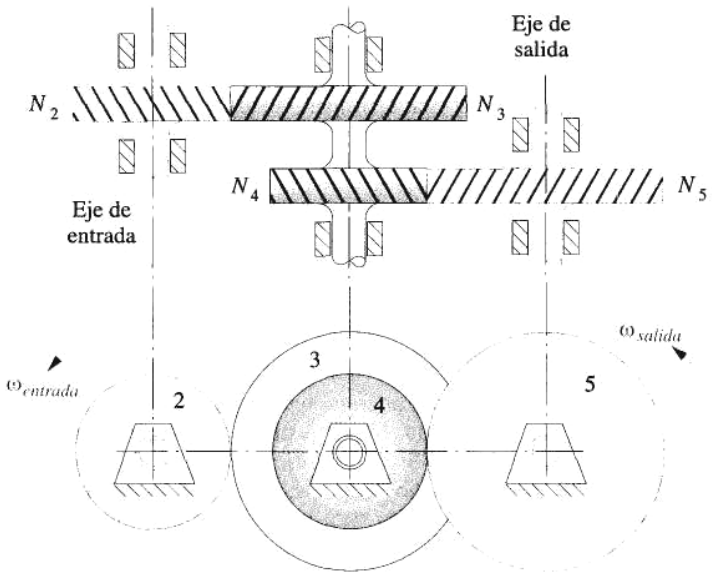


FIGURA 9-28
Tren de engranes del tipo compuesto

Diseño de trenes compuestos

Si se considera un diseño terminado de un tren de engranes compuesto, como el de la figura 9.28, es muy fácil aplicar la ecuación 9.8 y determinar la relación del tren. No es sencillo efectuar el proceso contrario, a saber, diseñar un tren compuesto para una relación de tren específica.

EJEMPLO 9-2

Diseño de un tren de engranes compuesto.

Problema: Diseñe un tren compuesto para una relación exacta de 180:1. Encuentre una combinación de engrane que produzca esa relación de tren.

Solución:

1 El primer paso es determinar cuántas etapas o engranajes son necesarios. La simplicidad es la marca de un buen diseño, por lo tanto, ensaye primero la menor posibilidad. Tome la raíz cuadrada de 180, que es 13.416. Así, dos etapas, cada una con esa relación, darán aproximadamente 180:1. Sin embargo, tal relación es mayor que el límite de diseño de 10:1 para cada etapa, de modo que ensaye tres etapas. La raíz cúbica de 180 es 5.646, muy inferior a 10, de manera que este número de etapas es el adecuado.

2 Si puede hallarse una relación entera de números de dientes que origine 5.646:1, simplemente se utilizarán tres de esos valores para el diseño de la caja de engranes. Si se usa un límite inferior de 12 dientes para el piñón y se ensayan varias posibilidades, se obtienen como soluciones posibles los engranajes que se muestran en la tabla 9-6.

3 El número de dientes, obviamente, debe ser un número entero. El resultado más próximo a un entero, de la tabla 9-6, es 79.05. Por tanto, un engranaje de 79:14 está cerca de la relación deseada. Al aplicar este valor a las tres etapas se tendrá una relación de tren de engranes de $(79/14)^3 = 179.68{:}1$, que está dentro del 2% de 180:1. Ésta es una solución aceptable siempre que la caja de engranes no se utilice en una aplicación con temporización. Si el propósito de este mecanismo es reducir, por ejemplo, la velocidad del motor de una grúa o montacargas, será adecuada una relación aproximada.

4 En la maquinaria de producción industrial se utilizan muchas cajas de engranes para impulsar ejes de levas o eslabonamientos, a partir de un eje maestro de impulsión, y deben tener la relación necesaria exacta, o el dispositivo accionado quedará eventualmente fuera de fase con respecto al resto de la máquina. Si ése fuera el caso en este ejemplo, la solución antes encontrada no sería lo bastante buena. Sería necesario volver a diseñarla para obtener exactamente la relación 180:1. Como la relación total del tren de engranes es un número entero, será más sencillo buscar relaciones de número entero del conjunto de engranes. Entonces se necesitan tres factores enteros de 180. La primera solución de este ejemplo da un punto de partida razonable en la raíz cúbica de 180, que es 5.65. Si se redondea a un número entero hacia arriba (o hacia abajo), se podrá encontrar una combinación adecuada.

5 Dos etapas compuestas de 6:1 en conjunto dan 36:1. Al dividir 180 entre 36 resulta 5. Así, las etapas que se muestran en la tabla 9-7 son una solución exacta posible.

TABLA 9-6
Ejemplo 9-2
Posibles engranajes para un tren de tres etapas del tipo compuesto con relación 180:1

Relación del engranaje		Dientes del piñón		Dientes del engrane
5.646	×	12	=	67.75
5.646	×	13	=	73.40
5.646	×	14	=	79.05
5.646	×	15	=	84.69

TABLA 9-7
Ejemplo 9-2
Solución exacta para 180:1, tren de tres etapas del tipo compuesto

Razón del engrane		Dientes del piñón		Dientes del engrane
6	×	14	=	84
6	×	14	=	84
5	×	14	=	70

Esta solución, mostrada en la figura 9-29, satisface los criterios de diseño. Ésta tiene la relación de tren de engranes exacta correcta, todas las etapas son menores que 10:1 y ningún piñón tiene menos de 14 dientes, lo que reduce el rebaje hasta un nivel aceptable si se usa un ángulo de presión de engranes de 25° (véase la tabla 9-4).

Diseño de trenes de tipo compuesto con reversión

En el ejemplo anterior las localizaciones de los ejes de entrada y de salida están en lugares diferentes. Esto puede ser muy aceptable o incluso deseable en algunos casos, dependiendo de otras restricciones de embalaje para el diseño total de una máquina. Esta caja de engranes, *cuyos ejes de entrada y de salida no coinciden,* se llama **tren de tipo compuesto no revertido.** En algunos casos, como en las transmisiones de automóvil, es deseable o aun necesario tener el *eje de salida concéntrico con el eje de entrada.* Esto se denomina comúnmente "reversión del tren" o "retroaplicación del tren". El diseño de un **tren compuesto con reversión** es más complicado debido a la restricción adicional de que las distancias intercentrales de las etapas deben ser iguales. De acuerdo con la figura 9-30, esta restricción se expresa en términos de sus radios de paso, diámetros de paso, o número de dientes (suponiendo que todos los engranes tienen el mismo paso diametral).

$$r_2 + r_3 = r_4 + r_5 \tag{9.9a}$$

o

$$d_2 + d_3 = d_4 + d_5 \tag{9.9b}$$

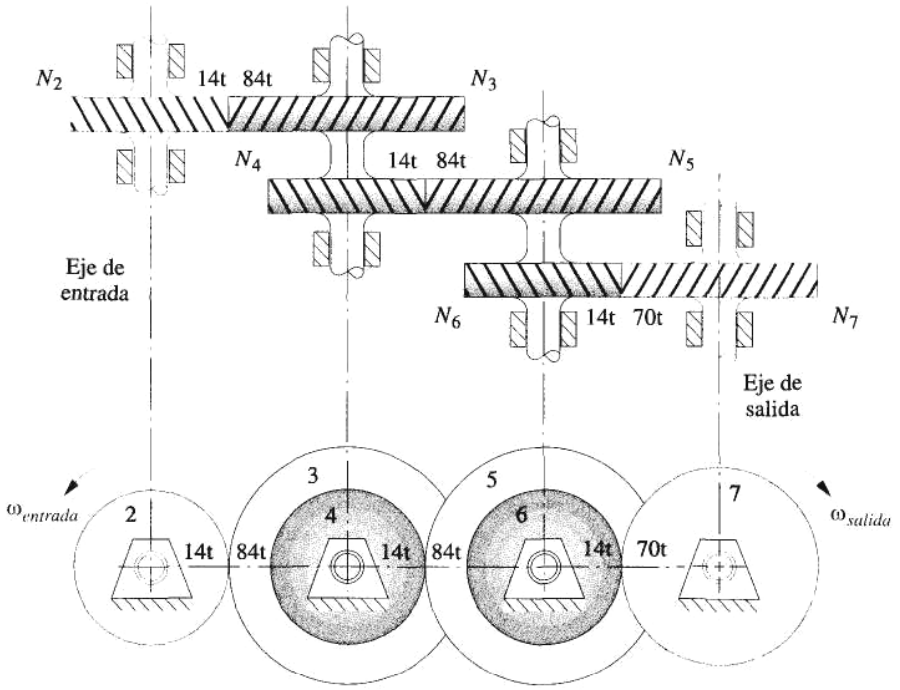


FIGURA 9-29

Tren de engranes compuesto de tres etapas para una relación de m_V = 1:180 (relación del engrane m_G = 180:1)

9

Si p_d es el mismo para todos los engranes, la ecuación 9.4c se sustituye en la ecuación 9.9b y los términos del paso diametral se cancelan para dar

$$N_2 + N_3 = N_4 + N_5 \tag{9.9c}$$

EJEMPLO 9-3

Diseño de un tren de engranes con reversión.

Problema: Diseñe un tren compuesto con reversión para una relación de tren de engranes exacta de 18:1.

Solución:

1 Aunque no es necesario en absoluto tener relaciones de conjunto de engranes con número entero en un tren compuesto (sólo números enteros de dientes), si la relación del tren de engranes es un número entero, es más fácil diseñarlo con conjuntos de engranes que tienen una relación de número entero.

2 La raíz cuadrada de 18 es 4.2426, buena para la limitación de 10:1 que tenemos. De modo que serán suficientes dos etapas en esta caja de engranaje.

3 Si se pudieran formar dos etapas idénticas, cada una con una razón igual a la raíz cuadrada de la relación total del tren de engranes, éste quedaría revertido por su propia constitución. En la tabla 9-8 se muestra que no hay combinaciones razonables de relaciones de dientes que proporcionen la raíz cuadrada exacta necesaria. Además, tal raíz no es un número racional, de modo que no se puede lograr una solución exacta por este método.

4 En vez de esto se factoriza la relación del tren de engranes. Todos los números en los factores 9 x 2 y 6 x 3 son menores que 10, así que son aceptables sobre esa base. Probablemente es mejor tener relaciones de las dos etapas más cercanas en valor entre sí por razones de embalaje, de modo que se ensayará la elección 6 x 3 .

5 En la figura 9-30 se muestra un tren con reversión de dos etapas. Observe que, a diferencia del tren sin reversión de la figura 9-28, los ejes de entrada y de salida ahora son colineales y están en voladizo; así, cada uno debe tener cojinetes dobles en un extremo para apoyo contra el momento flexionante y una buena relación de cojinete, como se definió en la sección 2.15.

6 La ecuación 9.8 establece las relaciones para la relación compuesta del tren de engranes. Además, se tiene la restricción de que las distancias entre centros de las etapas deben ser iguales. Use la ecuación 9.9c y póngala igual a una constante arbitraria K por determinar.

$$N_2 + N_3 = N_4 + N_5 = K \qquad \text{(a)}$$

7 Se desean resolver las ecuaciones 9.8 y 9.9c simultáneamente. Se separan los términos de la ecuación 9.8 y se igualan a una de las relaciones de la etapa elegida para este diseño.

TABLA 9-8
Ejemplo 9-3
Posibles engranes para un tren de dos etapas compuesto con reversión

Razón del engrane		Dientes del piñón		Dientes del engrane
4.2426	×	12	=	50.91
4.2426	×	13	=	55.15
4.2426	×	14	=	59.40
4.2426	×	15	=	63.64
4.2426	×	16	=	67.88
4.2426	×	17	=	72.12
4.2426	×	18	=	76.37
4.2426	×	19	=	80.61
4.2426	×	20	=	84.85

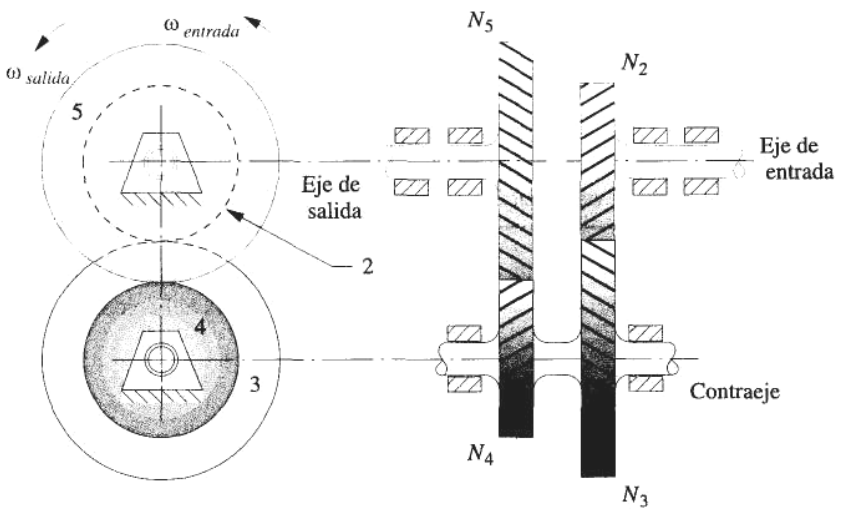


FIGURA 9-30
Tren de engranes compuesto con reversión

$$\frac{N_2}{N_3} = \frac{1}{6}$$

$$N_3 = 6N_2 \quad \text{(b)}$$

$$\frac{N_4}{N_5} = \frac{1}{3}$$

$$N_5 = 3N_4 \quad \text{(c)}$$

8 Separando los términos en la ecuación (a):

$$N_2 + N_3 = K \quad \text{(d)}$$

$$N_4 + N_5 = K \quad \text{(e)}$$

9 Sustituyendo la ecuación (b) en la (d) y la ecuación (c) en la (e) se obtiene:

$$N_2 + 6N_2 = K = 7N_2 \quad \text{(f)}$$

$$N_4 + 3N_4 = K = 4N_4 \quad \text{(g)}$$

10 Para hacer compatibles las ecuaciones (f) y (g), K se debe fijar por lo menos al valor del mínimo común múltiplo de 7 y 4, el cual es 28. Esto da valores de $N_2 = 4$ dientes y $N_4 = 7$ dientes.

I I Puesto que un engrane de cuatro dientes tendrá un rebaje inaceptable, se necesita aumentar el valor de K lo suficiente para hacer que el piñón menor tenga el tamaño suficiente.

1 2 Un nuevo valor de $K = 28 \times 3 = 84$ hará que el engrane de cuatro dientes aumente a 12 dientes que es aceptable para un ángulo de presión de 25° (tabla 9-4). Con esta suposición de $K = 84$, las ecuaciones (b), (c), (f) y (g) se resuelven simultáneamente para dar como resultado

$$N_2 = 12 \qquad N_3 = 72$$

$$N_4 = 21 \qquad N_5 = 63 \quad \text{(h)}$$

la cual es una solución viable para este tren de engranes con reversión.

El mismo procedimiento descrito aquí es aplicable al diseño de trenes de engranes con reversión, que implican varias etapas, como la caja de engranajes helicoidales de la figura 9-31.

Un algoritmo para el diseño de trenes de engranes de tipo compuesto

Los ejemplos del diseño de trenes de engranes compuestos presentados anteriormente usan relaciones de trenes de engranes enteras. Si la relación de tren requerida no es un número entero, es más difícil encontrar una combinación de números enteros de dientes

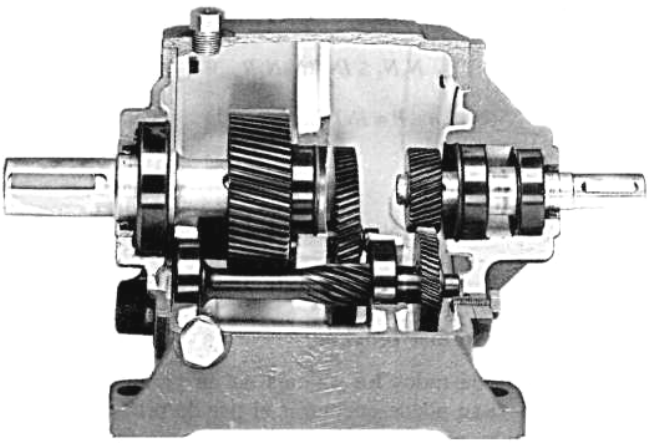


FIGURA 9-31

Caja de engranajes comercial del tipo compuesto, con reversión y tres etapas
Cortesía de Boston Gear, Division of IMO Industries, Quincy, Massachusetts

que den la relación de tren exacta. A veces es necesaria una relación de engranes irracional para tareas tales como la conversión de medidas del sistema inglés al métrico en una herramienta para maquinas con trenes de engranes o cuando π es un tactor en la relación. Entonces es necesaria la aproximación más cercana a la relación de tren de engranes irracional deseada, que pueda estar contenida en un embalaje razonable.

Dispare[1] y Selfridge y Ridle[2] inventaron los algoritmos para resolver este problema. Los dos requieren de una computadora para su solución. Aquí se describirá el método de Selfridge. Este es aplicable a dos o tres etapas de los trenes compuestos. Se debe especificar un límite inferior N_{min} y un límite superior $N_{máx}$ en el número aceptable de dientes para cualquier engrane. También se selecciona una tolerancia de error ε expresada como un porcentaje de la razón del tren de engranes deseada *R* (siempre que sea >1). Para un tren compuesto de dos etapas la relación del tren será como se muestra en la ecuación 9.5c desarrollada de acuerdo con la ecuación 9.8 despreciando los signos para este análisis.

$$R = m_G = \frac{N_3 N_5}{N_2 N_4} \tag{9.10a}$$

El rango de relaciones aceptables está determinado por la elección de tolerancia del error ε.

$$R_{bajo} = R - \varepsilon$$
$$R_{alto} = R + \varepsilon \tag{9.10b}$$

$$R_{bajo} \leq \frac{N_3 N_5}{N_2 N_4} \leq R_{alto} \tag{9.10c}$$

Puesto que los números de dientes deben ser enteros:

$$N_3 N_5 \le INT(N_2 N_4 R_{alto}) \tag{9.10d}$$

Queda:

$$P = INT(N_2 N_4 R_{alto}) \tag{9.10e}$$

También de la ecuación 9.10c,

$$N_3 N_5 \ge INT(N_2 N_4 R_{bajo}) \tag{9.10f}$$

Queda:

$$Q = INT(N_2 N_4 R_{bajo}) + 1 \tag{9.10g}$$

redondeando al número entero más próximo.

Se hace una búsqueda de todos los valores de un parámetro temporal *K* definido como $Q \quad K \quad P$ para ver si se puede encontrar el par de productos a usar. Debido a la simetría de la multiplicación, el valor más grande de N_3 que se necesita considerar es

$$N_3 \le \sqrt{P} \tag{9.11a}$$

Queda:

$$N_p = \sqrt{P} \tag{9.11b}$$

El valor más pequeño de N_3 que se necesita considerar ocurre cuando *K* está en su valor más pequeño Q y N_5 toma su valor más grande N_{alto}. (N_3 también esta restnngidc por N_{bajo}.)

$$N_3 \ge \frac{Q}{N_{alto}} \tag{9.11c}$$

Queda:

$$N_m = INT\left(\frac{Q + N_{alto} - 1}{N_{alto}}\right) \tag{9.11d}$$

que también se redondea al entero más próximo.

Con la búsqueda se encuentran los valores buscados de N_3 que cumplan con $N_m \quad N_3 \quad N_p$ y $N_5 = K/N_3$. El código en computadora para este algoritmo se muestra en la tabla 9-9. El programa completo Compound.tk puesto en código para el uso del programa *TK Solver*, está en el CD-ROM que se incluye en este libro. El código puede reescribirse fácilmente para otros resolvedores de ecuaciones o compiladores.

Este algoritmo es ampliable a trenes de engranes compuestos de tres etapas y la versión de dos etapas puede modificarse para la fuerza de reversión del tren agregando un cálculo de la distancia de centros para el engranaje y una comparación con una tolerancia seleccionada o distancia de centros. Estos archivos TRIPLE.TK y REVERT.TK, también están en el CD-ROM. Cada uno de estos programas genera una tabla con todas las soluciones que satisfacen el criterio de error declarado dentro de los límites de diente especificados.

TABLA 9-9 Algoritmo para el diseño de un tren de engranes de dos etapas compuesto

Del archivo Compound.tk del programa *TKSolver*. Basado en la referencia (2)

```
"Ratio es la relación del tren de engranes deseada y debe ser > 1. Nmín es el número mínimo de dientes aceptable en cualquier piñón.
"Nmáx es el número máximo de dientes aceptable en cualquier engrane. eps 1 es la estimación inicial de la tolerancia del error en Ratio.
"eps es la tolerancia usada en el cálculo, se inicia con eps 1 pero se modifica (al doble) hasta que se encuentren las soluciones.
"counter indica cuántas veces la tolerancia inicial fue doble. Observe que un valor inicial grande en eps 1 tardará mucho tiempo
"número de cálculos donde un valor demasiado pequeño (el cual no da ninguna solución) aumentará rápidamente y conducirá a una solución más rápida
"pinion1, pinion2, gear1 y gear2 son los números de dientes para la solución.

    eps = eps1                                          " inicia el límite de tolerancia de error
    counter = 0                                         " inicia el contador
redo:                                                   " se ensayan nuevas entradas para pruebas adicionales de la solución
    S = 1                                               " inicia el indicador de la serie
    R_high = Ratio + eps                                " inicia las bandas de tolerancia alrededor de la relación
    R_low = Ratio - eps                                 " inicia las bandas de tolerancia alrededor de la relación
    Nh3 = INT(Nmax^2/R_high)                            "valor intermedio para el cálculo
    Nh4 = INT(Nmax/SQRT(R_high)                         "valor intermedio para el cálculo
    For pinion1 = Nmin to Nh4                           "ciclo para el primer piñón
        Nhh = MIN (Nmax, INT (Nh3/pinion1))             "valor intermedio para el cálculo
        For pinion2 = pinion1 to Nhh                    "ciclo para el segundo piñón
            P = INT(pinion1 * pinion2 * R_high)         "valor intermedio para el cálculo
            Q = INT(pinion1 * pinion2 * R_low) + 1      "valor intermedio para el cálculo
            IF (P < Q) THE GOTO np2                     "salta al siguiente pinion2 si es verdadero
            Nm = MAX (Nmin, INT (Q + Nmax - 1)/ Nmax))  "valor intermedio para el cálculo
            Np = SQRT(P)                                "valor intermedio para el cálculo
            For K = Q to P                              "ciclo para el parámetro K
                For gear1 = Nm to Np                    "ciclo para el primer engrane
                    IF(MOD(K, gear 1) <> 0)Then GOTO ng1    "no acopla - salta al siguiente gear1
                    gear2 = K/gear 1                    "encuentra el número de dientes para el segundo engrane
                    error = ( Ratio - K/ (pinion1 * pinion2))   "encuentra el error en la relación
                    "comprobación para ver si está dentro de la tolerancia real
                    IF error > eps THE GOTO ng 1        "está fuera de los límites - salta al próximo gear1
                    "todas las soluciones se ponen en arreglos
                    pin1[S] = pinion1
                    pin2[S] = pinion2
                    gear1[S] = gear1
                    gear2[S] = gear2
                    error[S] = ABS(error)
                    ratio1[S] = gear1 / pinion 1
                    ratio2[S] = gear2 / pinion 2
                    ratio[S] = ratio1[S] *  ratio2[S]
                    S = S + 1                           "incrementa el tamaño del arreglo
ng1:            Next gear 1
            Next K
np2:    Next pinion2
    Next pinion1
    "comprobación para ver si cualquier solución está dentro del valor eps actual
    IF (Length(pin1) = 0 ) Then GOTO again ELSE Return  "tiene una solución
again:                                                  "eps toma un valor del doble y se ensaya de nuevo
    eps = eps * 2
    counter = counter + 1
    GOTO redo
```

EJEMPLO 9-4

Diseño de un tren de engranes compuesto para aproximar a una relación irracional.

Problema: Encuentre un par de conjuntos de engranes que al estar compuestos darán una relación de tren de 3.1416:1 con un error mínimo menor que 0.001%. Los límites de los engranes en cuanto a los números de dientes están entre 15 y 100. Determine también los números de dientes para el error más pequeño posible si los dos conjuntos de engranes se revierten.

Solución:

1 Los datos de entrada al algoritmo son $R = 3.1416$, $N_{bajo} = 15$, $N_{alto} = 100$, ε inicial = 3.1416E-5.

2 El archivo COMPOUND.TK del programa *TKSolver* (véase la tabla 9-9) se usó para generar las soluciones no revertidas que se muestran en la tabla 9-10.

3 La mejor solución no revertida tiene un error en la relación de 7.8499E-06 (0.000 249 87%) dando una relación de 3.141 582 con los conjuntos de engranes de 29:88 y 85:88 dientes.

4 El archivo REVERT.TK del programa *TKSolver* (véase el CD-ROM) se usó para generar las soluciones revertidas que se muestran en la tabla 9-11.

5 La mejor solución revertida tiene un error en la relación de -9.6198E-04 (-0.03062%) dando una relación de 3.142 562 con los conjuntos de engranes de 22:39 y 22:39 dientes.

TABLA 9-10 Engranajes no revertidos y errores en la relación del ejemplo 9-4

N_2	N_3	Relación 1	N_4	N_5	Relación 2	m_V	Error
17	54	3.176	91	90	0.989	3.141564	2.5682E-05
17	60	3.529	91	81	0.890	3.141564	2.5682E-05
22	62	2.818	61	68	1.115	3.141580	1.0268E-05
23	75	3.261	82	79	0.963	3.141569	2.0541E-05
25	51	2.040	50	77	1.540	3.141600	1.0000E-05
28	85	3.036	86	89	1.035	3.141611	2.1296E-05
29	88	3.034	85	88	1.035	3.141582	7.8499E-06
33	68	2.061	61	93	1.525	3.141580	1.0268E-05
41	75	1.829	46	79	1.717	3.141569	2.0541E-05
43	85	1.977	56	89	1.589	3.141611	2.1296E-05
43	77	1.791	57	100	1.754	3.141575	1.5133E-05

TABLA 9-11 Engranajes revertidos y errores en la relación del ejemplo 9-4

N_2	N_3	Relación 1	N_4	N_5	Relación 2	m_V	Error
22	39	1.773	22	39	1.773	3.142562	–9.6198E-04
44	78	1.773	44	78	1.773	3.142562	–9.6198E-04

6 Observe que al imponer la restricción adicional de reversión se ha reducido efectivamente a una el número de posibles soluciones (las dos soluciones de la tabla 9-11 difieren por un factor de 2 en los números de dientes pero tienen el mismo error) y el error es mucho mayor que el de incluso la peor de las 11 soluciones no revertidas de la tabla 9-10.

9.9 TRENES DE ENGRANES PLANETARIOS O EPICÍCUCOS

Todos los trenes de engranes convencionales descritos en las secciones anteriores son dispositivos con un grado de libertad *(GDL).* Otra clase de tren de engranes que tiene amplia aplicación es el **tren planetario o epicíclico.** Éste es un dispositivo con 2 *GDL.* Son necesarias dos entradas para obtener una salida predecible. En algunos casos, como en el diferencial de un automóvil, se tiene una entrada (la del eje principal de impulsión) y se obtienen dos salidas acopladas friccionalmente (las dos ruedas impulsoras). En otras aplicaciones, como en las transmisiones automáticas, los motores de avión para reducciones de hélice y en las transmisiones de bicicleta de cubo, se proporcionan dos entradas (una que normalmente es una velocidad cero, es decir, un engrane fijo) y la otra que controla las salidas resultantes.

En la figura *9-32a)* se muestra un conjunto de engranes convencional con 1 *GDL* en el que el eslabón 1 se ha inmovilizado como el eslabón de fijación. En la figura *9-32b)* se muestra el mismo engranaje con el eslabón 1, ahora libre para girar como un **brazo** que conecta los dos engranes. Ahora sólo la junta O_2 está fija y el sistema tiene *GDL = 2.* Se ha convertido en un tren **epicíclico** con un **engrane solar y** un **engrane planetario** que gira alrededor del sol y es mantenido en órbita por la acción del **brazo.** Se requieren dos entradas. Generalmente, el brazo y el engrane solar serán impulsados cada uno en un cierto sentido y con alguna velocidad. En muchos casos una de estas entradas tendrá velocidad cero; por ejemplo, al aplicar un freno al brazo o al engrane solar. Observe que una velocidad de entrada cero en el brazo, simplemente origina un tren convencional fuera del tren epicíclico, como se muestra en la figura *9-32a).* Así, el tren de engranes

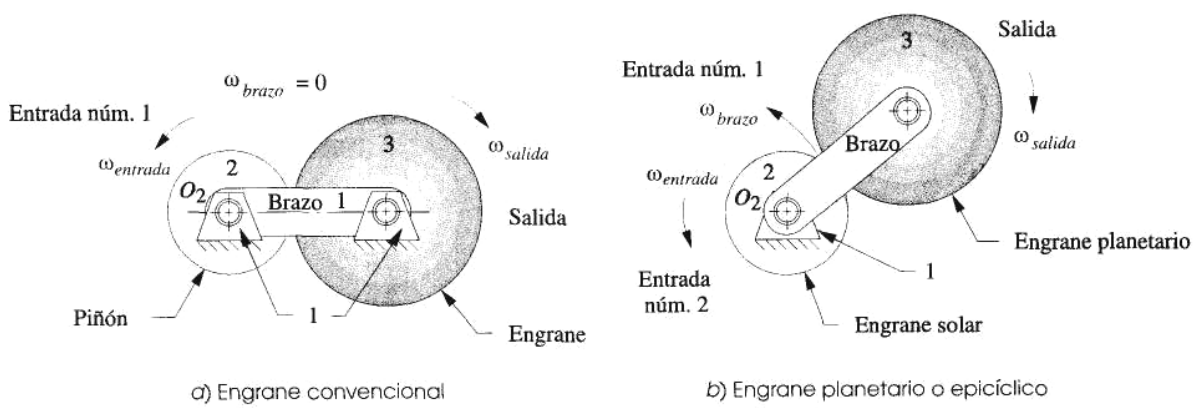


FIGURA 9-32

Los engranajes convencionales son un caso especial de los engranajes planetarios o epicíclicos

convencional es simplemente un caso especial del tren epicíclico más complejo, en el cual el brazo se mantiene estacionario.

En este sencillo ejemplo de un tren epicíclico, el único engrane del que puede tomarse una salida, después de aplicar entradas al solar y al brazo, es el planetario. Es un poco difícil lograr una salida utilizable a partir de este engrane orbitante alrededor de su pivote. En la figura 9-33 se muestra una configuración más útil a la cual se le ha agregado un engrane de anillo. Este **engrane de anillo** se conecta al planetario y su pivote está en O_2, de modo que puede servir fácilmente como elemento de salida. La mayor parte de los trenes planetarios contarán con engranes de anillo para llevar de nuevo al movimiento planetario a un pivote fijo. Observe que como en el engrane solar, el de anillo y el brazo se prolongan como ejes huecos coaxiales, de modo que se puede tener acceso a cada uno para disponer de su velocidad angular y su par de torsión, de entrada o de salida.

Hay trenes epicíclicos en muchas variedades. Levai[13] cataloga 12 tipos posibles de trenes epicíclicos básicos, como se muestra en la figura 9-34. Estos trenes básicos se conectan para crear un número más grande de trenes que tienen más grados de libertad. Esto se hace en las transmisiones automáticas de los automóviles como se describe en una sección posterior.

Aunque es relativamente fácil visualizar el flujo de potencia a través de un tren de engranes convencional y observar las direcciones de movimiento de sus engranes, es muy difícil determinar el comportamiento de un engranaje planetario por simple observación.

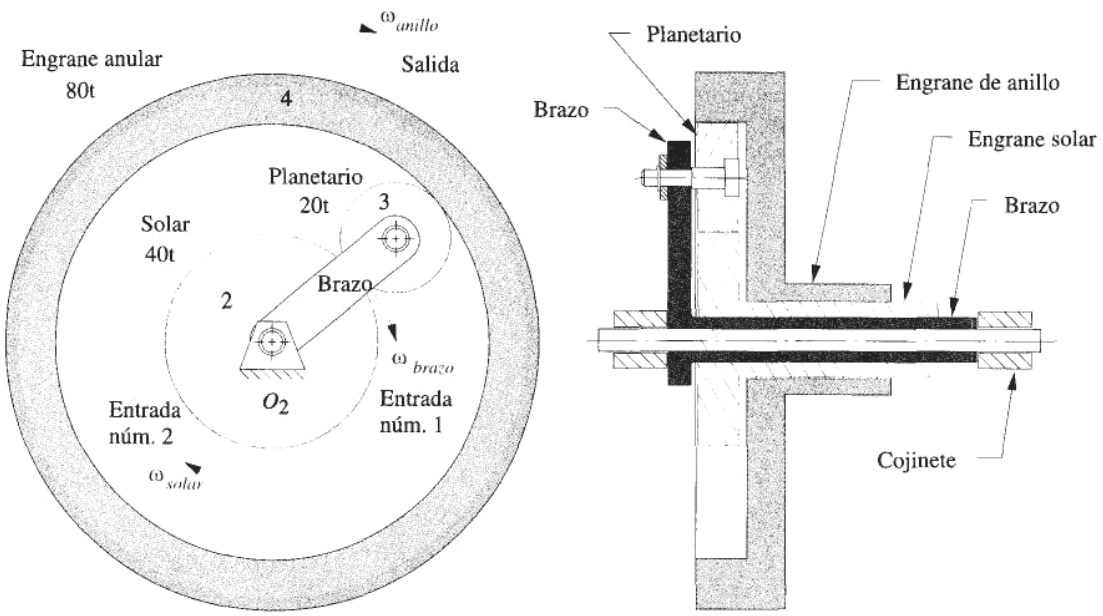


FIGURA 9-33

Engranaje planetario con un engrane de anillo usado como salida

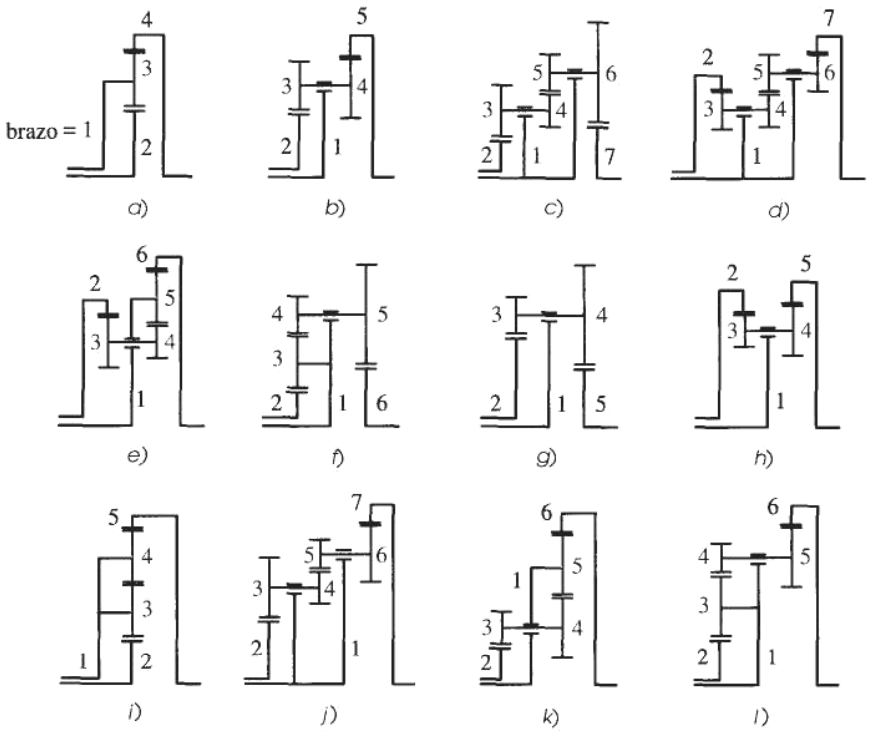


FIGURA 9-34
12 posibles trenes epicíclicos de Levai (3)

Se deben realizar los cálculos necesarios para determinar su comportamiento y pueden ser sorprendentes los frecuentes resultados contraintuitivos. Ya que los engranes giran con respecto al brazo y el propio brazo tiene movimiento, se tiene aquí un problema de diferencia de velocidad que requiere la aplicación de la ecuación 6.5. Al escribir de nuevo la ecuación de diferencia de velocidad en términos de las velocidades angulares específicas para este sistema, se obtiene:

$$\omega_{engrane} = \omega_{brazo} + \omega_{engrane/brazo} \tag{9.12}$$

Las ecuaciones 9.12 y 9.5a son todo lo que se necesita para determinar las velocidades en un tren epicíclico, siempre que se conozcan los números de dientes y dos condiciones de entrada.

El método tabular

Un método para el análisis de velocidades en un tren epicíclico es crear una tabla que represente la ecuación 9.12 para cada engrane en el tren.

EJEMPLO 9-5

Análisis de un tren de engranes epicíclico por el método tabular.

Problema: Considere el tren de engranes de la figura 9-33, que tiene los siguientes números de dientes y condiciones iniciales:

Engrane solar	$N_2 = 40$ dientes, engrane externo
Engrane planetario	$N_3 = 20$ dientes, engrane externo
Engrane de anillo	$N_4 = 80$ dientes, engrane interno
Entrada al brazo	200 rpm en el sentido de las manecillas del reloj
Entrada al solar	100 rpm en el sentido de las manecillas del reloj

Se desea obtener la velocidad angular absoluta de salida del engrane de anillo.

Solución:

1 La tabla de solución se establece con una columna para cada término en la ecuación 9.12 y un renglón para cada engrane en el tren. Será muy conveniente si se puede disponer la tabla de modo que los engranes conectados ocupen renglones adyacentes. En la figura 9-35 se muestra la tabla para este método, antes del ingreso de los datos.

2 Observe que las relaciones de engrane que se muestran abarcan los renglones de los engranes a los cuales se aplican. La columna de relación de engrane se halla junto a la columna que contiene las diferencias de velocidad $\omega_{engrane/brazo}$, ya que las relaciones de engranaje sólo se aplican a la diferencia de velocidades. Las relaciones de engrane **no pueden ser aplicadas directamente a las velocidades absolutas** que figuran en la columna $\omega_{engrane}$.

3 La estrategia de solución es simple, pero está llena de posibilidades de errores por descuido. Observe que se está resolviendo una ecuación vectorial mediante álgebra escalar y los signos de los términos indican el sentido de los vectores ω, que están todos dirigidos a lo largo del eje Z. Se debe tener gran cuidado en marcar correctamente en la tabla los signos de las velocidades de entrada y de las relaciones de engrane, o la respuesta será equivocada. Algunas relaciones de engrane pueden ser negativas si implican conjuntos de engranes externos y algunas positivas si consideran un engrane interno. En este ejemplo se tienen ambos tipos.

4 El primer paso, como se muestra en la figura 9-36, es anotar los datos conocidos, que en este caso son la velocidad del brazo (en todos los renglones) y la velocidad absoluta del engrane 2 en la columna 1. Las relaciones de engrane también pueden calcularse y colocarse en sus respectivos sitios. Observe que estas relaciones deben calcularse para cada conjunto de engra-

	1	2	3	
Engrane núm.	$\omega_{engrane} =$	$\omega_{brazo} +$	$\omega_{engrane/brazo}$	*Relación de engrane*

FIGURA 9-35
Tabla para la solución de trenes de engranes planetarios

	1	2	3	
Engrane núm.	$\omega_{engrane}$ =	ω_{brazo} +	$\omega_{engrane/brazo}$	*Relación de engrane*
2	−100	−200		−40/20
3		−200		+20/80
4		−200		

FIGURA 9-36

Datos para el tren de engranes planetarios del ejemplo 9-5 ordenados en forma de tabla

nes de modo consistente, siguiendo el flujo de potencia a través del tren. Esto es, comenzando en el engrane 2 como el impulsor, éste impulsa directamente al engrane 3. Esto da su relación $-N_2/N_3$, o bien entrada sobre salida y no la recíproca. *Esta razón es negativa debido a que el conjunto de engranes es externo.* El engrane 3 impulsa a su vez al engrane 4, de modo que su relación es $+N_3/N_4$. *Ésta es una razón positiva porque se trata de un engrane interno.*

5 Una vez que cualquier renglón tenga dos entradas, el valor para su columna restante se calcula a partir de la ecuación 9.12. Una vez que se ha hallado cualquier valor en la columna de diferencia de velocidad (columna 3) se aplican las relaciones de engrane para calcular todos los otros valores en esa columna. Finalmente, se calculan los renglones restantes a partir de la ecuación 9.12 para obtener las velocidades absolutas de todos los engranes en la columna 1. Estos cálculos se muestran en la figura 9-37, que completa la solución.

6 El valor total del tren en este ejemplo se calcula a partir de la tabla y es, del brazo al engrane de anillo, +1.25:1; y del engrane solar al engrane de anillo, +2.5:1.

En este ejemplo uno de los datos dados fue la velocidad del brazo. Si se ha de encontrar como de salida, entonces se debe introducir en la tabla como una incógnita *(x)* y resolver las ecuaciones para despejarla.

PARADOJA DE FERGUSON Los trenes epicíclicos tienen varias ventajas sobre los convencionales, entre ellas están: relaciones de velocidad más altas en embalajes más pequeños, reversión por defecto y salidas simultáneas, concéntricas y bidireccionales

	1	2	3	
Engrane núm.	$\omega_{engrane}$ =	ω_{brazo} +	$\omega_{engrane/brazo}$	*Relación de engrane*
2	−100	−200	+100	−40/20
3	−400	−200	−200	+20/80
4	−250	−200	−50	

FIGURA 9-37

Solución para el tren de engranes planetarios del ejemplo 9-5

disponibles a partir de una sola entrada unidireccional. Estas características hacen que los trenes planetarios sean de uso común, por ejemplo en las transmisiones automáticas en automóviles y camionetas, etcétera.

La así llamada **paradoja de Ferguson** de la figura 9-38 ilustra todas estas características del tren planetario. Es un **tren epicíclico compuesto** con un engrane planetario de 20 dientes (engrane 5) montado sobre el brazo rotatorio y que se engrana en forma simultánea con tres engranes solares; los cuales tienen 100 dientes (engrane 2), 99 dientes (engrane 3) y 101 dientes (engrane 4), respectivamente. Las distancias intercentrales entre todos los engranes solares y el planetario son iguales, a pesar de los diámetros de paso ligeramente distintos de cada engrane solar. Esto es posible debido a las propiedades de la forma de involuta de los dientes que se describió en la sección 9.2. Cada engrane solar se moverá con suavidad con el engrane planetario, y cada conjunto de engranes tendrá solamente un ángulo de presión ligeramente diferente.

EJEMPLO 9-6

Análisis de la paradoja de Ferguson por el método tabular.

Problema: Considere el tren de la paradoja de Ferguson de la figura 9-38 que tiene los siguientes números de dientes y condiciones iniciales:

Engrane solar núm. 2	N_2 = 100 dientes, engrane externo
Engrane solar núm. 3	N_3 = 99 dientes, engrane externo
Engrane solar núm. 4	N_4 = 101 dientes, engrane externo
Engrane planetario	N_5 = 20 dientes, engrane externo
Entrada al solar núm. 2	0 rpm
Entrada al brazo	100 rpm en sentido contrario a las manecillas del reloj

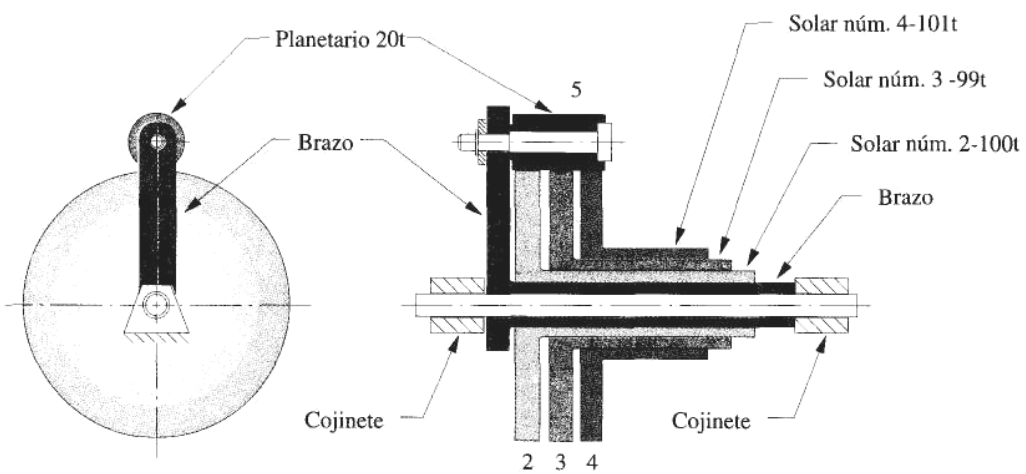


FIGURA 9-38

Tren de engranes planetarios compuesto de la paradoja de Ferguson

El engrane solar 2 está fijo al armazón, por tanto, proporciona una entrada (de velocidad cero) al sistema. El brazo se impulsa a 100 rpm en sentido contrario a las manecillas del reloj como la segunda entrada. Encuentre las velocidades angulares de las dos salidas que están disponibles a partir de este tren compuesto, una desde el engrane 3 y la otra desde el engrane 4, los cuales pueden girar libremente sobre el eje principal.

Solución:

1 La solución tabular para este tren se muestra en la figura 9-39, en la que se muestran los datos. Observe que el renglón para el engrane 5 se repite por claridad en la aplicación de la relación de engrane entre los engranes 5 y 4.

2 Los valores de velocidad de entrada conocidos son la velocidad angular del brazo y la velocidad absoluta cero del engrane 2.

3 Todas las relaciones de engrane en este caso son negativas debido a los conjuntos de engranes externos, y sus valores reflejan el sentido del flujo de potencia motriz del engrane 2 al 5, luego del 5 al 3 y del 5 al 4 en la segunda rama.

4 En la figura 9-40 se muestran los valores calculados que se agregan a la tabla. Observe que para una entrada al brazo **en sentido contrario a las manecillas del reloj** de 100 rpm, se tiene una salida **en sentido contrario a las manecillas del reloj** de 1 rpm del engrane 4 y una **en el sentido de las manecillas del reloj** de 1 rpm desde el engrane 3, simultáneamente.

Este resultado justifica el uso de la palabra **paradoja** para describir el efecto de este tren. No sólo se obtiene con una relación mucho mayor (100:1) que la que se podría lograr con un tren convencional con engranes de 100 y de 20 dientes, ¡pero se tiene que hacer la elección de las direcciones de salida!

Las transmisiones automáticas de automóvil usan trenes planetarios compuestos que están siempre engranados y que dan velocidades hacia adelante de relación diferente,

	1	2	3	
Engrane núm.	$\omega_{engrane}$ =	ω_{brazo} +	$\omega_{engrane/brazo}$	*Relación de engrane*
2	0	+100		
5		+100		−100/20
3		+100		− 20/99
5		+100		
4		+100		−20/101

FIGURA 9-39
Datos dados para el tren de engranaje planetario de la paradoja de Ferguson del ejemplo 9-6

	1	2	3	
Engrane núm.	$\omega_{engrane}$ =	ω_{brazo} +	$\omega_{engrane/brazo}$	*Relación de engrane*
2	0	+100	-100	-100/20
5	+600	+100	+500	-20/99
3	-1.01	+100	-101.01	
5	+600	+100	+500	-20/101
4	+0.99	+100	-99.01	

FIGURA 9-40

Solución para el tren de engranes planetarios de la paradoja de Ferguson del ejemplo 9-6

más la reversa, por la simple aplicación y no aplicación de los frenos sobre distintos elementos del tren. El freno proporciona velocidad de entrada cero a un elemento del tren. La otra entrada es desde el motor del auto. La salida, por tanto, se modifica por la aplicación de estos frenos internos en la transmisión de acuerdo con la selección del conductor *(Paro, Reversa, Neutral, Marcha,* etcétera).

El método de la fórmula

No es necesario tabular la solución para un tren epicíclico. La fórmula de diferencia de velocidad se puede resolver directamente para la relación del tren. La ecuación 9.12 se puede adaptar para despejar el término de diferencia de velocidad. Luego, sea que ω_F represente la velocidad angular del primer engrane en el tren (elegida en uno u otro extremo) y que ω_L represente la velocidad angular del último engrane en el tren (en el otro extremo).

Para el primer engrane en el sistema:

$$\omega_{F/brazo} = \omega_F - \omega_{brazo} \tag{9.13a}$$

Para el último engrane en el sistema:

$$\omega_{L/brazo} = \omega_L - \omega_{brazo} \tag{9.13b}$$

Dividiendo el último entre el primero:

$$\frac{\omega_{L/brazo}}{\omega_{F/brazo}} = \frac{\omega_L - \omega_{brazo}}{\omega_F - \omega_{brazo}} = R \tag{9.13c}$$

Esto da una expresión para el valor *R* del tren fundamental que define una relación de velocidad para el tren manteniendo al brazo estacionario. El lado extremo izquierdo de la ecuación 9.13c afecta sólo a los términos de diferencia de velocidad que están en relación

con el brazo. Esta fracción es igual a la relación de los productos de los números de dientes de los engranes, desde el primero hasta el último, en el tren, como se definió en la ecuación 9.8b, que puede ser sustituida en el lado extremo izquierdo de la ecuación 9.13c.

$$R = \pm \frac{\text{producto del número de dientes en engranes impulsores}}{\text{producto del número de dientes en engranes impulsados}} = \frac{\omega_L - \omega_{brazo}}{\omega_F - \omega_{brazo}} \qquad (9.14)$$

Esta ecuación se resuelve para evaluar cualquiera de las variables del lado derecho, siempre que las otras dos se definan como las dos entradas a este tren con 2 *GDL*. Deben conocerse las velocidades del brazo y la de un engrane, o bien las velocidades de dos engranes, el primero y el último, según su designación. Otra limitación de este método es que ambos, el primero y el último engranes elegidos, deben estar pivotados a la parte fija (no ser orbitantes) y debe haber una ruta de engranajes que los conecte, lo que puede incluir engranes planetarios orbitantes. Este método se utilizará para resolver de nuevo la paradoja de Ferguson del ejemplo anterior.

EJEMPLO 9-7

Análisis de la paradoja de Ferguson por el método de la fórmula.

Problema: Considere el mismo tren de la paradoja de Ferguson que en el ejemplo 9-6, que tiene los siguientes números de dientes y condiciones iniciales (véase la figura 9-37):

Engrane solar núm. 2	$N_2 = 100$ dientes, engrane externo
Engrane solar núm. 3	$N_3 = 99$ dientes, engrane externo
Engrane solar núm. 4	$N_4 = 101$ dientes, engrane externo
Engrane planetario	$N_5 = 20$ dientes, engrane externo
Entrada para el solar núm. 2	0 rpm
Entrada para brazo	100 rpm en sentido contrario a las manecillas del reloj

El engrane solar 2 está fijo al armazón, por tanto, proporciona una entrada con velocidad cero al sistema. El brazo se impulsa a 100 rpm en sentido contrario al de las manecillas del reloj (SCMR) y es la segunda entrada. Obtenga las velocidades angulares de las dos salidas que están disponibles en este tren de tipo compuesto, una del engrane 3 y la otra del engrane 4, en el que ambos están libres para girar sobre el eje principal.

Solución:

I Se tendrá que aplicar dos veces la ecuación 9.14, una para cada engrane de salida. Tomando el engrane 3 como el último engrane en el tren, y el engrane 2 como el primero, se tiene:

$$\begin{array}{lll} N_2 = 100 & N_3 = 99 & N_5 = 20s \\ \omega_{brazo} = +100 & \omega_F = 0 & \omega_L = ? \end{array} \qquad (a)$$

2 Sustituyendo en la ecuación 9.14 se obtiene:

$$\left(-\frac{N_2}{N_5}\right)\left(-\frac{N_5}{N_3}\right)=\frac{\omega_L-\omega_{brazo}}{\omega_F-\omega_{brazo}}$$

$$\left(-\frac{100}{20}\right)\left(-\frac{20}{99}\right)=\frac{\omega_3-100}{0-100} \qquad \text{(b)}$$

$$\omega_3=-1.01$$

3 Ahora, al tomar al engrane 4 como el último engrane en el tren y al engrane 2 como el primero, se tiene:

$$N_2=100 \qquad N_4=101 \qquad N_5=20$$

$$\omega_{brazo}=+100 \qquad \omega_F=0 \qquad \omega_L=? \qquad \text{(c)}$$

4 Sustituyendo en la ecuación 9.14 se obtiene:

$$\left(-\frac{N_2}{N_5}\right)\left(-\frac{N_5}{N_4}\right)=\frac{\omega_L-\omega_{brazo}}{\omega_F-\omega_{brazo}}$$

$$\left(-\frac{100}{20}\right)\left(-\frac{20}{101}\right)=\frac{\omega_4-100}{0-100} \qquad \text{(d)}$$

$$\omega_4=+0.99$$

Éstos son los mismos resultados que se obtuvieron con el método tabular.

9

9.10 EFICIENCIA DE LOS TRENES DE ENGRANES

La definición general de eficiencia es *potencia de salida/'potencia de entrada.* Se expresa como una fracción o como un porcentaje. La eficiencia de un tren de engranes convencional (simple o compuesto) es muy alta. La pérdida de potencia en el conjunto de engranes es tan sólo de 1 a 2% dependiendo de factores tales como el acabado del diente y la lubricación. La eficiencia básica de un conjunto de engranes es llamada E_0. Un engranaje externo tendrá un E_0 de aproximadamente 0.98 o más, y un engranaje exterior-interior aproximadamente 0.99 o más. Cuando se usan conjuntos de engranes múltiples en un tren simple convencional o compuesto, la eficiencia global del tren será el producto de las eficiencias de todas sus etapas. Por ejemplo, un tren de dos etapas con ambas eficiencias de engranaje de $E_0 = 0.98$ tendrá una eficiencia global de $\eta = 0.98^2 = 0.96$.

Los trenes epicíclicos, si están diseñados apropiadamente, pueden tener aun eficiencias globales superiores a las de los trenes convencionales. Pero, si el diseño del tren epicíclico es pobre, su eficiencia puede ser totalmente tan baja que generará un calor excesivo e incluso puede ser totalmente incapaz de operar. Éste es el extraño resultado que puede ocurrir si los elementos que orbitan (planetas) en el tren tienen pérdidas tan altas que absorben una cantidad grande de "potencia circulante" en el tren. Es posible que esta potencia circulante sea mucho más grande que la potencia de impulso para la que el

tren fue diseñado, y esto dé como resultado calentamiento excesivo o pérdida de velocidad. El cálculo de la eficiencia global de un tren epicíclico es mucho más complicado que la simple multiplicación ya indicada con que se trabaja en trenes convencionales. Molian[4] presentó una derivación concisa.

Para calcular la eficiencia total η de un tren epicíclico se necesita definir una razón básica ρ que está relacionada con el valor del tren fundamental R definido en la ecuación 9.13c:

$$\text{si} = |R| \geq 1, \text{ entonces } \rho = R \text{ si no } \rho = 1/R \tag{9.15}$$

Estas restricciones de ρ representarán un aumento de la velocidad en lugar de una disminución sin considerar de qué manera se intenta operar el tren de engranes.

Con el propósito de calcular el par de torsión y la potencia en un tren de engranes epicíclico, se considera que es una "caja negra" con tres ejes concéntricos como el que se muestra en la figura 9-41. Estos ejes se etiquetan con 1, 2, y el brazo y la conexión a cualquiera de los "extremos" del tren de engranes y a su brazo, respectivamente. Dos de estos ejes pueden servir como entradas y el tercero como salida en cualquier combinación. No se necesitan detalles de la configuración del tren de engranes interno si se conoce su relación básica ρ y la eficiencia básica E_0 de sus engranajes. Todo el análisis se hace con respecto al brazo del tren, ya que los flujos de potencia internos y las pérdidas sólo son afectados por la rotación de los ejes 1 y 2 con respecto al brazo, no por la rotación de la unidad entera. Esto también se modela para tener un solo engrane planetario con el propósito de determinar E_0 suponiendo que la potencia y las pérdidas están igualmente divididas entre todos los engranes reales del tren. Los pares de torsión y las velocidades angulares en sentido contrario a las manecillas del reloj se consideran positivos. La potencia es el producto del par de torsión y la velocidad angular, así que una potencia positiva es una entrada (el par de torsión y la velocidad en la misma dirección) y una potencia negativa es una salida.

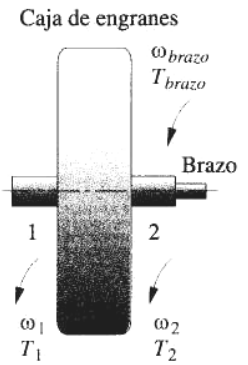


FIGURA 9-41
Tren de engranes epicíclico genérico

Si el tren de engranes está funcionando a velocidad constante o la velocidad cambia demasiado despacio para afectar significativamente su energía cinética interna, entonces se puede suponer equilibrio estático y la suma de los pares de torsión será cero.

$$T_1 + T_2 + T_{brazo} = 0 \tag{9.16}$$

La suma de potencia de entrada y salida también debe ser cero, pero la dirección del flujo de potencia afecta el cálculo. Si el flujo de potencia va del eje 1 al eje 2, entonces:

$$E_0 T_1(\omega_1 - \omega_{brazo}) + T_2(\omega_2 - \omega_{brazo}) = 0 \tag{9.17a}$$

Si el flujo de potencia va del eje 2 al eje 1, entonces:

$$T_1(\omega_1 - \omega_{brazo}) + E_0 T_2(\omega_2 - \omega_{brazo}) = 0 \tag{9.17b}$$

Si el flujo de potencia fluye del eje 1 al 2 se resuelven simultáneamente las ecuaciones 9.16 y 9.17a para obtener los pares de torsión del sistema. Si la potencia fluye en la otra dirección, entonces se usan las ecuaciones 9.16 y 9.17b. La sustitución de la ecuación 9.13c en combinación con la ecuación 9.15 introduce la relación básica ρ y después de resolverlas simultáneamente se obtiene:

flujo de potencia de 1 a 2

$$T_1 = \frac{T_{brazo}}{\rho E_0 - 1} \tag{9.18a}$$

$$T_2 = -\frac{\rho E_0 T_{brazo}}{\rho E_0 - 1} \tag{9.18b}$$

flujo de potencia de 2 a 1

$$T_1 = \frac{E_0 T_{brazo}}{\rho - E_0} \tag{9.19a}$$

$$T_2 = -\frac{\rho T_{brazo}}{\rho - E_0} \tag{9.19b}$$

Una vez que se encuentran los pares de torsión se calcula la potencia de entrada y la potencia de salida usando la entrada conocida y las velocidades de salida (de un análisis cinemático, como se describió en la sección anterior), y entonces la eficiencia se determina de *potencia de salida/potencia de entrada.*

Hay ocho casos posibles dependiendo de qué eje está fijo, qué eje es el de entrada y si la relación básica p es positiva o negativa. Estos casos se muestran en la tabla 9-12[41]

TABLA 9-12 Pares de torsión y eficiencias en un tren epicíclico (4)

Caso	ρ	Eje fijo	Eje de entrada	Relación del tren	T_1	T_2	T_{brazo}	Eficiencia (η)
1	$>+1$	2	1	$1-\rho$	$\frac{T_{brazo}}{1-\rho E_0}$	$\frac{\rho E_0 T_{brazo}}{1-\rho E_0}$	T_{brazo}	$\frac{\rho E_0 - 1}{\rho - 1}$
2	$>+1$	2	brazo	$\frac{1}{1-\rho}$	T_1	$-\rho\frac{T_1}{E_0}$	$\left(\frac{\rho - E_0}{E_0}\right)T_1$	$\frac{E_0(\rho-1)}{\rho - E_0}$
3	$>+1$	1	2	$\frac{\rho-1}{\rho}$	$\frac{T_{brazo}}{\rho E_0 - 1}$	$-\frac{\rho E_0 T_{brazo}}{\rho E_0 - 1}$	T_{brazo}	$\frac{\rho E_0 - 1}{E_0(\rho-1)}$
4	$>+1$	1	brazo	$\frac{\rho}{\rho-1}$	$-\frac{E_0}{\rho}T_2$	T_2	$-\left(\frac{\rho - E_0}{\rho}\right)T_2$	$\frac{\rho-1}{\rho - E_0}$
5	≤ -1	2	1	$1-\rho$	$-\frac{T_{brazo}}{1-\rho E_0}$	$\frac{\rho E_0 T_{brazo}}{1-\rho E_0}$	T_{brazo}	$\frac{\rho E_0 - 1}{\rho - 1}$
6	≤ -1	2	brazo	$\frac{1}{1-\rho}$	T_1	$-\rho\frac{T_1}{E_0}$	$\left(\frac{\rho - E_0}{E_0}\right)T_1$	$\frac{E_0(\rho-1)}{\rho - E_0}$
7	≤ -1	1	2	$\frac{\rho-1}{\rho}$	$\frac{E_0 T_{brazo}}{\rho - E_0}$	$-\frac{\rho T_{brazo}}{\rho - E_0}$	T_{brazo}	$\frac{\rho - E_0}{\rho - 1}$
8	≤ -1	1	brazo	$\frac{\rho}{\rho-1}$	$-\frac{T_2}{\rho E_0}$	T_2	$-\left(\frac{\rho E_0 - 1}{\rho E_0}\right)T_2$	$\frac{E_0(\rho-1)}{\rho E_0 - 1}$

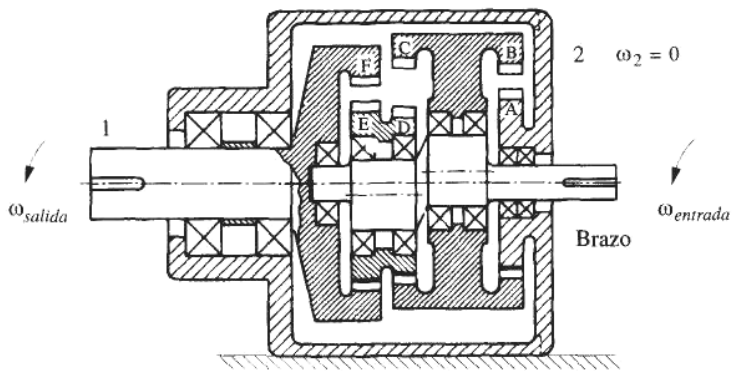


FIGURA 9-42

Tren de engranes epicíclico para el ejemplo 9-8 (5)

que incluye las expresiones para la eficiencia del tren así como para los pares de torsión. Observe que los pares de torsión en un eje siempre se conocen de la carga requerida para ser impulsada o de la potencia disponible del impulsor, y se necesitan para calcular los otros dos pares de torsión.

EJEMPLO 9-8

Determinación de la eficiencia de un tren de engranes epicíclico.*

Problema: Encuentre la eficiencia total del tren epicíclico que se muestra en la figura 9-42. [5] La eficiencia básica E_0 es 0.9928 y los números de dientes del engrane son: N_A = 82t, N_B = 84t, N_C = 86t, N_D = 82t, N_E = 82t y N_F = 84t. El engrane *A (eje* 2) está fijo al armazón, proporcionando una velocidad de entrada cero. El brazo se maneja como la segunda entrada.

Solución:

1 Encuentre la relación básica p para el tren de engranes usando las ecuaciones 9.14 y 9.15. Observe que los engranes *B y C* tienen la misma velocidad que los engranes *D* y *E,* para que sus relaciones sean 1 y entonces omitirlas.

$$\rho = \frac{N_F N_D N_B}{N_E N_C N_A} = \frac{84(82)(84)}{82(86)(82)} = \frac{1\,764}{1\,763} \cong 1.000567 \qquad \text{(a)}$$

2 La combinación de $\rho > 1$ con el eje 2 fijo y el brazo de entrada corresponde al caso 2 en la tabla 9-12 que da una eficiencia de:

$$\eta = \frac{E_0(\rho - 1)}{\rho - E_0} = \frac{0.9928(1.000567 - 1)}{1.000567 - 0.9928} = 0.073 = 7.3\% \qquad \text{(b)}$$

* Este ejemplo está adaptado de la referencia [5].

3 Ésta es una eficiencia muy baja por lo que esta caja de engranes es en esencia inútil. Aproximadamente el 93% de la potencia de entrada está circulando dentro del tren de engranes y se pierde en forma de calor.

El ejemplo anterior es un problema con trenes de engranes epicíclicos que tiene relaciones básicas cercanas a la unidad. Estos trenes tienen baja eficiencia y no son útiles para la transmisión de potencia. Sólo pueden obtenerse relaciones de velocidad grandes muy eficientes con trenes que tienen relaciones básicas grandes.[151]

9.11 TRANSMISIONES

TRENES DE ENGRANES REVERTIDOS COMPUESTOS Se usan generalmente en las transmisiones automotrices de tipo manual (no automáticas) para proporcionar relaciones, que el conductor puede elegir, entre el motor y las ruedas propulsoras y de tracción, a fin de multiplicar el par de torsión (ventaja mecánica). Estas cajas de engranes por lo común tienen desde tres hasta seis velocidades de marcha (o hacia adelante) y una de reversa. Las transmisiones más modernas de este tipo emplean engranes helicoidales para lograr una operación silenciosa. Estos engranes no entran y salen de conexión cuando se cambia de una velocidad a otra, excepto para la reversa. En vez de esto, los engranes de la relación deseada se fijan selectivamente al eje de salida por mecanismos de sincronismo, como se observa en la figura 9-43, que muestra una transmisión automotriz sincronizante con cambios manuales y para cuatro velocidades.

El eje de entrada está en la parte superior izquierda. El engrane de entrada está siempre en conexión con el engrane del extremo izquierdo, sobre el contraeje de la parte inferior. Este contraeje tiene varios engranes integrales conectados con un engrane de salida distinto, que gira libremente sobre el eje de salida. Este eje es concéntrico con el eje de entrada, lo que resulta en un tren revertido, pero los ejes de entrada y salida sólo se conectan a través de los engranes del contraeje, excepto en "directa" (cuarta velocidad), por lo que los ejes de entrada y salida están acoplados directamente mediante un embrague sincronizante para una relación de 1:1.

Los embragues sincronizantes están a un lado de cada engrane en el eje de salida, ocultos parcialmente por los collarines de cambio, que los mueven hacia la izquierda o la derecha en respuesta a la acción manual sobre la palanca de cambios. Estos embragues fijan un engrane al eje de salida, uno cada vez, con el fin de proporcionar un trayecto de flujo de potencia desde la entrada hasta la salida para una relación particular. En la figura las flechas indican el flujo de energía motriz para la tercera velocidad de marcha, la cual está conectada. El engrane de reversa, en la parte inferior derecha, se conecta con un engrane loco que es desplazado físicamente hacia dentro y hacia fuera de la conexión en estado estacionario.

TRENES PLANETARIOS O EPICÍCUCOS Normalmente se usan en las transmisiones automotrices de cambios automáticos como el que muestra la figura 9-44. A la izquierda se observa una turbina acoplada con el fluido entre el motor y la transmisión llamada convertidor del par de torsión. Este dispositivo permite un deslizamiento suficiente en el fluido de acoplamiento para dejar al motor en giro libre con la transmisión conectada y las ruedas del vehículo inmóviles. Cuando se conduce el vehículo los *alabes impulsores,* que se mueven en aceite, transmiten par de torsión mediante el bombeo de aceite que pasa por un conjunto de *alabes de estator** fijos y contra los *alabes de turbina* fijos al eje

* Los alabes del estator que no se mueven sirven para redirigir el flujo de aceite que sale de los alabes del impulsor en un ángulo más favorable con respecto a los alabes de la turbina. Esta nueva dirección del flujo es la responsable de la multiplicación del par de torsión que da su nombre al dispositivo convertidor del par de torsión. Sin los alabes del estator simplemente se trata de un *acoplamiento de fluido* que se transmite, pero el par de torsión no se multiplica. En un convertidor del par de torsión, el par de torsión máximo aumenta aproximadamente 2x, ocurre cuando la turbina de transmisión se detiene y el motor impulsor gira, creando el deslizamiento máximo entre los dos. Estos pares de torsión ayudan a acelerar al vehículo desde el reposo cuando supera su inercia. El par de torsión transmitido disminuye a cero y a deslizamiento cero entre el impulsor y la turbina.

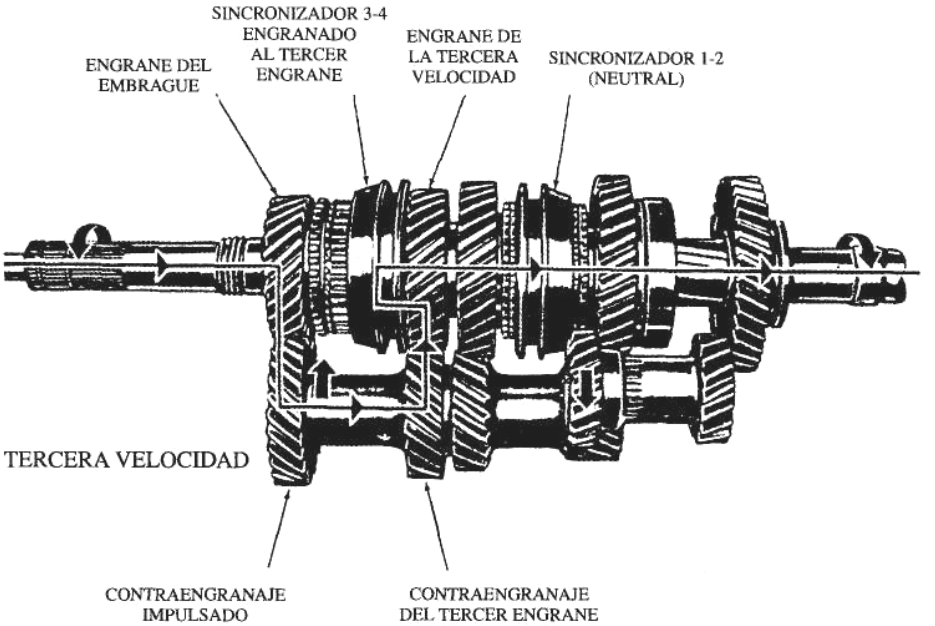


FIGURA 9-43

Transmisión manual de automóvil de cuatro velocidades de tipo sincronizado *Tomado de Crouse, W. H. Automotive Mechanics, 8a. ed., McGraw-Hill, 1980 Nueva York, p. 480. Reproducido con autorización*

de entrada de la transmisión. Éste es un caso de transmisión de múltiples *GDL* que consiste en varias etapas de trenes epicíclicos. Las transmisiones automáticas pueden tener cualquier número de relaciones. En los ejemplos automotrices normalmente hay de dos a cinco velocidades hacia adelante. En las camionetas y autobuses las transmisiones automáticas pueden tener más velocidades.

Pueden verse tres engranajes epicíclicos cerca del centro de transmisión de cuatro velocidades en la figura 9-44. Éstos se controlan por embragues de discos múltiples operados hidráulicamente y frenos dentro de la transmisión, los cuales proporcionan entradas de velocidad cero (segunda) a los diferentes elementos del tren para crear una de las cuatro relaciones de velocidad delanteras más la reversa de este ejemplo particular. Los embragues fuerzan una velocidad relativa de cero entre los dos elementos conectados, y los frenos fuerzan al elemento para que tenga una velocidad absoluta de cero. Ya que todos los engranes están constantemente engranados, la transmisión puede cambiar con la carga al activar los frenos interiores y activar o desactivar los embragues. Éstos se controlan mediante una combinación de entradas incluyendo la selección del conductor (PRND), velocidad del camino, posición del acelerador, carga del motor y velocidad y otros factores que se supervisan automáticamente y están controlados por una computadora. Algunos controladores de transmisión modernos usan técnicas de inteligencia artificial para aprender y adaptar el estilo de manejo del operador al restablecer automáticamente los puntos de cambio para el funcionamiento suave o fuerte basado en los hábitos del conductor.

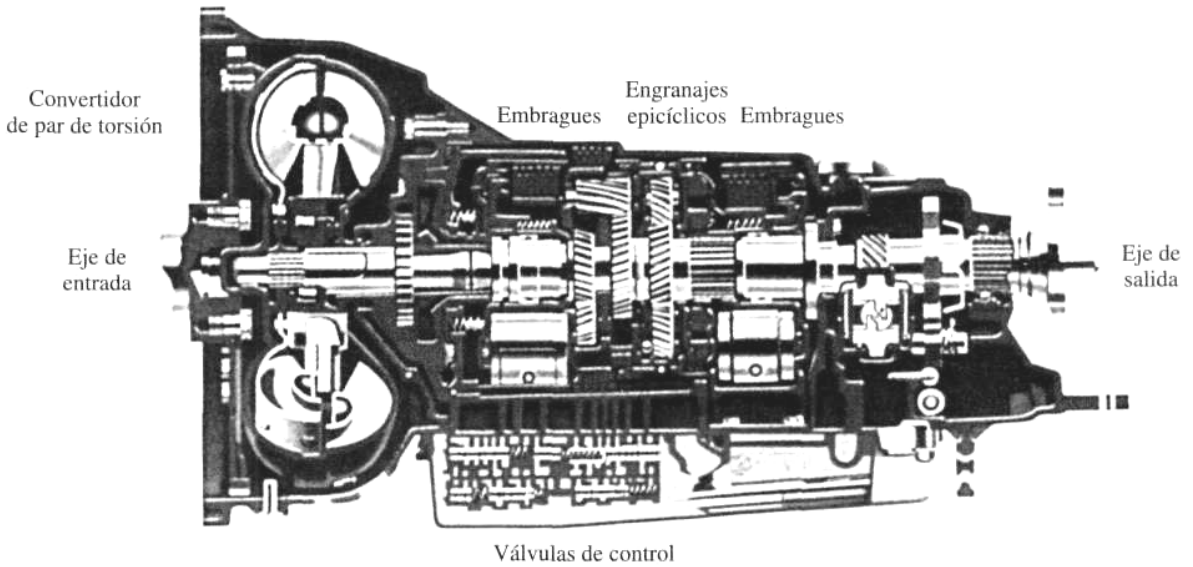
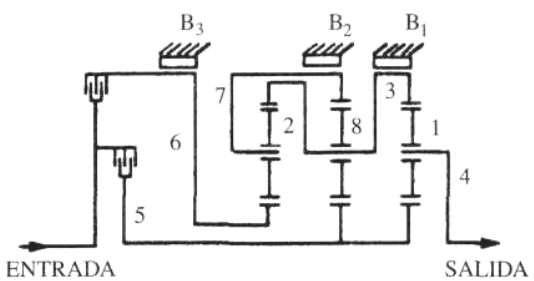


FIGURA 9-44

Transmisión automática de automóvil de cuatro velocidades *Cortesía de Mercedes Benz of North America Inc.*

En la figura 9-45a) se muestra un esquema de la misma transmisión de la figura 9-44, en donde se representan sus tres etapas epicíclicas, dos embragues (C_1, C_2) y sus tres frenos de banda (B_1, B_2, B_3). En la figura 9-456) se muestra una tabla de activación de las combinaciones de embrague y de freno para cada relación de velocidades de esta transmisión.![61]



a) Esquema de transmisión automática de cuatro velocidades

Rango	Activación de embrague/freno				
	C_1	C_2	B_1	B_2	B_3
Primera	x		x		
Segunda	x			x	
Tercera	x				x
Cuarta	x	x			
Reversa		x	x		

b) Tabla de activación de embrague / freno

FIGURA 9-45

Esquema de transmisión automática de la figura 9-44 *Adaptado de la referencia (6)*

Un ejemplo histórico interesante de un tren epicíclico usado en una caja de engranajes de cambios manual es el de la transmisión del Ford modelo T, que se muestra y se describe en la figura 9-46. Se produjeron más de 9 millones de 1909 a 1927, antes de la invención del mecanismo de engranaje sincronizado que se muestra en la figura 9-43. Las transmisiones convencionales (compuestas-revertidas) que se usaban en la mayoría de los otros automóviles de esa época (los años treinta) se conocían como "cajas trituradoras", llamadas así por el ruido que hacían cuando se cambian los engranes no sincronizados dentro y fuera del engranaje cuando está en movimiento. Henry Ford tuvo una idea mejor. Los engranes de su modelo T estaban en engranaje constante. Las dos velocidades hacia adelante y una en reversa se lograban al embragar/desembragar el embrague y los frenos de la banda en las diferentes combinaciones del pie en los pedales. Estos proporcionan segundas entradas al tren epicíclico, como en la paradoja de Ferguson, que da salidas bidireccionales sin ningún "estrellamiento" de los dientes del engrane. Esta transmisión del modelo T es el antecedente de las transmisiones automáticas modernas que remplazan a las T por los pedales de funcionamiento hidráulico automatizado de los embragues y los frenos.

9.12 DIFERENCIALES

Un diferencial es un dispositivo que permite una diferencia de velocidad (y desplazamiento) entre dos elementos. Éste requiere de un mecanismo con 2 *GDL* como un tren de engranes epicíclico. Quizá la aplicación más común de los diferenciales sea en los meca-

La entrada del motor es el brazo 2. El engrane 6 se fija rígidamente al eje de salida que impulsa las ruedas.

Hay dos velocidades delanteras. La baja (1:2.75) se selecciona engranando la banda del freno B_2 para asegurar el engrane 7 al marco. El embrague *C* no está engranado.

Alta (1:1) se selecciona engranando el embrague *C* que asegura el eje de entrada directamente al eje de salida.

Reversa (1:—4) se obtiene engranando la banda del freno B_1 para asegurar el engrane 8 al marco. El embrague *C* no está engranado.

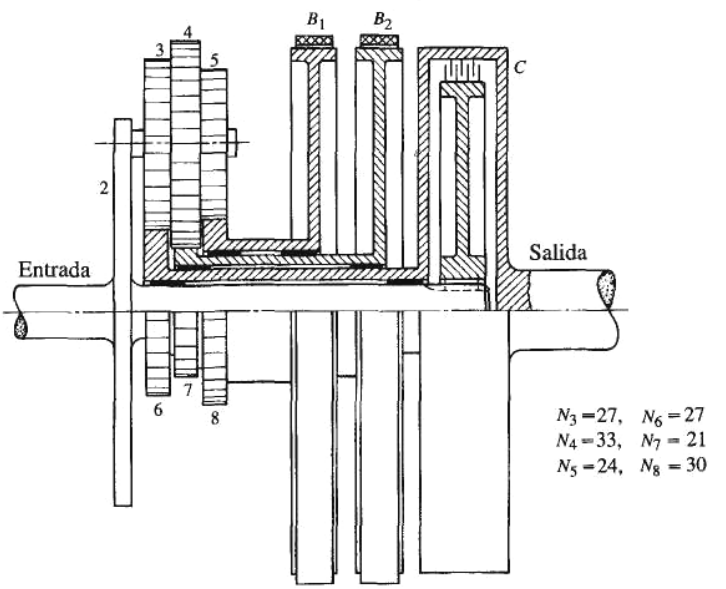


FIGURA 9-46

Transmisión epicíclica del Ford Modelo T *Tomado de R. M. Phelan (1970). Fundamentals of Mechanical Design, 3a. ed., McGraw-Hill, Nueva York*

nismos de impulso final de los vehículos entre el suelo y las ruedas. Cuando un vehículo de cuatro ruedas gira, las ruedas externas deben viajar más lejos debido a que las ruedas interiores están a radios diferentes como se muestra en la figura 9-47. Sin un mecanismo diferencial entre las ruedas de impulsión internas y externas, los neumáticos deben deslizarse en la superficie del camino cuando el vehículo gira. Si los neumáticos tienen buena tracción, un tren impulsor no diferencial intentará ir en línea recta todo el tiempo y le costará trabajo al conductor girar. En un vehículo con tracción en las cuatro ruedas (I4R) se necesita un diferencial más entre las ruedas delanteras y traseras para permitir que las velocidades de las ruedas en cada extremo del vehículo varíen en proporción a cualquier tracción desarrollada en los extremos del vehículo en condiciones de deslizamiento. La figura 9-48 muestra un chasis automotriz I4R con sus tres diferenciales. En este ejemplo, el diferencial del centro está embalado con la transmisión y el diferencial del frente, pero eficazmente está en el eje del motor entre las ruedas delanteras y traseras como se muestra en la figura 9-47. Los diferenciales están hechos con varios tipos de engranes. Para aplicaciones del eje trasero, se usa normalmente un engranaje epicíclico cónico como se muestra en las figuras *9-49a)* y P9-3 en la sección de problemas. Para los diferenciales central y delantero, se usan con frecuencia los engranajes helicoidal o rectos como se observa en la figura 9-49*b*) y *c).*

Un tren epicíclico usado como diferencial tiene una entrada y dos salidas. Tomando como un ejemplo el diferencial trasero en un automóvil, su entrada es el eje impulsor y su salida son las ruedas derechas e izquierdas. Las dos salidas se acoplan en el camino por medio de las fuerzas de tracción (fricción) entre los neumáticos y el pavimento. La velocidad relativa entre cada rueda varía desde cero -cuando ambos neumáticos tienen tracción igual y el automóvil no está virando- hasta dos veces la velocidad de entrada del tren epicíclico cuando una rueda está sobre hielo y la otra tiene tracción. Los diferenciales delanteros o traseros dividen el par de torsión igualmente entre las dos ruedas de salida. Como la potencia es el producto del par de torsión por la velocidad angular, y la

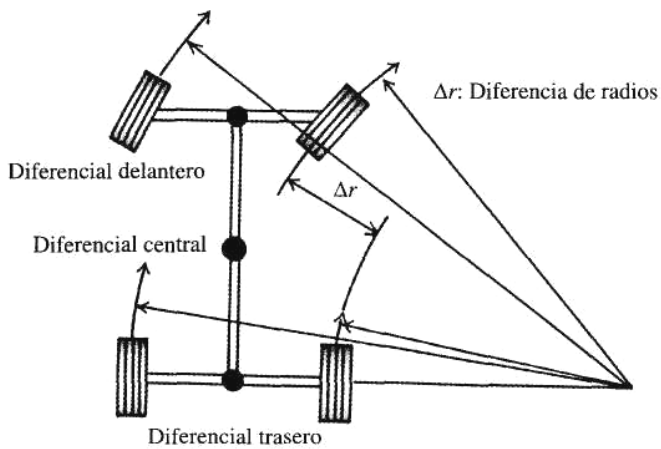


FIGURA 9-47

Comportamiento de giro de un vehículo de cuatro ruedas *Cortesía de Tochigi Fuji Sangyo, Japón*

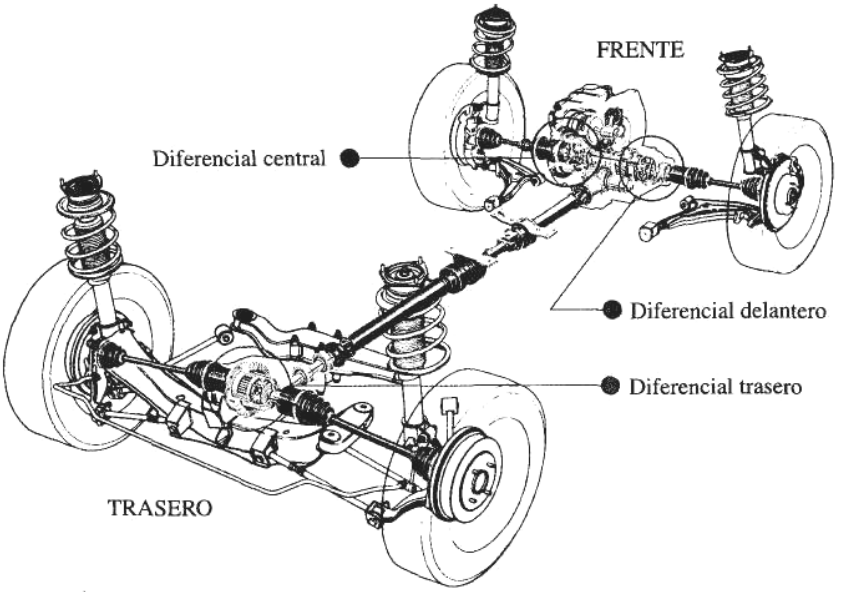


FIGURA 9-48
Un chasis con tracción en todas las ruedas *Cortesía de Tochigi Fuji Sangyo, Japón*

potencia de salida no puede ser mayor que la potencia de entrada, la potencia se divide entre las ruedas de acuerdo con sus velocidades. Cuando se viaja en línea recta (ambas ruedas tienen tracción), la mitad de la potencia va a cada rueda. Conforme el automóvil vira, la rueda más rápida tiene más potencia y la más lenta menos. Cuando una rueda pierde tracción (como en el hielo), gana *toda* la potencia (50% par de torsión x 200% velocidad) y la rueda con tracción tiene potencia cero (50% par de torsión x 0% velocidad). Ésta es la razón por la que se necesitan I4R en condiciones de deslizamiento. El diferencial del centro divide al par de torsión entre el delantero y el trasero en alguna proporción. Si un extremo del automóvil pierde tracción, el otro aún puede controlarse porque todavía tiene tracción.

DIFERENCIALES DESLIZANTES LIMITADOS Debido al comportamiento de una rueda cuando pierde tracción, se han creado varios diseños para limitar el deslizamiento entre las dos salidas en estas condiciones. Éstos se llaman diferenciales deslizantes limitados y en general proporcionan algún tipo de dispositivo de fricción entre los dos engranes de salida para transmitir algún par de torsión pero permitir aún el deslizamiento por giro. Algunos usan un acoplamiento fluido entre los engranes y otros utilizan discos de fricción con resorte cargados, o conos, como puede verse en la figura 9-49a). Algunos usan un embrague eléctricamente controlado dentro del tren epicíclico, seguro para los requerimientos del camino, como se muestra en la figura 9-49c). El diferencial Torsen® emplea el mecanismo de gusano cuya resistencia al movimiento en retroceso (controlado por la opción del ángulo de avance del gusano) proporciona algunos pares de torsión que se acoplan entre las salidas.

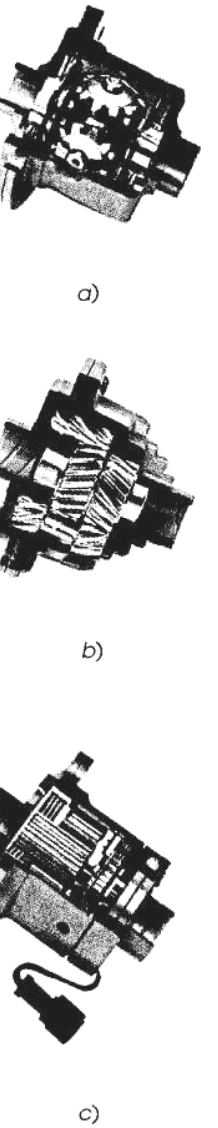


FIGURA 9-49
Diferenciales
Cortesía de Tochigi Fuji Sangyo, Japón

9.13 REFERENCIAS

1 **DilPare,** A. **L.** (1970). "A Computer Algorithm to Design Compound Gear Trains for Arbitrary Ratio". *J. of Eng. for Industry,* **93B(1),** pp. 196-200.

2 **Selfridge, R. G. y D. L. Riddle** (1978). "Design Algorithms for Compound Gear Train Ratios." ASME Paper: 78-DET-62.

3 **Levai, Z.** (1968). "Structure and Analysis of Planetary Gear Trains". *Journal of Mechanisms,* 3, pp. 131-148.

4 **Molian, S.** (1982). *Mechanism Design: An Introductory Text.* Cambridge University Press: Cambridge, p. 148.

5 **Auksmann, B. y D. A. Morelli** (1963). "Simple Planetary-Gear System". ASME Paper: 63-WA-204.

6 **Pennestri,** E. ***et al.*** (1993). "A Catalog of Automotive Transmissions with Kinematic and Power Flow Analyses". *Proc. of 3rd Applied Mechanisms and Robotics Conference:* Cincinnati, pp. 57-61.

9.14 PROBLEMAS

*†9-1 Un engrane tiene 22 dientes de la forma AGMA estándar de involuta y altura total, con paso diametral de 4. Calcule el diámetro de paso, paso circular, adendo, dedendo, espesor y holgura de los dientes.

†9-2 Un engrane tiene 40 dientes de la forma AGMA estándar de involuta y altura total, con paso diametral de 10. Calcule el diámetro de paso, paso circular, adendo, dedendo, espesor y holgura de los dientes.

†9-3 Un engrane tiene 30 dientes de la forma AGMA estándar de involuta y altura total, con paso diametral de 12. Obtenga el diámetro de paso, paso circular, adendo, dedendo, espesor y holgura de los dientes.

9-4 Mediante una cuerda, cinta adhesiva, un lápiz, un vaso de cristal o una lata, trace una curva involuta sobre una hoja. Con su transportador muestre que todas las normales a la curva son tangentes al círculo base.

*9-5 Un engranaje cilíndrico recto tiene diámetros de paso de 4.5 y 12 pulgadas. ¿Cuál es el tamaño máximo de los dientes, en función del paso diametral, que puede utilizarse sin que ocurra interferencia o rebaje?

a. Para un ángulo de presión de 20°.
b. Para un ángulo de presión de 25°. (Observe que el paso diametral no necesita ser un número entero.)

*†9-6 Diseñe un tren de engranes cilíndricos rectos del tipo simple para una relación de -9:1 y paso diametral de 8. Especifique los diámetros de paso y el número de dientes. Calcule la relación de contacto.

*†9-7 Diseñe un tren de engranes cilíndricos rectos del tipo simple para una relación de +8:1 y paso diametral de 6. Especifique los diámetros de paso y el número de dientes. Calcule la relación de contacto.

†9-8 Diseñe un tren de engranes cilíndricos rectos del tipo simple para una relación de -7:1 y paso diametral de 8. Especifique los diámetros de paso y el número de dientes. Calcule la relación de contacto.

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son apropiados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

†9-9 Diseñe un tren de engranes cilíndricos rectos del tipo simple para una relación de +6.5:1 y paso diametral de 5. Especifique los diámetros de paso y el número de dientes. Calcule la relación de contacto.

*†9-10 Diseñe un tren de engranes cilíndricos rectos del tipo compuesto para una relación de -70:1 y paso diametral de 10. Especifique los diámetros de paso y el número de dientes. Trace un croquis a escala.

†9-11 Diseñe un tren de engranes cilíndricos rectos del tipo compuesto para una relación de 50:1 y paso diametral de 8. Especifique los diámetros de paso y el número de dientes. Trace un croquis a escala.

*†9-12 Diseñe un tren de engranes cilíndricos rectos del tipo compuesto para una relación de 150:1 y paso diametral de 6. Especifique los diámetros de paso y el número de dientes. Trace un croquis a escala.

†9-13 Diseñe un tren de engranes cilíndricos rectos del tipo compuesto para una relación de -250:1 y paso diametral de 9. Especifique los diámetros de paso y el número de dientes. Trace un croquis a escala.

*†9-14 Diseñe un tren de engranes cilíndricos rectos del tipo compuesto, revertido, para una relación de 30:1 y paso diametral de 10. Especifique los diámetros de paso y el número de dientes. Trace un croquis a escala.

†9-15 Diseñe un tren de engranes cilíndricos rectos del tipo compuesto, revertido, para una relación de 40:1 y paso diametral de 8. Especifique los diámetros de paso y el número de dientes. Trace un croquis a escala.

*†9-16 Diseñe un tren de engranes cilíndricos rectos del tipo compuesto, revertido, para una relación de 75:1 y paso diametral de 12. Especifique los diámetros de paso y el número de dientes. Trace un croquis a escala.

†9-17 Diseñe un tren de engranes cilíndricos rectos del tipo compuesto, revertido, para una relación de 7:1 y paso diametral de 4. Especifique los diámetros de paso y el número de dientes. Trace un croquis a escala.

†9-18 Diseñe un tren de engranes cilíndricos rectos del tipo compuesto, revertido, para una relación de 12:1 y paso diametral de 6. Especifique los diámetros de paso y el número de dientes. Trace un croquis a escala.

*†9-19 Diseñe una caja de transmisión con engranes cilíndricos rectos del tipo compuesto, revertida, que produzca dos relaciones cambiables de +3:1 hacia adelante y -4.5:1 en reversa, con paso diametral de 6. Especifique los diámetros de paso y el número de dientes. Trace un croquis a escala.

†9-20 Diseñe una caja de transmisión con engranes cilíndricos rectos, del tipo compuesto, revertida que produzca dos relaciones cambiables de +5:1 hacia adelante y -3.5:1 en reversa, con paso diametral de 6. Especifique los diámetros de paso y el número de dientes. Trace un croquis a escala.

*†9-21 Diseñe una caja de transmisión con engranes cilíndricos rectos, del tipo compuesto, revertida, que produzca tres relaciones cambiables de +6:1 y +3.5:1 hacia adelante y —4:1 en reversa, con paso diametral de 8. Especifique los diámetros de paso y el número de dientes. Trace un croquis a escala.

†9-22 Diseñe una caja de transmisión con engranes cilíndricos rectos, del tipo compuesto, revertida, que produzca tres relaciones cambiables de +4.5:1 y +2.5:1 hacia adelante y

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son apropiados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad, Matlab o TKSolver.*

TABLA P9-1 Datos para el problema 9-25

Renglón	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	ω_2	ω_6	ω_{brazo}
a	30	25	45	50	200	?	20	–50
b	30	25	45	50	200	30	?	–90
c	30	25	45	50	200	50	0	?
d	30	25	45	30	160	?	40	–50
e	30	25	45	30	160	50	?	–75
f	30	25	45	30	160	50	0	?

-3.5:1 en reversa, con paso diametral de 5. Especifique los diámetros de paso y el número de dientes. Trace un croquis a escala.

†9-23 Diseñe los conos rodantes en contacto para una relación de -3:1 y un ángulo de 60° entre los ejes. Trace un croquis a escala.

†9-24 Diseñe los conos rodantes en contacto para una relación de -4.5:1 y un ángulo de 40° entre los ejes. Trace un croquis a escala.

*†9-25 La figura P9-1 muestra un tren de engranes planetario del tipo compuesto (no a escala). En la tabla P9-1 se indica el número de dientes y las velocidades de entrada. Para los renglones asignados determine la variable representada por el signo de interrogación.

*†9-26 La figura P9-2 muestra un tren de engranes planetario del tipo compuesto (no a escala). En la tabla P9-2 se indica el número de dientes y las velocidades de entrada. Para los renglones asignados determine la variable representada por el signo de interrogación.

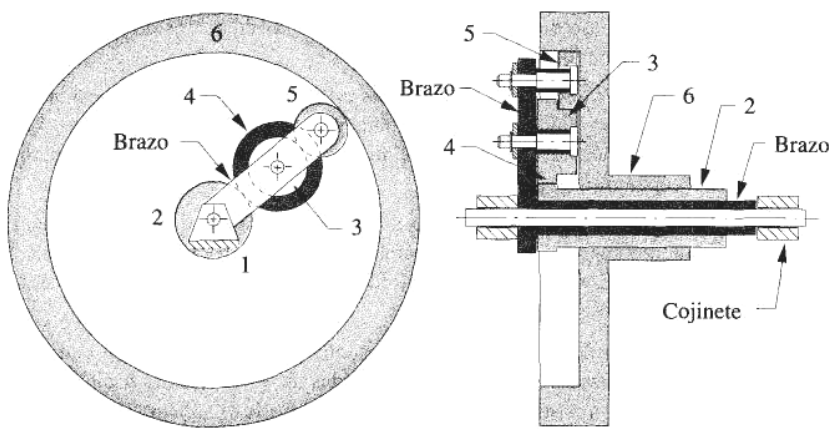


FIGURA P9-1
Engranaje planetario para el problema 9-25

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son apropiados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad, Matlab* o *TKSolver*.

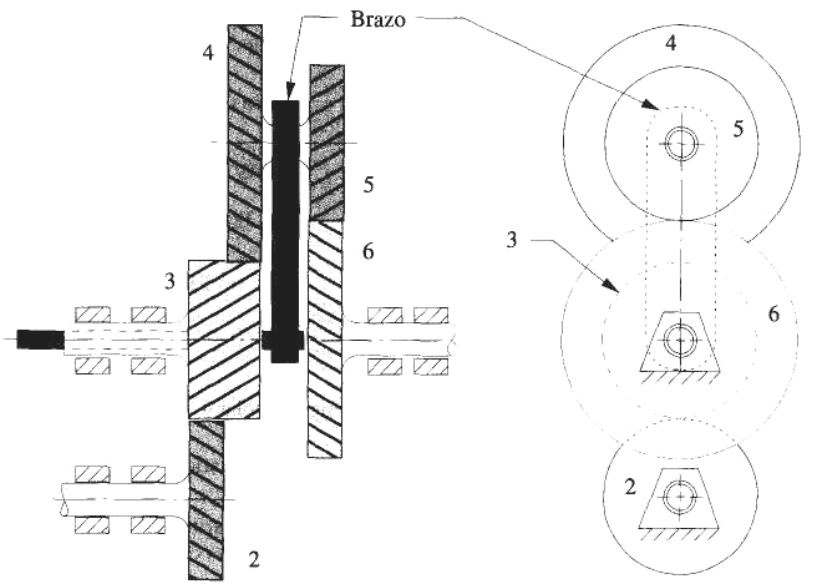


FIGURA P9-2

Tren de engranes planetarios del tipo compuesto para el problema 9-26

*†9-27 En la figura P9-3 se muestra un tren de engranes planetario usado en un diferencial trasero de automóvil (no a escala). El vehículo tiene ruedas con radio de rodamiento de 15 pulgadas y se mueve hacia adelante en línea recta a 50 mi/h. El motor gira a 2 000 rpm. La caja de transmisión está en marcha directa (1:1) con el eje de transmisión principal.

a. ¿Cuál es la velocidad en rpm de las ruedas traseras y la relación de engranes entre el engrane de anillo y el piñón?
b. Cuando el auto pasa por una capa de hielo, la rueda derecha tiene una velocidad de 800 rpm. ¿Cuál es la velocidad de la rueda izquierda? Sugerencia: la velocidad promedio de ambas ruedas es una constante. Calcule el valor fundamental del tren
c. de la etapa epicíclica.

TABLA P9-2 Datos para el problema 9-26

Renglón	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	ω_2	ω_6	ω_{brazo}
a	50	25	45	30	40	?	20	–50
b	30	35	55	40	50	30	?	–90
c	40	20	45	30	35	50	0	?
d	25	45	35	30	50	?	40	–50
e	35	25	55	35	45	30	?	–75
f	30	30	45	40	35	40	0	?

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son apropiados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad, Matlab* o *TKSolver*.

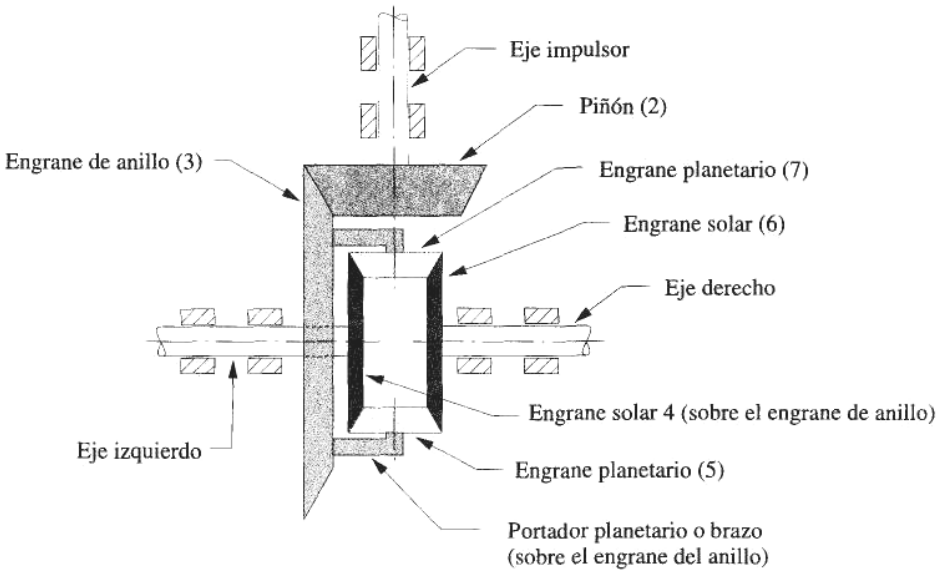


FIGURA P9-3
Diferencial automotriz de un tren de engranes planetarios para el problema 9-27

†9-28 Diseñe una caja de engranes planetarios de reducción de velocidad que se usará para levantar una carga de 5 toneladas a una altura de 50 pies, con un motor que desarrolla un par de torsión de 20 lb-pie y cuya velocidad de operación es de 1 750 rpm. El tambor del montacargas de cable no tiene más de 16 pulgadas de diámetro, cuando tiene enrollado todo el cable. El reductor de velocidad no debe tener un diámetro mayor que el del tambor del cable. Se desean engranes con no más de 75 dientes y cuyo paso diametral no sea menor que 6 para resistir los esfuerzos. Trace un croquis de vistas múltiples para el diseño y presente todos los cálculos. ¿Cuánto tiempo tomará elevar la carga haciendo uso del equipo diseñado?

*†9-29 Determine todas las combinaciones posibles de dos etapas del engrane de tipo compuesto que darán una aproximación a la base neperiana 2.71828. El límite del número de dientes está entre 18 y 80. Determine la combinación que da el error más pequeño.

†9-30 Determine todas las combinaciones posibles de dos etapas del engrane de tipo compuesto que darán una aproximación a 2π. El límite del número de dientes está entre 15 y 90. Determine la combinación que da el error más pequeño.

†9-31 Determine todas las combinaciones posibles de dos etapas del engrane de tipo compuesto que darán una aproximación a $\pi/2$. El límite del número de dientes está entre 20 y 100. Determine la combinación que da el error más pequeño.

†9-32 Determine todas las combinaciones posibles de dos etapas del engrane de tipo compuesto que darán una aproximación a $3\pi/2$. El límite del número de dientes está entre 20 y 100. Determine la combinación que da el error más pequeño.

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son apropiados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad*, *Matlab* o *TKSolver*.

†9-33 En la figura P9-4a) se muestra un tren de reloj revertido. Diséñelo usando engranes con un ángulo de presión nominal de 25° con $24\ p_d$ que tengan entre 12 y 150 dientes. Determine el número de dientes y la distancia central nominal. Si la distancia central tiene una tolerancia de fabricación de ± 0.006 pulgadas, ¿qué ángulo de presión y juego habrá en el minutero en cada extremo de la tolerancia?

†9-34 En la figura P9-4í>) se muestra una transmisión de cambios de tres velocidades. El eje *F*, con el conjunto de engranes *E, G* y *H,* se desliza de izquierda a derecha para engranar y desengranar los tres engranajes a la vez. Diseñe las tres etapas revertidas para obtener las velocidades de salida del eje *F* de 150, 350 y 550 rpm para una velocidad de entrada de 450 rpm al eje *D.*

†9-35 En la figura P9-5a) se muestra un tren epicíclico compuesto usado para manejar un tambor de malacate. El engrane *A* es impulsado a 20 rpm SMR y el engrane *D* está fijo en el fondo. En la figura se indica el número de dientes. Determine la velocidad y dirección del tambor. ¿Cuál es la eficiencia de este tren si los engranajes básicos tienen $E_0 = 0.98$?

†9-36 En la figura *P9-5b)* se muestra un tren epicíclico. El brazo es impulsado en SCMR a 20 rpm. El engrane *A* es impulsado SMR a 40 rpm. Encuentre la velocidad del engrane del anillo *D.*

†9-37 En la figura P9-6a) se muestra un tren epicíclico. El número de dientes se indica en la figura. El brazo es impulsado en SMR a 60 rpm y el engrane *A* en el eje 1 está conectado a la fijación. Encuentre la velocidad del engrane *D* en el eje 2. ¿Cuál es la eficiencia de este tren si los engranajes básicos tienen $E_0 = 0.98$?

† Estos problemas son apropiados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

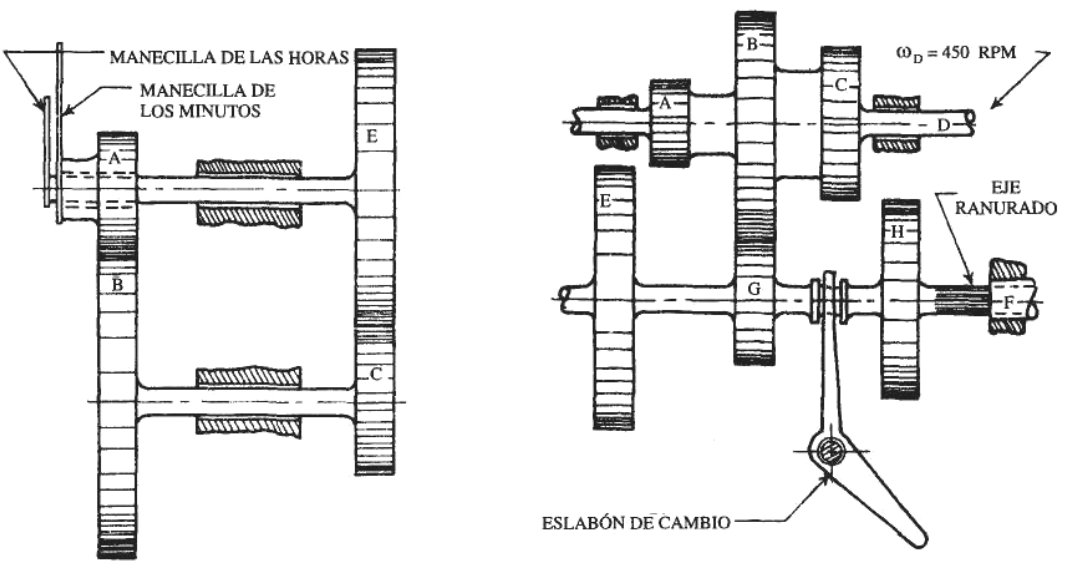


FIGURA P9-4

Problemas 9-33 y 9-34 *Tomado de P. H. Hill y W. P. Rule. (1960). Mechanisms: Analysis and Design, con autorización*

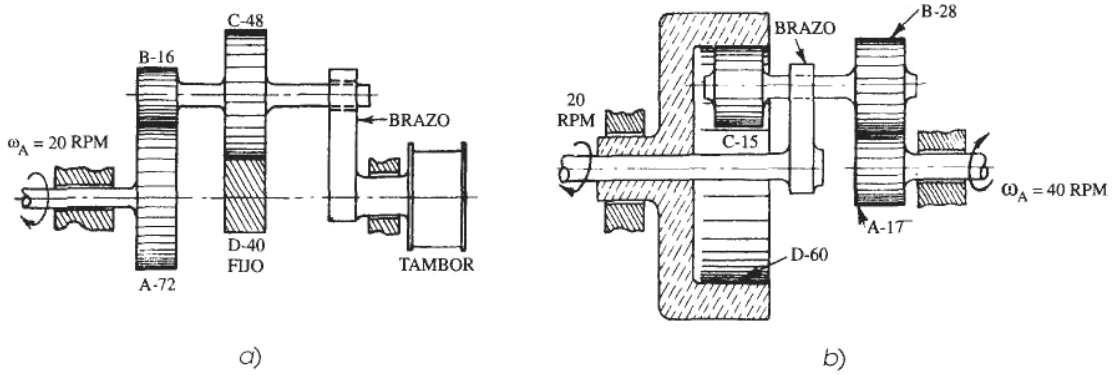


FIGURA P9-5

Problemas 9-35 y 9-36 *Tomados de P. H. Hill y W. P. Rule. (1960). Mechanisms: Analysis and Design, con autorización*

†9-38 En la figura P9-6¿>) se muestra un diferencial. El engrane *A* es impulsado en SCMR a 10 rpm y el engrane *B* es impulsado en SMR a 24 rpm. El número de dientes se indica en la figura. Encuentre la velocidad del engrane *D.*

†9-39 En la figura P9-7a) se muestra un tren de engranes compuesto, revertido y de etapas epicíclicas. El número de dientes se indica en la figura. El motor es impulsado en SCMR a 1 750 rpm. Encuentre las velocidades de los ejes 1 y 2.

†9-40 En la figura P9-7£») se muestra un tren epicíclico que se usa para impulsar un tambor de malacate. El brazo es impulsado en SCMR a 250 rpm y el engrane *A* del eje 2 está conectado a la fijación. El número de dientes se indica en la figura. Determine la

† Estos problemas son apropiados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad*, *Matlab* o *TKSolver*.

9

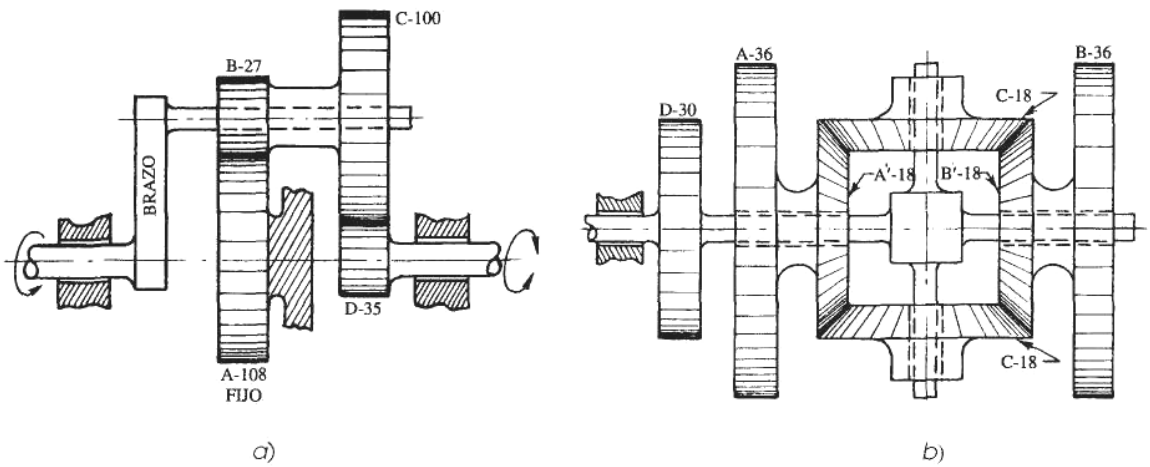
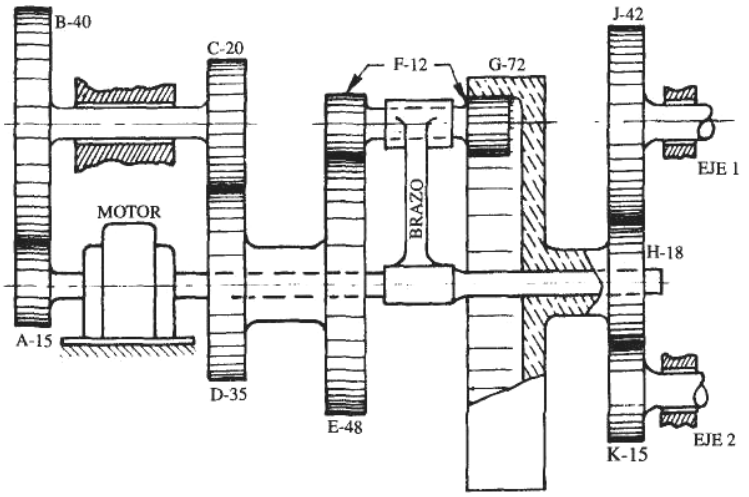


FIGURA P9-6

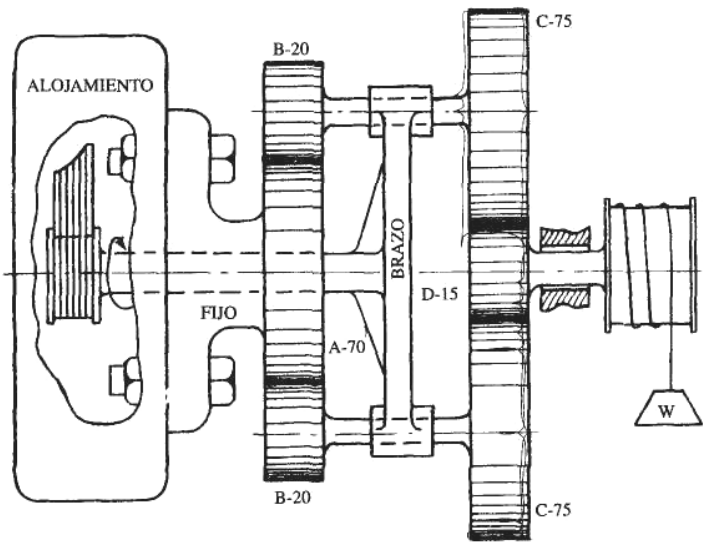
Problemas 9-37 y 9-38 *Tomados de P. H. Hill y W. P. Rule. (1960). Mechanisms: Analysis and Design, con autorización*

velocidad y dirección del tambor en el eje 1. ¿Cuál es la eficiencia de este tren si los engranajes básicos tienen $E_0 = 0.98$?

†9-41 En la figura P9-8 se muestra un tren epicíclico compuesto. El engrane 2 es impulsado en SCMR a 800 rpm y el engrane *D* está conectado a la fijación. El número de dientes se indica en la figura. Determine la velocidad y dirección de los engranes 1 y 3.



a)



b)

FIGURA P9-7

Problemas 9-39 y 9-40 *Tomados de P. H. Hill y W. P. Rule. (1960). Mechanism: Analysis and Design*

† Estos problemas son apropiados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

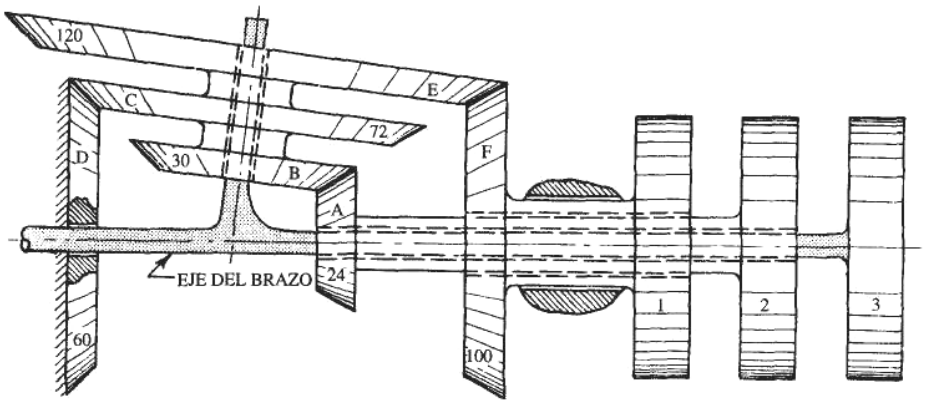


FIGURA P9-8

Problema 9-41 *Tomado de P. H. Hill y W. P. Rule. (1960). Mechanisms: Analysis and Design, con autorización*

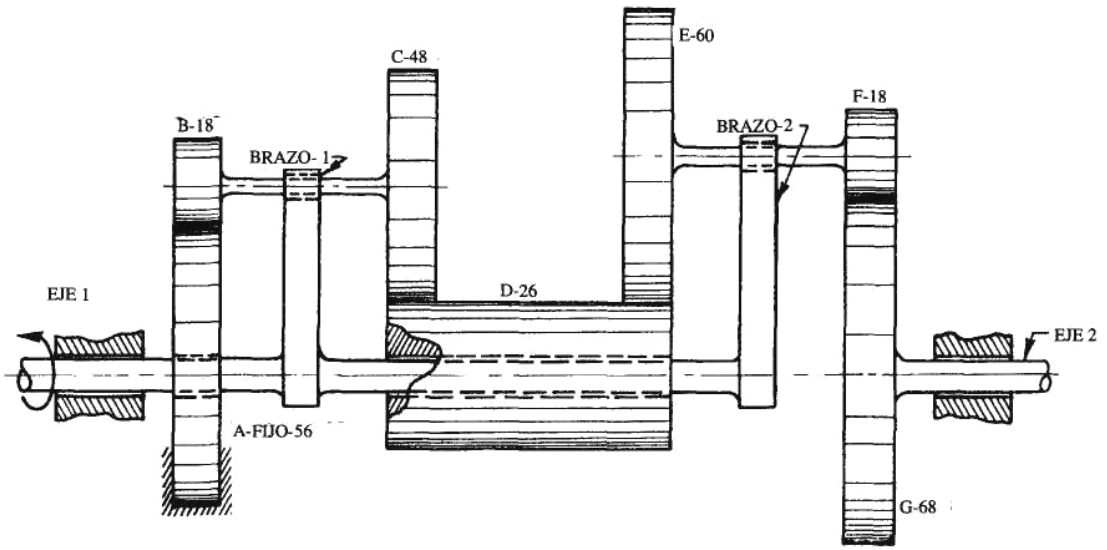
†9-42 En la figura P9-9a) se muestra un tren epicíclico compuesto. El eje 1 es impulsado en SCMR a 300 rpm y el engrane *A* está conectado a la fijación. El número de dientes se indica en la figura. Determine la velocidad y dirección del eje 2.

†9-43 En la figura P9-9b) se muestra un tren epicíclico compuesto. El eje 1 es impulsado a 40 rpm. El número de dientes se indica en la figura. Determine la velocidad y dirección de los engranes *G y M.*

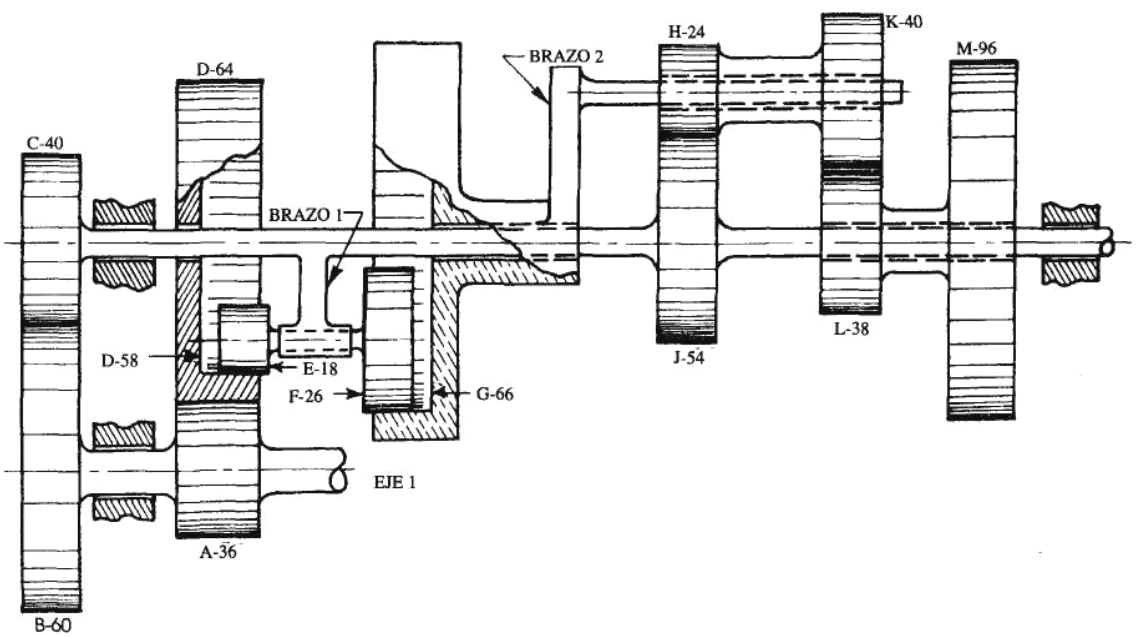
†9-44 Calcule las relaciones en la transmisión del modelo T que se muestra en la figura 9-46.

† Estos problemas son apropiados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

9



a)



b)

FIGURA P9-9

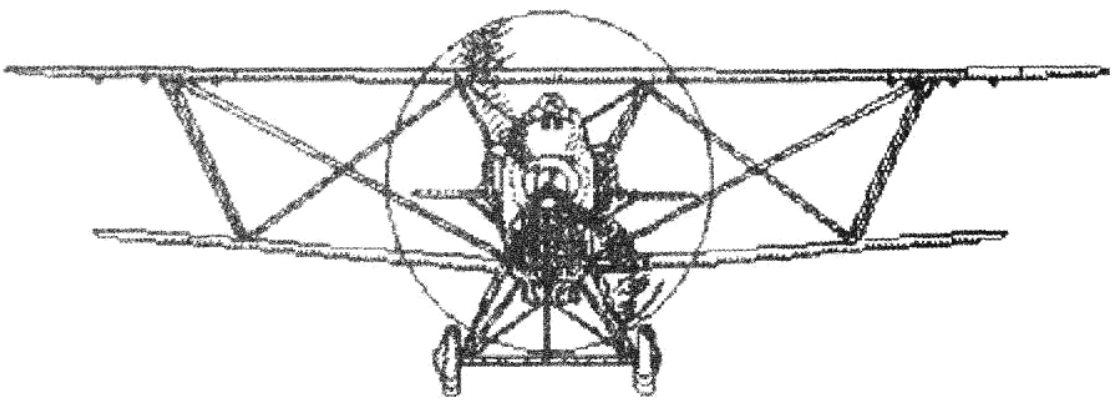
Problemas 9-42 y 9-43 *Tomados de P. H. Hill y W. P. Rule. (1960). Mechanisms: Analysis and Design, con autorización*


Fin
de la
parte I

PARTE II

El mundo entero de la maquinaria... está inspirado en la función de los órganos de reproducción. El diseñador anima objetos artificiales mediante la simulación de movimientos de animales empeñados en la propagación de las especies. Nuestras máquinas son Romeos de acero y Julietas de hierro fundido.

J. COHÉN, *Human Robots in Myth and Science*, Alien & Unwin, Londres, 1966



DINÁMICA DE MAQUINARIA



Capítulo 10

PRINCIPIOS DE DINÁMICA

Ha logrado la mitad de lo hecho
quien ha realizado un comienzo.
HORACIO, 65-8 A. C.

10.0 INTRODUCCIÓN

En la parte I de este texto se estudió la **cinemática** de mecanismos, aunque se ignoraron temporalmente las fuerzas presentes en ellos. En esta segunda parte se tratará el problema de determinar las fuerzas presentes en mecanismos y maquinaria en movimiento. Este tema se llama **cinética** o **análisis de fuerzas dinámicas.** Se comenzará con un breve repaso de algunos principios necesarios para el análisis dinámico, ya que se supone que el lector ha tomado un curso introductorio de dinámica. Si no está muy familiarizado con en el tema, puede repasarlo en el texto que se sugiere en la referencia [1], o en cualquier otro que se ocupe de él.

10.1 LEYES DEL MOVIMIENTO DE NEWTON

El análisis de fuerzas dinámicas implica la aplicación de las tres **leyes del movimiento de Newton,** que son:

1 *Un cuerpo en reposo tiende a permanecer en reposo, y un cuerpo en movimiento con velocidad constante tiende a mantener esa velocidad a menos que actúe sobre él una fuerza externa.*

2 *El cambio de la cantidad de movimiento de un cuerpo con respecto al tiempo es igual a la magnitud de la fuerza aplicada y actúa en la dirección de la fuerza.*

3 *Para cada fuerza de acción hay una fuerza de reacción igual y opuesta.*

La segunda ley está expresada en términos de la razón de cambio de la *cantidad de movimiento,* $M = m\mathbf{v}$, donde m es masa y $\mathbf{v}$ es velocidad. En este análisis se supondrá a la

masa *m* constante. La razón de cambio de mv con respecto al tiempo es ma, donde **a** es la aceleración del centro de la masa.

$$F = ma \tag{10.1}$$

F es la resultante de todas las fuerzas ejercidas sobre el sistema que actúan en el centro de masa.

Los problemas de dinámica se pueden diferenciar entre dos subclases, dependiendo de qué cantidades se conocen y cuáles deben encontrarse. El **"problema avanzado de dinámica"** es uno en el cual se conoce todo acerca de las cargas externas (fuerzas y/o pares de torsión) que se ejercen sobre el sistema, y se desea determinar las aceleraciones, velocidades y desplazamientos que resultan de la aplicación de esas fuerzas y pares de torsión. Esta subclase es común en los problemas con los que probablemente se encontró en un curso introductorio de dinámica, tales como determinar la aceleración de un bloque que se desliza hacia abajo por un plano, impulsado por la fuerza de gravedad. Dadas F y m, resuelva para a.

La segunda subclase de los problemas dinámicos, denominada **"problema inverso de la dinámica",** es aquel en el que se conocen las aceleraciones, velocidades y desplazamientos (deseados) que se van a implantar en el sistema, y se espera determinar las magnitudes y direcciones de las fuerzas y pares de torsión necesarias para proporcionar los movimientos deseados y los que resultan de ellos. Algunas veces este caso inverso de la dinámica se denomina también **cinetostática.** Dadas **a** y *m,* resuelva para F.

Cualquiera que sea la subclase de problema es importante darse cuenta que ambos son problemas de dinámica. Cada uno resuelve simplemente F = ma para una variable diferente. Para efectuar esto primero se deben repasar algunas propiedades fundamentales geométricas y de masa que se necesitan para realizar los cálculos.

10.2 MODELOS DINÁMICOS

10

En el análisis dinámico a menudo es conveniente crear un modelo simplificado de una parte complicada. Estos modelos se consideran algunas veces como un conjunto de masas puntuales conectadas por barras sin masa. Para que un modelo de cuerpo rígido sea dinámicamente equivalente al cuerpo original, deben cumplirse tres condiciones:

1 *La masa del modelo debe ser igual que la del cuerpo original.*

2 *El centro de gravedad debe estar en el mismo lugar que el del cuerpo original.*

3 *El momento de inercia de masa debe ser igual que el del cuerpo original.*

10.3 MASA

¡La masa no es peso! La masa es una propiedad invariable de un cuerpo rígido. El peso del mismo cuerpo varía dependiendo del sistema gravitacional en el que se encuentra. Véase la sección 1.10 para un análisis del uso de unidades de masa apropiadas en diversos sistemas de medidas. En los cálculos se supondrá que las masas de las partes son constantes. Para la mayoría de la maquinaria terrestre, ésta es una suposición razonable. La rapidez con la que un automóvil o una excavadora pierde masa debido al consumo de

combustible, por ejemplo, es lo suficientemente baja para ignorarla cuando se calculan fuerzas dinámicas sobre periodos cortos. Sin embargo, ésta no sería una suposición segura para un vehículo tal como un transbordador espacial, cuya masa cambia rápida y drásticamente durante el despegue.

Cuando se diseña maquinaria, primero se debe realizar un análisis cinemático completo del diseño, como se describió en la parte I de este texto, para obtener información acerca de las aceleraciones de las partes móviles. Después se aplica la segunda ley de Newton para calcular las fuerzas dinámicas. Pero para hacerlo es necesario conocer las masas de todas las partes móviles que tienen esas aceleraciones conocidas. ¡Estas partes no existen todavía! Como en cualquier problema de diseño, en esta etapa se carece de información suficiente para determinar con precisión las mejores dimensiones y formas de las partes. Se deben estimar las masas de los eslabones y otras partes del diseño para dar un primer paso en el cálculo. Se tendrá entonces que iterar para hallar soluciones cada vez mejores, conforme se genere más información. Véase la sección 1.5 en el proceso de diseño para repasar el uso de la iteración en diseño.

Una primera estimación de las masas de sus partes se obtiene suponiendo algunas formas y tamaños razonables para todas las partes y eligiendo los materiales apropiados. Luego calcule el volumen de cada parte y multiplíquelo por la **densidad** del material (no por el "peso específico") para obtener una primera aproximación de su masa. Estos valores de masa pueden utilizarse entonces en la ecuación de Newton. En el apéndice B se listan algunas densidades de materiales comunes en ingeniería.

¿Cómo se sabrá si las dimensiones y formas elegidas de los eslabones son aceptables, sin suponerlos óptimos? Desafortunadamente, no se sabrá hasta que se hayan realizado todos los cálculos y efectuado un análisis completo de esfuerzos y deformaciones de las partes. Es común el caso, en especial en elementos largos y delgados, tales como ejes o eslabones esbeltos, que las deformaciones de las partes expuestas a cargas dinámicas limiten el diseño incluso a bajos niveles de esfuerzo. En algunos casos los esfuerzos serán excesivos.

Probablemente se descubrirá que las partes fallan bajo las fuerzas dinámicas, así que habrá que regresar a las suposiciones originales acerca de las formas, dimensiones y materiales de estas partes, rediseñarlas y repetir los análisis de fuerza, esfuerzo y deformación. El diseño es, sin duda, un **proceso iterativo.**

El tema del análisis de esfuerzo y deformación está fuera del alcance de este texto. Solamente se menciona para presentar en contexto el estudio del análisis de fuerzas dinámicas. ¡Estas fuerzas dinámicas se analizan esencialmente para proporcionar la información que permita realizar el análisis de esfuerzo y deformación sobre las partes! También es importante observar que, a diferencia de una situación de fuerza estática, en la cual un diseño defectuoso podría corregirse agregando más masa a la parte para reforzarla, si se hiciera esto en una situación de fuerza dinámica se puede tener un efecto nocivo. ¡Más masa con la misma aceleración generará incluso mayores fuerzas dinámicas y, por consiguiente, mayores esfuerzos! El diseñador de máquinas a menudo necesita quitar masa (en los lugares apropiados) de las partes para reducir los esfuerzos y las deformaciones debidas a F = ma. Por lo tanto, el diseñador necesita tener una buena noción de las propiedades del material y de los análisis de esfuerzo y deformación para modelar y dimensionar adecuadamente las partes en el caso de una masa mínima mientras se maximiza la resistencia y rigidez de modo que puedan soportar las fuerzas dinámicas.

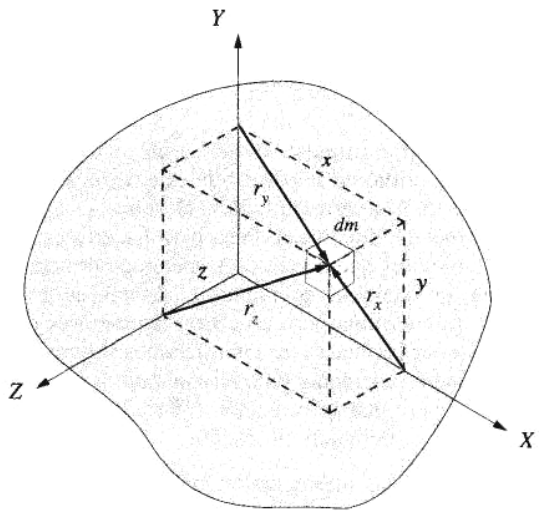


FIGURA 10-1
Una masa generalizada en un sistema coordenado tridimensional

10.4 MOMENTO DE MASA Y CENTRO DE GRAVEDAD

Cuando la masa de un objeto se distribuye sobre algunas dimensiones, poseerá un momento con respecto a cualquier eje que se elija. La figura 10-1 muestra una masa de forma general en un sistema de ejes coordenados *x y z.* También se muestra un elemento diferencial de masa. El **momento de masa (primer momento de masa)** del elemento diferencial es igual al **producto de su masa por su distancia** del eje de interés. Con respecto a los ejes *x, y y z* éstos son:

$$dM_x = r_x^1 dm = \sqrt{(y^2 + z^2)}\,dm \tag{10.2a}$$

$$dM_y = r_y^1 dm = \sqrt{(x^2 + z^2)}\,dm \tag{10.2b}$$

$$dM_z = r_z^1 dm = \sqrt{(x^2 + y^2)}\,dm \tag{10.2c}$$

El radio desde el eje de interés hasta el elemento diferencial se muestra con un exponente 1 para destacar la razón de esta propiedad denominada primer momento de masa. Para obtener el momento de masa del cuerpo total se integra cada una de estas expresiones:

$$M_x = \int \sqrt{(y^2 + z^2)}\,dm \tag{10.3a}$$

$$M_y = \int \sqrt{(x^2 + z^2)}\,dm \tag{10.3b}$$

$$M_z = \int \sqrt{(x^2 + y^2)}\,dm \tag{10.3c}$$

Si el momento de masa con respecto a un eje particular es numéricamente cero, entonces tal eje pasa por el **centro de masa *(CM)*** del cuerpo, que para los sistemas terrestres coincide con su **centro de gravedad** *(CG).* Por definición la suma de los primeros momentos respecto a sus ejes que pasan por el centro de gravedad es cero. Se necesitará localizar el *CG* de todos los cuerpos móviles en los diseños debido a que la componente de aceleración lineal de cada cuerpo se calcula actuando en ese punto.

A menudo conviene modelar una forma complicada en diversas formas sencillas interconectadas, cuyas geometrías individuales permitan un cálculo fácil de sus masas y localizaciones de sus *CG* locales. El *CG* global se determina entonces mediante la suma de los primeros momentos de esas formas simples e igualándola a cero. En el apéndice C se listan fórmulas para los volúmenes y localizaciones de los centros de gravedad de algunas formas simples comunes.

En la figura 10-2 se muestra un modelo simple de un mazo dividido en dos partes cilíndricas, el mango y la cabeza, con masas m_h y m_d, respectivamente. Los centros de gravedad individuales de las dos partes están a l_d y $l_h/2$, respectivamente, con respecto al eje *ZZ.* Se desea hallar la localización del centro de gravedad compuesto del mazo, con respecto a *ZZ.* Sumando los primeros momentos de las componentes individuales respecto a *ZZ,* e igualándolos con el momento de la masa total con respecto a *ZZ,* se tiene:

$$\sum M_{ZZ} = m_h \frac{l_h}{2} + m_d l_d = (m_h + m_d)d \tag{10.3d}$$

En esta ecuación se puede despejar la distancia *d* a lo largo del eje *X,* que, en este ejemplo simétrico, es la única dimensión del *CG* del conjunto, el cual no es discernible por inspección. Las componentes y y z del *CG* del conjunto son cero.

$$d = \frac{m_h \frac{l_h}{2} + m_d l_d}{(m_h + m_d)} \tag{10.3e}$$

10

10.5 MOMENTO DE INERCIA DE MASA (SEGUNDO MOMENTO DE MASA)

La segunda ley de Newton se aplica tanto a sistemas en rotación como a aquéllos en translación. La forma rotacional de la segunda ley de Newton es:

$$\mathbf{T} = I\alpha \tag{10.4}$$

donde T es el par de torsión resultante con respecto al centro de masa, α es la aceleración angular, e I ss el momento de inercia de masa con respecto a un eje que pasa por el centro de la masa.

El momento de inercia de masa se refiere también a cierto eje de rotación, generalmente a aquel que pasa por el *CG.* Diríjase de nuevo a la figura 10-1, la cual muestra una masa de forma general y con un sistema de ejes *xyz.* También se muestra un elemento diferencial de masa. El **momento de inercia de masa** del elemento diferencial es igual al **producto de su masa por el cuadrado de su distancia** desde el eje de interés. Con respecto a los ejes *x, y* y *z* éstos son:

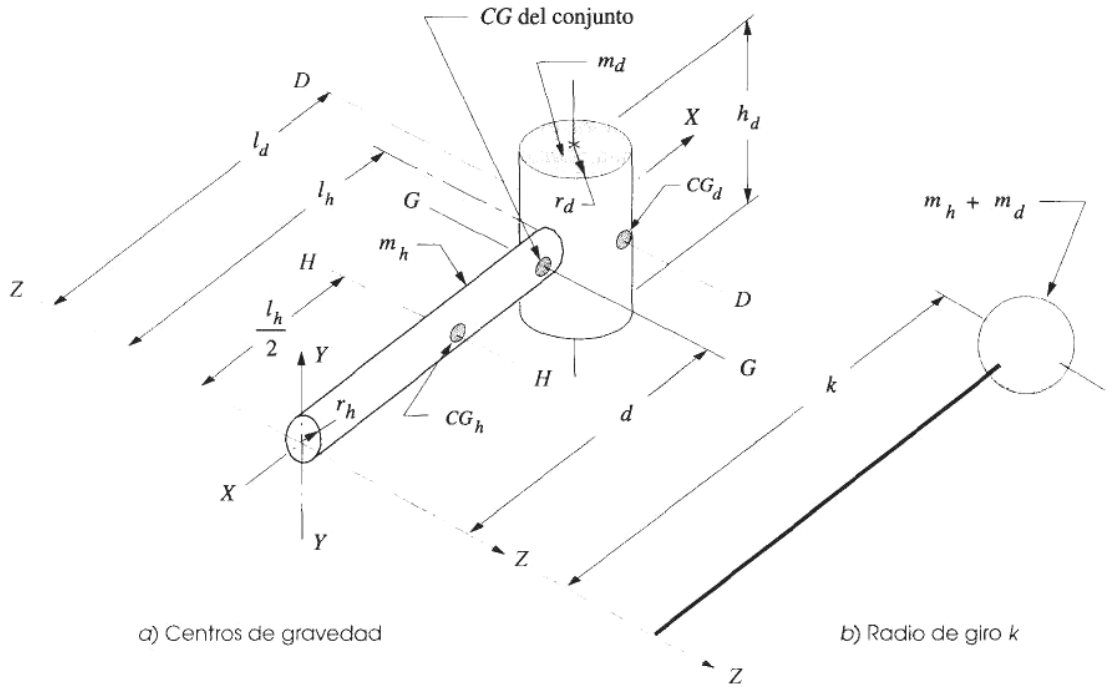


FIGURA 10-2

Modelos dinámicos, centro de gravedad del conjunto y radio de giro del conjunto de un mazo

10

$$dI_x = r_x^2 dm = (y^2 + z^2)dm \tag{10.5a}$$

$$dI_y = r_y^2 dm = (x^2 + z^2)dm \tag{10.5b}$$

$$dI_z = r_z^2 dm = (x^2 + y^2)dm \tag{10.5c}$$

El exponente 2 en el término del radio da a esta propiedad su otro nombre de **segundo momento de masa.** Para obtener los momentos de inercia de masa del cuerpo total se integra cada una de estas expresiones.

$$I_x = \int (y^2 + z^2)dm \tag{10.6a}$$

$$I_y = \int (x^2 + z^2)dm \tag{10.6b}$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2)dm \tag{10.6c}$$

Aunque es claramente intuitivo apreciar el significado físico del primer momento de una masa, es más difícil hacer lo mismo para el segundo momento, o momento de inercia.

Considere la ecuación 10.4. Ésta establece que el par de torsión es proporcional a la aceleración angular, y que la constante de proporcionalidad es este momento de inercia, /. Imagínese un martillo común o un mazo como el que se describe en la figura 10-2. La cabeza, fabricada de acero, tiene una masa mayor comparada con la del ligero mango de madera. Cuando se sujeta adecuadamente en el extremo del mango, el radio hasta la masa de la cabeza es largo. Su contribución al / total del mazo es proporcional al cuadrado del radio desde el eje de rotación (su muñeca de la mano en el eje *ZZ)* hasta la cabeza del mazo. Por consiguiente, toma un par de torsión considerablemente mayor para blandir (y, por lo tanto, acelerar angularmente) el mazo cuando se sujeta en forma adecuada que cuando se le sujeta cerca de la cabeza. Es probable que cuando era niño, usted sujetaba un martillo cerca de la cabeza, puesto que no tenía la fuerza necesaria para proporcionarle el par de torsión mayor necesario como cuando se sujeta adecuadamente. Quizá también haya encontrado dificultad para clavar cuando sujetaba el martillo cerca de la cabeza, ya que de esta manera no podía almacenar mucha **energía cinética** en él. En un sistema de traslación la energía cinética es:

$$EC = \frac{1}{2}mv^2 \tag{10.7a}$$

y en un sistema de rotación la energía cinética es:

$$EC = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{10.7b}$$

Por lo tanto, la energía cinética almacenada en el mazo es también proporcional a su momento de inercia I y a ω^2. Así, puede ver que al tomar el mazo cerca de la cabeza se reduce el I y se disminuye la energía cinética disponible para clavar el clavo.

El momento de inercia es entonces un indicador de la capacidad del cuerpo para almacenar energía cinética rotacional, y es también un indicador de la cantidad del par de torsión que se requiere para acelerar rotacionalmente el cuerpo. A menos que esté diseñando un dispositivo cuyo propósito sea almacenar y transferir grandes cantidades de energía (troqueladora, martinete, trituradora de rocas, etc.), probablemente estará tratando de minimizar los momentos de inercia de las partes rotatorias. Así como la masa es una medida de resistencia a la aceleración lineal, el momento de inercia es una medida de resistencia a la aceleración angular. Un I mayor requerirá un par de torsión mayor y, por consiguiente, un motor de mayor tamaño y potencia para obtener la misma aceleración. Después se verá cómo aprovechar el momento de inercia en una maquinaria rotatoria mediante el uso de volantes con gran I. Las unidades del momento de inercia de masa se determinan haciendo un análisis de unidades ya sea en la ecuación 10.4 o en la ecuación 10.7, y se muestran en la tabla 1-4. En el sistema **ips** éstas son lb-pulg-s^2 o bien blob-pulg^2. En el sistema SI éstas son N-m-s^2 o kg-m^2.

10.6 TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS (O DE TRANSFERENCIA)

El momento de inercia de un cuerpo con respecto a cualquier eje *(ZZ)* se expresa como la suma de su momento de inercia en relación con un eje *(GG),* paralelo a ZZ, que atraviesa su *CG,* y el cuadrado de la distancia perpendicular entre esos ejes paralelos.

$$I_{ZZ} = I_{GG} + md^2 \tag{10.8}$$

donde *ZZ* y *GG* son ejes paralelos, *GG* atraviesa el *CG* del cuerpo o del conjunto, *m* es la masa del cuerpo o del conjunto, y *d* es la distancia perpendicular entre los ejes paralelos. Esta propiedad es muy útil cuando se calcula el momento de inercia de una forma compleja que se ha dividido en un conjunto de formas simples como se muestra en la figura 10.2a), que representa un modelo simplista de un mazo. El mazo está dividido en dos piezas cilíndricas, el mango y la cabeza, que tienen masas m_h y m_d, y radios r_h y r_d, respectivamente. Las expresiones para los momentos de inercia de masa de un cilindro con respecto a los ejes que pasan a través de su *CG* se encuentran en el apéndice C, y para el mango con respecto al eje *HH* que pasa por su *CG* son:

$$I_{HH} = \frac{m_h\left(3r_h^2 + l_h^2\right)}{12} \tag{10.9a}$$

y para la cabeza con respecto al eje *DD* que pasa por su *CG:*

$$I_{DD} = \frac{m_d\left(3r_d^2 + h_d^2\right)}{12} \tag{10.9b}$$

Aplicando el teorema de los ejes paralelos para transferir el momento de inercia al eje *ZZ* en el extremo del mango:

$$I_{ZZ} = \left[I_{HH} + m_h\left(\frac{l_h}{2}\right)^2\right] + \left[I_{DD} + m_d l_d^2\right] \tag{10.9c}$$

10.7 RADIO DE GIRO

El **radio de giro** de un cuerpo se define como el radio en el cual podría concentrarse la masa total de un cuerpo de modo que el modelo resultante tenga el mismo momento de inercia que el cuerpo original. La masa de este modelo debe ser la misma que la del cuerpo original. Sea I_{ZZ} el momento de inercia de masa con respecto a ZZ, a partir de la ecuación 10.9c, *y mía.* masa del cuerpo original. Por el teorema de los ejes paralelos, una masa concentrada *m* a un radio *k* tendrá un momento de inercia:

$$I_{ZZ} = mk^2 \tag{10.10a}$$

Ya que se desea que I_{ZZ} sea igual al momento de inercia original, el **radio de giro** necesario en el que se concentrará la masa *m* es entonces:

$$k = \sqrt{\frac{I_{ZZ}}{m}} \tag{10.10b}$$

Observe que esta propiedad del radio de giro permite la construcción de un modelo dinámico más simple del sistema, en el cual toda la masa del sistema se concentra en un "punto de masa" en el extremo de una barra de masa despreciable de longitud *k.* La figura 10-2¿>) muestra un modelo como el del mazo de la figura 10-2a).

Comparando la ecuación 10.10a con la ecuación 10.8, se ve que el radio de giro *k* siempre será mayor que el radio del *CG* del conjunto del cuerpo original:

$$I_{CG} + md^2 = I_{ZZ} = mk^2 \qquad \therefore k > d \tag{10.10c}$$

En el apéndice C se incluyen fórmulas para los momentos de inercia y los radios de giro de algunas formas comunes.

10.8 CENTRO DE PERCUSIÓN

El centro de percusión es un punto de un cuerpo que, cuando se le golpea con una fuerza, con él estará asociado otro punto llamado **centro de rotación** en el que habrá una fuerza de reacción cero. Probablemente usted ha experimentado el resultado de "perder el centro de percusión" cuando golpea una pelota de béisbol o softbol con un bat en el punto erróneo. El "sitio correcto en el bat" para golpear la bola es el centro de percusión asociado con el punto en el que sus manos sujetan el bat (el centro de rotación). Al golpear la bola en un punto diferente del centro de percusión se obtiene como resultado una fuerza punzante repartida en sus manos. Golpee en el punto adecuado y no sentirá ninguna fuerza (ni dolor). El centro de percusión a veces se denomina "punto suave" de un bat, una raqueta de tenis o un palo de golf. En el caso del ejemplo del mazo, un centro de percusión en la cabeza de éste corresponde a un centro de rotación cercano al extremo del mango, y el mango generalmente está contorneado para que usted lo sujete ahí.

La explicación de este fenómeno es muy simple. Para realizar el ejemplo de dos dimensiones y eliminar los efectos de la fricción, imagínese un palo de hockey de masa *m* situado sobre el hielo como se muestra en la figura 10-3a). Golpee con un tiro recto en el punto *P* con una fuerza F perpendicular al eje del palo. El palo comenzará a trasladarse a través del hielo en un movimiento plano complejo, de rotación y traslación. Su movi-

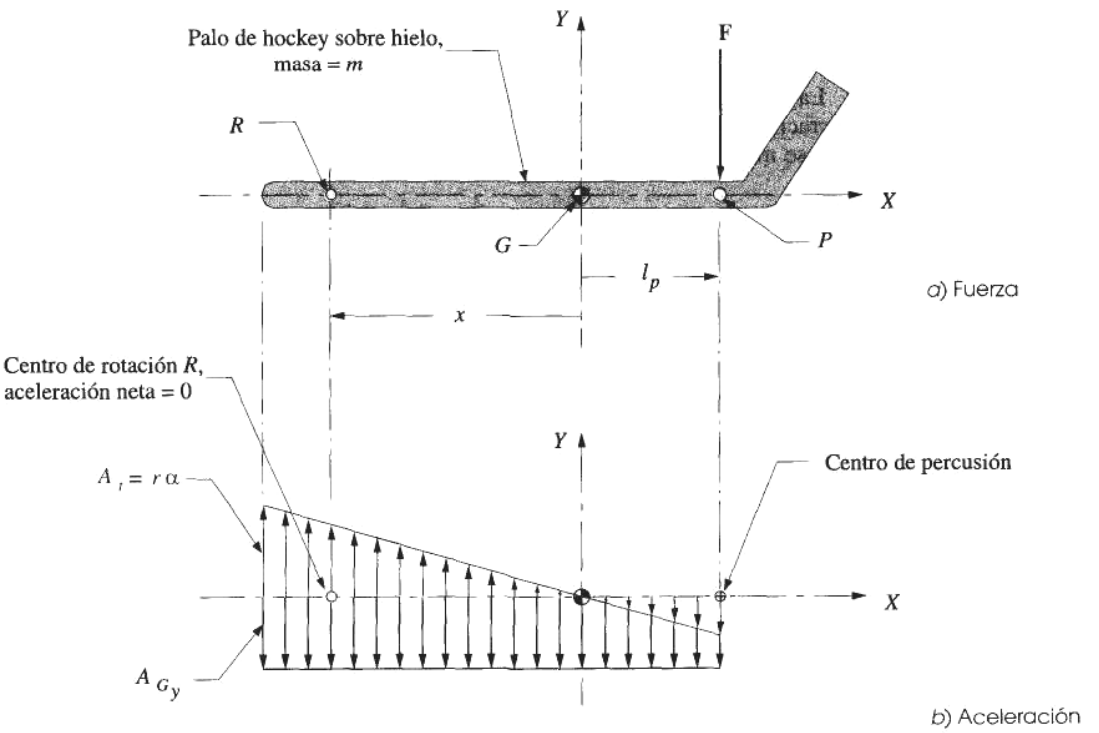


FIGURA 10-3
Centro de percusión y centro de rotación

miento complejo en un instante cualquiera puede considerarse como la superposición de dos componentes: la traslación pura de su centro de gravedad *G* en la dirección de F y la rotación pura con respecto al punto *G*. Construya un sistema coordenado fijo *XY* centrado en *G* con el eje *X*, a lo largo del palo, en su posición inicial como se muestra. La componente de traslación de la aceleración del *CG* que resulta de la fuerza F es (por la ley de Newton):

$$A_{G_v} = \frac{F}{m} \tag{10.11a}$$

y la aceleración angular es:

$$\alpha = \frac{T}{I_G} \tag{10.11b}$$

donde I_G es su momento de inercia de masa con respecto al eje Z (fuera de la página) y pasa por el *CG*. Pero el par de torsión es también:

$$T = Fl_p \tag{10-11c}$$

donde l_p es la distancia a lo largo del eje *X* desde el punto *G* al punto *P*, de esta manera:

$$\alpha = \frac{Fl_p}{I_G} \tag{10.11d}$$

La aceleración lineal total en cualquier punto a lo largo del palo será la suma de la aceleración lineal A_{Gv} del *CG* y la componente tangencial $(r\alpha)$ de la aceleración angular, como se muestra en la figura 10-3£):

$$\begin{aligned} A_{y_{total}} &= A_{G_y} + r\alpha \\ &= \frac{F}{m} + x\left(\frac{Fl_p}{I_G}\right) \end{aligned} \tag{10.12}$$

donde *x* es la distancia a cualquier punto a lo largo del palo. La ecuación 10.12 se iguala a cero y se resuelve el valor de *x*, para el cual la componente $r\alpha$ cancela exactamente la componente A_{Gv}. Éste será el **centro de rotación** en el cual no hay aceleración de traslación, y, por consiguiente, no tiene fuerza dinámica lineal. La solución para *x* cuando $A_{ytotal} = 0$ es:

$$x = -\frac{I_G}{ml_P} \tag{10.13a}$$

y sustituyendo la ecuación 10.10b:

$$x = -\frac{k^2}{l_P} \tag{10.13b}$$

donde se calcula el radio de giro *k* con respecto al eje *ZZ* que atraviesa el *CG*.

Advierta que esta relación entre el centro de percusión y el centro de rotación involucra solamente propiedades geométricas y de masa. La magnitud de la fuerza aplicada es

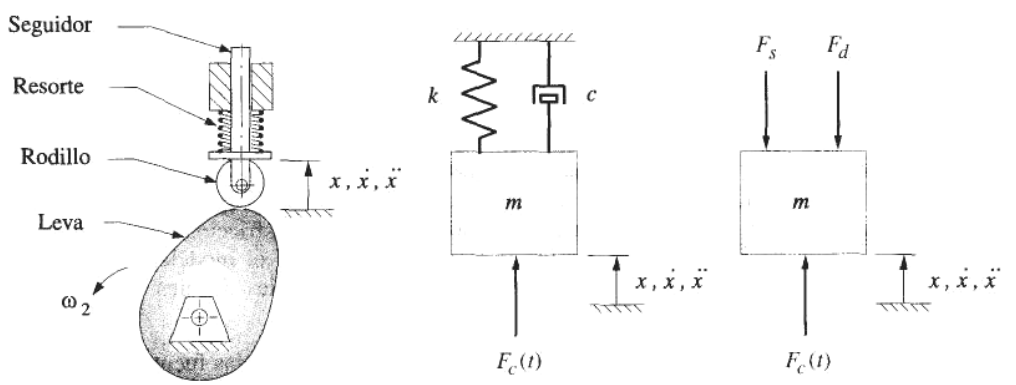
irrelevante, pero su localización l_p determina completamente a *x*. De ahí que en un cuerpo **no** existe sólo un centro, sino más bien, existen pares de puntos. Para cada punto (centro de percusión) en el que se aplica una fuerza habrá un centro de rotación correspondiente, donde el sentido de la fuerza de reacción será cero. Sin embargo, este centro de rotación no necesita estar dentro de la longitud física del cuerpo. Considere el valor de *x* pronosticado por la ecuación 10.13b si usted golpea el cuerpo en su *CG*.

10.9 PARÁMETROS CONCENTRADOS DE MODELOS DINÁMICOS

En la figura 10-4a) se muestra una leva de placas o discos impulsada por un seguidor de rodillos con resorte. Éste es un sistema de cierre de fuerza que depende de la fuerza del resorte para mantener todo el tiempo en contacto la leva y el seguidor. En la figura 10-4&) se muestra un modelo de parámetro concentrado de este sistema en el cual toda la **masa** que se mueve con el tren seguidor se concentra como *m,* toda la elasticidad en el sistema se concentra dentro de la **constante de resorte** *k,* y todo el **amortiguamiento** o resistencia al movimiento se concentra como un amortiguador de coeficiente *c.* Las fuentes de la masa que contribuyen con *m* son demasiado obvias. La masa del vastago seguidor, del rodillo, de su pasador pivote y de cualquier otra pieza sujeta al ensamble en movimiento se suman para producir *m.* En la figura 10-4c) se muestra un diagrama de cuerpo libre del sistema expuesto a la acción de la fuerza de la leva F_c, la fuerza del resorte F_s y la fuerza de amortiguamiento F_d. Claro que también habrá en el sistema efectos de masa por aceleración.

Constante de resorte

Se ha supuesto que todos los eslabones y las partes son cuerpos rígidos a fin de efectuar los análisis de cinemática, pero para efectuar un análisis de fuerza exacto se necesita re-



a) Sistema físico b) Modelo concentrado c) Diagrama de cuerpo libre

FIGURA 10-4

Modelo de parámetros concentrados de un sistema de leva-seguidor con un *GDL*

conocer que estos cuerpos no son rígidos en realidad. Se supone que la elasticidad en el sistema es lineal, por lo tanto, se describe por una constante de resorte k_v misma que se define como la fuerza por unidad de deformación.

$$k = \frac{F_s}{x} \tag{10.14}$$

La constante de resorte total *k* del sistema es una combinación de las constantes de resorte del resorte en espiral real, más las constantes de resorte de todas las otras partes que se deforman por las fuerzas. El rodillo, su pasador y el vástago seguidor son resortes en sí, puesto que están hechos de materiales elásticos. La constante de resorte para una parte cualquiera se obtiene a partir de la ecuación de su deformación bajo la carga aplicada. Cualquier ecuación de deformación relaciona fuerza con desplazamiento y puede ordenarse algebraicamente para expresar una constante de resorte. Un elemento puede tener más de una *k* si se carga en diversas formas, por ejemplo, un árbol de levas con una constante de resorte en flexión y otra en torsión. En la siguiente sección se analizarán los procedimientos para combinar las diversas constantes de resorte del sistema en una constante de resorte efectiva combinada *k.* Por ahora, suponga que se pueden combinar para el análisis y crear una *k* global para el modelo de parámetro concentrado.

Amortiguamiento

La fricción, generalmente denominada **amortiguamiento,** es, de los tres, el parámetro más difícil de modelar. Necesita ser una combinación de todos los efectos de amortiguamiento en el sistema. Estos pueden ser de muchas maneras. La **fricción de Coulomb** resulta del rozamiento de dos superficies secas o lubricadas. Las superficies en contacto entre la leva y el seguidor, y entre el seguidor y su junta deslizante, pueden experimentar la fricción de Coulomb. Ésta se considera por lo común independiente de la magnitud de velocidad, pero tiene un valor mayor y diferente cuando su velocidad es cero (fuerza de fricción estática F_{st} o *esticción)* que cuando existe movimiento relativo entre las partes (fricción dinámica F_d). En la figura 10-5a) se muestra una gráfica de la fuerza de fricción de Coulomb contra la velocidad relativa v en las superficies de contacto. Observe que la fricción siempre se opone al movimiento, de tal manera que la fuerza de fricción cambia abruptamente de signo en $v = 0$. La esticción F_{st} se presenta como una gran punta en cero v a diferencia del valor de la fricción dinámica F_d. Por lo tanto, ésta es una función de fricción **no lineal.** Es polivalente en cero. De hecho, la fuerza de fricción, a velocidad cero, puede tener cualquier valor entre $-F_{st}$ y $+F_{st}$. Será cualquier fuerza necesaria para equilibrar las fuerzas del sistema y generar equilibrio. Cuando la fuerza aplicada excede a F_{st}, el movimiento comienza y la fuerza de fricción cae repentinamente a F_d. Este amortiguamiento no lineal crea dificultades en el modelo simple, puesto que se desea describir el sistema con ecuaciones diferenciales lineales que tengan soluciones conocidas.

Además de la fricción de Coulomb pueden existir otras fuentes de amortiguamiento. El **amortiguamiento viscoso** resulta del corte de un fluido (lubricante) en el espacio entre las partes móviles, y se considera como una función lineal de velocidad relativa, como se muestra en la figura 10-*5b).* El **amortiguamiento cuadrático** resulta del movimiento de un objeto a través de un medio fluido, como en un automóvil que se mueve a través del aire o un bote a través del agua. Este factor contribuye en forma insignificante a un amortiguamiento total de leva y seguidor a menos que las velocidades sean muy

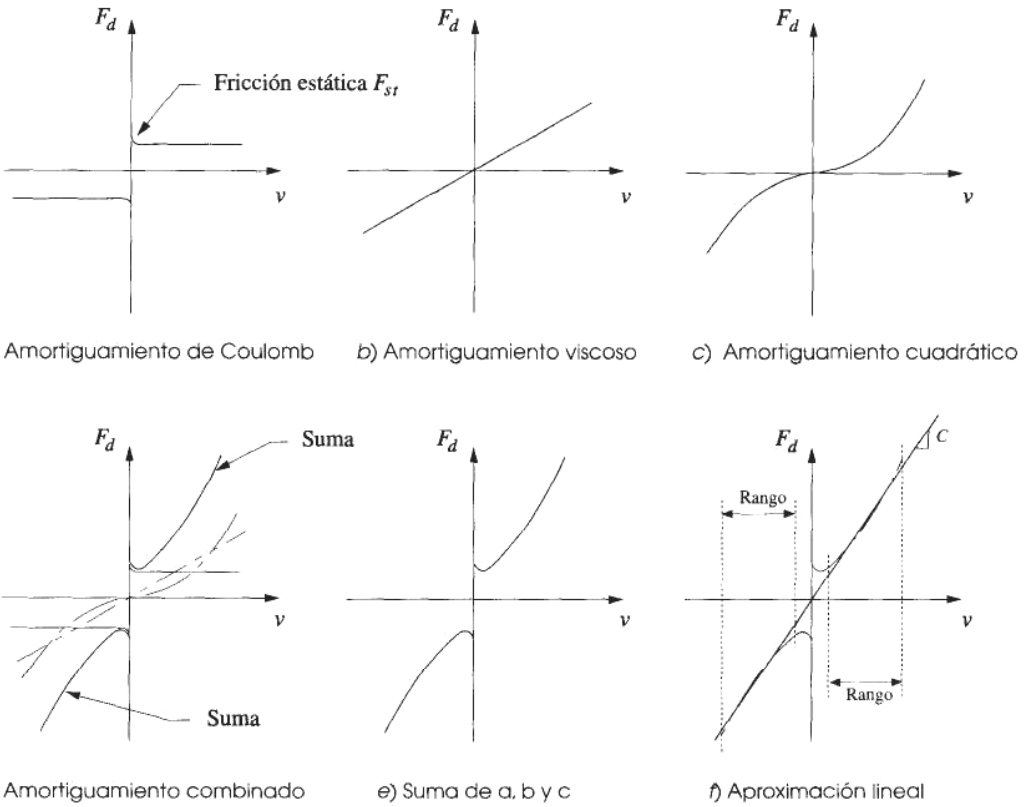


FIGURA 10-5

Representación de amortiguamientos

altas o el medio fluido muy denso. El amortiguamiento cuadrático es una función cuadrática de la velocidad relativa, como se muestra en la figura 10-5c). Para todos estos casos la relación de la fuerza dinámica de amortiguamiento F_d, como una función de la velocidad relativa, se expresa en la fórmula:

$$F_d = cv|v|^{r-1} \tag{10.15a}$$

donde c es el coeficiente constante de amortiguamiento, v es la velocidad relativa y res una constante que define el tipo de amortiguamiento.

Para el amortiguamiento de Coulomb, $r = 0$ y:

$$F_d = \pm c \tag{10.15b}$$

Para el amortiguamiento viscoso, $r = 1$ y:

$$F_d = cv \tag{10.15c}$$

Para el amortiguamiento cuadrático, $r = 2$ y:

$$F_d = \pm cv^2 \tag{10.15d}$$

Si se combinan estas tres formas de amortiguamiento, su suma se parecerá a la de la figura *l0-5d)* y *e).* Ésta es obviamente una función no lineal, pero se puede aproximar sobre un pequeño rango de velocidad razonable como una función lineal con una pendiente c, la cual es, por lo tanto, un *coeficiente de amortiguamiento seudoviscoso.* Esto se muestra en la figura 10-5/). Aunque no es un método exacto para analizar el amortiguamiento real, este planteamiento se encontró aceptablemente exacto para una primera aproximación durante el proceso de diseño. El amortiguamiento en estos tipos de sistemas mecánicos puede variar bastante de un diseño a otro, debido a las diferentes geometrías, ángulos de transmisión y presión, tipos de cojinetes, lubricantes o ausencia de éstos, etc. De antemano, es muy difícil predecir con exactitud el nivel de amortiguamiento (es decir, el valor de c) de la construcción y prueba de un prototipo, con lo cual sería posible determinar de manera más exacta el coeficiente de amortiguamiento. Si se han construido y probado dispositivos similares, su historia puede ayudar a una buena predicción. Para la propuesta del modelado dinámico se supondrá *amortiguamiento seudoviscoso* y algún valor para c.

10.10 SISTEMAS EQUIVALENTES

Sistemas más complejos que los mostrados en la figura 10-4 tendrán masas múltiples, resortes y fuentes de amortiguamiento conectados como se muestra en la figura 10-9. Estos modelos se analizan escribiendo ecuaciones dinámicas para cada subsistema y resolviendo después simultáneamente el sistema de ecuaciones diferenciales. Esto permite un multianálisis de grado de libertad, con un *GDL* para cada subsistema incluido en el análisis. En su extenso estudio de vibraciones en mecanismos de leva, Koster[121] encontró que un modelo de cinco *GDL* que incluya los efectos de la deformación por flexión y por torsión del árbol de levas, juego (véase la sección 10.2) en los engranes impulsores, efectos de presión del lubricante, amortiguamiento no lineal de Coulomb y variación de la velocidad del motor, da una buena predicción de la respuesta medida del seguidor. Pero también encontró que un modelo con un *GDL* como el que se muestra en la figura 10-4 da una simulación razonable del mismo sistema. Se puede hacer entonces un planteamiento más sencillo y concentrar todos los subsistemas de la figura 10-9 en un **sistema equivalente** con un *GDL* como se muestra en la figura 10-4. La combinación de los diversos resortes, amortiguadores y masas se debe realizar cuidadosamente para una aproximación apropiada entre sus interacciones dinámicas.

Existen solamente dos tipos de variables activas en cualquier sistema dinámico. A éstas se les dan los nombres generales de *variable de paso y variable de través.* Estos nombres describen sus acciones dentro del sistema. Una **variable de paso** *pasa por el sistema.* Una **variable de través** *existe a través del sistema.* La potencia en el sistema es el producto de las variables de paso y de través. La tabla 10-1 lista las variables de paso y de través para diversos tipos de sistemas dinámicos.

Comúnmente se dice que el voltaje pasa a través de un circuito y que la corriente fluye por él. También se puede decir que la velocidad pasa a través de un "circuito" o sistema mecánico y que la fuerza fluye por él. Así como se conectan elementos eléctricos tales como resistores, capacitores e inductores, en serie o en paralelo o en una combina-

ción de ambas para construir un circuito eléctrico, es posible conectar sus análogos mecánicos, amortiguadores, resortes y masas en serie, en paralelo o en una combinación de los mismos para construir un sistema mecánico. En la tabla 10-2 se muestran los análogos entre tres tipos de sistemas físicos. En la tabla 10-3 se muestran las relaciones fundamentales entre las variables de paso y de través en sistemas eléctricos, mecánicos o de fluidos.

Una conexión en serie o en paralelo entre los elementos de un circuito eléctrico se distingue claramente cuando se aprecian con facilidad sus interconexiones. Es más difícil determinar cómo están interconectados los elementos mecánicos en un sistema cuando hay dificultad para ver sus interconexiones. Una prueba de conexión en serie o en paralelo se realiza mejor examinando las fuerzas y velocidades (o la integral de velocidad, desplazamiento) que existen en los elementos particulares. Si dos elementos tienen la misma fuerza que pasa por ellos, se encuentran en serie. Si dos elementos tienen la misma velocidad o desplazamiento, están en paralelo.

Amortiguadores combinados

AMORTIGUADORES EN SERIE En la figura 10-6a) se muestran tres amortiguadores en serie. La fuerza que pasa por cada amortiguador es la misma, y sus desplazamientos y velocidades individuales son distintos.

TABLA 10-1 Variables de paso y de través en sistemas dinámicos

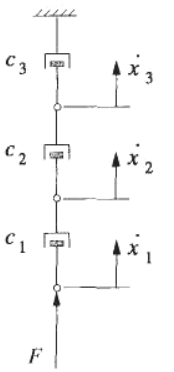
Tipo de sistema	Variable de paso	Variable de través	Unidades de potencia
Eléctrico	Corriente (i)	Voltaje (e)	ei = watts
Mecánico	Fuerza (F)	Velocidad (v)	Fv = (lb-pulg)/s
Fluido	Flujo (Q)	Presión (P)	PQ = (lb-pulg)/s

TABLA 10-2 Análogos físicos en sistemas dinámicos

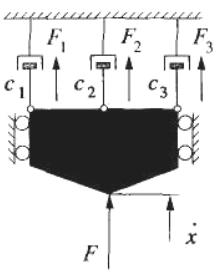
Tipo de sistema	Disipador de energía	Almacenamiento de energía	Almacenamiento de energía
Eléctrico	Resistor (R)	Capacitor (C)	Sinductor (L)
Mecánico	Amortiguador (c)	Masa (m)	Resorte (k)
Fluido	Resistor de fluidos (R_f)	Acumulador (C_f)	Inductor de fluidos (L_f)

TABLA 10-3 Relaciones entre las variables en sistemas dinámicos

Tipo de sistema	Resistencia	Capacitancia	Inductancia
Eléctrico	$i = \frac{1}{R}e$	$i = C\frac{de}{dt}$	$i = \frac{1}{L}\int e\,dt$
Mecánico	$F = cv$	$F = m\frac{dv}{dt}$	$F = k\int v\,dt$
Fluido	$Q = \frac{1}{R_f}P$	$Q = C_f\frac{dP}{dt}$	$Q = \frac{1}{L_f}\int P\,dt$



a) En serie



b) En paralelo

FIGURA 10-6
Amortiguadores en serie y en paralelo

$$F = c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) = c_3\dot{x}_3$$

o: $$\frac{F}{c_1} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2; \qquad \frac{F}{c_2} = \dot{x}_2 - \dot{x}_3; \qquad \frac{F}{c_3} = \dot{x}_3$$

al combinarlas: $$\dot{x}_{total} = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + x_3 = \frac{F}{c_1} + \frac{F}{c_2} + \frac{F}{c_3}$$

entonces: $$\dot{x}_{total} = F\frac{1}{c_{efectiva}} = F\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}\right)$$

$$\frac{1}{c_{efectiva}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}$$

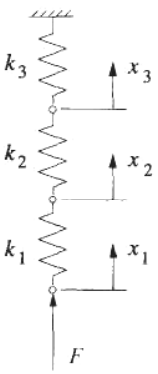
$$c_{efectiva} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}} \tag{10.16a}$$

El recíproco del amortiguamiento efectivo de los amortiguadores en serie es la suma de los recíprocos de sus coeficientes de amortiguamiento individuales.

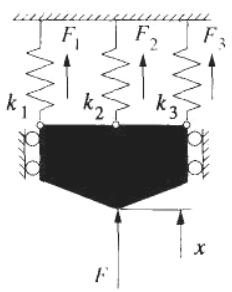
AMORTIGUADORES EN PARALELO En la figura 10-6 se muestran tres amortiguadores en paralelo. La fuerza que pasa por cada amortiguador es diferente, y todos sus desplazamientos y velocidades son los mismos.

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$
$$F = c_1\dot{x} + c_2\dot{x} + c_3\dot{x}$$
$$F = (c_1 + c_2 + c_3)\dot{x}$$
$$F = c_{efectiva}\,\dot{x}$$
$$c_{efectiva} = c_1 + c_2 + c_3 \tag{10.16b}$$

El amortiguamiento efectivo de los tres es la suma de sus coeficientes de amortiguamiento individuales.



a) En serie



b) En paralelo

FIGURA 10-7
Resortes en serie y en paralelo

Combinación de resortes

Los resortes son los análogos mecánicos de los inductores eléctricos. En la figura 10-7 *a)* se muestran tres resortes en serie. La fuerza que pasa por cada resorte es la misma, y sus desplazamientos individuales son diferentes. Una fuerza F aplicada al sistema generará una deformación total, la cual es la suma de las deformaciones individuales. La fuerza del resorte se define a partir de la relación en la ecuación 10.14:

$$F = k_{efectiva}x_{total}$$

donde:

$$x_{total} = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + x_3 \tag{10.17a}$$

$$(x_1 - x_2) = \frac{F}{k_1} \qquad (x_2 - x_3) = \frac{F}{k_2} \qquad x_3 = \frac{F}{k_3} \tag{10.17b}$$

Sustituyendo, se encuentra que el recíproco de la *k* efectiva de los **resortes en serie** es la suma de los recíprocos de sus constantes de resorte individuales.

$$\frac{F}{k_{efectiva}} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \frac{F}{k_3}$$

$$k_{efectiva} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}} \tag{10.17c}$$

En la figura 10-7£>) se muestran tres resortes en paralelo. La fuerza que pasa por cada resorte es diferente, y todos sus desplazamientos son los mismos. La fuerza total es la suma de las fuerzas individuales.

$$F_{total} = F_1 + F_2 + F_3 \tag{10.18a}$$

Sustituyendo la ecuación 10.17¿>) se encuentra que la *k* efectiva de los **resortes en paralelo** es la suma de las constantes de resorte individuales.

$$k_{efectiva}x = k_1x + k_2x + k_3x$$

$$k_{efectiva} = k_1 + k_2 + k_3 \tag{10.18b}$$

Combinación de masas

Las masas son los análogos mecánicos de los capacitores eléctricos. Las fuerzas de inercia asociadas con todas las masas móviles se refieren al plano fijo del sistema, debido a que la aceleración en F = ma es absoluta. Por lo tanto, todas las masas se conectan en paralelo y se combinan de la misma manera que los capacitores en paralelo con una terminal conectada a una fijación común.

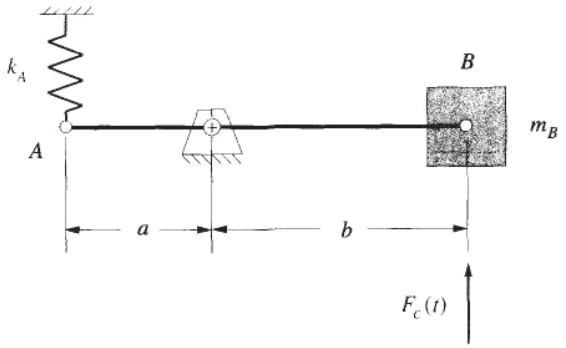
$$m_{efectiva} = m_1 + m_2 + m_3 \tag{10.19}$$

Relaciones de la palanca y el engrane

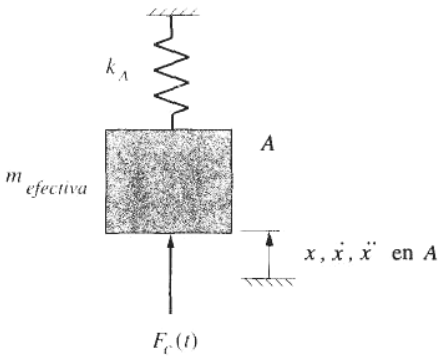
Cada vez que se separa un elemento del punto de aplicación de una fuerza, o de cualquier otro elemento, mediante una **relación de palanca** o **relación de engranes,** se modificará su valor efectivo por dicha relación. En la figura 10-8a) se muestra en un extremo un resorte (A) y en el otro extremo una masa (B) de una palanca. Se desea modelar este sistema como un sistema de parámetro concentrado con un *GDL.* Existen dos posibilidades en este caso. Se puede transferir una masa equivalente $m_{efectiva}$ al punto A y unirla al resorte *k,* como se muestra en la figura IO-80), o se puede transferir un resorte equivalente $k_{efectiva}$ al punto *B* y unirlo a la masa *m* como se muestra en la figura 10-8c). En cualquier caso, para que el modelo concentrado sea equivalente al sistema original, debe tener en él la misma energía.

Primero se encontrará la masa efectiva que debe situarse en el punto A para eliminar la palanca. Se igualan las energías cinéticas en las masas de los puntos *Ay B:*

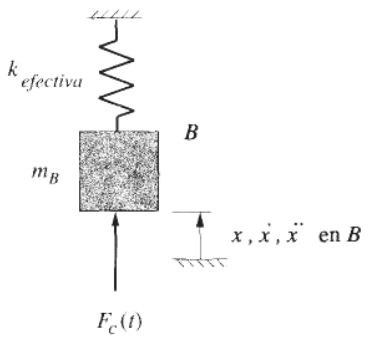
$$\frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_{efectiva}v_A^2 \tag{10.20a}$$



a) Sistema físico

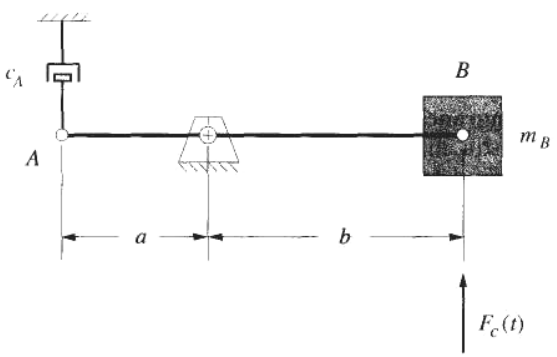


b) Masa equivalente en el punto A

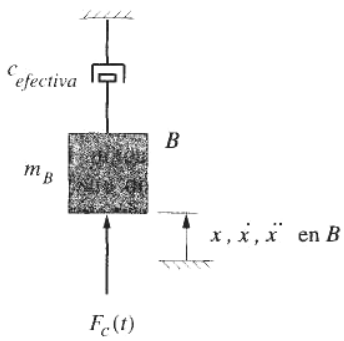


c) Resorte equivalente en el punto B

10



d) Sistema físico



e) Amortiguador equivalente en el punto B

FIGURA 10-8

Las relaciones de palancas o engranes afectan al sistema equivalente

Las velocidades en cada extremo de la palanca pueden relacionarse mediante la relación de palanca:

$$v_A = \left(\frac{a}{b}\right) v_B$$

al sustituir:

$$m_B v_B^2 = m_{efectiva}\left(\frac{a}{b}\right)^2 v_B^2$$

$$m_{efectiva} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 m_B \qquad (10.20b)$$

La masa efectiva varía de la masa original por el cuadrado de la relación de palanca. Observe que si en lugar de la palanca hubiera un par de engranes de radios *a y b,* el resultado sería el mismo.

Ahora encuentre el resorte efectivo que se tendría que situar en *B* para eliminar la palanca. Al igualar las energías potenciales en los resortes en los puntos *A y B:*

$$\frac{1}{2} k_A x_A^2 = \frac{1}{2} k_{efectiva} x_B^2 \qquad (10.21a)$$

La deformación en *B* se relaciona con la deformación en *A* por la relación de palanca:

$$x_B = \left(\frac{b}{a}\right) x_A$$

que al sustituir:

$$k_A x_A^2 = k_{efectiva}\left(\frac{b}{a}\right)^2 x_A^2$$

$$k_{efectiva} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 k_A \qquad (10.21b)$$

La *k* efectiva varía de la *k* original por el cuadrado de la relación de palanca. Si en lugar de palanca hubiera un par de engranes de radios *a* y *b,* el resultado sería el mismo. De esta manera, las relaciones de engrane o de palanca pueden tener un efecto grande en los valores de los parámetros concentrados en el modelo simplificado.

Los coeficientes de amortiguamiento son también afectados por la relación de palanca. En la figura *10-Sd)* se muestra un amortiguador y una masa en los extremos opuestos de una palanca. Si el amortiguador se encuentra en *A* se remplazará por un amortiguador en *B,* entonces los dos amortiguadores deben producir el mismo momento con respecto al pivote, por lo tanto:

$$F_{d_A} a = F_{d_B} b \qquad (10.21c)$$

Al sustituir el producto del coeficiente de amortiguamiento y velocidad por fuerza se obtiene:

$$\left(c_A \dot{x}_A\right) a = \left(c_{B_{efectiva}} \dot{x}_B\right) b \qquad (10.21d)$$

Las velocidades en los puntos *A* y *B* de la figura 10-8<i) se relacionan con la cinemática:

$$\omega = \frac{\dot{x}_A}{a} = \frac{\dot{x}_B}{b}$$

$$\dot{x}_A = \dot{x}_B \frac{a}{b} \tag{10.21e}$$

Al sustituir la ecuación 10-2Id se obtiene una expresión para el coeficiente de amortiguamiento efectivo en *B* resultante de un amortiguador en *A*.

$$\left(c_A \dot{x}_B \frac{a}{b}\right) a = \left(c_{B_{efectiva}} \dot{x}_B\right) b$$

$$c_{B_{efectiva}} = c_A \left(\frac{a}{b}\right)^2 \tag{10.21f}$$

El cuadrado de la relación de palanca determina, nuevamente, el amortiguamiento efectivo. El sistema equivalente se muestra en la figura 10-8e).

EJEMPLO 10-1

Construcción de un modelo de un sistema equivalente con un *GDL* de un sistema dinámico de múltiples elementos.

Datos: En la figura 10-9a) se muestra una válvula de una leva de automóvil con traslación de un seguidor plano, una varilla de empuje larga, un brazo de balancín, una válvula y el resorte de la válvula.

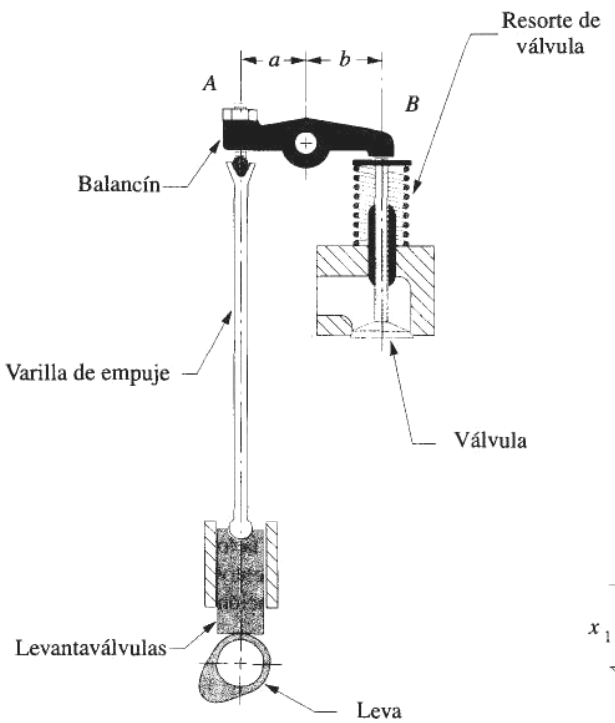
Problema: Construya un modelo conveniente y aproximado del sistema con un *GDL* de parámetro concentrado. Defina su masa efectiva, constante de resorte y amortiguamiento en términos de los parámetros de los elementos individuales.

Solución:

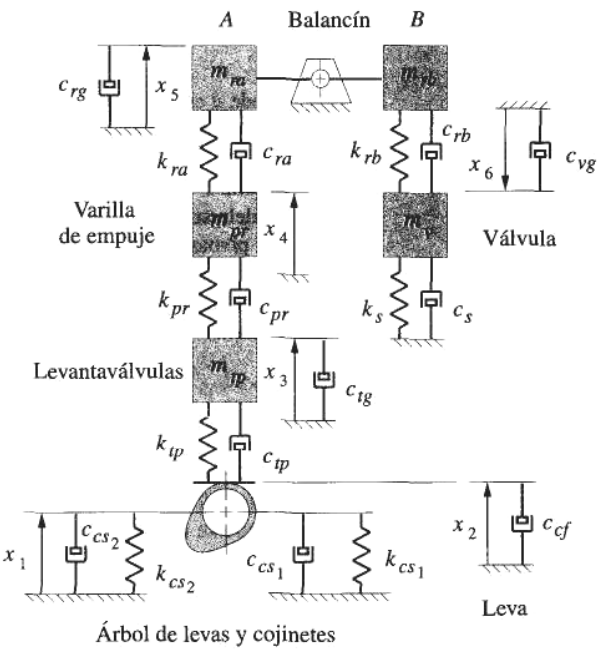
I Se divide el sistema en elementos individuales como se muestra en la figura 10-9¿>). Se asigna a cada parte móvil significante un elemento de masa concentrada que tenga una conexión de fijación que pase por un amortiguador. Dentro de los elementos individuales existe también elasticidad y amortiguamiento, que se muestran como resortes de conexión y amortiguadores. Se modela el brazo de balancín como dos masas concentradas en sus extremos, conectados con una barra rígida y sin masa para la manivela y la biela del eslabonamiento de manivela-corredera. (Véase también la sección 13.4.) El análisis mostrado representa un modelo de seis *GDL* cuando existen seis coordenadas de desplazamiento individuales, de la x_1 a la x_6.

2 Se definen las constantes de resorte individuales de cada elemento que represente la elasticidad de una masa concentrada, a partir de la fórmula de deformación elástica para la parte particular. Por ejemplo, la varilla de empuje se carga en compresión, por lo que su fórmula de deformación relevante y su *k* son:

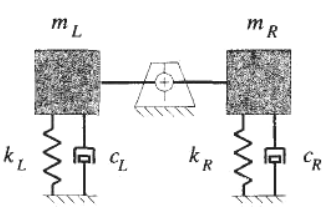
$$x = \frac{Fl}{AE} \qquad \text{y} \qquad k_{varilla\ de\ empuje} = \frac{F}{x} = \frac{AE}{l} \tag{a}$$



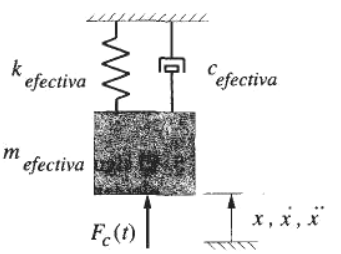
a) Modelo físico



b) Modelo con un *GDL*



c) Modelo con un *GDL* con un brazo de palanca



d) Modelo concentrado con un *GDL*

FIGURA 10-9

Modelos de parámetro concentrado de un sistema de leva-seguidor con motor de válvula aerea

donde *A* es el área transversal de la varilla de empuje, / la longitud y £ el módulo de Young del material. La *k* del elemento de levantamiento tendrá la misma expresión. La expresión para la *k* de un resorte de compresión de espiras helicoidales, como se utilizó para el resorte de válvula, se encuentra en cualquier manual de diseño de resortes o en un texto de diseño de maquinaria y es:

$$k_{sp} = \frac{d^4 G}{8D^3 N} \tag{b}$$

donde *d* es el diámetro del alambre, *D* el diámetro medio de las espiras, *N* el número de espiras y *G* el módulo de ruptura del material.

El brazo de balancín actúa también como un resorte, pues es una viga en flexión. Puede modelarse por separado como una viga en doble voladizo con su deformación en cada lado del pivote considerado. Estos efectos de resorte se muestran en el modelo como si fueran resortes de compresión, pero sólo son esquemáticos. En realidad, representan la deformación por flexión de los brazos de balancín. De la fórmula de deformación para una viga en voladizo con una carga concentrada:

$$x = \frac{Fl^3}{3EI} \qquad \text{y} \qquad k_{ra} = \frac{3EI}{l^3} \tag{c}$$

donde / es el segundo momento transversal del área de la viga, / la longitud y *E* el módulo de Young del material. Las constantes de resortes de otros elementos en un sistema pueden obtenerse de manera similar a partir de las fórmulas de deformación.

3 Los amortiguadores que están conectados a una fijación representan la fricción o el amortiguamiento viscoso en las interfaces entre los elementos y el plano de fijación. Los amortiguadores entre las masas representan el amortiguamiento interno de las partes, que comúnmente es muy pequeño. Estos valores tendrán que estimarse a partir de la experiencia o medirse en ensambles de prototipo.

10

4 El brazo de balancín proporciona una relación de palanca que debe tomarse en cuenta. La estrategia será combinar por separado todos los elementos en cada lado de la palanca en dos modelos de parámetros concentrados como se muestra en la figura 10-9c), y después transferir uno de éstos a través del pivote de palanca para crear un modelo con un *GDL* como se muestra en la figura 10-9<¿).

5 El siguiente paso es determinar los tipos de conexiones, ya sea en serie o en paralelo, entre los elementos. Todas las masas se encuentran en paralelo cuando transmiten de manera directa su fuerza de inercia a la fijación y tienen desplazamientos independientes. Las masas en el lado izquierdo y derecho son, respectivamente:

$$m_L = m_{tp} + m_{pr} + m_{ra} \qquad m_R = m_{rb} + m_v \tag{d}$$

Observe que m_v incluye casi un tercio de la masa del resorte. Los dos resortes mostrados que representan la deformación por flexión del árbol de levas se reparten la fuerza, de tal forma que se encuentran en paralelo y, por lo tanto, se suman directamente.

$$k_{cs} = k_{cs1} + k_{cs2} \tag{e}$$

Observe que, por integridad, la deformación por torsión del árbol de levas debe incluirse también, pero en este ejemplo se omite para reducir la complejidad. La constante de resorte combinada del árbol de levas y los otros resortes mostrados en el lado izquierdo se encuentran conectados en serie, de tal forma que tienen deformaciones independientes y por todos ellos pasa la misma fuerza. Lo mismo se cumple para los resortes del lado derecho. Las constantes de resorte efectivas para cada lado son entonces:

$$k_L = \frac{1}{\frac{1}{k_{cs}} + \frac{1}{k_{tp}} + \frac{1}{k_{pr}} + \frac{1}{k_{ra}}} \qquad k_R = \frac{1}{\frac{1}{k_{rb}} + \frac{1}{k_s}} \tag{f}$$

Los amortiguadores se encuentran en una combinación de serie y paralelo. El par de amortiguadores mostrados c_{cs1} y c_{cs2} que soportan el árbol de levas representan la fricción en los dos cojinetes del árbol de levas y se encuentran en paralelo.

$$c_{cs} = c_{cs_1} + c_{cs_2} \tag{g}$$

Los que representan el amortiguamiento interno se encuentran en serie entre sí y con el amortiguamiento del árbol combinado.

$$c_{internoL} = \frac{1}{\frac{1}{c_{tp}} + \frac{1}{c_{pr}} + \frac{1}{c_{ra}} + \frac{1}{c_{cs}}} \qquad c_{internoR} = \frac{1}{\frac{1}{c_{rb}} + \frac{1}{c_s}} \tag{h}$$

donde en el lado izquierdo $c_{internoL}$ es el amortiguamiento interno total y en el derecho $c_{internoR}$ es el amortiguamiento interno total del pivote del brazo de balancín. El amortiguamiento interno combinado $c_{internoL}$ llega a la fijación por c_{rg} y el amortiguamiento interno combinado $c_{internoR}$ llega a la fijación por el resorte de válvula c_s. Estas dos combinaciones en serie se encuentran entonces en paralelo respecto de los otros amortiguadores que van a la fijación. Los amortiguamientos combinados para cada lado del sistema son entonces:

$$c_L = c_{tg} + c_{rg} + c_{internoL} \qquad c_R = c_{vg} + c_{internoR} \tag{k}$$

6 Ahora el sistema se reduce a un modelo con un *GDL* con masas y resortes concentrados en cualquier extremo del brazo de balancín, como se muestra en la figura 10-9c). Se llevarán los elementos del punto *B* a través del punto *A*. Observe que se ha invertido el signo convencional a través del pivote, de modo que el movimiento positivo en un lado resulta también positivo en el otro. El amortiguador, la masa y la constante de resorte son afectados por el cuadrado de la relación de palanca como se muestra en las ecuaciones 10.20 y 10.21.

$$m_{efectiva} = m_L + \left(\frac{b}{a}\right)^2 m_R$$

$$k_{efectiva} = k_L + \left(\frac{b}{a}\right)^2 k_R \tag{m}$$

$$c_{efectiva} = c_L + \left(\frac{b}{a}\right)^2 c_R$$

Éstas se muestran al final de la figura 10.9d), un modelo del sistema concentrado con un *GDL*.

Observe que este modelo con un *GDL* proporciona sólo una aproximación relativamente ordinaria del comportamiento de este sistema complejo. Si bien es una simplificación excesiva, resulta útil aun como una primera aproximación y ejemplifica en este contexto el método general implicado en los sistemas dinámicos de modelado. Un modelo más complejo con múltiples grados de libertad proporcionará una mejor aproximación del comportamiento del sistema dinámico.

10.11 MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

El análisis de fuerzas dinámicas puede realizarse por cualquier método. Aquí se analizarán dos: el de **superposición y** el de **solución de ecuaciones simultáneas lineales.** Ambos métodos requieren que el sistema sea lineal.

Estos problemas de fuerzas dinámicas tienen generalmente un gran número de incógnitas y, por lo tanto, ecuaciones múltiples que hay que resolver. El método de superposición es útil cuando se quiere determinar las partes de la solución y después sumar (superponer) los resultados parciales para obtener el resultado completo. Por ejemplo, si hay dos cargas aplicadas al sistema, se determinan independientemente los efectos de cada carga y después se suman los resultados. En realidad, se resuelve un sistema de TV variables al efectuar los cálculos sucesivos sobre las partes del problema. Esto puede conceptualizarse como un enfoque de "procesamiento en serie".

Otro método expresa todas las ecuaciones relevantes para todo el sistema como un sistema de ecuaciones simultáneas lineales. Éstas pueden resolverse simultáneamente para obtener los resultados. Esto es análogo al enfoque de "procesamiento en paralelo". Un enfoque conveniente para resolver los sistemas de ecuaciones simultáneas es expresarlas en una forma estándar matricial y utilizar un resolvedor de matrices numéricas a fin de obtener las respuestas. Los resolvedores de matrices se incluyen en la mayoría de las calculadoras de bolsillo, de ingeniería o científicas. Algunos paquetes de hojas de cálculo y resolvedores de ecuaciones realizarán también una solución de matrices. En la sección 5.5 se presentó una breve introducción a la solución matricial de ecuaciones simultáneas. En el apéndice A se describe el uso del programa de computadora MATRIX, incluido en el CD-ROM que se anexa a este texto. Este programa permite el cálculo rápido de la solución de sistemas de más de 40 ecuaciones simultáneas. Véase las secciones del capítulo 5 para repasar estos procedimientos de cálculo y el apéndice A para el programa MATRIX. La referencia [3] proporciona una introducción al álgebra matricial.

En los capítulos restantes se utilizarán los enfoques de superposición y de solución de ecuaciones simultáneas para resolver diversos problemas de análisis de fuerzas dinámicas. Ambos son funcionales, y uno puede servir para comprobar los resultados del otro. De manera que es de gran ayuda estar familiarizado con más de un enfoque. Históricamente, el único método práctico para los sistemas que involucraban un gran número de ecuaciones, hasta la llegada de las computadoras, era el de superposición, pero ahora ya es posible resolver grandes sistemas de ecuaciones simultáneas. Actualmente es más popular el método de solución de ecuaciones simultáneas de ecuaciones.

10.12 EL PRINCIPIO DE D'ALEMBERT

La segunda ley de Newton (ecuaciones 10.1 y 10.4) es todo lo que se necesita para resolver cualquier sistema de fuerzas dinámicas por el método newtoniano. Jean le Rond

d'Alembert (1717-1783), matemático francés, reordenó las ecuaciones de Newton para obtener una situación "cuasiestática" a partir de una dinámica. Las versiones de d'Alembert de las ecuaciones 10.1 y 10.4 son:

$$\sum \mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0$$

$$\sum \mathbf{T} - I\alpha = 0 \qquad (10.22)$$

Todo lo que hizo d'Alembert fue mover los términos del lado derecho al izquierdo, cambiando los signos algebraicos en el procedimiento según se requirió. Siguen siendo obviamente las mismas ecuaciones 10.1 y 10.4, reordenadas en forma algebraica. La razón de esta manipulación algebraica fue hacer que el sistema pareciera un problema estático en el cual, por equilibrio, todas las sumas de fuerzas y pares de torsión fueran iguales a cero. De manera que cuando se expresa de esta forma algunas veces se denomina como un problema *cuasiestático.* La premisa es que al colocar una "fuerza de inercia" igual a $-ma$ y un par de "torsión de inercia" igual a $-I\alpha$ en los diagramas de cuerpo libre, el sistema estará entonces en un estado de "equilibrio dinámico" y puede resolverse por los ya conocidos métodos de la estática. Estas fuerzas y pares de torsión de inercia son iguales en magnitud pero opuestas en sentido, y se encuentran a lo largo de la misma línea de acción que ma e $I\alpha$. Esto fue un enfoque útil y popular que hacía un poco más fácil la solución de problemas de análisis de fuerzas dinámicas que cuando se elegían los métodos gráficos vectoriales.

Actualmente se pueden resolver las ecuaciones simultáneas para estos problemas con una calculadora o una computadora, y hay pocas razones para seguir el tedioso y complicado análisis gráfico de fuerzas. Por esto los métodos gráficos de análisis de fuerzas no se presentan en este texto. Sin embargo, el concepto de d'Alembert de "fuerzas y pares de torsión de inercia" conserva un valor histórico y, en muchos casos, es útil para comprender qué es lo que sucede en un sistema dinámico. Por otra parte, cuando se analiza el movimiento, el concepto de fuerza de inercia se expresa en un léxico común, y por lo general se usa en un contexto lego. Por esta razón se presenta aquí un ejemplo simple de su uso y más adelante se vuelve a utilizar en el estudio del análisis de fuerzas dinámicas para comprender algunos temas tales como el equilibrio y la superposición.

El término popular **fuerza centrífuga,** que en muchos lugares es empleado por personas legas para explicar por qué una masa atada a una cuerda mantiene estirada a esta última cuando se gira circularmente, es de hecho una fuerza de inercia de d'Alembert. En la figura 10-10a) se muestra una masa que gira en el extremo de una cuerda flexible pero inextensible, a una velocidad angular constante ω y con un radio constante r. En la figura 10-10b) se muestran diagramas de cuerpo libre "puros" de ambos miembros en el sistema, el eslabón de fijación (1) y el eslabón rotatorio (2). La única fuerza real que actúa sobre el eslabón 2 es la fuerza del eslabón 1 sobre el 2, F_{12}. Como la aceleración angular es cero en este ejemplo, la aceleración que actúa sobre el eslabón es sólo la componente $r\omega^2$, que es una **aceleración centrípeta,** es decir, dirigida *hacia el centro.* La fuerza en el pasador, deducida de la ecuación de Newton 10.1, es entonces:

$$F_{12} = mr\omega^2 \qquad (10.23a)$$

Observe que esta fuerza apunta hacia el centro, por lo que es una fuerza *centrípeta,* no una *centrífuga* (hacia fuera del centro). La fuerza F_{21} que ejerce el eslabón 2 sobre el

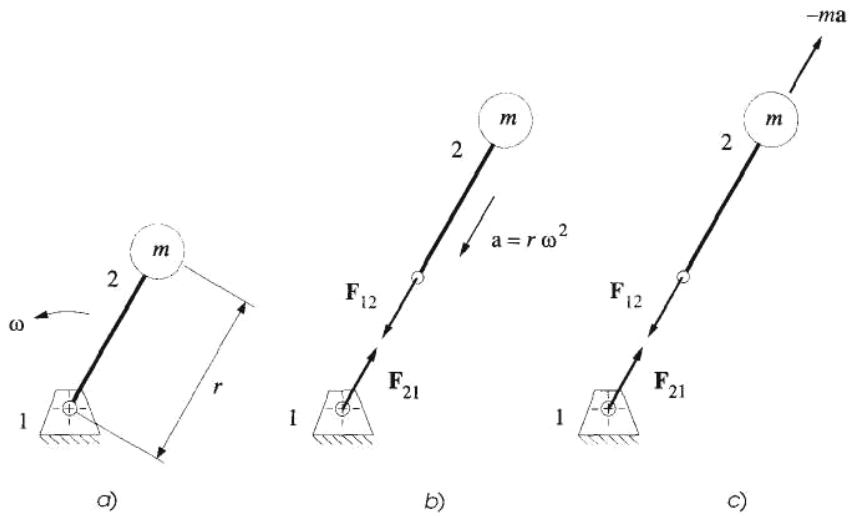


FIGURA 10-10
Fuerzas centrípetas y centrífugas

eslabón 1 se determina a partir de la tercera ley de Newton y obviamente es igual y opuesta a $\mathbf{F}_{12}$.

$$F_{21} = -F_{12} \tag{10.23b}$$

Por lo tanto, ésta es la fuerza de reacción sobre el eslabón 1, que es centrífuga, no es la fuerza sobre el eslabón 2. Desde luego, ésta es la fuerza de reacción que siente su mano (eslabón 1) y que se concibe popularmente como algo que empuja de manera centrífuga el peso rotatorio. Ahora se verá esto desde el punto de vista de d'Alembert. En la figura 10-10c) se muestra otro conjunto de diagramas de cuerpo libre construidos de acuerdo con el principio de d'Alembert. Aquí se muestra una fuerza de inercia negativa $m\mathbf{a}$ aplicada a la masa del eslabón 2. La fuerza en el pasador según la ecuación de d'Alembert es:

$$F_{12} - mr\omega^2 = 0$$

$$F_{12} = mr\omega^2 \tag{10.23c}$$

No sorprende, pues, que el resultado sea el mismo de la ecuación 10.23a, como debe ser. La única diferencia es que el diagrama de cuerpo libre muestra una fuerza de inercia aplicada a la masa rotatoria sobre el eslabón 2. Ésta es la fuerza centrífuga de fama popular a la que se debe la tirantez de la cuerda.

Como es evidente, en cualquier problema puede determinarse la respuesta correcta sin tomar en cuenta cómo se reordenan algebraicamente las ecuaciones correctas, de manera que si esto ayuda a pensar en términos de las fuerzas de inercia que se aplican a un sistema dinámico, se procede así. Cuando se trate el tema de equilibrio este enfoque ayudará a visualizar los efectos de las masas de equilibrio en el sistema.

10.13 MÉTODOS DE ENERGÍA: TRABAJO VIRTUAL

Los métodos newtonianos del análisis de fuerzas dinámicas descritos anteriormente tienen la ventaja de proporcionar información completa acerca de todas las fuerzas internas en las juntas de pasador, así como también de las fuerzas y pares de torsión externos del sistema. Una consecuencia de este hecho es la relativa complejidad de su aplicación que requiere la resolución simultánea de grandes sistemas de ecuaciones. Se dispone de otros métodos para la solución de estos problemas más fáciles de aplicar, pero que también dan menor información. Los métodos de solución por energía son de este tipo. Por estos métodos sólo se determinan las fuerzas y pares de torsión externos que producen trabajo. No se calculan las fuerzas internas de las juntas. Un valor principal del enfoque de energía es su uso como una comprobación rápida de la exactitud obtenida por la solución newtoniana para el par de torsión de entrada. Generalmente, el ingeniero de diseño se ve forzado a emplear la solución newtoniana más completa para obtener información de las fuerzas de juntas de pasador, de manera que se puedan analizar los pasadores y eslabones en el caso de que se presenten fallas debidas al esfuerzo.

La *ley de conservación de la energía* establece que la energía no puede crearse ni destruirse, sólo convertirse de una forma a otra. Muchas máquinas se diseñan específicamente para convertir la energía de una forma a otra en un modo controlado. Dependiendo de la eficiencia de la máquina, parte de la energía de entrada se convertirá en calor y éste no puede reaprovecharse por completo. Pero por lo común quedarán almacenadas de manera temporal en la máquina grandes cantidades de energía, en forma potencial y cinética. No es raro que la magnitud de esta energía almacenada internamente, de manera instantánea, exceda por mucho la magnitud de cualquier trabajo externo útil que la máquina pueda realizar.

Trabajo se define como *el producto punto de la fuerza por el desplazamiento.* Puede ser positivo, negativo o cero, y es una cantidad escalar.

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{R} \tag{10.24a}$$

Como las fuerzas en las juntas de pasador entre los eslabones no tienen ningún desplazamiento relativo asociado con ellos, no realizan trabajo sobre el sistema, por consiguiente, no aparecerán en la ecuación de trabajo. El trabajo realizado por el sistema más las pérdidas es igual a la energía entregada al sistema.

$$E = W + Pérdidas \tag{10.24b}$$

Los eslabonamientos de juntas de pasador con cojinetes de baja fricción en los pivotes pueden tener altas eficiencias, superiores a 95%. Como esto no es razonable, para una primera aproximación en el diseño de tal mecanismo se supone que las pérdidas son cero. La **potencia** es la razón de variación de la energía con respecto al tiempo:

$$P = \frac{dE}{dt} \tag{10.24c}$$

Puesto que se considera que todos los cuerpos de los elementos de la máquina son rígidos, sólo un cambio en la posición de los *CG* de los elementos alterará la energía potencial almacenada en el sistema. Las fuerzas gravitacionales de los elementos de maquinaria de mediana a alta velocidad, a menudo tienden a ser superadas por las fuerzas

dinámicas de las aceleraciones de las masas. Por estas razones, para dicho análisis, en el sistema se despreciarán los pesos y la energía potencial gravitacional, y se considerará sólo la energía cinética. La razón de variación, con respecto al tiempo, de la energía cinética almacenada dentro del sistema para el movimiento lineal y angular, respectivamente, es entonces:

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2\right)}{dt} = m\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} \tag{10.25a}$$

y:

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)}{dt} = I\alpha\cdot\omega \tag{10.25b}$$

Éstas son, desde luego, expresiones para la potencia en el sistema equivalentes a:

$$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \tag{10.25c}$$

y:

$$P = \mathbf{T}\cdot\omega \tag{10.25d}$$

La razón de cambio de la energía en el sistema, en cualquier instante, debe equilibrarse entre la que se suministra externamente y la que se almacena dentro del sistema (se desprecian las pérdidas). Las ecuaciones 10.25a y b representan el cambio en la energía almacenada en el sistema, y las ecuaciones 10.25c y d representan el cambio en la energía que entra o sale del sistema. En ausencia de pérdidas estas dos deben ser iguales para conservar la energía. Esta relación se puede expresar como la suma de todas las energías delta (o potencia) debidas a cada elemento móvil (o eslabón) en el sistema:

$$\sum_{k=2}^{n}\mathbf{F}_k\cdot\mathbf{v}_k + \sum_{k=2}^{n}\mathbf{T}_k\cdot\omega_k = \sum_{k=2}^{n}m_k\mathbf{a}_k\cdot\mathbf{v}_k + \sum_{k=2}^{n}I_k\alpha_k\cdot\omega_k \tag{10.26a}$$

10

El subíndice *k* representa cada uno de los *n* eslabones o elementos móviles en el sistema, empezando con el eslabón 2, debido a que el 1 es el eslabón de fijación estacionario. Observe que todas las velocidades y aceleraciones angulares y lineales en esta ecuación deben haberse calculado a partir de un análisis cinemático previo para todas las posiciones de interés del mecanismo. Asimismo, deben conocerse las masas y los momentos de inercia de masa de todos los eslabones móviles.

Si se utiliza el principio de d'Alembert para reordenar esta ecuación, los términos se pueden "denominar" más fácilmente para los propósitos del análisis.

$$\sum_{k=2}^{n}\mathbf{F}_k\cdot\mathbf{v}_k + \sum_{k=2}^{n}\mathbf{T}_k\cdot\omega_k - \sum_{k=2}^{n}m_k\mathbf{a}_k\cdot\mathbf{v}_k - \sum_{k=2}^{n}I_k\alpha_k\cdot\omega_k = 0 \tag{10.26b}$$

Los dos primeros términos en la ecuación 10.26b representan, respectivamente, el cambio en la energía debido a todas las **fuerzas externas** y todos los **pares de torsión externos** aplicados al sistema. Éstos incluirían cualesquiera de las fuerzas o pares de torsión de otros mecanismos que inciden sobre cualquiera de estos eslabones y también incluyen el par de torsión impulsor. Los segundos dos términos representan, respectivamente, el cambio en la energía debido a todas las **fuerzas de inercia** y todos los **pares de**

torsión de inercia presentes en el sistema. Estos dos últimos términos definen el cambio en la energía cinética almacenada en el sistema en cada paso de tiempo. La única incógnita en la ecuación, cuando se establece en forma adecuada, es el **par de torsión impulsor** (o la fuerza impulsora) suministrado por el motor o actuador del mecanismo. Este par de torsión impulsor (o fuerza) es entonces la única variable que puede determinarse con este planteamiento. Las fuerzas internas de junta no están presentes en la ecuación puesto que no realizan ningún trabajo neto sobre el sistema.

La ecuación 10.26b se denomina algunas veces como **ecuación del trabajo virtual,** un nombre que es impropio, ya que de hecho es una **ecuación de potencia.** Cuando este enfoque de análisis se aplica a un problema de estática no hay movimiento. El término **trabajo virtual** proviene del concepto de que cada fuerza genera un desplazamiento infinitesimal o virtual del elemento del sistema en el cual se aplica, sobre un intervalo infinitesimal delta. El producto punto de la fuerza por el desplazamiento virtual es el trabajo virtual. Esto será la potencia instantánea del sistema en el límite. En el siguiente capítulo se presentará un ejemplo del uso de este método de trabajo virtual junto con ejemplos de la solución newtoniana aplicados a eslabonamientos en movimiento.

10.14 REFERENCIAS

1 **Beer, F. P. y E. R. Johnson** (1984). *Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dynamics.* McGraw-Hill, Inc.: Nueva York.

2 **Koster, M. P.** (1974). *Vibrations of Cam Mechanisms.* Phillips Technical Library Series, Macmillan: Londres.

3 **Jennings, A.** (1977). *Matrix Computation for Engineers and Scientists.* John Wiley and Sons: Nueva York.

10.15 PROBLEMAS

*†10-1 El mazo mostrado en la figura 10-2 tiene las siguientes especificaciones: la cabeza de acero tiene un diámetro de 1 pulgada y una altura de 3 pulgadas; el mango de madera tiene 1.25 pulgadas de diámetro y 10 pulgadas de longitud y disminuye a 5/8 de pulgada de ancho cuando entra en la cabeza. Encuentre la localización del *CG* del conjunto, y su momento de inercia y radio de giro con respecto al eje *ZZ.* Suponga que la madera tiene una densidad igual a 0.9 veces la del agua.

*†10-2 Repita el problema 10-1 utilizando una cabeza del mazo de madera de 2 pulgadas de diámetro. Suponga que la densidad de la madera es 0.9 veces la del agua.

†10-3 Determine la localización del *CG* del conjunto, el momento de inercia de masa y el radio de giro con respecto al eje especificado, para cualquiera de los siguientes objetos comunes disponibles que se designen. (Note que no son problemas cortos.)

a. Una pluma de buena calidad, con respecto al punto de pivote por donde se toma para escribir. (¿Cómo afecta el colocar la tapa en el extremo superior de la pluma a estos parámetros cuando usted escribe?)

b. Dos cuchillos de mesa, uno metálico y otro de plástico, con respecto al eje de pivote, donde se toman para cortar. Compare los resultados calculados y comente acerca de la utilidad dinámica de los dos cuchillos (desprecie las consideraciones de afilamiento).

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son apropiados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad* o *TKSolver.*

c. Un martillo de bola (disponible para inspección en cualquier taller mecánico universitario), con respecto al centro de rotación (después de que calculó su localización para el centro de percusión apropiado).
d. Un bat de béisbol (véase al entrenador) respecto al centro de rotación (después de que calculó su localización para el centro de percusión apropiado).
e. Una taza de café cilíndrica, con respecto al hueco del asa.

*†10-4 Establezca estas ecuaciones en forma matricial. Utilice el programa MATRIX, *Mathcad* o una calculadora que tenga la capacidad matemática matricial para resolverlas.

a.
$$\begin{aligned} -5x - 2y + 12z - w &= -9 \\ x + 3y - 2z + 4w &= 10 \\ -x - y + z &= -7 \\ 3x - 3y + 7z + 9w &= -6 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 3x - 5y + 17z - 5w &= -5 \\ -2x + 9y - 14z + 6w &= 22 \\ -x - y - 2w &= 13 \\ 4x - 7y + 8z + 4w &= -9 \end{aligned}$$

†10-5 En la figura P10-1 se muestra una abrazadera hecha de acero, a.
Encuentre la localización de su céntrodo respecto al punto *B*.
b. Encuentre su momento de inercia de masa I_{xx} respecto al eje *X* que pasa por el punto *B*.
c. Encuentre su momento de inercia de masa I_{yy} respecto al eje *Y* que pasa por el punto *B*.

*†10-6 Dos resortes están conectados en serie. Uno tiene una *k* de 34 y otra de 3.4. Calcule su constante de resorte efectiva. ¿Qué resorte domina? Repita esto mismo con los dos resortes en paralelo. ¿Qué resorte domina? (Utilice cualquier sistema de unidades.)

†10-7 Repita el problema 10-6 con $k_1 = 125$ y $k_2 = 25$. (Utilice cualquier sistema de unidades.)

†10-8 Repita el problema 10-6 con $k_1 = 125$ y $k_2 = 115$. (Utilice cualquier sistema de unidades.)

*†10-9 Dos amortiguadores están conectados en serie. Uno tiene un factor de amortiguamiento $c_1 = 12.5$ y el otro $c_2 = 1.2$. Calcule su constante de amortiguamiento efectiva. ¿Qué amortiguador domina? Repita lo mismo con los dos amortiguadores en paralelo. ¿Qué amortiguador domina? (Utilice cualquier sistema de unidades.)

†10-10 Repita el problema 10-9 con $c_1 = 12.5$ y $c_2 = 2.5$. (Utilice cualquier sistema de unidades.)

†10-11 Repita el problema 10-9 con $c_1 = 12.5$ y $c_2 = 10$. (Utilice cualquier sistema de unidades.)

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son apropiados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad* o *TKSolver*.

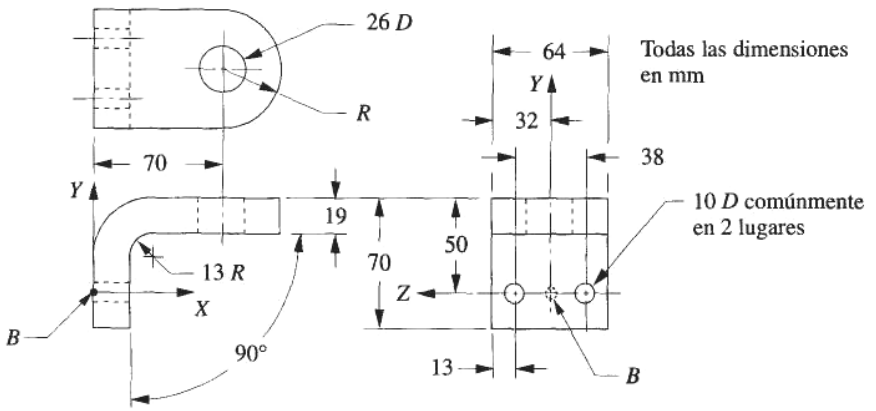


FIGURA P10-1

Problema 10-5

*†10-12 Una masa de $m = 2.5$ y un resorte con una $k = 42$ se conectan al extremo de una palanca en un radio de 4. Calcule la masa efectiva y la constante de resorte efectiva en un radio de 12 sobre la misma palanca. (Utilice cualquier sistema de unidades.)

†10-13 Una masa de $m = 1.5$ y un resorte con una $k = 24$ se conectan al extremo de una palanca en un radio de 3. Calcule la masa efectiva y la constante de resorte efectiva en un radio de 10 sobre la misma palanca. (Utilice cualquier sistema de unidades.)

†10-14 Una masa dem = 4.5 y un resorte con una $k = 15$ se conectan a un extremo de una palanca en un radio de 12. Calcule la masa efectiva y la constante de resorte efectiva en un radio de 3 sobre la misma palanca. (Utilice cualquier sistema de unidades.)

†10-15 Refiérase a la figura 10-9 y al ejemplo 10-1. Los datos para el tren de válvulas son:

El levantaválvulas es un cilindro sólido de 0.75 de diámetro por 1.25 de longitud. La barra de empuje es un tubo hueco de 0.375 de diámetro exterior por 0.25 de diámetro interior por 12 de longitud. El brazo de balancín tiene un área transversal promedio de 1 de ancho por 1.5 de altura.

La longitud $a = 2$, $b = 3$. El árbol de levas tiene un diámetro de 1 por 3 entre los soportes de cojinetes, la leva está en el centro. La válvula de resorte $k = 200$ Todas las piezas son de acero.

Calcule la constante de resorte efectiva y la masa efectiva de un sistema equivalente con un *GDL* localizado en el lado de la leva del brazo de balancín. (Utilice el sistema de unidades pulgadas-libras-segundo "ips por sus siglas en inglés".)

†10-16 En la figura P10-2 se muestra un sistema de leva-seguidor. Se indican las dimensiones del brazo de aluminio sólido, con un área transversal rectangular de 2 x 2.5 pulgadas. La guía para el seguidor de rodillo de acero de 2 pulgadas de diámetro y 1.5 pulgadas

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son apropiados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad* o *TKSolver*.

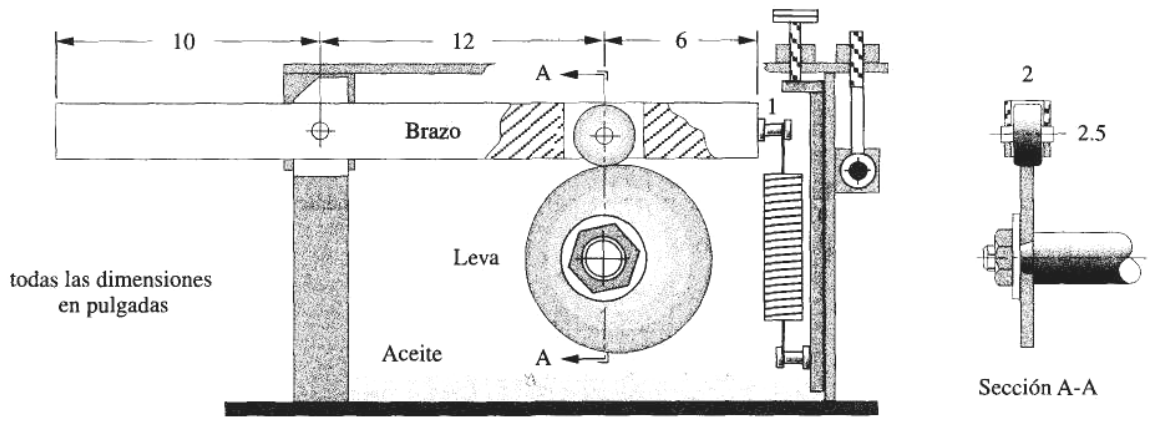


FIGURA P10-2

Problemas 10-16, 10-17, 10-21 y 10-26

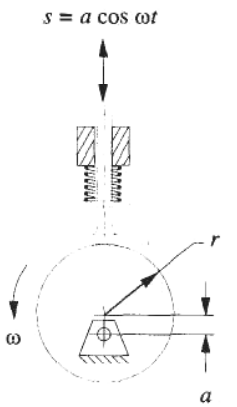


FIGURA P10-3

Problemas 10-18 y 10-19

de ancho tiene una longitud de 3 pulgadas. Determine la masa del brazo, la localización del centro de gravedad y el momento de inercia de masa con respecto a su *CG y* al pivote del brazo. Construya un modelo lineal de masa concentrada con un *GDL* del sistema dinámico referente al de leva-seguidor. Desprecie el amortiguamiento.

†10-17 La leva de la figura P10-2 es una excéntrica pura con una excentricidad = 0.5 pulgadas y gira a 500 revoluciones por minuto. El resorte tiene una razón de 123 libras/pulgada y una precarga de 173 libras. Utilice el método del trabajo virtual para determinar el par de torsión requerido para que la leva gire una revolución. Emplee los datos de la solución para el problema 10-16.

†10-18 La leva de la figura P10-3 es una excéntrica pura con una excentricidad = 20 mm y gira a 200 revoluciones por minuto. La masa del seguidor es de 1 kg. El resorte tiene una razón de 10 N/m y una precarga de 0.2 N. Utilice el método de trabajo virtual para determinar el par de torsión requerido para que la leva gire una revolución.

†10-19 Repita el problema 10-18 utilizando una leva de 20 mm con un levantamiento armónico doble simétrico a 180° y un descenso armónico doble a 180°. Véase el capítulo 8 para las fórmulas de las levas.

*†10-20 Un automóvil de 3 000 libras tiene una relación impulsora final de 1:3, y las relaciones de engranes de transmisión de 1:4, 1:3, 1:2 y 1:1, de la primera a la cuarta velocidad, respectivamente. ¿Cuál es la masa efectiva del vehículo que se registra en el volante del motor en cada velocidad?

*†10-21 Determine la constante efectiva del resorte y la precarga efectiva del resorte de la figura P10-2 cuando se refleja sobre el mecanismo de leva-seguidor. Véase el problema 10-17 para datos adicionales.

†10-22 ¿Cuál es la inercia efectiva de una carga aplicada al tambor de la figura P9-5 cuando se refleja sobre el engrane *Al*

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son apropiados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad* o *TKSolver*.

†10-23 ¿Cuál es la inercia efectiva de una carga aplicada al tambor de la figura P9-7 cuando se refleja sobre el brazo?

†10-24 Véase la figura 10-8a). Dados a = 100 mm, ¿- = 150 mm, k_A = 2 000 N/m y m_B = 2 kg, determine la masa equivalente en el punto A y el resorte equivalente en el punto *B*.

†10-25 Repita el Problema 10-24 con a = 50 mm, b = 150 mm, k_A = 1 000 N/m y m_B = 3 kg.

†10-26 Para el brazo del mecanismo leva-seguidor de la figura P10-2, determine la localización de su pivote fijo que tendrá una fuerza de reacción cero cuando la leva aplique su fuerza al seguidor.

† Estos problemas son apropiados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad* o *TKSolver*.



Capítulo 11

ANÁLISIS DE FUERZAS DINÁMICAS

¡No lo fuerce!
Use un martillo más grande.
ANÓNIMO

11.0 INTRODUCCIÓN

Cuando se han usado la síntesis y el análisis cinemáticos para definir una configuración y un conjunto de movimientos de un diseño en particular, es lógico y conveniente aplicar entonces una solución **cinetostática,** o **dinámica inversa,** para determinar las fuerzas y los pares de torsión en el sistema. Se usará este enfoque en este capítulo, y se concentrará en la determinación de las fuerzas y los pares de torsión de fuerzas que resultan del sistema cinemático y que se requieren para impulsarlo de manera que proporcione las aceleraciones diseñadas. En este capítulo se presentan ejemplos numéricos. Estos ejemplos se proporcionan también como archivos de disco para introducirlos en los programas MATRIX O FOURBAR, mismos que se describen en el apéndice A. Se recomienda al lector abrir los archivos señalados en estos programas y examinar los ejemplos con más detalle. Los nombres de los archivos están indicados en el análisis de cada ejemplo.

11.1 MÉTODO DE SOLUCIÓN DE NEWTON

El análisis de fuerzas dinámicas se hace por alguno de los siguientes métodos. El que da mayor información con respecto a las fuerzas internas del mecanismo sólo requiere el uso de las leyes de Newton, definidas en las ecuaciones 10.1 y 10.4. Éstas pueden escribirse como la suma de todas las fuerzas y los pares de torsión de fuerzas en el sistema:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad \sum \mathbf{T} = I_G\alpha \tag{11.1a}$$

También es conveniente sumar por separado las componentes de las fuerzas en las direcciones *X* y *Y* en un sistema de coordenadas apropiado. En el sistema bidimensional todos los pares de torsión están en la dirección Z. Esto permite descomponer las dos ecuaciones vectoriales en tres ecuaciones escalares:

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \qquad \sum T = I_G\alpha \tag{11.1b}$$

Estas tres ecuaciones deben escribirse para cada cuerpo en movimiento de un sistema, las cuales conducirán a un conjunto de ecuaciones lineales simultáneas para cualquier sistema. Como se mostró en el capítulo 5, estos conjuntos se pueden resolver más convenientemente por un método matricial. Estas ecuaciones no consideran la fuerza gravitacional (peso) en un eslabón. Si las aceleraciones cinemáticas son grandes comparadas con la aceleración gravitacional, lo cual es frecuente en estos casos, entonces en el análisis dinámico se pueden ignorar las fuerzas debidas a los pesos. Si los elementos de la máquina tienen mucha masa o se mueven muy lentamente con aceleraciones cinemáticas pequeñas, o se tienen ambos casos, será necesario incluir en este análisis el peso de los elementos. El peso puede tratarse como una fuerza externa que actúa sobre el *CG* del elemento a un ángulo constante.

11.2 UN SOLO ESLABÓN EN ROTACIÓN PURA

Como un ejemplo sencillo de este procedimiento de solución, considere el eslabón único en rotación pura que se muestra en la figura 11-la). En cualquiera de estos problemas de análisis cinetostático de fuerzas dinámicas, primero se debe definir totalmente la cinemática del problema. Esto es, deben obtenerse las aceleraciones angulares de todos los elementos rotatorios y las aceleraciones lineales de los *CG* de todos los elementos móviles para todas las posiciones de interés. También debe conocerse la masa de cada elemento y el momento de inercia I_G con respecto al *CG* de cada elemento. Además, puede haber fuerzas o pares de torsión externos aplicados a cualquier elemento del sistema, tal como se muestra en la figura.

Aunque este análisis puede ser enfocado de muchas maneras, es útil adoptar por consistencia una disposición particular de los sistemas coordenados y apegarse a ella. Aquí se presentará tal planteamiento, el cual, si se sigue cuidadosamente, tenderá a minimizar las oportunidades de error. El lector desarrollará su propio enfoque una vez que haya entendido bien los principios. Las matemáticas que se usan son invariables y elementales, y se pueden elegir sistemas coordenados a conveniencia. Los vectores que actúan sobre el sistema dinámico en cualquier situación de carga son los mismos en un tiempo particular, sin importar cómo se decida descomponerlos en componentes para efectos de cálculo. La solución resultante será la misma.

En primer lugar se establecerá un sistema coordenado local no rotatorio en cada elemento móvil localizado en su *CG*. (En este ejemplo se tiene sólo un elemento móvil.) Todas las fuerzas aplicadas de manera externa, ya sea debidas a otros elementos conectados o a otros sistemas, deben tener sus puntos de aplicación localizados en este sistema coordenado local. En la figura 11-Ib) se muestra un diagrama de cuerpo libre del eslabón móvil 2. La junta de pasador en O_2 en el eslabón 2 tiene una fuerza $\mathbf{F}_{12}$ debida a la unión con el eslabón 1, cuyas componentes *x* y *y* son F_{12x} y F_{12y}. Estos subíndices se leen como "la fuerza del eslabón 1 sobre el eslabón 2" en la dirección *x* o *y*. Este esquema de

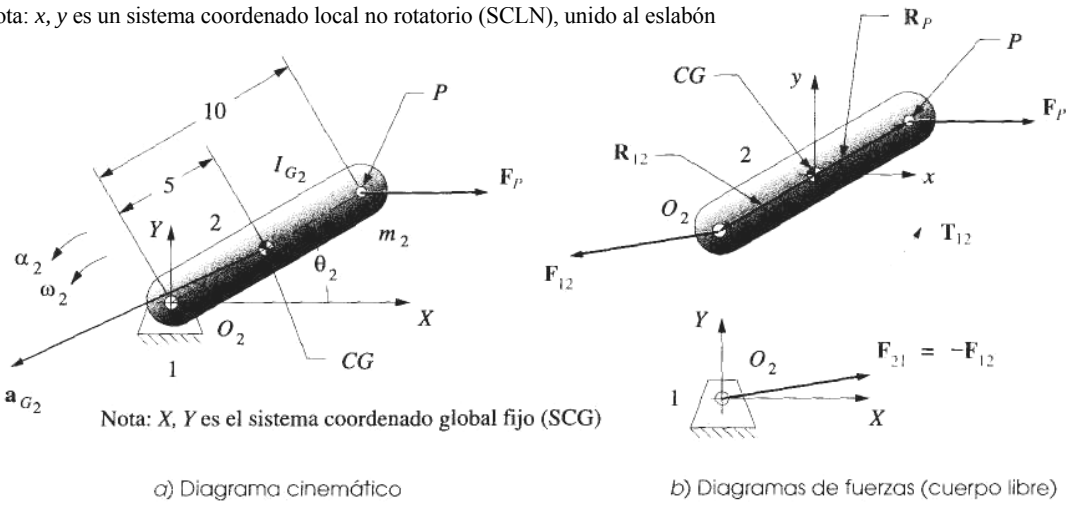


FIGURA 11-1
Análisis de fuerzas dinámicas de un solo eslabón en rotación pura

notación para los subíndices se usará consistentemente para indicar cuál de los pares de fuerzas "de acción y reacción" en cada junta se va a resolver.

También hay una fuerza aplicada de manera externa $\mathbf{F}_P$, que se muestra en el punto *P* con componentes F_{Px} y F_{Py}. Los puntos de aplicación de estas fuerzas se definen por los vectores de posición $\mathbf{R}_{12}$ y $\mathbf{R}_P$, respectivamente. Estos vectores de posición están definidos con respecto al sistema coordenado local en el *CG* del elemento. Se necesitará descomponerlos en sus componentes *x* y *y*. Tendrá que haber un par de torsión fuente disponible en el eslabón para impulsarlo según las aceleraciones definidas cinemáticamente. Ésta es una de las incógnitas por determinar. El par de torsión fuente es el que proviene *de la fijación hasta el eslabón impulsor 2* y, por tanto, se marca como $\mathbf{T}_{12}$. Las otras dos incógnitas en este ejemplo son las componentes de fuerza en la junta de pasador F_{12x} y F_{12y}.

Se tienen tres incógnitas y tres ecuaciones, por lo tanto, el sistema puede resolverse. Ahora se pueden escribir las ecuaciones 11.1 para el eslabón móvil 2. Cualquiera de las fuerzas o pares de torsión aplicados, cuyas direcciones se conocen, deben conservar los signos apropiados en sus componentes. Se supondrá que todas las fuerzas y pares de torsión desconocidos son positivos. Sus verdaderos signos "saldrán del proceso".

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_P + \mathbf{F}_{12} = m_2 \mathbf{a}_G$$

$$\sum \mathbf{T} = \mathbf{T}_{12} + (\mathbf{R}_{12} \times \mathbf{F}_{12}) + (\mathbf{R}_P \times \mathbf{F}_P) = I_G \alpha \qquad (11.2)$$

La ecuación de las fuerzas puede descomponerse en dos componentes. La ecuación de los pares de torsión contiene dos términos vectoriales de producto cruz que representan los pares de torsión debidos a las fuerzas aplicadas a una distancia del *CG*. Cuando se desarrollan estos productos cruz el sistema de ecuaciones se convierte en:

$$
\begin{aligned}
F_{P_x} + F_{12_x} &= m_2 a_{G_x} \\
F_{P_y} + F_{12_y} &= m_2 a_{G_y} \\
T_{12} + \left(R_{12_x} F_{12_y} - R_{12_y} F_{12_x}\right) + \left(R_{P_x} F_{P_y} - R_{P_y} F_{P_x}\right) &= I_G \alpha
\end{aligned}
\tag{11.3}
$$

Ésta puede expresarse en forma matricial con los coeficientes de las variables desconocidas que forman la matriz A, las variables incógnitas en el vector B y los términos constantes en el vector C, y después se encuentra B.

$$
\begin{matrix} [\mathbf{A}] & & & \times & [\mathbf{B}] & = & [\mathbf{C}] \end{matrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -R_{12_y} & R_{12_x} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{12_x} \\ F_{12_y} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 a_{G_x} - F_{P_x} \\ m_2 a_{G_y} - F_{P_y} \\ I_G \alpha - \left(R_{P_x} F_{P_y} - R_{P_y} F_{P_x}\right) \end{bmatrix}
\tag{11.4}
$$

Observe que la matriz A contiene toda la información geométrica y la matriz C contiene toda la información dinámica acerca del sistema. La matriz B contiene todas las fuerzas y pares de torsión desconocidos. Ahora se presentará un ejemplo numérico para reforzar la comprensión de este método.

EJEMPLO 11-1

Análisis dinámico de fuerzas para un solo eslabón en rotación pura. (Véase la figura 11-1)

Datos: El eslabón de 10 pulgadas que se muestra pesa 4 lb. Su *CG* está a 5 pulgadas sobre la línea de centros. Su momento de inercia con respecto a su *CG* es de 0.08 lb-pulg-s^2. Sus datos cinemáticos son:

θ_2 grados	ω_2 rad/s	α_2 rad/s^2	a_{G_2} pulg/s^2
30	20	15	2001 @ 208°

Una fuerza externa de 40 lb a 0° se aplica en el punto *P*.

Halle: **La fuerza** $\mathbf{F}_{12}$ en la junta de pasador O_2 y el **par de torsión** impulsor $\mathbf{T}_{12}$ necesarios para mantener el movimiento con la aceleración dada para esta posición instantánea del eslabón.

Solución:

1 Convierta el peso dado a las unidades apropiadas de masa, en este caso a blobs:

$$
masa = \frac{peso}{g} = \frac{4 \text{ lb}}{386 \text{ pulg/s}^2} = 0.0104 \text{ blobs} \tag{a}
$$

2 Construya un sistema coordenado local en el *CG* del eslabón y dibuje todos los vectores aplicables que actúan sobre el sistema como se muestra en la figura. Dibuje un diagrama de cuerpo libre como el que se muestra.

3 Calcule las componentes *x* y *y* de los vectores de posición $\mathbf{R}_{12}$ y $\mathbf{R}_p$ en este sistema coordenado:

$$\mathbf{R}_{12} = 5\ pulg\ @\ \angle 210°; \qquad R_{12_x} = -4.33, \qquad R_{12_y} = -2.50$$

$$\mathbf{R}_p = 5\ pulg\ @\ \angle 30°; \qquad R_{P_x} = +4.33, R \qquad R_{P_y} = +2.50 \tag{b}$$

4 Calcule las componentes *x* y *y* de la aceleración del *CG* en este sistema coordenado:

$$\mathbf{a}_G = 2001\ @\ \angle 208°; \qquad a_{G_x} = 1766.78, \qquad a_{G_y} = -939.41 \tag{c}$$

5 Calcule las componentes *x y y* de la fuerza externa en *P* en este sistema coordenado:

$$\mathbf{F}_P = 40\ @\ \angle 0°; \qquad F_{P_x} = 40, \qquad F_{P_y} = 0 \tag{d}$$

6 Sustituya los valores dados y calculados en la ecuación matricial 11.4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2.50 & -4.33 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{12_x} \\ F_{12_y} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0.01)(-1766.78) - 40 \\ (0.01)(-939.41) - 0 \\ (0.08)(15) - \{(4.33)(0) - (2.5)(40)\} \end{bmatrix} \tag{e}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2.50 & -4.33 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{12_x} \\ F_{12_y} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -57.67 \\ -9.39 \\ 101.2 \end{bmatrix}$$

7 Resuelva el sistema, ya sea inviniendo la matriz A y multiplicando por la izquierda esta matriz inversa por la matriz C, usando una calculadora de bolsillo tal como la HP-15c, o introduciendo los valores para las matrices A y C en el programa MATRIX proporcionado con este libro.

El programa MATRIX proporciona la siguiente solución:

$$F_{12_x} = -57.67\ \text{lb}, \qquad F_{12_y} = -9.39\ \text{lb}, \qquad T_{12} = 204.72\ \text{lb-pulg} \tag{f}$$

Convirtiendo la fuerza en coordenadas polares:

$$\mathbf{F}_{12} = 58.43\ @\ \angle 189.25° \tag{g}$$

Lea en el programa MATRIX el archivo E011-01.mat del disco para practicar con este ejemplo.

11.3 ANÁLISIS DE FUERZAS DE UN ESLABONAMIENTO DE TRES BARRAS DE MANIVELA-CORREDERA

Cuando hay más de un eslabón en el conjunto, la solución sólo requiere que las tres ecuaciones 11.1b se escriban para cada eslabón y después se resuelvan simultáneamente.

En la figura 1 l-2a) se muestra un eslabonamiento de tres barras de manivela-corredera. Esta cadena, como se muestra, ha sido simplificada a partir de la de cuatro barras (véase la figura 11-4) al remplazar la corredera cinemáticamente redundante (eslabón 4) con una semijunta. Esta transformación del eslabonamiento reduce el número de eslabones a tres, sin cambio en el grado de libertad (véase la sección 2.9). Sólo los eslabones 2 y 3 están en movimiento. El eslabón 1 está fijo. Por lo tanto, se debe esperar que haya seis ecuaciones con seis incógnitas (tres por cada eslabón móvil).

En la figura 11-2b) se muestra el eslabonamiento "desbaratado" en sus tres eslabones separados, representados como cuerpos libres. Antes de este análisis de fuerzas dinámicas se debe haber realizado un análisis cinemático, con el fin de determinar para cada eslabón móvil su aceleración angular y la aceleración lineal de su *CG.* En el caso del análisis cinemático sólo se requieren las longitudes del eslabón de pasador a pasador. Para un análisis dinámico también son necesarios la masa *(m)* de cada eslabón, la localización de su *CG* y su momento de inercia (I_G) con respecto al *CG.*

El *CG* de cada eslabón inicialmente está definido por un vector de posición que se inicia en una junta de pasador y cuyo ángulo se mide con respecto a la línea de centros del eslabón en el sistema coordenado local rotatorio (SCLR) *x', y'.* Ésta es la forma más conveniente para establecer la localización del *CG,* ya que la línea de centros del eslabón es la definición cinemática del eslabón. Sin embargo, será necesario definir los parámetros dinámicos y las localizaciones de fuerzas del eslabón, con respecto a un sistema coordenado local no rotatorio (SCLN) *x, y,* localizado en su *CG,* y que siempre es paralelo al sistema coordenado global (SCG) *XY.* Las localizaciones de los vectores de posición de todos los puntos de unión de otros eslabones y puntos de aplicación de las fuerzas externas deben definirse con respecto a los SCLN de los eslabones. Observe que estos datos cinemáticos y de fuerzas aplicadas deben estar disponibles para todas las posiciones del eslabonamiento respecto del cual se desea un análisis de fuerzas. En el análisis y ejemplos siguientes se considerará sólo una posición de eslabonamiento. El proceso es idéntico para cada posición sucesiva y sólo se deben repetir los cálculos. Es obvio que una computadora será una ayuda valiosa para realizar esta tarea.

En el eslabón 2 de la figura *11-2b)* se muestran las fuerzas que actúan sobre cada junta de pasador, designadas F_{12} y F_{32}. Por convención, sus subíndices indican la fuerza que ejerce el eslabón adyacente *sobre* el eslabón que se analiza; esto es, F_{12} es la fuerza de 1 *sobre 2* y F_{32} es la fuerza de 3 *sobre 2.* Como es de suponer, también hay una fuerza igual y opuesta en cada uno de estos pasadores, las cuales serán designadas como F_{21} y F_{23}, respectivamente. La elección de cuál de los elementos de estos pares de fuerzas se debe resolver es arbitraria. En tanto se realice un registro apropiado de los cálculos se conservarán las identidades.

Cuando se mueve al eslabón 3, en su diagrama de cuerpo libre se mantiene la misma convención de indicar las fuerzas que actúan *sobre* el eslabón. Así, en el centro instantáneo 7_{23} se muestra a F_{23} actuando sobre el eslabón 3. Sin embargo, debido a que se señaló la fuerza F_{32} actuando en el mismo punto sobre el eslabón 2, se introduce una incógnita adicional al problema, por lo que se necesita una ecuación adicional. Esta ecuación la proporciona la tercera ley de Newton:

$$\mathbf{F}_{23} = -\mathbf{F}_{32} \qquad (11.5)$$

Por tanto, es posible sustituir la fuerza de reacción negativa por cualquier fuerza de acción en cualquier junta. Esto se ha efectuado en el eslabón tres de la figura con el fin

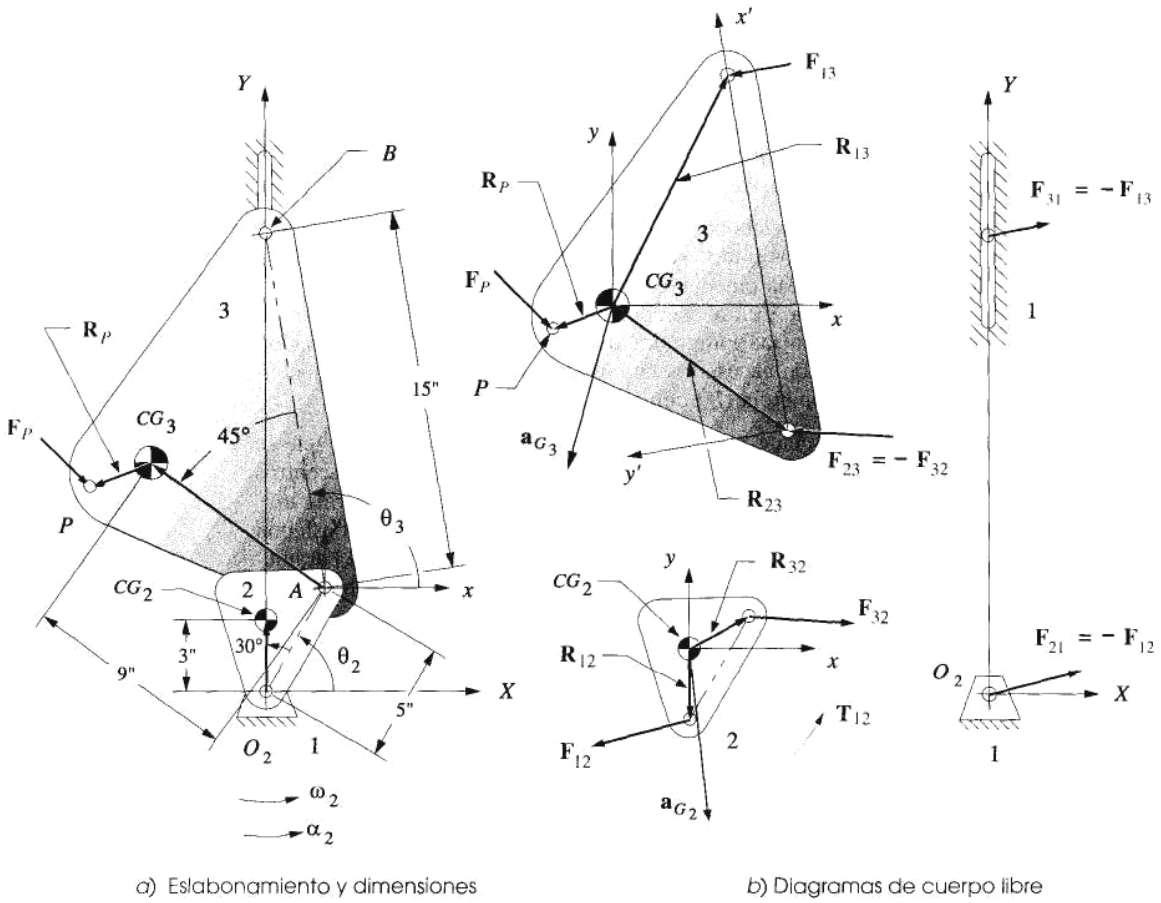


FIGURA 11-2

Análisis de fuerzas dinámicas de un eslabonamiento de manivela-corredera

11

de reducir a una las fuerzas desconocidas en esa junta, a saber F_{32}. El mismo procedimiento se sigue en cada junta con una de las fuerzas de acción y reacción, arbitrariamente elegida, para determinarla y su reacción negativa se aplica al eslabón conectado.

La convención para denominar los vectores de posición ($\mathbf{R}_{ap}$), que ubica las juntas de pasador con respecto al *CG* en el sistema coordenado local no rotatorio del eslabón, es como sigue. El primer subíndice *(a)* indica al eslabón contiguo hacia el cual apunta el vector de posición. El segundo subíndice *(p)* señala el eslabón primitivo, el cual pertenece al vector de posición. Así, en el caso del eslabón 2 en la figura ll-2b), el vector R_{12} localiza el punto de unión del eslabón 1 al eslabón 2, y R_{32} el punto de unión del eslabón 3 al eslabón 2. Observe que en algunos casos estos subíndices corresponderán a los de las fuerzas de pasador que se muestran aplicadas en dichos puntos, pero donde la fuerza de reacción negativa se ha sustituido como se describió antes, el orden de subíndices de la

fuerza y el de su vector de posición no concordarán. Esto puede crear confusión y debe ser observado cuidadosamente, por errores tipográficos, cuando se plantea el problema.

Cualquiera de las fuerzas externas que actúan sobre los eslabones se localizan de manera similar con un vector de posición a un punto sobre la línea de aplicación de la fuerza. A este punto se le asigna la misma letra del subíndice que la de la fuerza externa. El eslabón 3 en la figura muestra una fuerza externa F_P actuando sobre este eslabón en el punto *P*. El vector de posición R_P localiza ese punto con respecto al *CG*. Es importante observar que el *CG* de cada eslabón se toma consistentemente como el punto de referencia para todas las fuerzas que actúan en tal eslabón. Dejado a su propios medios, un cuerpo no restringido en movimiento complejo girará alrededor de su propio *CG;* así se analizará su aceleración lineal en ese punto y se aplicará la aceleración angular alrededor del *CG* como centro.

Ahora se escribirán las ecuaciones 11.1 para cada eslabón móvil. Para el eslabón 2, con los productos vectoriales desarrollados:

$$\begin{aligned} F_{12_x} + F_{32_x} &= m_2 a_{G2_x} \\ F_{12_y} + F_{32_y} &= m_2 a_{G2_y} \\ T_{12} + \left(R_{12_x} F_{12_y} - R_{12_y} F_{12_x}\right) + \left(R_{32_x} F_{32_y} - R_{32_y} F_{32_x}\right) &= I_{G_2} \alpha_2 \end{aligned} \tag{11.6a}$$

Para el eslabón 3, con los productos vectoriales desarrollados, observe la sustitución de la fuerza de reacción $-\mathbf{F}_{32}$ en vez de $\mathbf{F}_{23}$:

$$\begin{aligned} F_{13_x} - F_{32_x} + F_{P_x} &= m_3 a_{G3_x} \\ F_{13_y} - F_{32_y} + F_{P_y} &= m_3 a_{G3_y} \\ \left(R_{13_x} F_{13_y} - R_{13_y} F_{13_x}\right) + \left(R_{23_x} F_{32_y} - R_{23_y} F_{32_x}\right) + \left(R_{P_x} F_{P_y} - R_{P_y} F_{P_x}\right) &= I_{G_3} \alpha_3 \end{aligned} \tag{11.6b}$$

Observe también que $\mathbf{T}_{12}$, el par de torsión fuente, sólo aparece en la ecuación para el eslabón 2, ya que ésa es la manivela impulsora a la cual está conectado el motor. El eslabón 3 no tiene ningún par de torsión aplicado externamente, pero sí tiene una fuerza externa $\mathbf{F}_p$ que puede actuar sobre el eslabón 3 para hacer su trabajo externo.

En estas seis ecuaciones hay siete incógnitas, F_{12_x}, F_{12_y}, F_{32_x}, F_{32_y}, F_{13_x}, F_{13_y} y T_{12}. Pero, F_{13_y} se debe sólo al rozamiento de la imita entre el eslabón 3 y el eslabón 1. Se puede expresar una relación para la fuerza de fricción f en esa interfaz, tal como $f = \pm \mu N$, donde + u. es un coeficiente de fricción conocido de la fricción de Coulomb. La fuerza de fricción siempre se opone al movimiento. El análisis cinemático proporcionará la velocidad del eslabón en la iunta deslizante. La dirección de f siempre será opuesta a la velocidad. Observe que μ es una función no lineal que tiene una discontinuidad en la velocidad cero; así, en las posiciones de eslabonamiento donde la velocidad es cero, no es válida la inclusión de μ en estas ecuaciones lineales. (Véase la figura 10-5a).) En este ejemplo la fuerza normal N es igual a F_{13_x} y la fuerza de fricción f es igual a F_{13_y}. Para posiciones de eslabonamiento con velocidad distinta de cero se elimina F_{13_y} sustituyendo en la ecuación 11.6b,

$$F_{13_y} = \mu F_{13_x} \tag{11.6c}$$

donde al signo de F_{13_y} se toma opuesto al signo de la velocidad en ese punto. Quedan entonces seis incógnitas en las ecuaciones 11.6 y se resuelven simultáneamente. Reorde-

nando las ecuaciones 11.6a y 11.6b para colocar todos los términos conocidos en el lado derecho:

$$F_{12_x} + F_{32_x} = m_2 a_{G2_x}$$

$$F_{12_y} + F_{32_y} = m_2 a_{G2_y}$$

$$T_{12} + R_{12_x} F_{12_y} - R_{12_y} F_{12_x} + R_{32_x} F_{32_y} - R_{32_y} F_{32_x} = I_{G2}\alpha_2$$

(11.6d)

$$F_{13_x} - F_{32_x} = m_3 a_{G3_x} - F_{P_x}$$

$$\pm\mu\, F_{13_x} - F_{32_y} = m_3 a_{G3_y} - F_{P_y}$$

$$\left(\pm\mu\, R_{13_x} - R_{13_y}\right) F_{13_x} - R_{23_x} F_{32_y} + R_{23_y} F_{32_x} = I_{G3}\alpha_3 - R_{P_x} F_{P_y} + R_{P_y} F_{P_x}$$

Escribiendo las seis ecuaciones en forma de matriz se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -R_{12_y} & R_{12_x} & -R_{32_y} & R_{32_x} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & R_{23_y} & -R_{23_x} & \left(\mu R_{13_x} - R_{13_y}\right) & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{12_x} \\ F_{12_y} \\ F_{32_x} \\ F_{32_y} \\ F_{13_x} \\ T_{12} \end{bmatrix} =$$

(11.7)

$$\begin{bmatrix} m_2 a_{G2_x} \\ m_2 a_{G2_y} \\ I_{G_2}\alpha_2 \\ m_3 a_{G3_x} - F_{P_x} \\ m_3 a_{G3_y} - F_{P_y} \\ I_{G_3}\alpha_3 - R_{P_x} F_{P_y} + R_{P_y} F_{P_x} \end{bmatrix}$$

Este sistema puede resolverse mediante el programa MATRIX O una calculadora con resolución de matrices. Como ejemplo de este método considere los siguientes datos de un eslabonamiento.

EJEMPLO 11-2

Análisis dinámico de fuerzas de un eslabonamiento de tres barras de manivela-corredera con semijunta. (Véase la figura 11-2)

Datos: La manivela mostrada de 5 pulgadas de longitud (eslabón 2) pesa 2 Ib. Su *CG* está a 3 pulg y a 30° con respecto a la línea de centros. Su momento de inercia con

respecto a su *CG* es de 0.05 lb-pulg-s^2. Su aceleración está definida en su SCLN, *x,y.* Sus datos cinemáticos son:

θ_2 grados	ω_2 rad/s	α_2 rad/s^2	a_{G_2} pulg/s^2
60	30	−10	2700.17 @ −89.4°

El acoplador (eslabón 3) tiene 15 pulgadas de longitud y pesa 4 Ib. Su *CG* está a 9 pulgadas y forma 45° respecto de la línea de centros. Su momento de inercia con respecto a su *CG* es igual a 0.10 lb-pulg-s^2. Su aceleración está definida en su SCLN, *x,y.* Sus datos cinemáticos son:

θ_3 grados	ω_3 rad/s	α_3 rad/s^2	a_{G_3} pulg/s^2
99.59	−8.78	−136.16	3453.35 @ 254.4°

La junta deslizante sobre el eslabón 3 tiene una velocidad de 96.5 pulg/s en la dirección +*Y.*

Hay una fuerza externa de 50 lb a −45° aplicada en el punto *P,* localizado a 2.7 pulgadas y a 101° del *CG* del eslabón 3, medido en el sistema coordenado rotatorio del eslabón inserto o SCLR x', y' (el origen está en A y el eje x va de A a B). El coeficiente de fricción ¦es de 0.2.

Halle: Las **fuerzas** $\mathbf{F}_{12}$, $\mathbf{F}_{32}$, $\mathbf{F}_{13}$ en las juntas y el **par de torsión** impulsor $\mathbf{T}_{12}$ necesario para mantener el movimiento con la aceleración dada para esta posición instantánea del eslabón.

Solución:

I Convierta los pesos dados en unidades apropiadas de masa, en este caso blobs:

$$masa_{eslabón2} = \frac{peso}{g} = \frac{2 \text{ lb}}{386 \text{ pulg/s}^2} = 0.0052 \text{ blobs} \qquad \text{(a)}$$

$$masa_{eslabón3} = \frac{peso}{g} = \frac{4 \text{ lb}}{386 \text{ pulg/s}^2} = 0.0104 \text{ blobs} \qquad \text{(b)}$$

2 Establezca un sistema coordenado local no rotatorio *x,y* (SCLN) en el *CG* de cada eslabón y dibuje todas las posiciones aplicables y vectores de fuerza que actúan dentro o sobre ese sistema, como se muestra en la figura 11-2. Dibuje un diagrama de cuerpo libre de cada eslabón en movimiento como se muestra.

3 Calcule las componentes *x* y y de los vectores de posición $\mathbf{R}_{12}$, $\mathbf{R}_{32}$, $\mathbf{R}_{23}$, $\mathbf{R}_{13}$ y $\mathbf{R}_P$ en el SCLN:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{12} &= 3.00 \text{ @ } \angle 270.0°; & R_{12_x} &= 0, & R_{12_y} &= -3.0 \\
\mathbf{R}_{32} &= 2.83 \text{ @ } \angle 28.0°; & R_{32_x} &= 2.500, & R_{32_y} &= 1.333 \\
\mathbf{R}_{23} &= 9.00 \text{ @ } \angle 324.5°; & R_{23_x} &= 7.329, & R_{23_y} &= -5.224 \\
\mathbf{R}_{13} &= 10.72 \text{ @ } \angle 63.14°; & R_{13_x} &= 4.843, & R_{13_y} &= 9.563 \\
\mathbf{R}_P &= 2.70 \text{ @ } \angle 201.0°; & R_{P_x} &= -2.521, & R_{P_y} &= -0.968
\end{aligned} \qquad \text{(c)}$$

Estos ángulos de los vectores de posición se miden con respecto al SCLN que siempre es paralelo al sistema coordenado global (SCG), tomando los mismos ángulos en ambos sistemas.

4 Calcule las componentes *x* y *y* de la aceleración de los *CG* de todos los eslabones en movimiento en el sistema coordenado global:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{G_2} &= 2700.17 \ @ \angle -89.4°; \qquad a_{G_{2_x}} = 28.28, \quad a_{G_{2_y}} = -2700 \\ \mathbf{a}_{G_3} &= 3453.35 \ @ \angle 254.4°; \qquad a_{G_{3_x}} = -930.82, \quad a_{G_{3_y}} = -3325.54 \end{aligned} \tag{d}$$

5 Calcule las componentes *x y y* de la fuerza externa *P* en el sistema coordenado global:

$$\mathbf{F}_P = 50 \ @ \angle -45°; \qquad F_{P_x} = 35.36, \qquad F_{P_y} = -35.36 \tag{e}$$

6 Sustituya los valores dados y los calculados en la ecuación matricial 11.7.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1.333 & 2.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -5.224 & -7.329 & \left[(0.2)4.843 - (9.563)\right] & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{12_x} \\ F_{12_y} \\ F_{32_x} \\ F_{32_y} \\ F_{13_x} \\ T_{12} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (0.005)(28.28) \\ (0.005)(-2700) \\ (0.05)(-10) \\ (0.01)(-930.82) - 35.36 \\ (0.01)(-3325.54) - (-35.36) \\ (0.1)(-136.16) - (-2.521)(-35.36) + (-0.968)(35.36) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.141 \\ -13.500 \\ -.500 \\ -44.668 \\ 2.105 \\ -136.987 \end{bmatrix} \tag{f}$$

7 Resuelva el sistema, ya sea invirtiendo la matriz A y multiplicando por la izquierda a esta matriz inversa por la matriz C, usando una calculadora de bolsillo tal como la HP-15c, o introduciendo los valores para las matrices A y C al programa MATRIX proporcionado con este libro, el cual da la siguiente solución:

$$\begin{bmatrix} F_{12_x} \\ F_{12_y} \\ F_{32_x} \\ F_{32_y} \\ F_{13_x} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -39.232 \\ -10.336 \\ -39.373 \\ -3.164 \\ -5.295 \\ 177.590 \end{bmatrix} \tag{g}$$

Convirtiendo las fuerzas a coordenadas polares:

$$\mathbf{F}_{12} = 40.57 \text{ lb} \ @ \ \angle 194.76°$$
$$\mathbf{F}_{32} = 39.50 \text{ lb} \ @ \ \angle -4.60° \quad \text{(h)}$$
$$\mathbf{F}_{13} = 5.40 \text{ lb} \ @ \ \angle 191.31°$$

Lea el archivo E011-02.mat en el programa MATRIX para practicar con este ejemplo.

11.4 ANÁLISIS DE FUERZAS DE UN ESLABONAMIENTO DE CUATRO BARRAS

En la figura ll-3a) se muestra un eslabonamiento de cuatro barras. Todas las dimensiones de los eslabones, posiciones de los eslabones, localizaciones de los *CG* de los eslabones, aceleraciones lineales, y aceleraciones y velocidades angulares de éstos, se han determinado previamente a partir de un análisis cinemático. Ahora se desea hallar las fuerzas que actúan en todas las juntas de pasador del eslabonamiento para una o más posiciones. El procedimiento es exactamente el mismo que el que se aplicó en los dos ejemplos anteriores. Este eslabonamiento tiene tres eslabones móviles. La ecuación 11.1 proporciona tres ecuaciones para cualquier eslabón o cuerpo rígido en movimiento. Se espera que haya nueve ecuaciones con nueve incógnitas para este problema.

En la figura 1 *l-3b)* se presentan los diagramas de cuerpo libre para todos los eslabones mostrando todas las fuerzas. Observe que una fuerza externa $\mathbf{F}_P$ se muestra actuando sobre el eslabón 3 en el punto *P*. También se muestra un par de torsión externo $\mathbf{T}_4$ actuando sobre el eslabón 4. Estas cargas externas se deben a algún otro mecanismo (dispositivo, persona, cosa, etcétera) que empuja o da giro contra el movimiento del eslabonamiento. Cualquier eslabón puede tener un cierto número de cargas externas y pares de torsión que actúan sobre él. Aquí sólo se muestra un par de torsión externo y una fuerza externa para ejemplicar cómo se manejan en el cálculo. (Observe que si se presenta un sistema de fuerzas más complicado también podría reducirse a la combinación de una sola fuerza y un solo par de torsión en cada eslabón.)

Para determinar las fuerzas en el pasador es necesario que estas fuerzas y pares de torsión externos aplicados se definan para todas las posiciones de interés. Se resolverá para un elemento del par de fuerzas de acción-reacción en cada junta y también para el par de torsión impulsor $\mathbf{T}_{12}$ necesario en el eslabón 2 para mantener el estado cinemático definido. La convención de subíndices de fuerza es la misma que la definida en el ejempío anterior. Por ejemplo, $\mathbf{F}_{12}$ es la fuerza de 1 *sobre 2* y $\mathbf{F}_{32}$ es la fuerza de 3 *sobre 1.* Las fuerzas iguales y opuestas en cada uno de estos pasadores se designan por $\mathbf{F}_{21}$ y $\mathbf{F}_{23}$, respectivamente. Todas las fuerzas desconocidas en la figura se indican con vectores de ángulos y longitudes arbitrarios, ya que sus valores reales se van a determinar.

Los parámetros cinemáticos del eslabonamiento se definen con respecto al sistema global *XY* cuyo origen está en el pivote impulsor O_2 y cuyo eje X pasa por el pivote fijo O_4 del eslabón. La masa *(m)* de cada eslabón, la localización de su *CG* y su momento de inercia (I_G) respecto a ese *CG* también son necesarios. El *CG* de cada eslabón se define inicialmente dentro de cada elemento con respecto a un sistema local y rotatorio (SCLR) inserto en el eslabón, ya que el *CG* es una propiedad física invariable del eslabón. El origen de este sistema x',y' esta en una junta de pasador, y el eje x' es la línea de centros

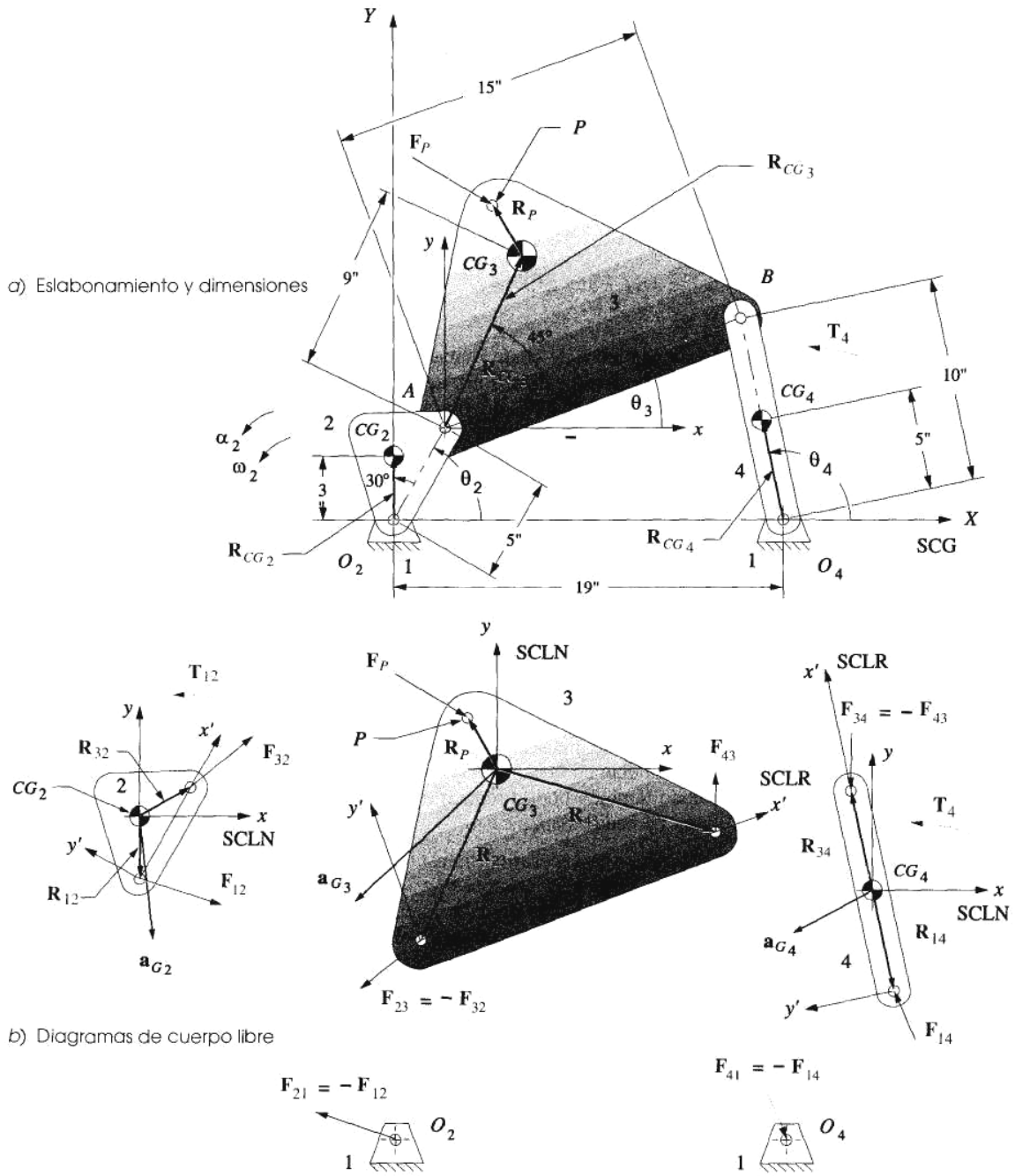


FIGURA 11-3

Análisis dinámico de fuerzas de un eslabonamiento de cuatro barras. (Véase también la figura Pl 1-2)

del eslabón. La posición del *CG* dentro del elemento se define por un vector de posición en este SCLR. La localización instantánea del *CG* puede determinarse fácilmente para cada posición dinámica de eslabón, al sumar el ángulo del vector de posición del *CG* interno al ángulo actual en el SCG del eslabón.

Se necesita definir los parámetros dinámicos y las localizaciones de fuerzas de cada eslabón con respecto a un sistema coordenado local, móvil, pero no rotatorio (SCLN) *x,y* localizado en su *CG,* como se muestra en cada diagrama de cuerpo libre de la figura ll-3í>). Las localizaciones del vector de posición de todos los puntos de unión de otros eslabones y puntos de aplicación de fuerzas externas deben definirse con respecto a este sistema local no rotatorio (SCLN). Estos datos cinemáticos y de fuerzas aplicadas difieren para cada posición del eslabonamiento. En los siguientes análisis y ejemplos sólo se considerará una posición de eslabonamiento. El proceso es idéntico para cada posición sucesiva.

Ahora se escriben las ecuaciones 11.1 para cada eslabón en movimiento. En el caso del eslabón 2 el resultado es idéntico al que se obtuvo para el ejemplo de manivela-corredera en la ecuación 11.6a.

$$\begin{aligned} F_{12_x} + F_{32_x} &= m_2 a_{G2x} \\ F_{12_y} + F_{32_y} &= m_2 a_{G2_y} \\ T_{12} + \left(R_{12_x} F_{12_y} - R_{12_y} F_{12_x}\right) + \left(R_{32_x} F_{32_y} - R_{32_y} F_{32_x}\right) &= I_{G_2}\alpha_2 \end{aligned} \tag{11.8a}$$

Para el eslabón 3, sustituyendo la fuerza de reacción $-\mathbf{F}_{32}$ por $\mathbf{F}_{23}$, el resultado es similar al de la ecuación 11.6b con algunos cambios en los subíndices que reflejan la presencia del eslabón 4.

$$\begin{aligned} F_{43_x} - F_{32_x} + F_{P_x} &= m_3 a_{G3_x} \\ F_{43_y} - F_{32_y} + F_{P_y} &= m_3 a_{G3_y} \\ \left(R_{43_x} F_{43_y} - R_{43_y} F_{43_x}\right) - \left(R_{23_x} F_{32_y} - R_{23_y} F_{32_x}\right) + \left(R_{P_x} F_{P_y} - R_{P_y} F_{P_x}\right) &= I_{G3}\alpha_3 \end{aligned} \tag{11.8b}$$

Para el eslabón 4 se sustituye la fuerza de reacción $-\mathbf{F}_{43}$ por $\mathbf{F}_{34}$, y se puede escribir un conjunto similar al de las ecuaciones 11.1:

$$\begin{aligned} F_{14_x} - F_{43_x} &= m_4 a_{G4_x} \\ F_{14_y} - F_{43_y} &= m_4 a_{G4_y} \\ \left(R_{14_x} F_{14_y} - R_{14_y} F_{14_x}\right) - \left(R_{34_x} F_{43_y} - R_{34_y} F_{43_x}\right) + T_4 &= I_{G4}\alpha_4 \end{aligned} \tag{11.8c}$$

Observe de nuevo que $\mathbf{T}_{12}$, el par de torsión fuente, sólo aparece en la ecuación para el eslabón 2, ya que éste es la manivela impulsora a la cual está conectado el motor. El eslabón 3, en este ejemplo, no tiene par de torsión aplicado externamente (aunque podría tenerlo), pero tiene una fuerza externa $\mathbf{F}_p$. El eslabón 4, en este ejemplo, no tiene fuerza externa que actúe sobre él (aunque podría tenerla), pero tiene un par de torsión externo $\mathbf{T}_4$. (En el eslabón impulsor 2 también podría haber una fuerza aplicada externamente, pero en general no ocurre así.) Hay nueve incógnitas en estas nueve ecuaciones, F_{12_x}, F_{12_y}, F_{32_x}, F_{32_y}, F_{43_x}, F_{43_y}, F_{14_x}, F_{14_y} y T_{12}, de modo que el sistema puede resolverse simultáneamente. Se reacomodan los términos en la ecuación 11.8 para poner todos los términos constantes conocidos en el lado derecho y después expresarlos en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_{12_y} & R_{12_x} & -R_{32_y} & R_{32_x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{23_y} & -R_{23_x} & -R_{43_y} & R_{43_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{34_y} & -R_{34_x} & -R_{14_y} & R_{14_x} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{12_x} \\ F_{12_y} \\ F_{32_x} \\ F_{32_y} \\ F_{43_x} \\ F_{43_y} \\ F_{14_x} \\ F_{14_y} \\ T_{12} \end{bmatrix} \tag{11.9}$$

$$\begin{bmatrix} m_2 a_{G2_x} \\ m_2 a_{G2_y} \\ I_{G2}\alpha_2 \\ m_3 a_{G3_x} - F_{P_x} \\ m_3 a_{G3_y} - F_{P_y} \\ I_{G3}\alpha_3 - R_{P_x}F_{P_y} + R_{P_y}F_{P_x} \\ m_4 a_{G4_x} \\ m_4 a_{G4_y} \\ I_{G4}\alpha_4 - T_4 \end{bmatrix}$$

Este sistema puede resolverse usando el programa MATRIX O una calculadora con resolución de matrices. Como ejemplo de este método de solución considere los siguientes datos de eslabonamiento.

11

EJEMPLO 11-3

Análisis de fuerzas dinámicas de un eslabonamiento de cuatro barras. (Véase la figura 11-3)

Datos: La manivela de 5 pulgadas de longitud (eslabón 2) pesa 1.5 Ib. Su *CG* está a 3 pulgadas y a 30° de la línea de centros. Su momento de inercia con respecto a su *CG* es de 0.4 lb-pulg-s^2. Sus datos cinemáticos son:

θ_2 grados	ω_2 rad/s	α_2 rad/s^2	a_{G2} pulg/s^2
60	25	–40	1878.84 @ 273.66°

El acoplador (eslabón 3) tiene 15 pulgadas de longitud y pesa 7.7 Ib. Su *CG* está a 9 pulgadas y a 45° fuera de la línea de centros. Su momento de inercia con respecto a su *CG* es igual a 1.5 lb-pulg-s^2. Sus datos cinemáticos son:

θ_3 grados	ω_3 rad/s	α_3 rad/s^2	a_{G_3} pulg/s^2
20.92	−5.87	120.9	3646.1 @ 226.5°

Hay una fuerza externa de 80 Ib que está a 330° sobre el eslabón 3, aplicada en el punto *P*, localizado a 3 pulgadas a 100° del *CG* del eslabón 3. Hay un par de torsión externo sobre el eslabón 4 de 120 lb-pulg. El eslabón de fijación es de 19 pulgadas de longitud. El balancín (eslabón 4) es de 10 pulgadas de longitud y pesa 5.8 Ib. Su *CG* está a 5 pulgadas a 0° fuera de la línea de centros. Su momento de inercia con respecto a su *CG* es de 0.8 lb-pulg-s^2. Sus datos cinemáticos son:

θ_4 grados	ω_4 rad/s	α_4 rad/s^2	a_{G_4} pulg/s^2
104.41	7.93	276.29	1 416.8 @ 207.2°

Halle: Las **fuerzas** $\mathbf{F}_{12}$, $\mathbf{F}_{32}$, $\mathbf{F}_{43}$, $\mathbf{F}_{14}$ en las juntas y el **par de torsión** impulsor $\mathbf{T}_{12}$ necesario para mantener el movimiento con la aceleración dada para esta posición instantánea del eslabón.

Solución:

1 Convierta los pesos dados en unidades apropiadas de masa, en este caso blobs:

$$masa_{eslabón\,2} = \frac{peso}{g} = \frac{1.5 \text{ lb}}{386 \text{ pulg/s}^2} = 0.004 \text{ blobs} \quad \text{(a)}$$

$$masa_{eslabón\,3} = \frac{peso}{g} = \frac{7.7 \text{ lb}}{386 \text{ pulg/s}^2} = 0.020 \text{ blobs} \quad \text{(b)}$$

$$masa_{eslabón\,4} = \frac{peso}{g} = \frac{5.8 \text{ lb}}{386 \text{ pulg/s}^2} = 0.015 \text{ blobs} \quad \text{(c)}$$

2 Establezca un sistema coordenado local no rotatorio (SCLN) *xy* en el *CG* de cada eslabón y dibuje todos los vectores aplicables que actúan sobre ese sistema como se muestra en la figura. Dibuje un diagrama de cuerpo libre de cada eslabón en movimiento como se muestra.

3 Calcule las componentes *x* y y de los vectores de posición $\mathbf{R}_{12}$, $\mathbf{R}_{32}$, $\mathbf{R}_{23}$, $\mathbf{R}_{43}$, $\mathbf{R}_{34}$, $\mathbf{R}_{14}$ y $\mathbf{R}_P$ en el SCLN de los eslabones. $\mathbf{R}_{43}$, $\mathbf{R}_{34}$ y $\mathbf{R}_{14}$ deberán calcularse a partir de los datos de la geometría del eslabón, usando la ley de los cosenos y de los senos. Observe que el valor actual del ángulo de posición (G_3) del eslabón 3 en el SCG debe ser agregado a los ángulos de todos los vectores de posición antes de crear sus componentes *x*,*y* en el SCLN, si sus ángulos estaban originalmente medidos con respecto al eslabón inserto en el sistema coordenado local rotatorio (SCLR).

$$\begin{aligned}
&\mathbf{R}_{12} = 3.00 \text{ @ } \angle 270.00°; && R_{12_x} = 0.000, && R_{12_y} = -3 \\
&\mathbf{R}_{32} = 2.83 \text{ @ } \angle 28.00°; && R_{32_x} = 2.500, && R_{32_y} = 1.333 \\
&\mathbf{R}_{23} = 9.00 \text{ @ } \angle 245.92°; && R_{23_x} = -3.672, && R_{23_y} = -8.217 \\
&\mathbf{R}_{43} = 10.72 \text{ @ } \angle -15.46°; && R_{43_x} = 10.332, && R_{43_y} = -2.858
\end{aligned} \quad \text{(d)}$$

$$\mathbf{R}_{34} = 5.00 \ @ \ \angle 104.41°; \qquad R_{34_x} = -1.244, \qquad R_{34_y} = 4.843$$
$$\mathbf{R}_{14} = 5.00 \ @ \ \angle 284.41°; \qquad R_{14_x} = 1.244, \qquad R_{14_y} = -4.843$$
$$\mathbf{R}_{P} = 3.00 \ @ \ \angle 120.92°; \qquad R_{P_x} = -1.542, \qquad R_{P_y} = 2.574$$

4 Calcule las componentes *x y y* de la aceleración de los *CG* de todos los eslabones en movimiento en el sistema coordenado global (SCG):

$$\mathbf{a}_{G2} = 1878.84 \ @ \ \angle 273.66°; \qquad a_{G2_x} = 119.94, \qquad a_{G2_y} = -1875.01$$
$$\mathbf{a}_{G3} = 3646.10 \ @ \ \angle 226.51°; \qquad a_{G3_x} = -2509.35, \qquad a_{G3_y} = -2645.23 \qquad \text{(e)}$$
$$\mathbf{a}_{G4} = 1416.80 \ @ \ \angle 207.24°; \qquad a_{G4_x} = -1259.67, \qquad a_{G4_y} = -648.50$$

r> Calcule las componentes *x y y* de la fuerza externa *P* en el SCG:

$$\mathbf{F}_{P3} = 80 \ @ \ \angle 330°; \qquad F_{P3_x} = 69.28, \qquad F_{P3_y} = -40.00 \qquad \text{(f)}$$

(i Sustituya los valores dados y los calculados en la ecuación matricial 11.9.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1.330 & 2.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8.217 & 3.673 & 2.861 & 10.339 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.843 & 1.244 & 4.843 & 1.244 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{12_x} \\ F_{12_y} \\ F_{32_x} \\ F_{32_y} \\ F_{43_x} \\ F_{43_y} \\ F_{14_x} \\ F_{14_y} \\ T_{12} \end{bmatrix} =$$

(g)

$$\begin{bmatrix} (0.004)(119.94) \\ (0.004)(-1875.01) \\ (0.4)(-40) \\ (0.02)(-2509.35) - (69.28) \\ (0.02)(-2645.23) - (-40) \\ (1.5)(120.9) - [(-1.542)(-40) - (2.574)(69.28)] \\ (0.015)(-1259.67) \\ (0.015)(-648.50) \\ (0.8)(276.29) - (120) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.480 \\ -7.500 \\ -16.000 \\ -119.465 \\ -12.908 \\ 298.003 \\ -18.896 \\ -9.727 \\ 101.031 \end{bmatrix}$$

7 Resuelva este sistema, ya sea invirtiendo la matriz A y multiplicando por la izquierda la matriz inversa de A por la matriz C usando una calculadora de bolsillo tal como la HP-28 o introduciendo los valores para las matrices A y C en el programa MATRIX que se proporciona con este libro, el cual da la siguiente solución:

$$\begin{bmatrix} F_{12_x} \\ F_{12_y} \\ F_{32_x} \\ F_{32_y} \\ F_{43_x} \\ F_{43_y} \\ F_{14_x} \\ F_{14_y} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -117.65 \\ -107.84 \\ 118.13 \\ 100.34 \\ -1.34 \\ 87.43 \\ -20.23 \\ 77.71 \\ 243.23 \end{bmatrix} \quad \text{(h)}$$

Convirtiendo las fuerzas a coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} &= 159.60 \text{ lb } @ \angle 222.52^\circ \\ \mathbf{F}_{32} &= 154.99 \text{ lb } @ \angle 40.35^\circ \\ \mathbf{F}_{43} &= 87.44 \text{ lb } @ \angle 90.88^\circ \\ \mathbf{F}_{14} &= 80.30 \text{ lb } @ \angle 104.59^\circ \end{aligned} \quad \text{(i)}$$

8 Las magnitudes de la fuerza de pasador en (i) son necesarias para dimensionar los pasadores del pivote y los eslabones contra falla, y para seleccionar los cojinetes del pivote que durarán para la vida requerida del ensamblaje. El par de torsión impulsor T_{12} definido en (h) se necesita para seleccionar un motor u otro dispositivo capaz de proporcionar la potencia que impulse al sistema. Véase la sección 2.16 para un breve análisis de la selección del motor. Los temas del cálculo del esfuerzo y prevención de fallas no están incluidos en este texto, pero observe que esos cálculos no pueden hacerse si no se ha realizado una buena estimación de las fuerzas dinámicas y pares de torsión del sistema mediante métodos como los mostrados en este ejemplo.

Lo anterior resuelve el eslabonamiento para una posición. Se puede introducir un nuevo conjunto de valores en las matrices A y C para cada posición de interés en la cual se necesita un análisis de fuerzas. Introduzca el archivo E11-03.mat en el programa MATRIX para practicar con este ejemplo. El archivo del disco E11-03.4br también puede introducirse en el programa FOURBAR, el cual correrá el eslabonamiento a través de una serie de posiciones a partir de los parámetros enunciados como condiciones iniciales. El eslabonamiento reducirá su velocidad hasta el paro y luego correrá en reversa debido a la aceleración negativa. La ecuación matricial (g) también puede ser vista en el programa FOURBAR usando *Dynamics/Solve/Show Matrix.*

En este punto conviene hacer algunas observaciones generales acerca de este método. La solución se obtiene usando coordenadas cartesianas de todas las fuerzas y vectores

de posición. Antes de ser colocadas en las matrices estas componentes de vectores deben definirse en un sistema coordenado global (SCG) o en sistemas coordenados locales no rotatorios, paralelos al sistema coordenado global, con sus orígenes en los *CG* de los eslabones (SCLN). Algunos de los parámetros del eslabonamiento se expresan normalmente en tales sistemas coordenados, pero algunos no y se deben convertir. Todos los datos cinemáticos deben calcularse en el sistema global o en sistemas locales **no rotatorios,** paralelos, colocados en los *CG* de los eslabones individuales. Cualquiera de las fuerzas externas en los eslabones también debe estar definida en el sistema global.

Sin embargo, los vectores de posición que definen las localizaciones dentro del eslabón, como las de juntas de pasador respecto al *CG,* o que sitúan puntos de aplicación de fuerzas externas respecto al *CG,* se definen en los sistemas coordenados **rotatorios** locales insertos en los eslabones (SCLR). Por tanto, estos vectores de posición deben estar redefinidos en un sistema paralelo **no rotatorio** antes de ser usados en la matriz. Un ejemplo de esto es el vector R_P, el cual se definió inicialmente como de 3 pulgadas y a 100°, en el sistema coordenado **rotatorio** inserto en el eslabón 3. Observe en el ejemplo anterior que las coordenadas cartesianas que se usaron en las ecuaciones se calcularon después de sumar al ángulo el valor actual de 9_3. Esto redefinió a R_P como de 3 pulgadas a 120.92° en el sistema local **no rotatorio.** Lo mismo se hizo para los vectores de posición R_{12}, R_{32}, R_{23}, R_{43}, R_{34} y R_{14}. En cada caso el **ángulo dentro del eslabón** de estos vectores (que es independiente de la posición de eslabonamiento) se sumó al ángulo de eslabón considerado para obtener su posición en el sistema *xy* en el *CG* del eslabón. La definición apropiada de estas componentes del vector de posición es crítica para la solución, y es muy fácil cometer errores al definirlas.

Para complicar más las cosas, aun cuando el vector de posición R_P se mide inicialmente en el sistema coordenado rotatorio inserto en el eslabón, la fuerza F_P, que lo localiza, no se mide así. La fuerza F_P no es parte del eslabón, como R_P, sino más bien es parte del mundo exterior y así está definida en el sistema global.

11.5 ANÁLISIS DE FUERZA DE UN ESLABONAMIENTO DE CUATRO BARRAS DE MANIVELA-CORREDERA

El enfoque tomado para el eslabonamiento de cuatro barras con junta de pasador es igualmente válido para un eslabonamiento de manivela-corredera de cuatro barras. La diferencia principal será que la corredera no tendrá aceleración angular. En la figura 11-4 se muestra una manivela-corredera de cuatro barras con una fuerza externa en la corredera, eslabón 4. Esto es representativo del mecanismo usado ampliamente en bombas de pistón y en motores de combustión interna. Se desea determinar las fuerzas en las juntas y los pares de torsión impulsores necesarios sobre la manivela que proporcionen las aceleraciones especificadas. Se debe hacer un análisis cinemático previamente con el fin de determinar toda la información acerca de las posiciones, velocidades y aceleraciones para las posiciones analizadas. Se escriben las ecuaciones 11.1 para cada eslabón. Para el eslabón 2:

$$F_{12_x} + F_{32_x} = m_2 a_{G2_x}$$

$$F_{12_y} + F_{32_y} = m_2 a_{G2_y} \qquad (11.10a)$$

$$T_{12} + \left(R_{12_x} F_{12_y} - R_{12_y} F_{12_x}\right) + \left(R_{32_x} F_{32_y} - R_{32_y} F_{32_x}\right) = I_{G2}\alpha_2$$

Ésta es idéntica a la ecuación 11.8a para el eslabonamiento "puro" de cuatro barras. Para el eslabón 3:

$$F_{43_x} - F_{32_x} = m_3 a_{G3_x}$$
$$F_{43_y} - F_{32_y} = m_3 a_{G3_y} \qquad (11.10b)$$
$$\left(R_{43_x} F_{43_y} - R_{43_y} F_{43_x}\right) - \left(R_{23_x} F_{32_y} - R_{23_y} F_{32_x}\right) = I_{G3}\alpha_3$$

Ésta es similar a la ecuación 11.8b y faltan sólo los términos que incluyen a F_P, ya que no se muestra ninguna fuerza externa actuando sobre el eslabón 3 en el ejemplo de manivela-corredera. Para el eslabón 4:

$$F_{14_x} - F_{43_x} + F_{P_x} = m_4 a_{G4_x}$$
$$F_{14_y} - F_{43_y} + F_{P_y} = m_4 a_{G4_y} \qquad (11.10c)$$
$$\left(R_{14_x} F_{14_y} - R_{14_y} F_{14_x}\right) - \left(R_{34_x} F_{43_y} - R_{34_y} F_{43_x}\right) + \left(R_{P_x} F_{P_y} - R_{P_y} F_{P_x}\right) = I_{G4}\alpha_4$$

En estas ecuaciones se tiene la fuerza F_P mostrada que actúa sobre el eslabón 4.

Para la inversión de la manivela-corredera mostrada, la corredera, o pistón, está en traslación pura con respecto al plano estacionario del suelo; por tanto, éste puede no tener aceleración angular o velocidad angular. También los vectores de posición en la ecuación del par de torsión (ecuación 11.10c) son todos cero, ya que la fuerza F_P actúa en el *CG*. Por lo tanto, la ecuación de los pares de torsión para el eslabón 4 (tercera expresión en la ecuación 11.10c) es cero para esta inversión del eslabonamiento de manivela-corredera. Su aceleración lineal no tiene componente *y*.

$$\alpha_4 = 0, \qquad a_{G4_y} = 0 \qquad (11.10d)$$

La única fuerza dirigida en *x* que puede existir en la interfaz entre los eslabones 4 y 1 es la fuerza de fricción. Suponiendo la fricción de Coulomb, la componente *x* puede expresarse en términos de la componente *y* de la fuerza en esta interfaz. Se puede escribir una relación para la fuerza de fricción f en esa interfaz como, $f = \pm\mu\mathbf{N}$, donde $\pm\mu$ es un coeficiente de fricción conocido. Los signos más y menos en el coeficiente de fricción son para reconocer el hecho de que la fuerza de fricción siempre se opone al movimiento. El análisis cinemático proporcionará la velocidad del eslabón en la junta deslizante. El signo de μ siempre será opuesto al signo de la velocidad.

$$F_{14_x} = \pm\mu\, F_{14_y} \qquad (11.10e)$$

Sustituyendo las ecuaciones 11.10d y 11.10e en la ecuación reducida 11.10c se obtiene:

$$\pm\mu F_{14_y} - F_{43_x} + F_{P_x} = m_4 a_{G4_x}$$
$$F_{14_y} - F_{43_y} + F_{P_y} = 0 \qquad (11.10f)$$

Esta última sustitución ha reducido las incógnitas a ocho F_{12_x}, F_{12_y}, F_{32_x}, F_{32_y}, F_{43_x}, F_{43_y}, F_{14_y} y T_{12}; así, sólo se necesitan ocho ecuaciones en 11.10a, b y f para conformar las matrices de la solución.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_{12_y} & R_{12_x} & -R_{32_y} & R_{32_x} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{23_y} & -R_{23_x} & -R_{43_y} & R_{43_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \pm\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{12_x} \\ F_{12_y} \\ F_{32_x} \\ F_{32_y} \\ F_{43_x} \\ F_{43_y} \\ F_{14_y} \\ T_{12} \end{bmatrix}$$

(11.10g)

$$\begin{bmatrix} m_2 a_{G2_x} \\ m_2 a_{G2_y} \\ I_{G_2}\alpha_2 \\ m_3 a_{G3_x} \\ m_3 a_{G3_y} \\ I_{G_3}\alpha_3 \\ m_4 a_{G4_x} - F_{P_x} \\ -F_{P_y} \end{bmatrix}$$

La solución de esta ecuación matricial 1 l.lOg, más la de la ecuación 1 l.lOe, producirán la información completa de las fuerzas dinámicas para el eslabonamiento de manivela-corredera de cuatro barras.

11.6 ANÁLISIS DE FUERZA DE LA MANIVELA-CORREDERA INVERTIDA

11

En la figura 11-5 se muestra otra inversión del eslabón de manivela-corredera de cuatro barras que ya se analizó cinemáticamente en la parte I. El eslabón 4 tiene una aceleración angular en esta inversión. De hecho, debe tener el mismo ángulo, velocidad angular y aceleración angular que el eslabón 3 porque están acoplados rotacionalmente por la junta deslizante. Se desea determinar las fuerzas en todas las juntas de pasador y en la junta deslizante, así como los pares de torsión impulsores necesarios para crear las aceleraciones deseadas. Las juntas de cada eslabón están localizadas por medio de los vectores de posición relacionados con el sistema coordenado local no rotatorio *xy* en cada *CG* del eslabón como antes. La junta deslizante está localizada por el vector de posición R_{43} al centro del deslizador, punto *B*. La posición instantánea del punto *B* se determina del análisis de la cinemática, así como por la longitud *b* con respecto al centro instantáneo I_{23} (punto A). Véase las secciones 4.7, 6.7 y 7.3 para repasar la posición, la velocidad y el análisis de aceleración de este mecanismo. Recuerde que este mecanismo tiene una componente de la aceleración de Coriolis distinta de cero. La fuerza entre los eslabones 3 y 4 dentro de la junta deslizante está distribuida a lo largo de la longitud no especificada de

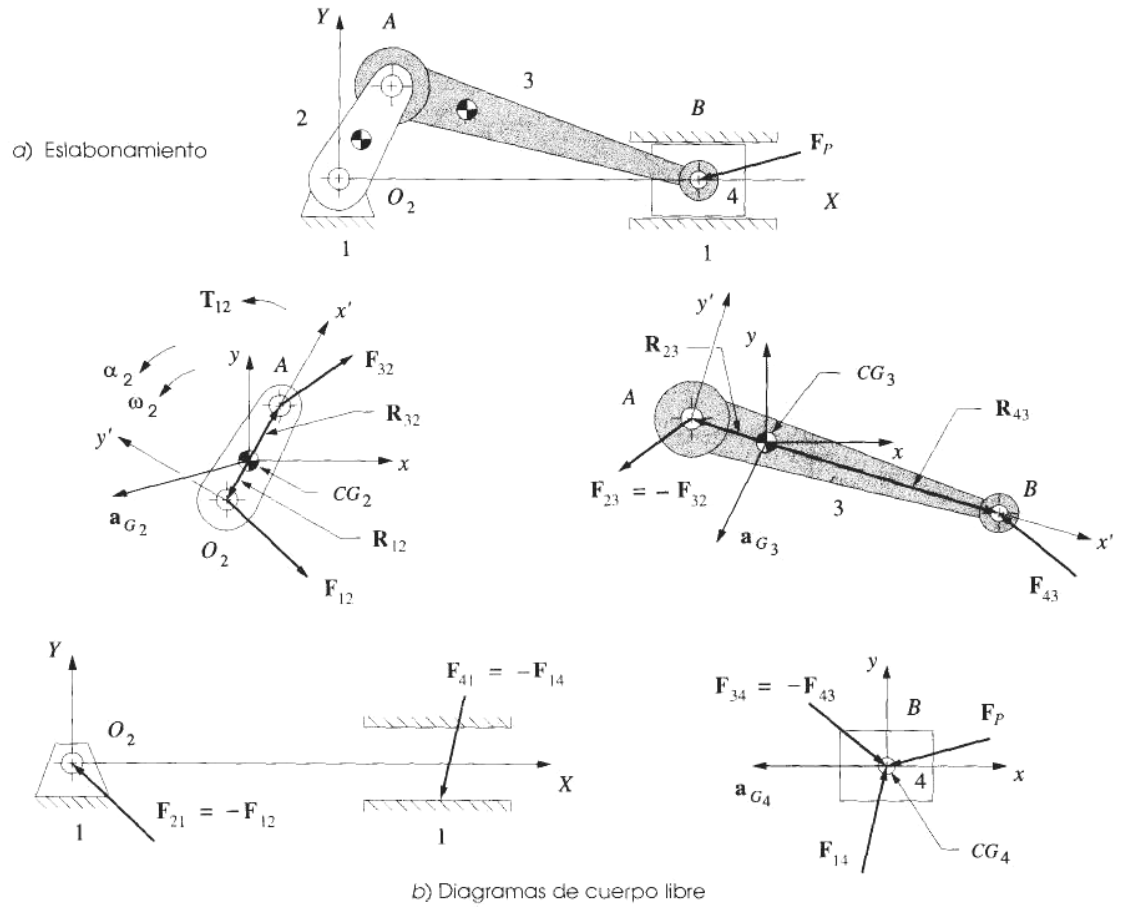


FIGURA 11-4

Análisis dinámico de fuerzas de un eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera

la corredera. Para este análisis la fuerza distribuida puede plantearse como una fuerza concentrada en el punto *B* dentro de la junta deslizante. En este ejemplo se desprecia la fuerza de fricción.

Las ecuaciones para los eslabones 2 y 3 son idénticas a las de manivela-corredera no invertida (ecuaciones 11.10a y b). Las ecuaciones para el eslabón 4 son iguales a las ecuaciones 11.10c, excepto por la ausencia de términos que involucran a F_P, ya que en este ejemplo no se muestra ninguna fuerza externa que actúe en el eslabón 4. La junta del deslizador puede transmitir sólo la fuerza del eslabón 3 al eslabón 4 o viceversa a lo largo de una línea perpendicular al eje de deslizamiento. Esta línea se llama eje de transmisión. Para garantizar que la fuerza F_{34} o F_{43} sea siempre perpendicular al eje de deslizamiento se puede escribir la relación siguiente:

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{F}_{43} = 0 \qquad (11.11a)$$

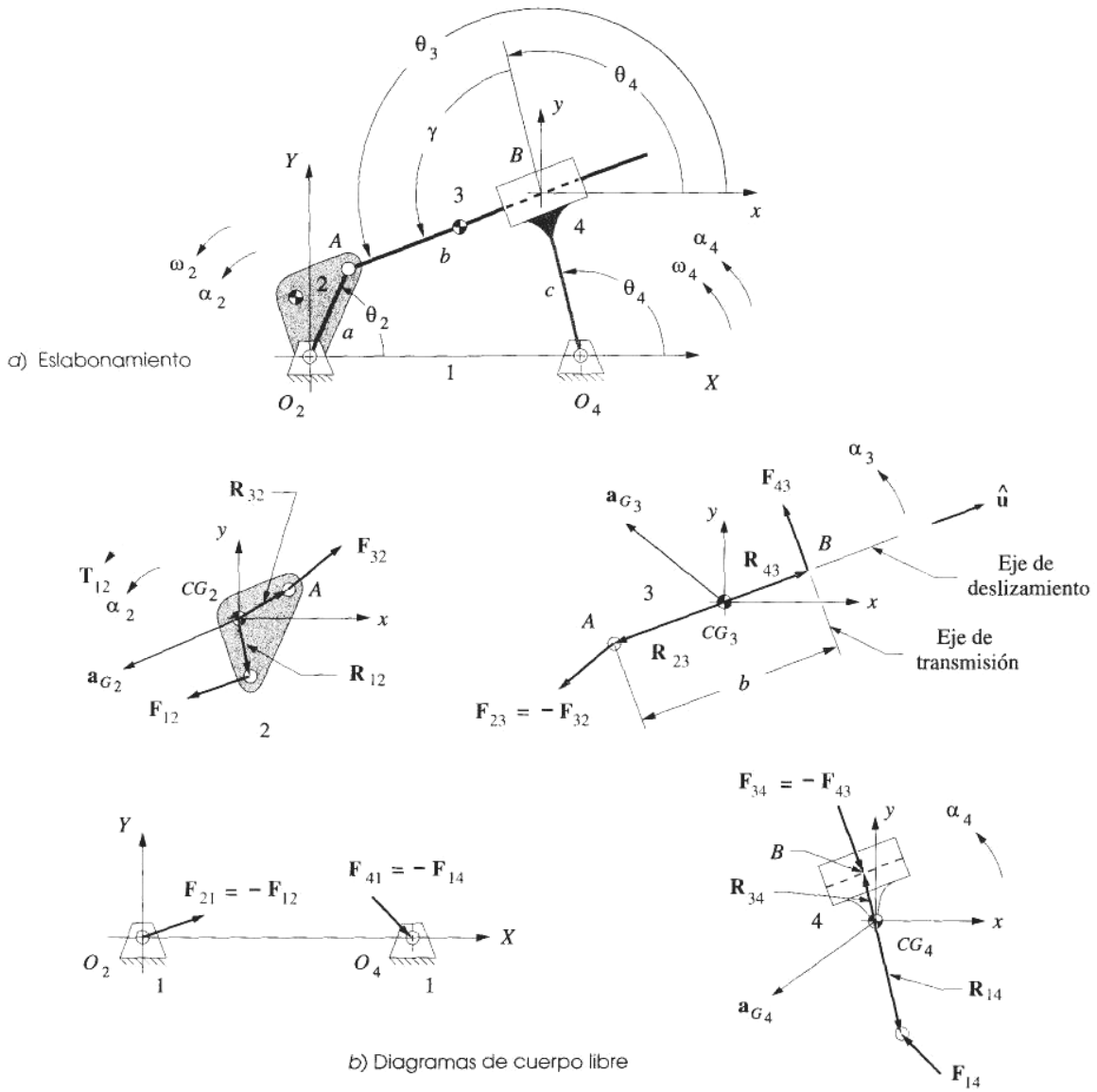


FIGURA 11-5

Análisis dinámico de fuerzas de un eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera invertido

que al desarrollarla queda:

$$u_x F_{43_x} + u_y F_{43_y} = 0 \tag{11.11b}$$

El producto punto de dos vectores será cero cuando éstos sean mutuamente perpendiculares. El vector unitario ü está en la dirección del eslabón 3 que se define del análisis cinemático como θ_3.

$$u_x = \cos\theta_3, \qquad u_y = \operatorname{sen}\theta_3 \tag{11.11c}$$

La ecuación 11.11 proporciona una décima ecuación, pero sólo se tienen nueve incógnitas, F_{12_x}, F_{12_y}, F_{32_x}, F_{32_y}, F_{43_x}, F_{43_y}, F_{14_x}, F_{14_y} y T_{12}, así que una de esas ecuaciones es redundante. Puesto que se debe incluir la ecuación 11.11 se combinarán las ecuaciones del par de torsión para los eslabones 3 y 4, reescritas ahora en la forma vectorial y sin la fuerza externa F_P.

$$\begin{aligned}(\mathbf{R}_{43} \times \mathbf{F}_{43}) - (\mathbf{R}_{23} \times \mathbf{F}_{32}) &= I_{G3}\alpha_3 = I_{G3}\alpha_4 \\ (\mathbf{R}_{14} \times \mathbf{F}_{14}) - (\mathbf{R}_{34} \times \mathbf{F}_{43}) &= I_{G4}\alpha_4\end{aligned} \tag{11.12a}$$

Observe que la aceleración angular del eslabón 3 es la misma que la del eslabón 4 en este eslabonamiento. Sumando estas ecuaciones se obtiene:

$$(\mathbf{R}_{43} \times \mathbf{F}_{43}) - (\mathbf{R}_{23} \times \mathbf{F}_{32}) + (\mathbf{R}_{14} \times \mathbf{F}_{14}) - (\mathbf{R}_{34} \times \mathbf{F}_{43}) = (I_{G3} + I_{G4})\alpha_4 \tag{11.12b}$$

Desarrollando y agrupando términos:

$$\begin{aligned}&(R_{43_x} - R_{34_x})F_{43_y} + (R_{34_y} - R_{43_y})F_{43_x} - R_{23_x}F_{32_y} \\ &+ R_{23_y}F_{32_x} + R_{14_x}F_{14_y} - R_{14_y}F_{14_x} = (I_{G3} + I_{G4})\alpha_4\end{aligned} \tag{11.12c}$$

Las ecuaciones 11.10a, 11.11b, 11.12c y las cuatro ecuaciones de fuerza de las ecuaciones 11.10b y 11.10c (excluyendo la fuerza externa F_P) dan nueve ecuaciones con nueve incógnitas que se pueden acomodar en forma matricial para su solución.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_{12_y} & R_{12_x} & -R_{32_y} & R_{32_x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{23_y} & -R_{23_x} & (R_{34_y} - R_{43_y}) & (R_{43_x} - R_{34_x}) & -R_{14_y} & R_{14_x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_x & u_y & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} F_{12_x} \\ F_{12_y} \\ F_{32_x} \\ F_{32_y} \\ F_{43_x} \\ F_{43_y} \\ F_{14_x} \\ F_{14_y} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 a_{G2_x} \\ m_2 a_{G2_y} \\ I_{G_2}\alpha_2 \\ m_3 a_{G3_x} \\ m_3 a_{G3_y} \\ (I_{G3} + I_{G4})\alpha_4 \\ m_4 a_{G4_x} \\ m_4 a_{G4_y} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11.13}$$

11.7 ANÁLISIS DE FUERZAS: ESLABONAMIENTOS CON MÁS DE CUATRO BARRAS

Este método matricial del análisis de fuerzas puede ampliarse fácilmente a conjuntos de eslabonamientos más complejos. Las ecuaciones para cada eslabón son de la misma forma. Se puede crear una notación más general para las ecuaciones 11.1 a fin de aplicarlas a un conjunto de n eslabones conectados con pasador. Sea j cualquier eslabón en el conjunto. Sea que $i = j - 1$ represente al eslabón anterior en la cadena y $k = j + 1$ al eslabón siguiente en la cadena; entonces, usando la forma vectorial de las ecuaciones 11.1:

$$\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{jk} + \sum \mathbf{F}_{ext_j} = m_j \mathbf{a}_{G_j} \tag{11.14a}$$

$$(\mathbf{R}_{ij} \times \mathbf{F}_{ij}) + (\mathbf{R}_{jk} \times \mathbf{F}_{jk}) + \sum \mathbf{T}_j + \left(\mathbf{R}_{ext_j} \times \sum \mathbf{F}_{ext_j}\right) = I_{G_j}\alpha_j \tag{11.14b}$$

donde:

$$j = 2, 3, \ldots, n; \qquad i = j - 1; \qquad k = j + 1, j \neq n; \qquad \text{si } j = n, k = 1$$

y

$$\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}; \qquad \mathbf{F}_{kj} = -\mathbf{F}_{jk} \tag{11.4c}$$

La ecuación vectorial de suma de fuerzas 11.14a puede descomponerse en sus dos ecuaciones componentes x y y,y aplicarla después junto con la ecuación de suma de pares de torsión, 11.14b, a cada uno de los eslabones en la cadena para crear el conjunto de ecuaciones simultáneas para la solución. Cualquier eslabón puede tener fuerzas externas y/o pares de torsión externos aplicados a él. Todos tendrán fuerzas de pasador, ya que el rc-ésimo eslabón en una cadena cerrada se conecta al primer eslabón, el valor de k para el n-ésimo eslabón se fija en 1. Para reducir el número de variables a una cantidad manejable sustituya las fuerzas de reacción negativa de la ecuación 11.14c donde sea necesario, como se hizo en los ejemplos anteriores. Cuando se tengan juntas deslizantes será necesario agregar restricciones en las direcciones permisibles de las fuerzas en esas juntas como se hizo en el ejemplo anterior del eslabón de manivela-corredera invertido.

11.8 FUERZAS DE SACUDIMIENTO Y PAR DE TORSIÓN DE SACUDIMIENTO

Normalmente es importante conocer el efecto neto de las fuerzas dinámicas en el plano de fijación, ya que esto puede provocar vibraciones en la estructura que soporta a la máquina. Para los ejemplos simples de eslabonamientos de tres y cuatro barras, hay sólo dos puntos en los que las fuerzas dinámicas pueden inducirse al eslabón 1, el plano de fijación. Mecanismos más complicados tendrán más juntas en el plano de fijación. Las fuerzas ocasionadas por los eslabones movibles a la fijación en los pivotes fijos O_2 y O_4 se designan por F_{21} y F_{41} con la convención de subíndices que se definió en la sección 11.1. Ya que se eligió determinar F_{12} y F_{14} en las soluciones, simplemente no se consideran esas fuerzas para obtener sus contrapartes iguales y opuestas (véase también la ecuación 11.5).

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} \qquad \mathbf{F}_{41} = -\mathbf{F}_{14} \tag{11.15a}$$

La *suma de todas las fuerzas que actúan en el plano de fijación* se llama **fuerza de sacudimiento (F_S)** como se muestra en la figura 11-6.* En estos ejemplos simples ésta es igual a:

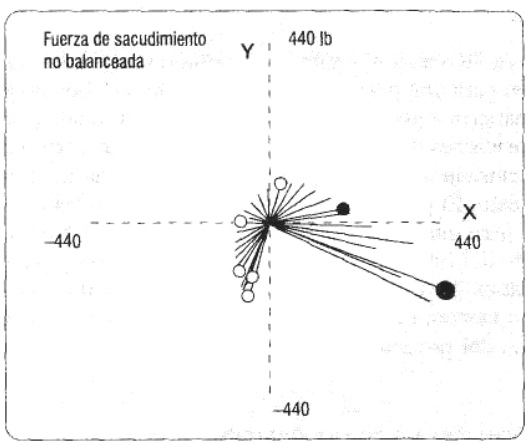
$$\mathbf{F}_S = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{41} \tag{11.15b}$$

El *par de torsión de reacción que registra el plano de fijación* se llama también **par de torsión de sacudimiento** ($\mathbf{T}_S$) como se muestra en la figura 11-7.* Este es el negativo del par de torsión fuente $\mathbf{T}_{12}$ el cual es transmitido al eslabón impulsor desde la fijación.

$$\mathbf{T}_S = \mathbf{T}_{21} = -\mathbf{T}_{12} \tag{11.15c}$$

La fuerza de sacudimiento tenderá a mover el plano de fijación hacia adelante y hacia atrás y el par de torsión de sacudimiento tenderá a mover el plano de fijación con

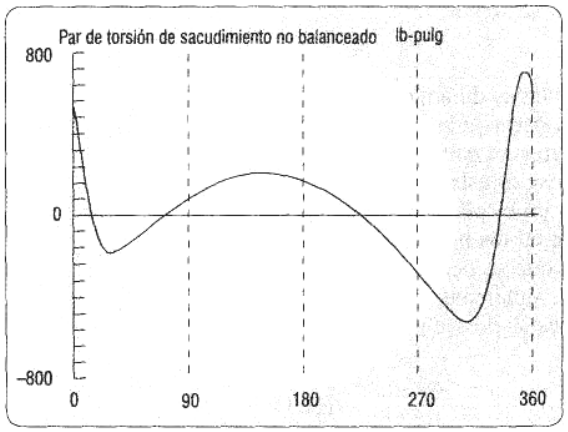
*El archivo (Fll-06.4br) del programa FOURBAR que genera las gráficas de las figuras 11-6 y 11-7 se puede abrir en ese programa para ver más detalles de la dinámica del eslabonamiento.



Eslabón Núm.	Longitud pulg	Unidades de masa	Unidades de inercia	*CG* Positivo	en grados	Fuerza externa lb	en grados
1	5.5						
2	2.0	.002	.004	1.0	0		
3	6.0	.030	.060	2.5	30	12	270
4	3.0	.010	.020	1.5	0	60	–45

Punto de acoplador = 3 pulg @ 45°
Abierto/Cruzado = abierto
La fuerza externa 3 actúa a 5 pulg @ 30° con respecto al *CG* del eslabón 3
La fuerza externa 4 actúa a 5 pulg @ 90° con respecto al *CG* del eslabón 4
Par de torsión externo 3 = –20 lb-pulg
Par de torsión externo 4 = 25 lb-pulg
Comienza alfa2 = 0 rad/s^2
Comienza omega2 = 50 rad/s
Comienza teta2 = 0°
Finaliza teta2 = 360°
Delta teta2 = 10°

FIGURA 11-6
Datos del eslabonamiento y gráfica polar de la fuerza de sacudimiento de un eslabonamiento no balanceado de cuatro barras de manivela-balancín del programa FOURBAR



Eslabón Núm.	Longitud pulg	Unidades de masa	Unidades de inercia	*CG* Positivo	en grados	Fuerza externa lb	en grados
1	5.5						
2	2.0	.002	.004	1.0	0		
3	6.0	.030	.060	2.5	30	12	270
4	3.0	.010	.020	1.5	0	60	–45

Punto del acoplador = 3 pulg @ 45°
Abierto/Cruzado = abierto
La fuerza externa 3 actúa a 5 pulg @ 30° con respecto al *CG* del eslabón 3
La fuerza externa 4 actúa a 5 pulg @ 90° con respecto al *CG* del eslabón 4
Par de torsión externo 3 = –20 lb-pulg
Par de torsión externo 4 = 25 lb-pulg
Comienza alfa2 = 0 rad/s^2
Comienza omega2 = 50 rad/s
Comienza teta2 = 0°
Finaliza teta2 = 360°
Delta teta2 = 2°

FIGURA 11-7

Datos del eslabonamiento y curva de par de torsión de sacudimiento para un eslabonamiento no balanceado de manivela-balancín del programa FOURBAR

respecto al eje impulsor. Ambos causan vibraciones. Normalmente se quiere minimizar los efectos de las fuerzas de sacudimiento y los pares de torsión de sacudimiento en el bastidor. Esto algunas veces se puede hacer equilibrando, otras veces agregando un volante al sistema y en otras colocando un amortiguador al bastidor para aislar las vibraciones del resto del conjunto. A menudo se usará una combinación de estas tres formas. Más tarde se investigará algo acerca de estas técnicas.

11.9 PROGRAMA FOURBAR

Los métodos matriciales analizados en las secciones anteriores proporcionan información acerca de la fuerza y el par de torsión para una posición del conjunto del eslabonamiento, definidos por sus parámetros cinemáticos y geométricos. Para realizar un análisis completo de fuerza para las múltiples posiciones de una máquina se requiere que estos cálculos se repitan con nuevos datos de entrada para cada posición. Un programa de computadora es la manera obvia de lograr esto. El programa FOURBAR, en el CD-ROM adjunto, calcula los parámetros cinemáticos para cualquier eslabonamiento de cuatro barras que cambia con el tiempo o con el ángulo del impulsor (manivela) más las fuerzas y pares de torsión concomitantes con la cinemática del eslabonamiento y con la geometría del eslabón. En las figuras 11-6 y 11-7 se muestran ejemplos de sus resultados. Véase el apéndice A para información sobre el uso del programa FOURBAR.

11.10 ANÁLISIS DE FUERZA DE ESLABONAMIENTO POR MÉTODOS DE ENERGÍA

En la sección 10.13 se presentó el método de trabajo virtual. Este método se usará para resolver el eslabonamiento del ejemplo 11-3, como una comprobación de su solución por

el método de Newton usado anteriormente. Los datos cinemáticos dados en el ejemplo 11-3 no incluían información sobre las velocidades angulares de todos los eslabones, ni las velocidades lineales de los centros de gravedad de los eslabones, y tampoco acerca de la velocidad lineal del punto de aplicación *P* de la fuerza externa sobre el eslabón 3. No se necesitaron datos de velocidad para la solución mediante el método de Newton, pero son necesarios para el método de trabajo virtual que se detalla a continuación. Se repite la ecuación 10.26a.

$$\sum_{k=2}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k + \sum_{k=2}^{n} \mathbf{T}_K \cdot \omega_k = \sum_{k=2}^{n} m_k \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{v}_k + \sum_{k=2}^{n} I_k \alpha_k \cdot \omega_k \tag{11.16a}$$

Desarrollando las sumatorias, todavía en forma vectorial:

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{F}_{P_3} \cdot \mathbf{v}_{P_3} + \mathbf{F}_{P4} \cdot \mathbf{v}_{P4}\right) + \left(\mathbf{T}_{12} \cdot \omega_2 + \mathbf{T}_3 \cdot \omega_3 + \mathbf{T}_4 \cdot \omega_4\right) = \\ &\left(m_2 \mathbf{a}_{G_2} \cdot \mathbf{v}_{G_2} + m_3 \mathbf{a}_{G_3} \cdot \mathbf{v}_{G_3} + m_4 \mathbf{a}_{G_4} \cdot \mathbf{v}_{G_4}\right) \\ &+\left(I_{G_2} \alpha_2 \cdot \omega_2 + I_{G_3} \alpha_3 \cdot \omega_3 + I_{G_4} \alpha_4 \cdot \omega_4\right) \end{aligned} \tag{11.6b}$$

Desarrollando los productos punto para crear una ecuación escalar:

$$\begin{aligned} &\left(F_{P_{3x}} V_{P_{3x}} + F_{P_{3y}} V_{P_{3y}}\right) + \left(F_{P_{4x}} V_{P_{4x}} + F_{P_{4y}} V_{P_{4y}}\right) + \left(T_{12}\omega_2 + T_3\omega_3 + T_4\omega_4\right) = \\ &m_2\left(a_{G_{2x}} V_{G_{2x}} + a_{G_{2y}} V_{G_{2y}}\right) + m_3\left(a_{G_{3x}} V_{G_{3x}} + a_{G_{3y}} V_{G_{3y}}\right) \\ &+m_4\left(a_{G_{4x}}\ V_{G_{4x}} + a_{G_{4y}}\ V_{G_{4y}}\right) + \left(I_{G_2}\ \alpha_2\omega_2 + I_{G_3}\ \alpha_3\omega_3 + I_{G_4}\ \alpha_4\omega_4\right) \end{aligned} \tag{11.16c}$$

EJEMPLO 11-4

Análisis de un eslabonamiento de cuatro barras por el método de trabajo virtual (véase la figura 11-3).

Datos: La manivela mostrada de 5 pulgadas de longitud (eslabón 2) pesa 1.5 Ib. Su *CG* está a 3 pulgadas a +30° de la línea de centros. Su momento de inercia con respecto a su *CG* es de 0.4 lb-pulg-s^2. Sus datos cinemáticos son:

θ_2 grados	ω_2 rad/s	α_2 rad/s^2	V_{G_2} pulg/s
60	25	−40	75 @ 180°

El acoplador (eslabón 3) tiene 15 pulgadas de longitud y pesa 7.7 Ib. Su *CG* está a 9 pulgadas a 45° fuera de la línea de centros. Su momento de inercia con respecto a su *CG* es 1.5 lb-pulg-s^2. Sus datos cinemáticos son:

θ_3 grados	ω_3 rad/s	α_3 rad/s^2	V_{G_3} pulg/s
20.92	−5.87	120.9	72.66 @ 145.7°

Sobre el eslabón 3 hay una fuerza externa de 80 Ib a 330° aplicada en el punto *P*, localizado a 3 pulgadas@ 100° del *CG* del eslabón 3. La velocidad lineal de ese punto es 67.2 pulg/s a 131.94°.

El balancín (eslabón 4) tiene 10 pulgadas de longitud y pesa 5.8 Ib. Su *CG* está a 5 pulgadas a 0° fuera de la línea de centros. Su momento de inercia con respecto a su *CG* es de 0.8 lb-pulg-s^2. Sus datos cinemáticos son:

θ_4 grados	ω_4 rad/s	α_4 rad/s^2	V_{G4} pulg/s
104.41	7.93	276.29	39.66 @ 194.41°

Sobre el eslabón 4 hay un par de torsión externo de 120 lb-pulg. El eslabón *de fijación* es de 19 pulgadas de longitud.

Halle: El par de torsión impulsor T_{12} necesario para mantener el movimiento con la aceleración dada para esta posición instantánea del eslabón.

Solución:

1 El par de torsión, la velocidad angular y los vectores de aceleración angular en este problema bidimensional están dirigidos a lo largo del eje Z, así que cada uno de sus productos punto tiene sólo un término. Observe que en este ejemplo en particular no hay ninguna fuerza $\mathbf{F}_{P4}$ y ningún par de torsión $\mathbf{T}_3$.

2 Las coordenadas cartesianas de los datos de la aceleración se calcularon anteriormente en el ejemplo 11-3.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{G2} &= 1878.84 \quad @\angle 273.66°; \quad a_{G2_x} = 119.94, \quad a_{G2_y} = -1875.01 \\
\mathbf{a}_{G3} &= 3646.10 \quad @\angle 226.51°; \quad a_{G3_x} = -2509.35, \quad a_{G3_y} = -2645.23 \\
\mathbf{a}_{G4} &= 1416.80 \quad @\angle 207.24°; \quad a_{G4_x} = -1259.67, \quad a_{G4_y} = -648.50
\end{aligned} \tag{a}$$

3 Las componentes *x* y *y* de la fuerza externa *P* en el sistema coordenado global también se calcularon en el ejemplo 11-3:

$$\mathbf{F}_{P3} = 80 \quad @\angle 330°; \quad F_{P3_x} = 69.28, \quad F_{P3_y} = -40.00 \tag{b}$$

4 Convirtiendo los datos de la velocidad de este ejemplo a coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{G2} &= 75 \quad @\angle 180°; \quad V_{G2_x} = -75, \quad V_{G2_y} = 0 \\
\mathbf{V}_{G3} &= 72.66 \quad @\angle 145.70°; \quad V_{G3_x} = -60.02, \quad V_{G3_y} = 40.95 \\
\mathbf{V}_{G4} &= 39.66 \quad @\angle 194.41°; \quad V_{G4_x} = -38.41, \quad V_{G4_y} = -9.87 \\
\mathbf{V}_{P3} &= 67.20 \quad @\angle 131.94°; \quad V_{P3_x} = -44.91, \quad V_{P3_y} = 49.99
\end{aligned} \tag{c}$$

5 Sustituyendo los datos del ejemplo en la ecuación 11.16c:

$$\begin{aligned}&\left[(69.28)(-44.91)+(-40)(49.99)\right]+[0]+\left[25T_{12}+(0)+(120)(7.93)\right]=\\&\quad\frac{1.5}{386}\left[(119.94)(-75)+(-1875.01)(0)\right]\\&\qquad+\frac{7.7}{386}\left[(-2509.35)(-60.02)+(-2645.23)(40.95)\right]\\&\qquad\quad+\frac{5.8}{386}\left[(-1259.67)(-38.41)+(-648.50)(-9.87)\right]\\&\qquad\qquad+\left[(0.4)(-40)(25)+(1.5)(120.9)(-5.87)+(0.8)(276.29)(7.93)\right]\end{aligned}\tag{d}$$

6 La única incógnita en esta ecuación es el par de torsión de entrada $T_{,2}$, el cual se calcula para:

$$\mathbf{T}_{12}=243.2\ \hat{\mathbf{k}}\tag{e}$$

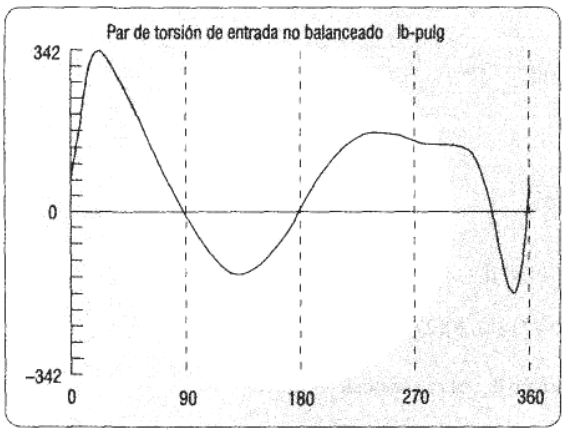
que es la misma respuesta obtenida en el ejemplo 11-3.

Este método del trabajo virtual es útil si se necesita una respuesta rápida para el par de torsión de entrada, pero no da información sobre las fuerzas de la junta.

11.11 CONTROL DEL PAR DE TORSIÓN DE ENTRADA: VOLANTES

La comúnmente gran variación en aceleraciones dentro de un mecanismo puede causar importantes oscilaciones en el par de torsión requerido para impulsarlo a una velocidad constante o casi constante. Los pares de torsión máximo necesarios pueden ser tan grandes que requieren de un motor demasiado grande que los proporcione. Sin embargo, debido principalmente a las pérdidas y al trabajo externo realizado, el par de torsión promedio durante el ciclo puede ser a menudo mucho más pequeño que el par de torsión máximo. Sería conveniente proporcionar algunos medios para suavizar o eliminar las oscilaciones del par de torsión durante el ciclo. Esto permitiría dimensionar el motor para que proporcione un par de torsión promedio en lugar de un par de torsión máximo. Un medio conveniente y relativamente barato para lograr esto es agregar un **volante** al sistema.

VARIACIÓN DEL PAR DE TORSIÓN En la figura 11-8 se muestra la variación en el par de torsión de entrada para un eslabonamiento de cuatro barras de manivela-balancín en el caso de una revolución completa de la manivela impulsora. Está girando a una velocidad angular constante de 50 rad/s. El par de torsión varía mucho para un ciclo del mecanismo y va de un máximo positivo de 341.7 lb-pulg a un mínimo negativo de -166.4 lb-pulg. El **valor promedio de este par de torsión** durante el ciclo es sólo de 70.2 lb-pulg y se debe al *trabajo externo realizado más las pérdidas.* Este eslabonamiento tiene sólo una fuerza externa de 12 libras aplicada al eslabón 3 en el *CG* y un par de torsión externo de 25 lb-pulg aplicado al eslabón 4. Estas pequeñas cargas externas no se consideran en grandes variaciones del par de torsión de entrada requerido para mantener constante la velocidad de la manivela. ¿Cuál es entonces la explicación? Las grandes variaciones en el par de torsión son la evidencia de que la energía cinética se almacena en los eslabones conforme éstos se mueven. Se considera que los pulsos positivos del par de



Eslabón Núm.	Longitud pulg	Unidades de masa	Unidades de inercia	*CG* Positivo	en grados	Fuerza externa lb	en grados
1	5.5						
2	2.0	.002	.004	1.0	0		
3	6.0	.030	.060	2.5	30	12	270
4	3.0	.010	.020	1.5	0	60	–45

Punto del acoplador = 3 pulg @ 45°
Abierto/Cruzado = abierto
La fuerza externa 3 actúa a 5 pulg @ 30° con respecto al *CG* del eslabón 3
La fuerza externa 4 actúa a 5 pulg @ 90° con respecto al *CG* del eslabón 4
Par de torsión externo 3 = –20 lb-pulg
Par de torsión externo 4 = 25 lb-pulg
Comienza alfa2 = 0 rad/s^2
Comienza omega2 = 50 rad/s
Comienza teta2 = 0°
Finaliza teta2 = 360°
Delta teta2 = 2°

FIGURA 11-8

Datos del eslabonamiento y curva del par de torsión de entrada para un eslabonamiento no balanceado de manivela-balancín del programa FOURBAR

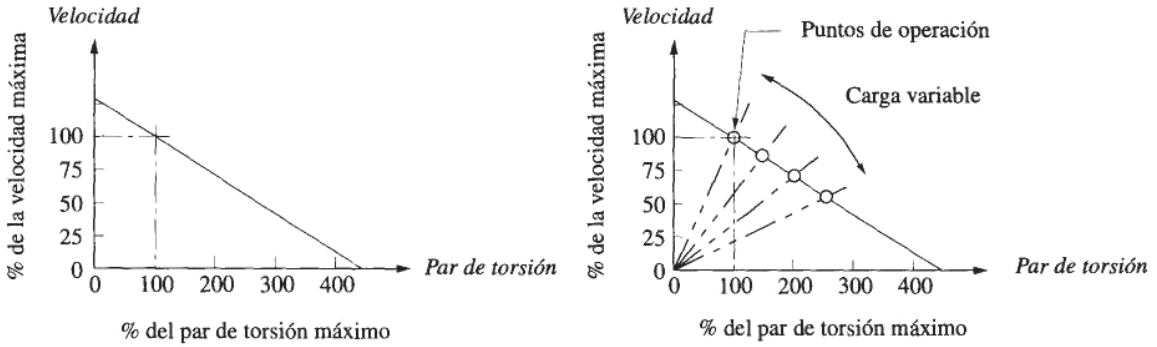
torsión representan la energía suministrada por el impulsor (motor) y que se almacenan temporalmente en los eslabones móviles, y que los pulsos negativos del par de torsión representan la energía que intenta regresar de los eslabones al impulsor. Desgraciadamente la mayoría de los motores se diseña para suministrar energía pero no para tomarla. Así, la "energía que regresa" no tiene ningún lugar adonde ir.

En la figura 11-9 se muestra la curva característica del par de torsión de un motor eléctrico de CD de imán permanente(IP). Otros tipos de motores tendrán diferentes formas de curvas de funcionamiento que relacionan la velocidad del motor con el par de torsión, como se muestra en las figuras 2-32 y 2-33, pero todos los impulsores (fuentes) tendrán algunas de estas curvas características. Conforme cambie la demanda en el par de torsión del motor, la velocidad del motor también debe cambiar de acuerdo con su característica inherente. Esto significa que la curva del par de torsión requerida en la figura 11-8 será muy difícil para un motor normal que suministra energía sin cambios drásticos en su velocidad.

Para el cálculo de la curva del par de torsión en la figura 11-8 se supuso que la velocidad de la manivela (y, por lo tanto, el motor) tenía un valor constante. Todos los datos cinemáticos usados en el cálculo de la fuerza y el par de torsión fueron generados bajo esta suposición. Con la variación del par de torsión mostrada se tendría que usar un motor muy potente que proporcione la potencia requerida para alcanzar ese par de torsión máximo a la velocidad del diseño:

$$\textit{Potencia} = \textit{par de torsión} \times \textit{velocidad angular}$$

$$\textit{Máxima potencia} = 341.7 \text{ lb - pulg} \times 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 17\,085 \frac{\text{pulg - lb}}{\text{s}} = 2.59 \text{ hp}$$



a) Curva característica velocidad-par de torsión de un motor eléctrico de IP

b) Superposición de líneas de carga sobre una curva de velocidad-par de torsión

FIGURA 11-9

Curva característica típica de velocidad-par de torsión de un motor de CD de imán permanente (IP)

La potencia necesaria para abastecer el par de torsión promedio es mucho más pequeña.

$$Potencia\ promedio = 70.2\ \text{lb - pulg} \times 50\frac{\text{rad}}{\text{s}} = 3\,510\frac{\text{pulg - lb}}{\text{s}} = 0.53\ \text{hp}$$

Sería sumamente ineficaz especificar un motor con base en la demanda máxima del sistema, la mayor parte del tiempo sería subutilizado. En el sistema se necesita algo que sea capaz de almacenar energía cinética. Tal dispositivo de almacenamiento de energía cinética se llama volante.

ENERGÍA DEL VOLUMEN En la figura 11-10 se muestra un volante diseñado como un disco redondo plano, acoplado al eje de un motor que también podría ser el eje de accionamiento para la manivela de un eslabonamiento. El motor proporciona un par de torsión de magnitud T_M que quisiéramos que fuese lo más constante posible, es decir, igual al par de torsión promedio T_{prom}. La carga (de un eslabonamiento), en el otro lado del volante, requiere un par de torsión T_L que varíe con el tiempo, como el que se muestra en la figura 11-8. La energía cinética en un sistema rotatorio es:

$$E = \frac{1}{2} I\omega^2 \tag{11.17}$$

donde I es el momento de inercia de toda la masa que gira en el eje. Esto incluye el I del rotor del motor y de la manivela del eslabonamiento mas la del volante. Se quiere determinar cuánto I es necesario agregar en forma de volante para reducir la variación de la velocidad del eje a un nivel aceptable. Se empezara por escribir la ley de Newton para el diagrama de cuerpo libre de la figura 11-10.

$$\sum T = I\alpha$$

$$T_L - T_M = I\alpha$$

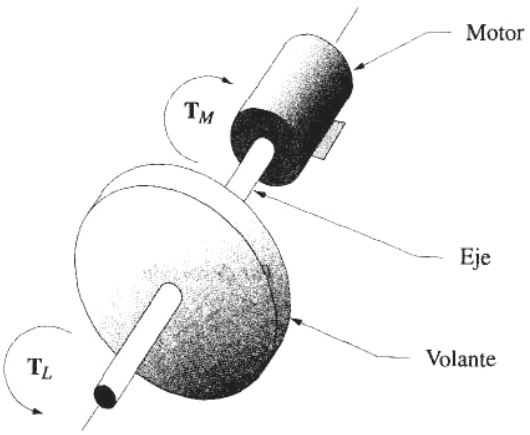


FIGURA 11-10
Volante sobre un eje de accionamiento

pero se quiere: $$T_M = T_{prom}$$

así: $$T_L - T_{prom} = I\alpha \qquad (11.18a)$$

sustituyendo: $$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\left(\frac{d\theta}{d\theta}\right) = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

se obtiene: $$T_L - T_{prom} = I\omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

$$(T_L - T_{prom})\,d\theta = I\omega\,d\omega \qquad (11.18b)$$

e integrando:

$$\int_{\theta@\omega_{mín}}^{\theta@\omega_{máx}} (T_L - T_{prom})\,d\theta = \int_{\omega_{mín}}^{\omega_{máx}} I\omega\,d\omega \qquad (11.18c)$$

$$\int_{\theta@\omega_{mín}}^{\theta@\omega_{máx}} (T_L - T_{prom})\,d\theta = \frac{1}{2}I(\omega_{máx}^2 - \omega_{mín}^2)$$

El lado izquierdo de esta expresión representa el cambio de energía E entre la ω máxima y mínima del eje, y es igual al *área bajo la curva par de torsión-tiempo** (véase las figuras 11-8 y 11-11) entre esos valores extremos de (0. El lado derecho de la ecuación 11.18c es el cambio de la energía almacenada en el volante. La única manera en que se puede extraer energía del volante es desacelerando como se muestra en la ecuación 11.17. Al agregar energía se acelerará. Así, es imposible obtener de manera exacta la velocidad constante del eje dados los requerimientos de cambio de energía por la carga. Lo mejor que se puede hacer es minimizar la variación de la velocidad $(\omega_{máx} - \omega_{mín})$ proporcionando un volante con I suficientemente grande.

* A menudo hay confusión entre el par de torsión y la energía porque ambos tienen las mismas unidades de *lb-pulg* (*pulg-lb*) o *N-m* (*m-N*). Algunos estudiantes piensan que son la misma cantidad, pero no es así. Par de torsión ≠ energía. La **integral** del par de torsión con respecto al ángulo, medido en radianes, **es** igual a la energía. Esta integral tiene unidades de *pulg-lb-rad*. El término radián normalmente se omite, ya que es de hecho la unidad. La potencia en un sistema giratorio es igual al par de torsión × velocidad angular (medida en *rad/s*) y las unidades de potencia son entonces (*pulg-lb-rad*)/*s*. Cuando se integra la potencia con respecto al tiempo para obtener la energía, las unidades resultantes son *pulg-lb-rad*, las mismas unidades que en la integral del par de torsión del ángulo. Los radianes normalmente se vuelven a eliminar, lo que contribuye a la confusión.

EJEMPLO 11-5

Determinación de la variación de energía en una función par de torsión-tiempo.

Datos: Una función de par de torsión-tiempo de entrada que varía durante su ciclo. En la figura 11-11 se muestra la curva del par de torsión de entrada de la figura 11-8. El par de torsión está variando durante el ciclo de 360° con respecto a su valor promedio.

Halle La variación de la energía total en un ciclo.

Solución:

1 Calcule el valor promedio de la función par de torsión-tiempo en un ciclo, que en este caso es de 70.2 lb-pulg. (Observe que en algunos casos el valor promedio puede ser cero.)

2 Observe que la *integración en el lado izquierdo de la ecuación 11.18c se hace con respecto a la línea promedio de la función del par de torsión, no con respecto al eje* θ. (De la definición del promedio, la suma del área positiva por arriba de una línea promedio es igual a la suma del área negativa debajo de esa línea.) Los límites de integración en la ecuación 11.18 son desde el ángulo del eje θ, donde la ω del eje es un mínimo hasta el ángulo del eje θ donde su ω es un máximo.

3 El ω mínimo ocurrirá después de que la máxima energía positiva se haya transmitido del motor a la carga, es decir, en un punto (θ) donde la sumatoria de la energía positiva (área) en los pulsos del par de torsión esté en su valor positivo más grande.

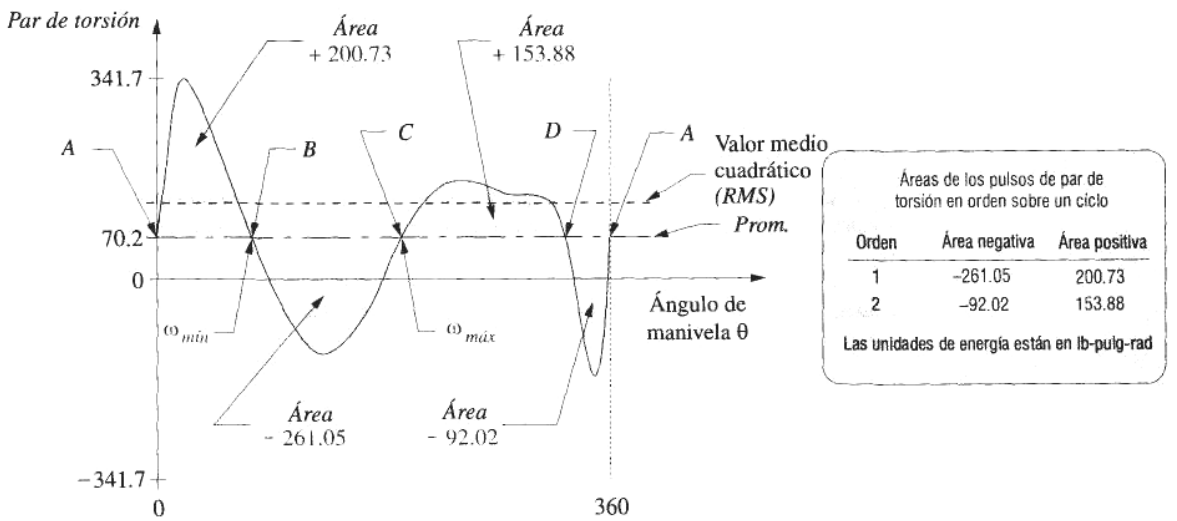


FIGURA U-II

Integración de los pulsos arriba y abajo del valor promedio de la función de par de torsión de entrada

4 El co máximo ocurrirá después de que la máxima energía negativa haya regresado la carga, es decir, en un punto (θ) donde la sumatoria de la energía (área) en los pulsos del par de torsión esté en su valor negativo más alto.

5 Para encontrar estas localizaciones en 9, que corresponden a los co máximo y mínimo, y así encontrar la cantidad de energía necesaria para almacenarse en el volante, se necesita integrar numéricamente cada pulso de esta función de cruce a cruce con la línea promedio. Los puntos de cruce en la figura 11-11 se han designado como *A, B, C y D.* (El programa FOURBAR hace esta integración numéricamente mediante una regla de integración trapezoidal.)

6 El programa FOURBAR imprime la tabla de áreas mostrada en la figura 11-11. Los pulsos positivos y negativos se integran por separado como se describió anteriormente. La referencia a la gráfica de la función del par de torsión indicará si un pulso positivo o negativo es el primer pulso encontrado en un caso particular. En este ejemplo el primer pulso es positivo.

7 La tarea restante es acumular estas áreas de pulso comenzando en un cruce arbitrario (en este caso el punto *A)* y procediendo pulso por pulso a través del ciclo. En la tabla 11-1 se muestra este proceso y el resultado.

8 Observe en la tabla 11-1 que la velocidad mínima del eje ocurre después de que el pulso de energía positivo máximo acumulado (+200.73 pulg-lb) se ha suministrado del eje impulsor al sistema. Esta entrega de energía reduce la velocidad del motor. La velocidad máxima del eje ocurre después de que el pulso de energía negativo máximo acumulado (-60.32 pulg-lb) ha regresado del sistema mediante el eje impulsor. Este retorno de energía almacenada acelerará el motor. La variación total de energía es la diferencia algebraica entre estos dos valores extremos, en este ejemplo es de -261.05 pulg-lb. Esta energía negativa que sale del sistema será absorbida por el volante y después regresará al sistema *durante cada ciclo* para suavizar las variaciones de velocidad del eje.

DIMENSIONAMIENTO DFX VOLANTE Ahora se debe determinar el tamaño de volante necesario para absorber esta energía con un cambio aceptable en la velocidad. El cambio de velocidad del eje durante un ciclo se *llama fluctuación (Fl)* y es igual a:

$$Fl = \omega_{máx} - \omega_{mín} \tag{11.19a}$$

Esta ecuación se puede normalizar a una relación sin dimensiones dividiéndola entre la velocidad promedio del eje. A esta relación se le llama *coeficiente de fluctuación (k).*

TABLA 11-1 Integración de la función par de torsión

Desde	Δ Área = ΔE	Suma acumulada = E	
A a *B*	+200.73	+200.73	$\omega_{mín}$@*B*
B a *C*	−261.05	−60.32	$\omega_{máx}$@*C*
C a *D*	+153.88	+93.56	
D a *A*	−92.02	+1.54	
	Energía Δ total	$= E @ \omega_{máx} - E @ \omega_{mín}$	
		= (−60.32) − (+200.73) = −261.05 pulg-lb	

$$k = \frac{(\omega_{máx} - \omega_{mín})}{\omega_{prom}} \tag{11.19b}$$

Este *coeficiente de fluctuación* es un parámetro de diseño que será elegido por el diseñador. Éste normalmente tiene un valor entre 0.01 y 0.05 que corresponde a una fluctuación de 1 a 5% de la velocidad del eje. Cuanto más pequeños se elijan los valores, el volante será más grande. Esto representa una transacción en el diseño. Un volante más grande agregará más costo y peso al sistema, estos factores tienen que ser sopesados con respecto a la suavidad de funcionamiento deseada.

El cambio requerido en la energía E se determina integrando la curva del par de torsión

$$\int_{\theta @ \omega_{mín}}^{\theta @ \omega_{máx}} (T_L - T_{prom}) d\theta = E \tag{11.20a}$$

y ahora se puede igualar con el lado derecho de la ecuación 11.18c:

$$E = \frac{1}{2} I(\omega_{máx}^2 - \omega_{mín}^2) \tag{11.20b}$$

Factorizando esta expresión:

$$E = \frac{1}{2} I(\omega_{máx} + \omega_{mín})(\omega_{máx} - \omega_{mín}) \tag{11.20c}$$

Si la función par de torsión-tiempo fuera sólo armónica, entonces su valor promedio se expresaría exactamente como:

$$\omega_{prom} = \frac{(\omega_{máx} + \omega_{mín})}{2} \tag{11.21}$$

Las funciones del par de torsión pocas veces serán armónicas puras, pero el error que se comete al usar esta expresión como una aproximación del promedio, es aceptablemente pequeño. Ahora se pueden sustituir las ecuaciones 11.19b y 11.21 en la ecuación 11.20c, y obtener una expresión para el momento de inercia I_s del volante necesario para el sistema.

$$E = \frac{1}{2} I(2\omega_{prom})(k\omega_{prom})$$

$$I_s = \frac{E}{k\omega_{prom}^2} \tag{11.22}$$

La ecuación 11.22 puede usarse para diseñar el volante físico eligiendo un coeficiente de fluctuación *k* deseado, y se usa el valor de £ a partir de la integración numérica de la curva del par de torsión (véase la tabla 11-1) y de la velocidad promedio del eje ω para calcular el I_s necesario para el sistema. El momento de inercia del volante físico I_f se iguala entonces al del sistema requerido I_s. Pero si se conocen los momentos de inercia de los otros elementos que giran en el mismo eje de accionamiento (como el motor), el momento de inercia I_f, requerido por el volante físico, puede ser reducido por esas cantidades.

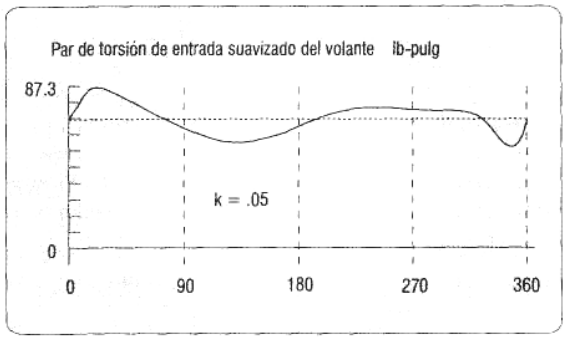


FIGURA 11-12

Curva del par de torsión de entrada para el eslabonamiento de cuatro barras de la figura 11-8 después de suavizarlo con un volante

El diseño del volante más eficiente en términos de maximizar I_f usando el mínimo material es aquél en el que la masa se concentra en su borde y su centro se apoya en los rayos, como en una rueda de carruaje. Esto coloca la mayor parte de la masa en el radio más grande posible y minimiza el peso para un I_f dado. Aun cuando se elija un volante como un disco redondo sólido plano, ya sea por simplicidad de fabricación o para obtener una superficie plana para otras funciones (como en un embrague de automóvil), el diseño debe hacerse con cuidado para reducir peso y, por lo tanto, el costo. Como en general $I = mr^2$, un disco delgado de diámetro grande necesitará menos libras de material para obtener un / que un disco de más espesor y de diámetro más pequeño. Los materiales densos como el hierro colado y el acero son las opciones obvias para un volante. El aluminio pocas veces se usa. Aunque muchos metales (plomo, oro, plata, platino) son más densos que el hierro y el acero, raramente se puede conseguir la aprobación del departamento de contabilidad para usarlos en un volante.

En la figura 11-12 se muestra el cambio en el par de torsión de entrada T_{12} para el eslabonamiento de la figura 11-8 después de que se ha agregado un volante para proporcionar un coeficiente de fluctuación de 0.05 según el tamaño. La oscilación del par de torsión respecto del valor promedio inalterado es ahora del 5%, mucho menor que el que tenía sin volante. Ahora puede usarse un motor de menor potencia, ya que el volante puede absorber la energía de retorno del eslabonamiento durante su ciclo.

11.12 ÍNDICE DE TRANSMISIÓN DE FUERZA EN UN ESLABONAMIENTO

El ángulo de transmisión se introdujo en el capítulo 2, y se usó en capítulos subsecuentes como un índice de valor para predecir el comportamiento cinemático de un eslabonamiento. Un ángulo de transmisión demasiado pequeño predice problemas con la transmisión del movimiento, y la fuerza en un eslabonamiento de cuatro barras. Desgraciadamente, el ángulo de transmisión tiene una aplicación limitada. Sólo es útil para los eslabonamientos de cuatro barras y, por tanto, sólo cuando se aplican los pares de torsión de entrada y salida a eslabones que están pivotados a una fijación (es decir, la manivela y

el balancín). Cuando se aplican fuerzas externas al eslabón de acoplamiento, el ángulo de transmisión no indica nada acerca del comportamiento del eslabonamiento.

Holte y Chase[11] definen un índice de fuerza de junta (IFJ), que es útil como indicador de la habilidad de cualquier eslabonamiento para transmitir energía de manera suave sin importar dónde se aplican las cargas en el eslabonamiento. Este índice se aplica a eslabonamientos de orden superior así como al eslabonamiento de cuatro barras. El IFJ en cualquier posición instantánea se define como la relación entre la máxima fuerza estática en cualquier junta del mecanismo y la carga externa aplicada. Si la carga externa es una fuerza, entonces ésta es:

$$IFJ = MAX\left|\frac{F_{ij}}{F_{ext}}\right| \qquad \text{para todos los pares } i, j \qquad (11.23a)$$

Si la carga externa es un par de torsión, entonces ésta es:

$$IFJ = MAX\left|\frac{F_{ij}}{T_{ext}}\right| \qquad \text{para todos los pares } i, j \qquad (11.23b)$$

donde en ambos casos F_{ij} es la fuerza en la junta del eslabonamiento que conecta los eslabones i y j.

Los F_{ij} se calculan a partir de un análisis de fuerza estática del eslabonamiento. Si las velocidades son altas, entonces las fuerzas dinámicas pueden ser mucho mayores que las fuerzas estáticas. Sin embargo, si el índice de transmisión de esta fuerza estática indica un problema cuando no hay fuerzas dinámicas, entonces la situación empeorará con la velocidad. Se usa la fuerza de junta más grande en cada posición en lugar de una compuesta o de valor promedio suponiendo que la alta fricción en cualquier junta es suficiente para estorbar la actuación del eslabonamiento sin considerar las fuerzas de las otras juntas.

La ecuación 11.23a no tiene dimensiones y se usa para comparar eslabonamientos de diferentes diseños y geometría. La ecuación 11.23b tiene dimensiones de longitud recíproca, por lo tanto, debe usarse con precaución al comparar diseños cuando la carga externa es un par de torsión. Entonces las unidades usadas en cualquier comparación deben ser las mismas y los eslabonamientos comparados deben ser de tamaño similar.

Las ecuaciones 11.23 se aplican en cualquier posición instantánea del eslabonamiento. Al igual que con el ángulo de transmisión, este índice debe evaluarse en todas las posiciones del eslabonamiento por arriba de su rango esperado de movimiento y del valor más grande encontrado de ese conjunto. La fuerza máxima se puede mover de pasador en pasador conforme el eslabonamiento gira. Si las cargas externas varían con la posición del eslabonamiento, éstas se consideran en el cálculo.

Holte y Chase sugieren que el IFJ se conserve por abajo de un valor aproximado de 2 para los eslabonamientos cuya salida es una fuerza. Los valores más grandes son tolerables especialmente si las juntas se diseñan con buenos cojinetes que puedan manejar cargas más altas.

Hay algunas posiciones del eslabonamiento en las que el IFJ puede ser infinito o indeterminado, como cuando el eslabonamiento alcanza una posición inmóvil, definido como el eslabón de entrada o que la junta de entrada esté inactiva. Esto equivale a una configuración estacionaria como la que se describió en los capítulos anteriores en los que la junta de entrada está inactiva en una configuración estacionaria en particular. Estas posiciones necesitan ser identificadas y en todo caso evitarse, independientemente de la

determinación de cualquier índice de valor. En algunos casos el mecanismo puede estar inmóvil pero aún es capaz de soportar una carga. Véase la referencia [1] para información más detallada acerca de estos casos especiales.

11.13 CONSIDERACIONES PRÁCTICAS

En este capítulo se han presentado algunos enfoques para el cálculo de fuerzas dinámicas en maquinaria móvil. El método de Newton ofrece la mayor información y es necesario para obtener las fuerzas de todas las juntas de pasador de manera que se pueda realizar el análisis de esfuerzos de los elementos. Su aplicación es bastante directa y sólo requiere la elaboración de diagramas de cuerpo libre correctos para cada elemento, y la aplicación de dos ecuaciones vectoriales simples que expresen la segunda ley de Newton para cada cuerpo libre. Una vez que se han desarrollado estas ecuaciones para cada elemento del sistema y se han escrito en la forma matricial usual, su solución (con una computadora) es una tarea trivial.

El trabajo real del diseño de estos mecanismos consiste en determinar las formas y tamaños de los elementos. Además de los datos cinemáticos, el cálculo de la fuerza requiere sólo de las masas, de las localizaciones de los *CG* y de los momentos de inercia con respecto a esos *CG*. Estos tres parámetros geométricos caracterizan por completo al elemento para propósitos de modelado dinámico. Incluso si están completamente definidos la forma del eslabón y los materiales de salida del proceso del análisis de fuerza (como con el rediseño de un sistema existente) es un ejercicio tedioso calcular las propiedades dinámicas de formas complicadas. Los sistemas *CAD* que actualmente modelan sólidos simplifican este paso calculando estos parámetros automáticamente para cualquier parte de su diseño.

Sin embargo, si usted está empezando con su diseño, el *síndrome de la hoja en blanco* hará que inevitablemente le duela la cabeza. Debe hacerse una primera aproximación de la forma del eslabón y de la selección de materiales con el fin de crear los parámetros dinámicos necesarios para dar así un "primer paso" en el análisis de fuerza. Un análisis de esfuerzo de esas partes, basado en las fuerzas dinámicas calculadas, invariablemente encontrará problemas que necesitan cambios de las formas de las partes y que requieren de nuevo el cálculo de las propiedades dinámicas y de las fuerzas dinámicas y los esfuerzos. Este proceso se repetirá de manera circular *(iteración,* véase el capítulo 1) hasta que se alcance un diseño aceptable. Las ventajas de una computadora para hacer estos cálculos repetitivos son obvias y no son un sobreesfuerzo. Un programa resolvedor de ecuaciones, como el *TKSolver* o el *Mathcad,* será útil en este proceso pues simplifica el trabajo con la computadora.

Con frecuencia los estudiantes sin experiencia en diseño no están seguros de cómo realizar este proceso del diseño de partes para aplicaciones dinámicas. Se ofrecen las siguientes sugerencias para que usted comience. Conforme adquiera experiencia desarrollará su propio método.

A menudo conviene crear formas complejas a partir de una combinación de formas simples, al menos para una primera aproximación de los modelos dinámicos. Por ejemplo, un eslabón podría componerse de un cilindro hueco pivoteado en cada extremo, conectado mediante un prisma rectangular a lo largo de la línea de centros. Es fácil calcular los parámetros dinámicos para cada una de estas formas simples y después combinarlas. Los pasos son los siguientes (se repiten para cada eslabón):

1 Calcule el volumen, masa, localización de los *CG* y momentos de inercia con respec to al *CG* local de cada parte separada de su construcción del eslabón. En nuestro ejemplo de eslabón estas partes podrían ser los dos cilindros huecos y el prisma rectangular.

2 Encuentre la localización del *CG* compuesto del conjunto de las partes del eslabón por el método mostrado en la sección 11.4 y en la ecuación 11.3. Véase también la figura 11-2.

3 Use el *teorema de los ejes paralelos* (ecuación 10.8) para transferir los momentos de inercia de cada parte al *CG* común compuesto para el eslabón. Después agregue el / individual transferido de las partes para conseguir el / total del eslabón respecto de su *CG* compuesto. Véase la sección 11.6.

De los pasos 1 al 3 se crearán los datos geométricos para cada eslabón necesarios en el análisis dinámico de fuerza como se obtuvo en este capítulo.

4 Realice el análisis dinámico de fuerzas.

5 Haga un análisis dinámico de esfuerzos y deflexión de todas las partes.

6 Rediseñe las partes y repita los pasos 1 al 5 hasta que se logre un resultado satis factorio.

Recuerde que los eslabones ligeros (de menor masa) tendrán fuerzas inerciales más pequeñas y tendrán así esfuerzos menores a pesar de sus secciones tranversales más pequeñas. También, menores momentos de inercia de los eslabones reducen los pares de torsión impulsores requeridos, especialmente a altas velocidades. Pero se debe ser cuidadoso con las desviaciones dinámicas sobre eslabones delgados y ligeros, ya que llegan a ser muy grandes. En estos análisis se supone que los cuerpos son rígidos. Esta suposición no es válida si los eslabones son demasiado flexibles. Verifique siempre las deflexiones así como los esfuerzos en sus diseños.

11.14 REFERENCIAS

1 **Holte, J. E. y T. R. Chase** (1994). "A Forcé Transmission Index for Planar Linkage Mechanisms". *Proc. de la 23 Conferencia Bienal de Mecanismos,* Minneapolis, p. 377.

11.15 PROBLEMAS

11-1 Dibuje los diagramas de cuerpo libre de los eslabones en el eslabonamiento de cinco barras engranado que se muestra en la figura 4-11 y escriba las ecuaciones dinámicas para encontrar todas las fuerzas más el par de torsión impulsor. Ordene las ecuaciones simbólicas en forma matricial para su solución.

11-2 Dibuje los diagramas de cuerpo libre de los eslabones en el eslabonamiento de seis barras que se muestran en la figura 4-12 y escriba las ecuaciones dinámicas para determinar todas las fuerzas más el par de torsión impulsor. Ordene las ecuaciones simbólicas en forma matricial para su solución.

*t§11-3 En la tabla Pl 1-1 se muestran los datos cinemáticos y geométricos para diferentes eslabonamientos de manivela-corredera del tipo, con la orientación que se muestra en

* Las respuestas están en el apéndice F.

t Estos problemas son adecuados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

§ Estos problemas son adecuados para resolverse usando el programa SLIDER que está en el CD-ROM que acompaña el texto.

la figura Pl 1-1. Las localizaciones del punto se definen como se describe en el texto. Para los renglones de la tabla asignada use el método matricial de la sección 11.5 y los programas MATRIX, *Mathcad, Matlab, TKSolver,* o una calculadora que resuelva matrices a fin de encontrar las fuerzas y los pares de torsión en la posición mostrada. También calcule la fuerza de sacudimiento y el par de torsión de sacudimiento. Considere que el coeficiente de fricción \l entre el deslizador y la fijación es cero. Puede verificar su solución abriendo el archivo de solución (localizado en la carpeta Soluciones en el CD-ROM) llamado Pll-03x (donde x es la letra del renglón) en el programa SLIDER.

*†11-4 Repita el problema 11-3 usando el método del trabajo virtual para determinar el par de torsión de entrada en el eslabón 2. Se dan datos adicionales para los renglones correspondientes en la tabla Pl 1-2.

*†11-5 En la tabla Pl 1-3 se muestran los datos cinemáticos y geométricos para varios eslabonamientos de cuatro barras con junta de pasador del tipo, con la orientación que se muestra en la figura P11-2. Todos tienen $\theta_1 = 0$. Las localizaciones del punto se definen como se describe en el texto. Para los renglones de la tabla asignada, use el método matricial de la sección 11.4 y el programa MATRIX O una calculadora que resuelva matrices para determinar las fuerzas y los pares de torsión en la posición mostrada. También calcule la fuerza de sacudimiento y el par de torsión de sacudimiento. Trabaje en el sistema de unidades que prefiera. Puede verificar su solución abriendo los archivos de solución Pll-05x (donde x es la letra del renglón) en el programa FOURBAR.

*†11-6 Repita el problema 11-5 usando el método del trabajo virtual para determinar el par de torsión de entrada del eslabón 2. Se dan datos adicionales para los renglones correspondientes en la tabla Pll-4.

*‡11-7 Para los renglones asignados en la tabla Pl 1-3 (a-f), introduzca el archivo del disco asociado al programa FOURBAR, calcule los parámetros del eslabonamiento para los ángulos de la manivela de cero a 360° con incrementos de 5° y diseñe un volante de disco de acero para suavizar el par de torsión de entrada que usa un coeficiente de fluctuación de 0.05. Minimice el peso del volante.

‡11-8 En la figura Pl 1-3 se muestra un eslabonamiento de cuatro barras y sus dimensiones. La manivela de acero y el balancín tienen secciones transversales uniformes de 1 pulgada de ancho y 0.5 pulgadas de espesor. El acoplador de aluminio es de 0.75 pulgadas de espesor. En la posición instantánea mostrada la manivela O_2A tiene $\omega = 40$ rad/s y $\alpha = -20$ rad/s^2. Hay una fuerza horizontal en P de $F = 50$ lb. Encuentre todas las fuerzas del pasador y los pares de torsión necesarios para impulsar la manivela en este instante.

‡11-9 En la figura Pll-4a) se muestra un eslabonamiento de cuatro barras y sus dimensiones en metros. La manivela de acero y el balancín tienen secciones transversales uniformes de 50 mm de ancho y de 25 mm de espesor. El acoplador de aluminio tiene 25 mm de espesor. En la posición instantánea mostrada la manivela O_2A tiene $\omega = 10$ rad/s y $\alpha = 5$ rad/s^2. Hay una fuerza vertical en P de $F = 100$ N. Encuentre todas las fuerzas de pasador y los pares de torsión necesarios para impulsar la manivela en este instante.

‡11-10 En la figura P11-4&) se muestra un eslabonamiento de cuatro barras y sus dimensiones en metros. La manivela de acero y el balancín tienen secciones transversales uniformes de 50 mm de ancho y de 25 mm de espesor. El acoplador de aluminio tiene 25 mm de

11

* Las respuestas están en el apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para resolverse mediante los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

‡ Estos problemas son adecuados para resolverse mediante el programa FOURBAR que está en el CD-ROM que acompaña el texto.

TABLA PII-1 Datos para el problema 11-3 (Véase la figura PII-1 para la nomenclatura)

Parte 1 Longitudes en pulgadas, ángulos en grados, masa en blobs, velocidad angular en rad/s

Renglón	Eslabón 2	Eslabón 3	Corrimiento	θ_2	ω_2	α_2	m_2	m_3	m_4
a.	4	12	0	45	10	20	0.002	0.020	0.060
b.	3	10	1	30	15	–5	0.050	0.100	0.200
c.	5	15	–1	260	20	15	0.010	0.020	0.030
d.	6	20	1	–75	–10	–10	0.006	0.150	0.050
e.	2	8	0	135	25	25	0.001	0.004	0.014
f.	10	35	2	120	5	–20	0.150	0.300	0.050
g.	7	25	–2	–45	30	–15	0.080	0.200	0.100

Parte 2 Aceleración angular en rad/s², momentos de inercia en blobs-pulg², par de torsión en lb-pulg

Renglón	I_2	I_3	R_{g_2} mag	δ_2 ang	R_{g_3} mag	δ_3 ang	F_{P_3} mag	δF_{P_3} ang	R_{P_3} mag	δR_{P_3} ang	T_3
a.	0.10	0.2	2	0	5	0	0	0	0	0	20
b.	0.20	0.4	1	20	4	–30	10	45	4	30	–35
c.	0.05	0.1	3	–40	9	50	32	270	0	0	–65
d.	0.12	0.3	3	120	12	60	15	180	2	60	–12
e.	0.30	0.8	0.5	30	3	75	6	–60	2	75	40
f.	0.24	0.6	6	45	15	135	25	270	0	0	–75
g.	0.45	0.9	4	–45	10	225	9	120	5	45	–90

Parte 3 *Fuerzas en libras, aceleraciones lineales en pulg/s²*

Renglón	θ_3	α_3	a_{g_2} mag	a_{g_2} ang	a_{g_3} mag	a_{g_3} ang	a_{g_4} mag	a_{g_4} ang
a.	166.40	–2.40	203.96	213.69	371.08	200.84	357.17	180
b.	177.13	34.33	225.06	231.27	589.43	200.05	711.97	180
c.	195.17	–134.76	1 200.84	37.85	2 088.04	43.43	929.12	0
d.	199.86	–29.74	301.50	230.71	511.74	74.52	23.97	180
e.	169.82	113.12	312.75	–17.29	976.79	–58.13	849.76	0
f.	169.03	3.29	192.09	23.66	302.50	–29.93	301.92	0
g.	186.78	–172.20	3 600.50	90.95	8 052.35	134.66	4 909.27	180

TABLA PI 1-2 Datos para el problema 11-4

Véase también la tabla PI 1-1. El sistema de unidades es el mismo que el de la tabla.

Renglón	ω_3	V_{g_2}mag	V_{g_2}ang	V_{g_3}mag	V_{g_3}ang	V_{g_4}mag	V_{g_4}ang	V_{P_3}mag	V_{P_3}ang
a.	–2.43	20.0	135	35.24	152.09	35.14	180	35.24	152.09
b.	–3.90	15.0	140	40.35	140.14	24.45	180	26.69	153.35
c.	1.20	60.0	310	89.61	–8.23	93.77	0	89.61	–8.23
d.	0.83	30.0	315	69.10	191.15	63.57	180	70.63	191.01
e.	4.49	12.5	255	56.02	211.93	29.01	180	61.36	204.87
f.	0.73	30.0	255	60.89	210.72	38.46	180	60.89	210.72
g.	–5.98	120.0	0	211.46	61.31	166.14	0	208.60	53.19

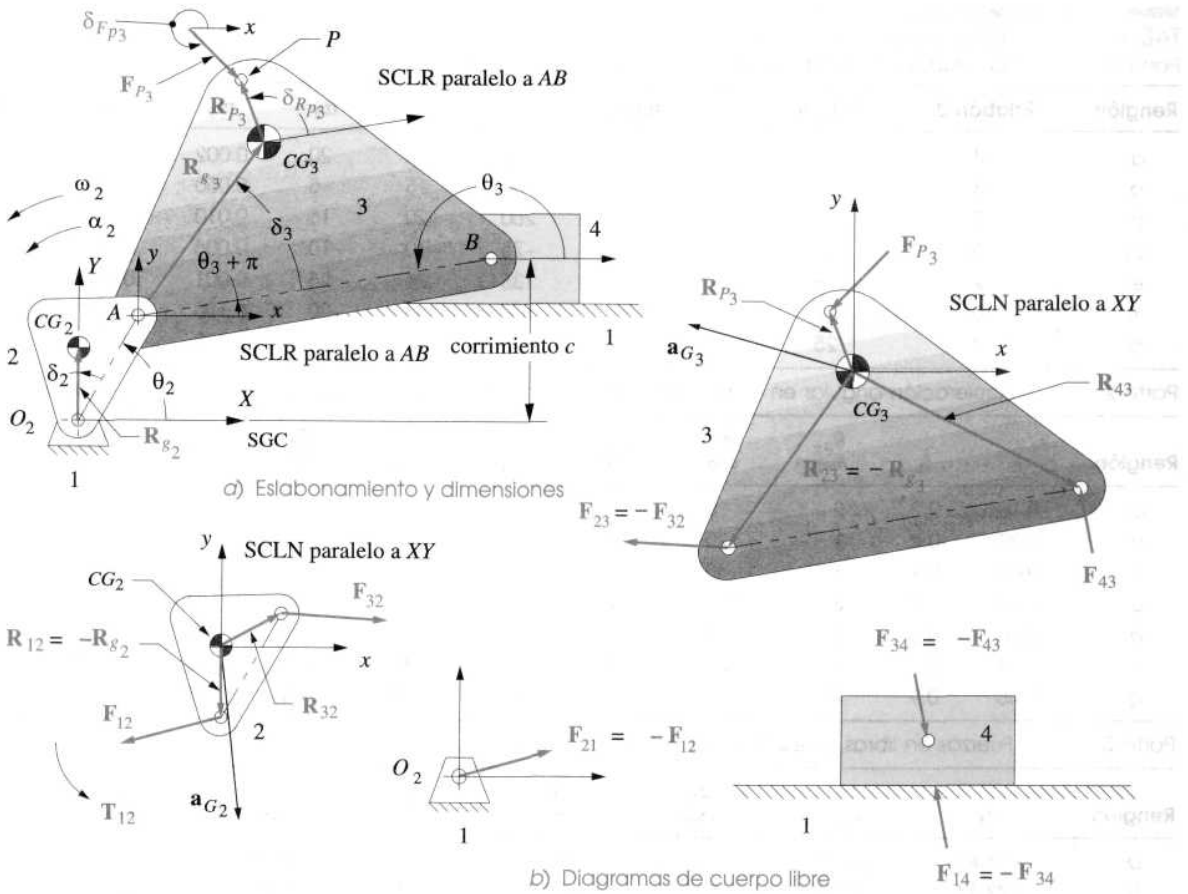


FIGURA PII-1

Geometría del eslabonamiento y diagramas de cuerpo libre para el problema 11-3

* Las respuestas están en el apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para resolverse mediante los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad*, *Matlab* o *TKSolver*.

‡ Estos problemas son adecuados para resolverse mediante el programa FOURBAR que está en el CD-ROM que acompaña el texto.

espesor. En la posición instantánea mostrada la manivela O_2A tiene $\omega = 15$ rad/s y $\alpha = -10$ rad/s². Hay una fuerza horizontal en P de $F = 200$ N. Encuentre todas las fuerzas de pasador y los pares de torsión necesarios para impulsar la manivela en este instante.

‡11-11 En la figura Pl \-*5á)* se muestra un eslabonamiento de cuatro barras y sus dimensiones en metros. La manivela de acero, el acoplador y el balancín tienen secciones transversales uniformes de 50 mm de ancho por 25 mm de espesor. En la posición instantánea mostrada la manivela O_2A tiene $\omega = 15$ rad/s y $\alpha = -10$ rad/s². Hay una fuerza vertical en P de $F = 500$ N. Encuentre todas las fuerzas de pasador y el par de torsión necesario para impulsar la manivela en ese instante.

*†‡11-12 La figura Pl l-5¿>) muestra un eslabonamiento de cuatro barras y sus dimensiones en metros. La manivela de acero, el acoplador y el balancín tienen secciones transversales

TABLA PI 1 -3 Datos para los problemas 11 -5 y 11-7

Parte 1 Longitudes en pulgadas, ángulos en grados, aceleración angular en rad/s²

Renglón	Eslabón 2	Eslabón 3	Eslabón 4	Eslabón 1	θ_2	θ_3	θ_4	α_2	α_3	α_4
a.	4	12	8	15	45	24.97	99.30	20	75.29	244.43
b.	3	10	12	6	30	90.15	106.60	–5	140.96	161.75
c.	5	15	14	2	260	128.70	151.03	15	78.78	53.37
d.	6	19	16	10	–75	91.82	124.44	–10	–214.84	–251.82
e.	2	8	7	9	135	34.02	122.71	25	71.54	–14.19
f.	17	35	23	4	120	348.08	19.01	–20	–101.63	–150.86
g.	7	25	10	19	100	4.42	61.90	–15	–17.38	–168.99

Parte 2 Velocidad angular en rad/s, masa de blobs, momentos de inercia en blobs-pulg², par de torsión en lb-pulg

Renglón	ω_2	ω_3	ω_4	m_2	m_3	m_4	I_2	I_3	I_4	T_3	T_4
a.	20	–5.62	3.56	0.002	0.02	0.10	0.10	0.20	0.50	–15	25
b.	10	–10.31	–7.66	0.050	0.10	0.20	0.20	0.40	0.40	12	0
c.	20	16.60	14.13	0.010	0.02	0.05	0.05	0.10	0.13	–10	20
d.	20	3.90	–3.17	0.006	0.15	0.07	0.12	0.30	0.15	0	30
e.	20	1.06	5.61	0.001	0.04	0.09	0.30	0.80	0.30	25	40
f.	20	18.55	21.40	0.150	0.30	0.25	0.24	0.60	0.92	0	–25
g.	20	4.10	16.53	0.080	0.20	0.12	0.45	0.90	0.54	0	0

Parte 3 Longitudes en pulgadas, ángulos en grados, aceleraciones lineales en pulg/s²

Renglón	R_{g_2} mag	R_{g_2} ang	R_{g_3} mag	R_{g_3} ang	R_{g_4} mag	R_{g_4} ang	a_{g_2} mag	a_{g_2} ang	a_{g_3} mag	a_{g_3} ang
a.	2	0	5	0	4	30	801.00	222.14	1 691.49	208.24
b.	1	20	4	–30	6	40	100.12	232.86	985.27	194.75
c.	3	–40	9	50	7	0	1 200.84	37.85	3 120.71	22.45
d.	3	120	12	60	6	–30	1 200.87	226.43	4 543.06	81.15
e.	0.5	30	3	75	2	–40	200.39	341.42	749.97	295.98
f.	6	45	15	135	10	25	2 403.00	347.86	12 064.20	310.22
g.	4	–45	10	225	4	45	1 601.12	237.15	2 562.10	–77.22

Parte 4 Aceleraciones lineales en pulg/s², fuerzas en lb, longitudes en pulg, ángulos en grados

Renglón	a_{g_4} mag	a_{g_4} ang	F_{P_3} mag	δF_{P_3} ang	R_{P_3} mag	δR_{P_3} ang	F_{P_4} mag	δF_{P_4} ang	R_{P_4} mag	δR_{P_4} ang
a.	979.02	222.27	0	0	0	0	40	–30	8	0
b.	1 032.32	256.52	4	30	10	45	15	–55	12	0
c.	1 446.58	316.06	0	0	0	0	75	45	14	0
d.	1 510.34	2.15	2	45	15	180	20	270	16	0
e.	69.07	286.97	9	0	6	–60	16	60	7	0
f.	4 820.72	242.25	0	0	0	0	23	0	23	0
g.	1 284.55	–41.35	12	–60	9	120	32	20	10	0

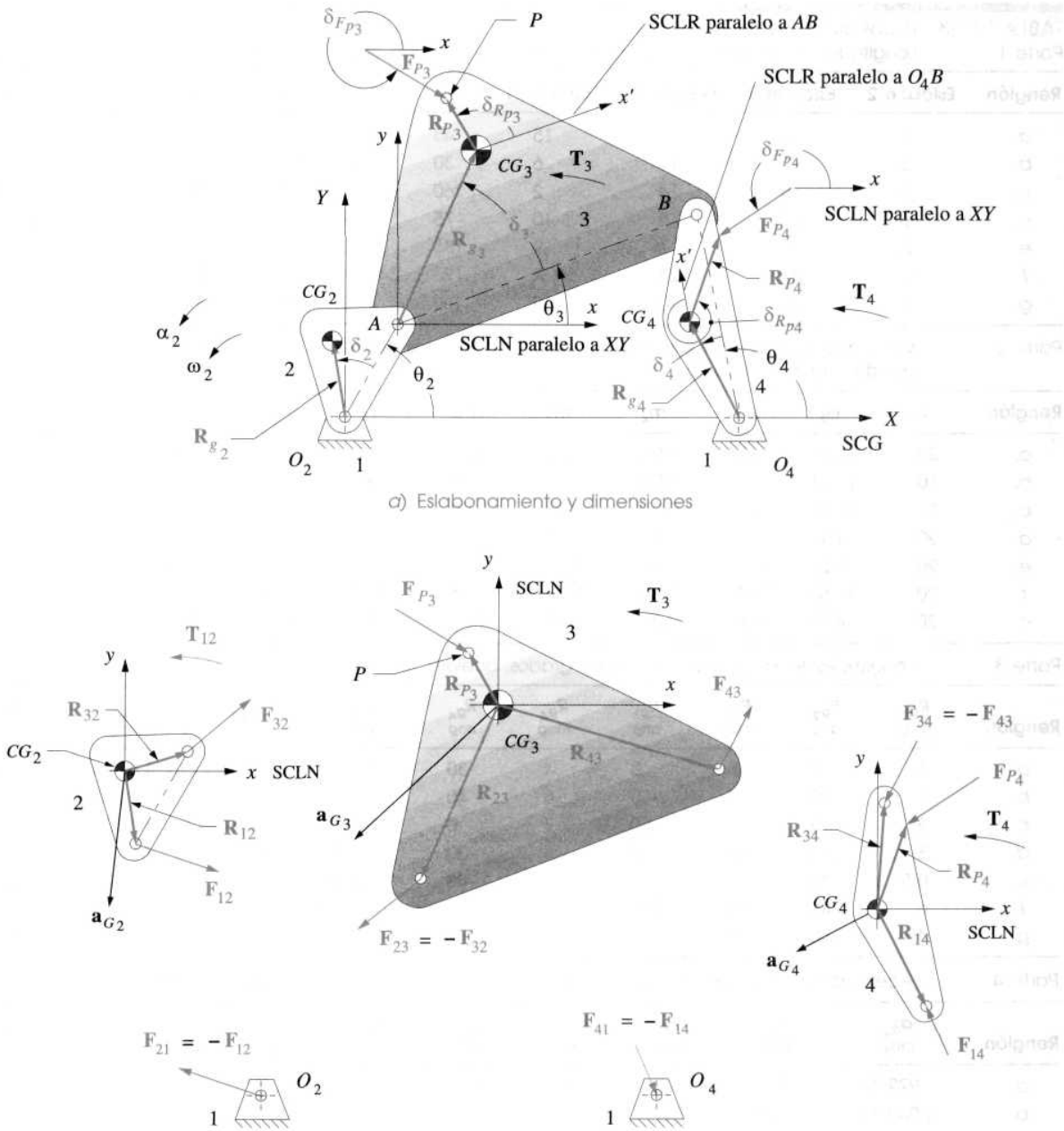


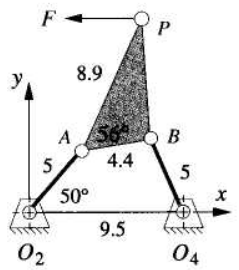
FIGURA P11-2

Geometría del eslabonamiento y diagramas de cuerpo libre para el problema 11-5

TABLA Pl 1-4 Datos para el problema 11-6

Renglón	$V_{g_2}mag$	$V_{g_2}ang$	$V_{g_3}mag$	$V_{g_3}ang$	$V_{g_4}mag$	$V_{g_4}ang$	$V_{P_3}mag$	$V_{P_3}ang$	$V_{P_4}mag$	$V_{P_4}ang$
a.	120.00	135.00	54.44	145.19	82.63	144.86	80.00	135.00	28.45	189.30
b.	39.55	124.96	21.46	14.74	65.15	80.91	51.05	66.14	91.89	16.60
c.	150.97	335.20	191.94	299.70	115.55	295.95	100.00	350.00	197.81	241.03
d.	103.92	45.00	94.36	353.80	138.76	13.56	113.45	12.92	50.76	34.44
e.	48.92	230.87	42.89	223.13	47.70	214.27	39.32	211.16	39.28	212.71
f.	433.24	221.29	618.05	211.39	443.42	182.08	340.00	210.00	492.15	109.01
g.	204.55	138.95	84.04	173.73	240.34	158.01	109.05	120.58	252.00	117.19

uniformes de 50 mm de diámetro. En la posición instantánea mostrada la manivela O_2A tiene $\omega = -10$ rad/s y $\alpha = 10$ rad/s². Hay una fuerza horizontal en P de $F = 300$ N. Encuentre todas las fuerzas de pasador y los pares de torsión necesarios para impulsar la manivela en este instante.



Dimensiones en pulgadas

FIGURA Pll-3
Problema 11-8

*†‡11-13 En la figura Pl 1-6 se muestra el mecanismo impulsor de una tejedora con chorro de agua y barra de enlace accionada por un par de eslabonamientos de cuatro barras de Grashof con manivela y balancín. La manivela gira a 500 rpm. La barra de enlace se soporta entre las juntas del acoplador-balancín de los dos eslabonamientos en sus respectivos centros instantáneos $I_{3,4}$. El peso combinado de la lengüeta y de la barra de enlace es de 29 Ib. Una fuerza de 540 Ib, resultante de la tela, se aplica a la lengüeta como se muestra. Los eslabones de acero tienen una sección transversal uniforme de 2 x 1 pulgadas. Encuentre las fuerzas sobre los pasadores para una revolución de la manivela. Encuentre la función par de torsión-tiempo requerida para impulsar el sistema.

†11-14 En la figura Pll-7 se muestra una herramienta de presión. Encuentre la fuerza F_{mano} necesaria para generar una fuerza $F_{presión}$ de 2000 Ib. Encuentre las fuerzas del pasador. ¿Cuál es el índice de transmisión (IFJ) de la fuerza en la junta del eslabonamiento en esta posición?

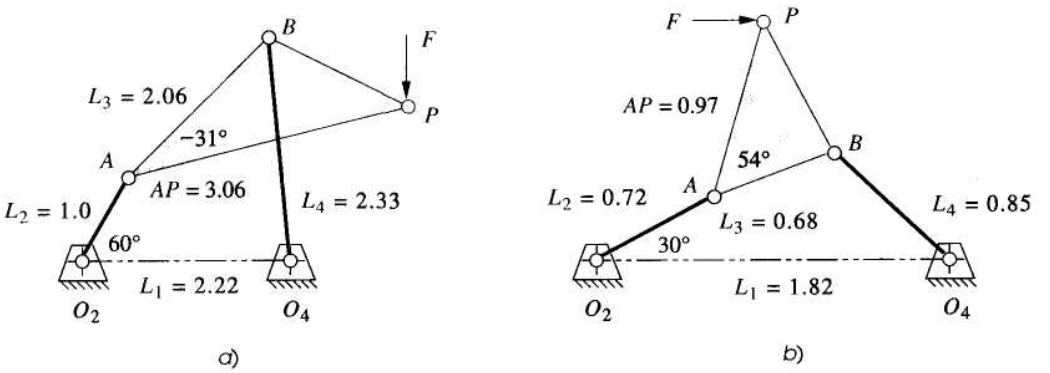


FIGURA P11-4
Problemas 11-9 y 11-10

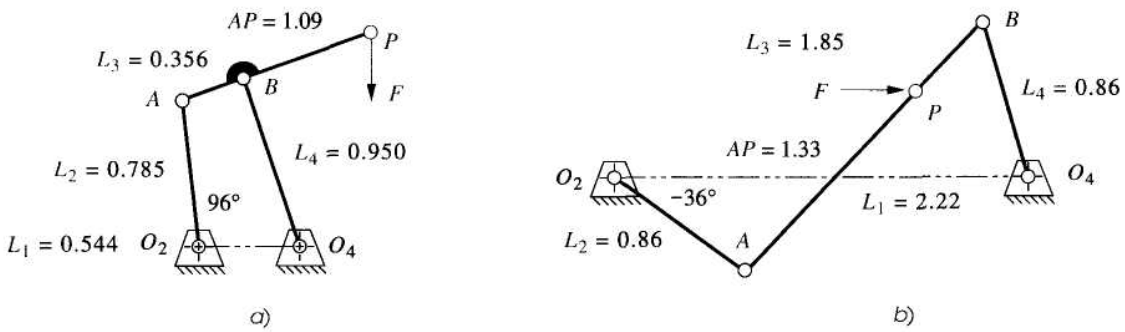


FIGURA Pl 1-5
Problemas 11-11 y 11-12

†§11-15 En la figura Pll-8 se muestra un mecanismo transportador de viga viajera que opera a baja velocidad (25 rpm). Las cajas que se empujan pesan 50 Ib cada una. Determine las fuerzas de pasador en el eslabonamiento y el par de torsión requerido para impulsar el mecanismo en una revolución. Desprecie las masas de los eslabones.

†§11-16 En la figura Pll-9 se muestra una plataforma rectificadora móvil que opera a 120 rpm. El radio de la manivela es de 22 mm, el del acoplador 157 mm y su desplazamiento es de 40 mm. La masa combinada de la plataforma y de la pieza de trabajo es de 50 kg. Encuentre las fuerzas de pasador, las cargas deslizantes laterales y el par de torsión impulsor en una revolución.

†§11-17 En la figura Pl 1-10 se muestra una sierra de potencia que opera a 50 rpm. La manivela es de 75 mm, el acoplador de 170 mm y su desplazamiento es de 45 mm. Encuentre las fuerzas de pasador, las cargas deslizantes laterales y el par de torsión impulsor en una revolución para una fuerza cortante de 250 N hacia adelante y de 50 N durante el regreso de la carrera.

†§11-18 En la figura Pl 1-11 se muestra una estación de descarga de rollos de papel. Los rollos de papel tienen un DE (diámetro exterior) de 0.9 m, un DI (diámetro interior) de 0.22 m, un ancho de 3.23 m y su densidad es de 984 kg/m³. Las tenazas que soportan el rollo son de 1.2 m de largo. El movimiento es lento, así que se puede despreciar la carga inercial. Encuentre la fuerza requerida por el cilindro neumático para girar el rollo 90°.

†11-19 Obtenga una expresión para la relación entre la masa del volante y el parámetro sin dimensiones radio/espesor *(ríe)* para un volante de disco sólido de momento de inercia /. Trace esta función para un valor arbitrario de / y determine la razón *ríe* óptima que minimice el peso del volante para ese /.

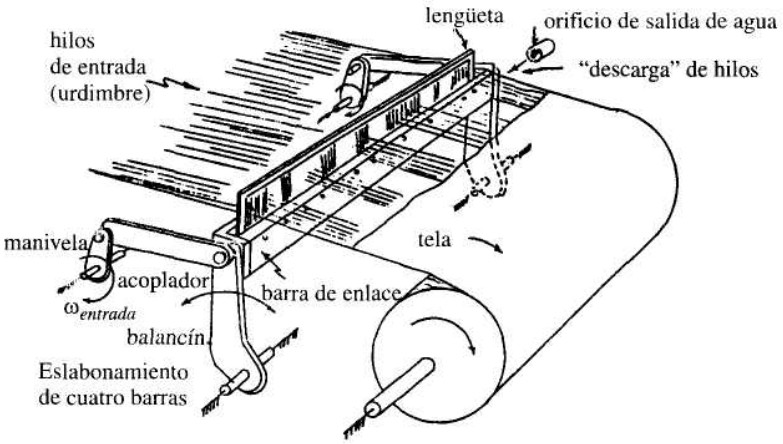
† Estos problemas son adecuados para resolverse mediante los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

§ Estos problemas son adecuados para resolverse mediante el programa *Working Model* que está en el CD-ROM que acompaña el texto.

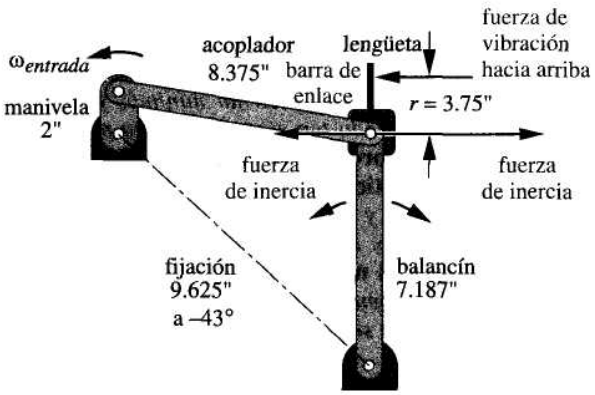
11.16 PROYECTOS

El siguiente enunciado se aplica a todos los proyectos que se enlistan.

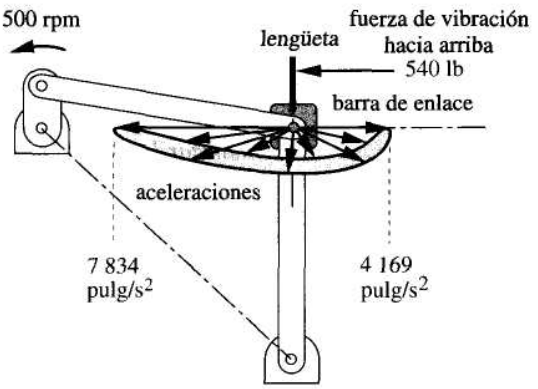
A *estos enunciados de proyecto de gran escala les falta deliberadamente el detalle, la estructura y están definidos de manera vaga. Así, éstos son similares a la clase de "iden-*



a) Urdimbre, tejido, barra de enlace, lengüeta y barra de enlace Impulsora para un telar de chorro de agua



b) Eslabonamiento, barra de enlace, lengüeta y dimensiones



c) Aceleración sobre la barra de enlace y fuerza sobre la lengüeta

FIGURA PII-6

Eslabonamiento de cuatro barras para una barra de enlace Impulsora, se muestran las fuerzas y las aceleraciones sobre la barra de enlace

tificación de necesidades " o enunciado de problemas que normalmente se encuentran en la práctica de la ingeniería. Se deja al estudiante estructurar el problema por medio de una ***investigación a fondo*** *y crear un* ***objetivo de meta clara*** *y hacer las* ***especificaciones del desarrollo*** *antes de intentar diseñar una solución. Este proceso de diseño se bosqueja en el capítulo 1 y debe seguirse en todos estos ejemplos. Todos los resultados deben documentarse en un reporte de ingeniería profesional. Véase la bibliografía del capítulo 1 para las referencias sobre la elaboración del reporte.*

Algunos de estos problemas de proyecto están basados en los proyectos de diseño de cinemática del capítulo 3. Estos dispositivos cinemáticos pueden diseñarse ahora más

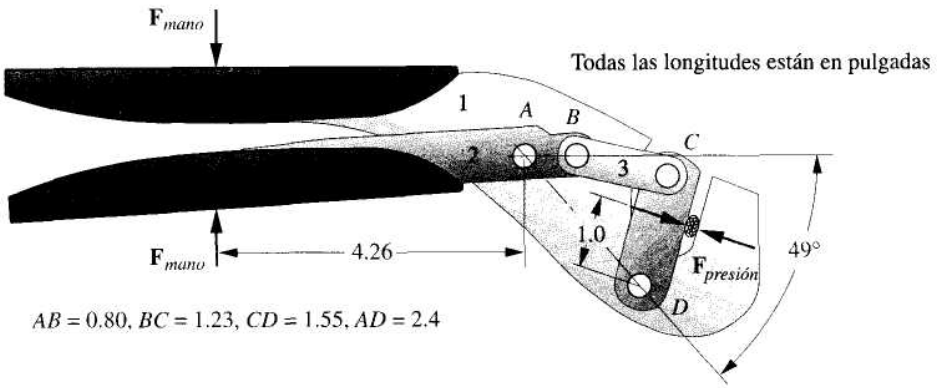
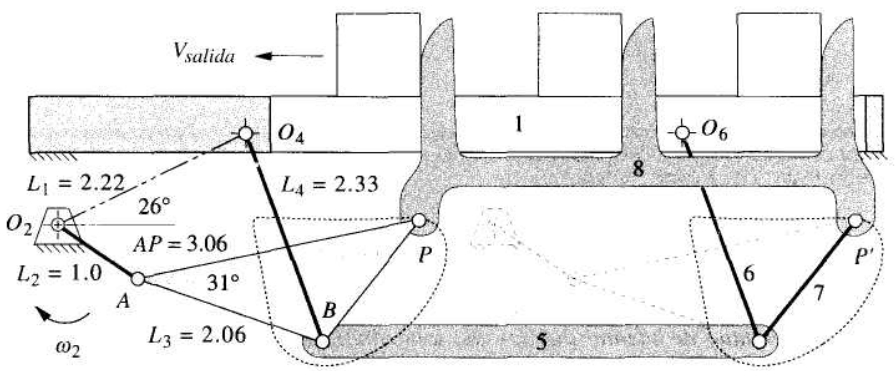


FIGURA PI 1-7
Problema 11-14

realmente considerando las fuerzas dinámicas que se generan. La estrategia en la mayoría de los problemas de proyecto siguientes es conservar las fuerzas de pasador dinámicas y de esta manera tener las fuerzas de sacudimiento en un mínimo, y conservar también la curva de par de torsión-tiempo de entrada tan suave como sea posible para minimizar la necesidad de potencia. **Todos estos problemas pueden resolverse con un eslabonamiento de cuatro barras de pasador articulado.** *Este hecho le permitirá usar el programa* FOURBAR *para hacer la cinemática y los cálculos dinámicos de un gran número y variedad de diseños en un tiempo corto. Hay infinidad de soluciones viables para estos problemas.* **¡Repita para encontrar el mejor!** *En todos los eslabones debe diseñarse detalladamente su geometría (masa, momento de inercia, etcétera). Un resolvedor de ecuaciones como el* Mathcad *o* TKSolver *será útil. Determine todas las fuerzas*



Todas las longuitudes están en pulgadas

FIGURA PI 1-8
Problema 11-15

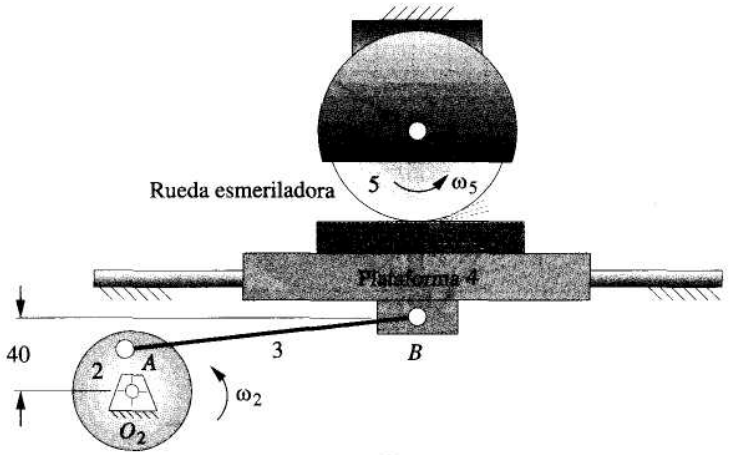


FIGURA PII-9

Problema 11-16

de pasador, la fuerza de sacudimiento, el par de torsión de sacudimiento y la potencia de entrada requerida para sus diseños.

P11-1 El proyecto P3-1 establece que:

Un entrenador de tenis necesita una mejor máquina para lanzar pelotas. Este dispositivo debe disparar una sucesión de pelotas desde un extremo de una cancha hacia la red, de tal forma que éstas caigan dentro de cada una de las tres áreas definidas por las líneas blancas. El orden y la frecuencia en que las pelotas caen en cualquiera de las tres áreas de la cancha debe ser aleatorio. El dispositivo debe operar automáticamente

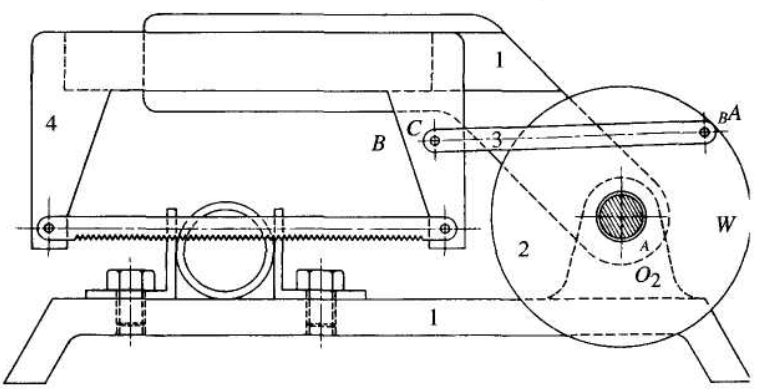


FIGURA PI 1-10

Problema 11-17. *Tomado del libro de Hill, R H . y Rule, W. R(1960). Mechanisms: Analysis and Design,* con autorización.

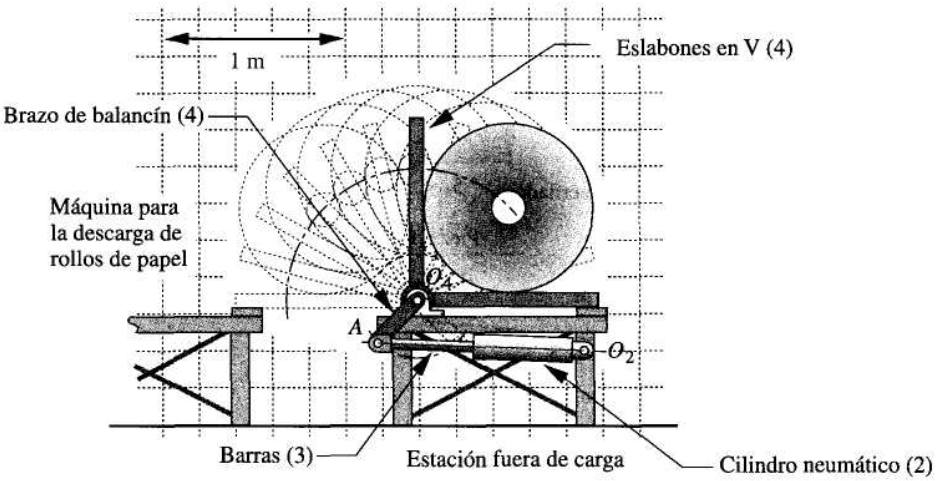


FIGURA PII-11
Problema 11-18

y no será atendido salvo cuando se reabastezca de pelotas. Debe ser capaz de lanzar 50 pelotas entre las recargas. El tiempo de las descargas de las pelotas debe variar. Por simplicidad, se prefiere un motor impulsado con un diseño de eslabonamiento de pasador articulado.

En este proyecto se le pide que diseñe este dispositivo para ser montado sobre un tripié de 5 pies de altura. Diséñelo y establezca la posición para la estabilidad del tripié debido a las fuerzas de sacudimiento y los pares de torsión de sacudimiento que también deben minimizarse en el diseño de su eslabonamiento. Minimice el par de torsión de entrada requerido.

Pl 1-2 El proyecto P3-9 establece que:

La fundación "Salve al pichón" le ha pedido un diseño de un lanzador de pichones para el tiro al blanco lo más humanitario posible. Aunque no ha tenido éxito en la legislación para evitar la gran matanza de animales pequeños, le preocupan los aspectos inhumanos de las grandes aceleraciones que deben sufrir estas aves al ser impulsadas hacia el cielo para que un deportista les dispare. Se necesita un lanzador de pichones que acelere fácilmente las palomas de arcilla hacia la trayectoria deseada.

Diseñe un lanzador de pichones que será montado en el "pequeño carro rojo" de un niño. Controle sus parámetros de diseño para minimizar las fuerzas de sacudimiento y los pares de torsión a fin de que el carro permanezca prácticamente estacionario durante el lanzamiento de las palomas de arcilla.

Pl 1-3 El proyecto P3-10 establece que:

Las máquinas "cuidadoras de niños" se encuentran normalmente afuera de los supermercados y proporcionan un movimiento con muy poca imaginación de balanceo al ocupante. Se desea una máquina "cuidadora" que proporcione movimientos más interesantes y que sea segura para niños pequeños.

Diseñe este dispositivo para colocarlo en la plataforma de una camioneta. Conserve las fuerzas de sacudimiento al mínimo y la curva de par de torsión-tiempo de entrada tan suave como sea posible.

P11-4 El proyecto P3-15 establece que:

La NASA quiere una máquina de cero *G* para entrenamiento de astronautas. Debe soportar una persona y proporcionarle una aceleración negativa de 1 *g* tanto como sea posible.

Diseñe este dispositivo y su armazón para que en el plano de fijación minimice las fuerzas dinámicas y los pares de torsión impulsores.

P11-5 El proyecto P3-16 establece que:

La compañía de Máquinas de Entretenimiento Inc., necesita un "Látigo" portátil que proporcione emoción a dos o cuatro pasajeros, pero que sea seguro y que pueda remolcarse con una camioneta de un lugar a otro.

Diseñe este dispositivo y su armazón de montaje a la plataforma de la camioneta de manera que minimice las fuerzas dinámicas y el par de torsión impulsor.

P11-6 El proyecto P3-17 establece que:

La fuerza aérea le ha pedido un simulador de entrenamiento de pilotos que exponga a los futuros pilotos a fuerzas *G* similares a las que experimentarán en maniobras de combate aéreo.

Diseñe este dispositivo y su armazón de montaje al plano de fijación de manera que minimice las fuerzas dinámicas y los pares de torsión impulsores.

P11-7 El proyecto P3-18 establece que:

Cheers necesita un mejor simulador de "toro mecánico" que el de su bar "yuppie" de Boston. Debe proporcionar emoción del tipo "de oposición al bronco" pero debe ser seguro.

Diseñe este dispositivo y su armazón de montaje al plano de fijación de manera que minimice las fuerzas dinámicas y los pares de torsión impulsores.

P11-8 La compañía Motores Gigantescos Inc., está diseñando un nuevo vehículo ligero de transporte militar. El mecanismo de eslabonamiento actual del limpiador del parabrisas desarrolla fuerzas de sacudimiento tan altas que cuando se opera a máxima velocidad ¡los mecanismos se caen! Diseñe un mejor mecanismo limpiador de parabrisas para barrer con la hoja del limpiador de 20 Ib un arco de 90° mientras minimiza los pares de torsión de entrada y las fuerzas de sacudimiento. La carga del viento en la hoja, perpendicular al parabrisas, es de 50 Ib. El coeficiente de fricción entre la hoja del limpiador y el vidrio es de 0.9.

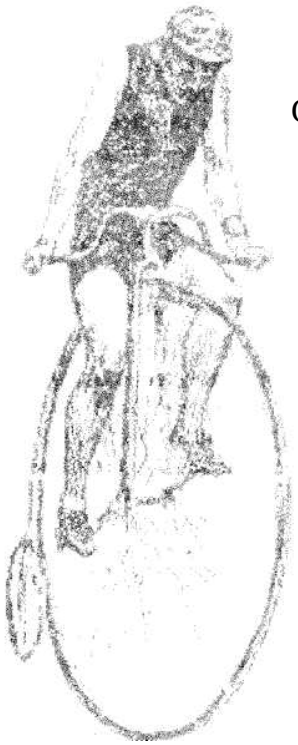
P11-9 El más reciente helicóptero lanzamisiles del ejército se equipará con el arma Gatling que dispara proyectiles de uranio de 50 mm de diámetro y de 2 cm de longitud a una velocidad de 10 piezas por segundo. La fuerza de reacción (retroceso) puede perturbar la estabilidad del helicóptero. Se necesita un mecanismo que se coloque en el chasis del helicóptero y que proporcione una fuerza de sacudimiento síncrona a 180°, fuera de fase, con los pulsos de fuerza de retroceso para neutralizar el retroceso del arma. Diseñe este eslabonamiento y minimice su par de torsión y potencia consumida del motor del helicóptero. El peso total de su dispositivo también debe minimizarse.

Pl 1-10 Los pilotes de acero se usan umversalmente como cimientos de grandes edificios. A menudo éstos se introducen en el suelo con golpes de martillo de un "impulsor de pilote". En ciertos suelos (de tipo arenoso y con barro) los pilotes pueden ser "sacudidos" en el suelo al acoplarle un "impulsor vibratorio" que les proporciona una fuerza dinámica de sacudimiento vertical o cercana a la frecuencia natural del sistema de tierra-pilote. El pilote puede literalmente "caer en el suelo" en condiciones óptimas. Diseñe un eslabonamiento de cuatro barras basado en el mecanismo de sacudimiento de un pilote, el cual, cuando su eslabón de fijación esté firmemente unido a la parte superior de un pilote (soportado de un gancho de grúa), le proporcionará una fuerza dinámica de sacudimiento que se dirige predominantemente a lo largo de la longitud del pilote del eje vertical. La velocidad de operación deberá ser cercana a la frecuencia natural del sistema pilote-tierra.

Pl 1-11 Los mecanismos de vibración para pintar son comunes en los almacenes de pintura y ferreterías. Por una parte hacen un buen trabajo al mezclar la pintura, pero son ruidosos y transmiten vibraciones a los estantes y mostradores. Un mejor diseño para pintar con vibración puede ser posible usando un eslabonamiento de cuatro barras equilibrado. Diseñe un dispositivo portátil para colocarse en el suelo (no sujeto al piso) y que minimice las fuerzas de sacudimiento y las vibraciones mientras aún mezcla eficazmente la pintura.

Pl 1 -12 Los automóviles convertibles son cada vez más populares. Por un lado ofrecen el placer del automovilismo al aire libre, sin embargo, brindan muy poca protección a los ocupantes en caso de un accidente. Las barras de protección fijas son feas y disminuyen la sensación de un verdadero convertible. Es necesario un mecanismo automático plegable para las barras de protección que no interfiera con la visión hasta que se necesite. En el momento en que los sensores del vehículo detectan una volcadura inminente, el mecanismo se debe desplegar en 250 ms. Diseñe un mecanismo desplegable/plegable de la barra de protección que modifique el convertible de su elección.

Capítulo 12



EQUILIBRIO

La moderación es lo mejor
y evitar todos los extremos.
PLUTARCO

12.0 INTRODUCCIÓN

Cualquier eslabón o elemento que esté en rotación pura puede, en teoría, equilibrarse perfectamente para eliminar todas las fuerzas y momentos de sacudimiento. Es una práctica de diseño aceptada para equilibrar todos los elementos rotatorios en una máquina, a menos que lo que se desee sean fuerzas de sacudimiento (por ejemplo, en un mecanismo de sacudimiento vibratorio). Un elemento rotatorio puede equilibrarse estática o dinámicamente. El equilibrio estático es una variante del equilibrio dinámico. Para alcanzar un equilibrio completo se requiere establecer el equilibrio dinámico. En algunos casos el equilibrio estático puede ser un sustituto aceptable para el equilibrio dinámico y generalmente es más fácil de alcanzar.

Las partes rotatorias se pueden, y por lo general se deben, diseñar para equilibrarse inherentemente mediante su geometría. Sin embargo, las variaciones en las tolerancias de producción garantizan que aún habrá algún pequeño desequilibrio en cada parte. Es por eso que a cada parte se le debe aplicar un procedimiento de equilibrio después de su fabricación. La magnitud y localización de cualquier desequilibrio pueden determinarse con mucha precisión y compensarse agregando o eliminando material en los lugares correctos.

En este capítulo se investigará matemáticamente la determinación y diseño de un estado de equilibrio estático y dinámico en elementos rotatorios, y también en mecanismos que tengan movimiento complejo como el eslabonamiento de cuatro barras. También se analizarán los métodos y el equipo empleado para medir y corregir el desequilibrio en ensambles manufacturados. Cuando se analiza el desequilibrio rotacional es muy conveniente emplear el método de d'Alembert (véase la sección 10.12) en la aplicación de fuerzas de inercia a los elementos rotatorios, como se hará a continuación.

12.1 EQUILIBRIO ESTÁTICO

A pesar de su nombre el **equilibrio estático** *se* aplica también a objetos en movimiento. Las fuerzas desequilibradas de interés se deben a aceleraciones de las masas en el sistema. El requisito para el **equilibrio estático** es simplemente que *la suma de todas las fuerzas en el sistema móvil (incluyendo las fuerzas de inercia de d'Alembert) deben ser iguales a cero.*

$$\sum \mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0 \tag{12.1}$$

Desde luego, esto es sólo un replanteamiento de la ley de Newton como se analizó en la sección 10.1.

Otro nombre para el equilibrio estático es **equilibrio en un plano,** lo que significa que *las masas que generan las fuerzas de inercia están en, o casi en, el mismo plano.* Éste es esencialmente un problema bidimensional. Algunos ejemplos de dispositivos comunes que cumplen este criterio y, por lo tanto, pueden equilibrarse estáticamente con éxito son: un engrane simple o una polea en un eje, la llanta y el rin de una bicicleta o motocicleta, un volante delgado, una hélice de avión, un alabe de una turbina (pero no de la turbina completa). El común denominador de todos estos dispositivos es que son pequeños en la dirección axial, en comparación con la dirección radial, y, por lo tanto, se consideran como cuerpos en un solo plano. La llanta y el rin de un automóvil satisfacen sólo en forma marginal el equilibrio estático, ya que es notoriamente gruesa en la dirección axial en comparación con su diámetro. A pesar de este hecho las llantas de los automóviles se consideran a veces en equilibrio estático. Más a menudo están dinámicamente equilibradas y se analizarán en ese tema.

En la figura 12-la) se muestra un eslabón en forma de V, el cual es parte de un eslabonamiento. Se desea equilibrarlo estáticamente. Este eslabón se puede modelar en forma dinámica como dos masas puntuales m, y m_2 concentradas en el *CG* local de cada "pierna" del eslabón como se muestra en la figura 12-1¿>). Cada una de estas masas puntuales tiene una masa igual que la de la "pierna" que remplazan, y se sostienen por varillas sin masa en la posición ($\mathbf{R}_1$ o $\mathbf{R}_2$) del *CG* de dicha pierna. Se puede determinar la magnitud y localizacion necesarias de una tercera masa de equilibrio " m_b que se sumará al sistema en alguna ubicación $\mathbf{R}_b$ para satisfacer la ecuación 12.1.

Suponga que el sistema gira a cierta velocidad angular constante ω. Las aceleraciones de las masas serán entonces estrictamente centrípetas (hacia el centro) y las fuerzas de inercia serán centrífugas (hacia afuera del centro), como se muestra en la figura 12-1. Como el sistema gira, la figura muestra una imagen de "cuadro congelado" de él. La posición en la que se "detuvo la acción" con el propósito de dibujar la imagen y realizar cálculos es arbitraria e irrelevante para el cálculo. Se establecerá un sistema coordenado con su origen en el centro de rotación y se descompondrán las fuerzas inerciales en las componentes de ese sistema. Al escribir la ecuación vectorial 12.1 para este sistema se obtiene:

$$-m_1\mathbf{R}_1\omega^2 - m_2\mathbf{R}_2\omega^2 - m_b\mathbf{R}_b\omega^2 = 0 \tag{12.2a}$$

Observe que las únicas fuerzas que actúan sobre este sistema son las fuerzas de inercia. Para el equilibrio no importa qué fuerzas externas actúen sobre el sistema. Tales fuerzas no pueden equilibrarse realizando algunos cambios en la geometría interna del sistema. Advierta que los términos ω^2 se cancelan. Para el equilibrio tampoco importa

qué tan rápido esté girando el sistema, sólo que *esté* girando. *{La* co *determinará las magnitudes de estas fuerzas, pero de cualquier manera se hará que la suma sea igual a cero.)*

Al dividir entre ω^2 y reordenar términos:

$$m_b\mathbf{R}_b = -m_1\mathbf{R}_1 - m_2\mathbf{R}_2 \tag{12.2b}$$

Separando en las componentes *x y y:*

$$\begin{aligned} m_b R_{b_x} &= -\left(m_1 R_{1_x} + m_2 R_{2_x}\right) \\ m_b R_{b_y} &= -\left(m_1 R_{1_y} + m_2 R_{2_y}\right) \end{aligned} \tag{12.2c}$$

Se conocen los términos del lado derecho. Los productos mR_x y mR_y necesarios para equilibrar el sistema se pueden determinar fácilmente. Será conveniente convertir los resultados a coordenadas polares.

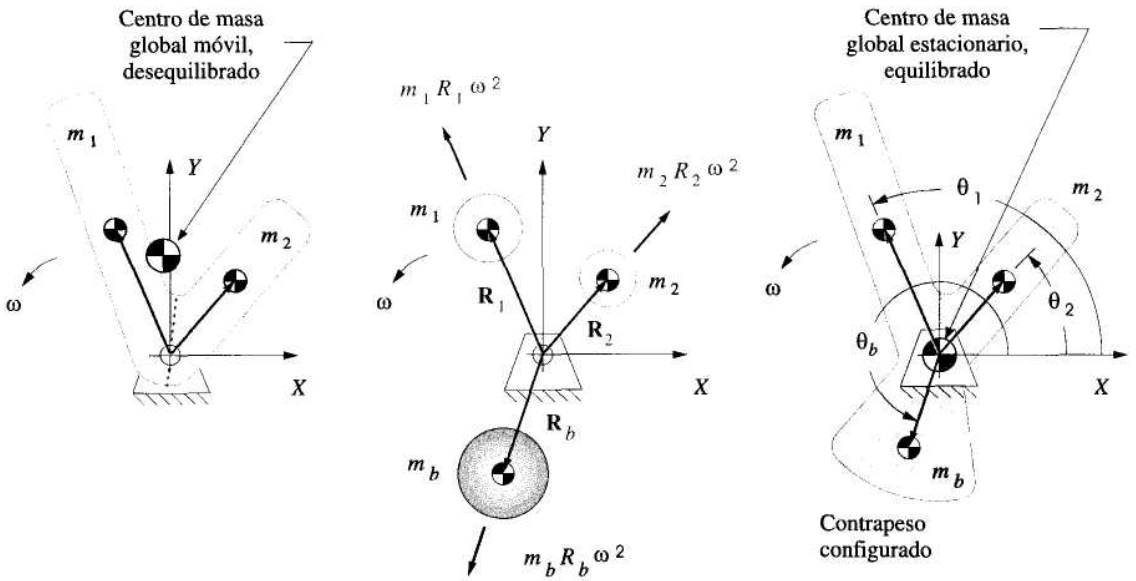
$$\begin{aligned} \theta_b &= \arctan\frac{m_b R_{b_y}}{m_b R_{b_x}} \\ &= \arctan\frac{-\left(m_1 R_{1_y} + m_2 R_{2_y}\right)}{-\left(m_1 R_{1_x} + m_2 R_{2_x}\right)} \end{aligned} \tag{12.2d}$$

$$R_b = \sqrt{\left(R_{b_x}{}^2 + R_{b_y}{}^2\right)}$$

$$\begin{aligned} m_b R_b &= m_b\sqrt{\left(R_{b_x}{}^2 + R_{b_y}{}^2\right)} \\ &= \sqrt{m_b{}^2\left(R_{b_x}{}^2 + R_{b_y}{}^2\right)} \\ &= \sqrt{m_b{}^2 R_{b_x}{}^2 + m_b{}^2 R_{b_y}{}^2} \\ &= \sqrt{\left(m_b R_{b_x}\right)^2 + \left(m_b R_{b_y}\right)^2} \end{aligned} \tag{12.2e}$$

El ángulo en el que se debe colocar la masa de equilibrio (con respecto al sistema coordenado de "cuadro congelado arbitrariamente orientado) es θ_b, determinado a partir de la ecuación 12.2d. Advierta que los signos del numerador y del denominador de la ecuación 12.2d deben mantenerse individualmente y se debe calcular una función arco-tangente de dos argumentos para obtener θ_b en el cuadrante correcto. La mayoría de las calculadoras y computadoras proporcionarán sólo un resultado del arcotangente entre $\pm 90°$.

El producto m_bR_b se determina a partir de la ecuación 12.2e. Ahora hay una infinidad de soluciones disponibles. Se puede seleccionar un valor para m_b y determinar el radio necesario R_b en el que debe colocarse, o elegir un radio deseado y determinar la masa que debe colocarse ahí. En algunos casos las restricciones del montaje pueden dictar el maxi-



a) Eslabón desequilibrado b) Eslabón dinámico c) Eslabón estáticamente equilibrado

FIGURA 12-1

Equilibrio estático de un eslabón en rotación pura

mo radio posible. La masa de equilibrio está confinada a un "plano sencillo" de las masas desequilibradas.

Una vez que se elige una combinación de m_b y R_b falta diseñar el contrapeso físico. El radio elegido R_b es la distancia del pivote al *CG* de cualquier forma que se cree para la masa de contrapeso. El modelo dinámico simple empleado para calcular el producto *mR* supone una masa puntual y una varilla sin masa. Estos dispositivos ideales no existen. En la figura 12-le) se muestra una posible forma para ese contrapeso. Su masa debe ser m_b, distribuida de tal manera que su *CG* se coloque en el radio R_b y a un ángulo θ_b.

12

EJEMPLO 12-1

Equilibrio estático

Datos: El sistema mostrado en la figura 12-1 tiene los siguientes datos:

$$m_1 = 1.2 \text{ kg} \qquad R_1 = 1.135 \text{ m} \ @ \ \angle 113.4°$$

$$m_2 = 1.8 \text{ kg} \qquad R_2 = 0.822 \text{ m} \ @ \ \angle 48.8°$$

$$\omega = 40 \text{ rad/s}$$

Halle: El producto masa-radio y su localización angular necesaria para equilibrar estáticamente el sistema.

Solución:

1 Descomponga los vectores de posición en las componentes *xy* en el sistema coordenado arbitrario asociado con la posición de cuadro congelado del eslabonamiento elegido para el análisis.

$$\begin{aligned} R_1 &= 1.135 \ @ \ \angle 113.4°; & R_{1_x} &= -0.451, & R_{1_y} &= 1.042 \\ R_2 &= 0.822 \ @ \ \angle 48.8°; & R_{2_x} &= +0.541, & R_{2_y} &= 0.618 \end{aligned} \tag{a}$$

2 Resuelva las ecuaciones 12.2c.

$$\begin{aligned} m_b R_{b_x} &= -m_1 R_{1_x} - m_2 R_{2_x} = -(1.2)(-0.451) - (1.8)(0.541) = -0.433 \\ m_b R_{b_y} &= -m_1 R_{1_y} - m_2 R_{2_y} = -(1.2)(1.042) - (1.8)(0.618) = -2.363 \end{aligned} \tag{b}$$

3 Resuelva las ecuaciones 12.2d y 12.2e.

$$\theta_b = \arctan\frac{-2.363}{-0.433} = 259.6° \tag{c}$$

$$m_b R_b = \sqrt{(-0.433)^2 + (-2.363)^2} = 2.402 \text{ kg-m}$$

4 Este producto masa-radio de 2.402 kg-m puede obtenerse con una variedad de formas añadidas al conjunto. En la figura 12-1*c*) se muestra una forma particular cuyo *CG* se encuentra a un radio de $R_b = 0.806$ m a un ángulo requerido de 259.6°. La masa requerida para este diseño de contrapeso es entonces:

$$m_b = \frac{2.402 \text{ kg-m}}{0.806 \text{ m}} = 2.980 \text{ kg} \tag{d}$$

a un radio desde *CG* elegido de:

$$R_b = 0.806 \text{ m} \tag{e}$$

Muchas otras formas son posibles. Mientras proporcionen el producto masa-radio requerido en el ángulo necesario el sistema estará estáticamente equilibrado. Advierta que no se necesitó el valor de ω en el cálculo.

12.2 EQUILIBRIO DINÁMICO

El equilibrio dinámico a veces se denomina **equilibrio en dos planos.** Éste requiere que se cumplan dos criterios. La suma de las fuerzas debe ser cero (equilibrio estático) más la suma de los momentos* que también debe ser cero.

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{F} &= 0 \\ \sum \mathbf{M} &= 0 \end{aligned} \tag{12.3}$$

* En este texto se utilizará el término *momento* para referirse a los "pares de rotación" cuyos vectores son perpendiculares a un eje de rotación o "eje largo" de un ensamblaje, y el término *par de torsión* para referirse a los "pares de rotación" cuyos vectores son paralelos a un eje de rotación.

Estos momentos actúan en planos que incluyen el eje de rotación del conjunto como los planos *XZ* y *YZ* en la figura 12-2. La dirección del vector momento, o su eje, es perpendicular al eje de rotación del ensamble.

Cualquier objeto o ensamble rotatorio que sea relativamente grande en la dirección axial, en comparación con la dirección radial, requiere de equilibrio dinámico para un balance completo. Es posible que un cuerpo se halle estática pero no dinámicamente en equilibrio. Considere el ensamble en la figura 12-2. Dos masas iguales se encuentran en radios idénticos, alejadas rotacionalmente a 180°, pero separadas a lo largo de la longitud del eje. La suma de las fuerzas -ma debida a su rotación será siempre cero. No obstante, en la vista lateral sus fuerzas de inercia forman un par que gira con las masas alrededor del eje. Este par oscilante genera un momento sobre el plano de fijación, que levanta y baja alternativamente los extremos izquierdo y derecho del eje.

Algunos ejemplos de dispositivos que requieren equilibrio dinámico son: rodillos, cigüeñales, árboles de levas, ejes, grupos de engranes múltiples, rotores de motor, turbinas, ejes propulsores. El denominador común de estos dispositivos es que su masa puede estar distribuida en forma desigual rotacionalmente alrededor de su eje y también longitudinalmente a lo largo del mismo.

Para corregir el desequilibrio dinámico se requiere agregar o eliminar la cantidad correcta de masa en las localizaciones angulares apropiadas *en dos planos de corrección* separados a cierta distancia a lo largo del eje. Esto generará las fuerzas contrarias requeridas para equilibrar estáticamente el sistema, y también proporcionará un par contrario

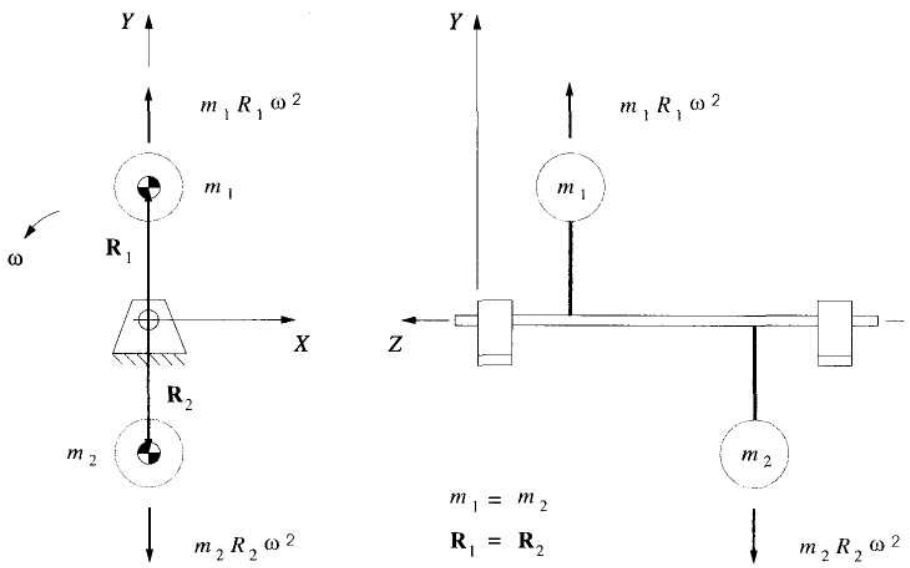


FIGURA 12-2

Fuerzas equilibradas, momento desequilibrado

para cancelar el momento desequilibrado. Cuando el rin y la llanta de un automóvil se encuentran en equilibrio dinámico los dos planos de corrección son los bordes interno y externo del rin de la rueda. Los pesos de corrección se agregan en las localizaciones correctas en cada uno de estos planos de corrección con base en una medición de las fuerzas dinámicas generadas por la rueda giratoria desequilibrada.

Siempre es una buena práctica comenzar por equilibrar estáticamente todas las componentes individuales que forman parte de un conjunto, si esto es posible. Esto reducirá la cantidad de desequilibrio dinámico que debe corregirse en el ensamble final y también reducirá el momento de flexión sobre el eje. Un ejemplo común de esta situación es la turbina de un avión, que se compone de un número de rodetes circulares de turbinas dispuestos a lo largo de un eje. Como éstos giran a alta velocidad las fuerzas de inercia debidas a cualquier desequilibrio pueden ser muy grandes. Los rodetes individuales se equilibran estáticamente antes de que se monten en el eje. Entonces el ensamble final se equilibra dinámicamente.

Algunos dispositivos no se prestan para este enfoque. Un rotor de motor eléctrico es en esencia un carrete de alambre de cobre enrollado de forma compleja alrededor del eje. La masa del alambre no se distribuye de modo uniforme ni rotacional ni longitudinalmente, de manera que no está equilibrada. No es posible modificar la distribución local de la masa del embobinado, una vez instalado, sin comprometer la integridad eléctrica. Por tanto, el desequilibrio de todo el rotor debe ser contrarrestado en los dos planos de corrección después del ensamble.

Considere un sistema de tres masas concentradas, dispuestas alrededor y a lo largo del eje en la figura 12-3. Suponga que, por alguna razón, no pueden equilibrarse estáticamente en forma individual dentro de sus propios planos. Entonces se crean dos planos de corrección indicados como *A* y *B.* En este ejemplo de diseño las masas desequilibradas m_1, m_2 y m_3 y sus radios R_1, R_2 y R_3 se conocen junto con sus localizaciones angulares θ_1, θ_2 y θ_3. Se desea equilibrar dinámicamente el sistema. Se aplica un sistema coordenado tridimensional con el eje de rotación en la dirección Z. Observe que el sistema se detiene de nuevo en una posición arbitraria de cuadro congelado. Se supone que la aceleración angular es cero. La suma de las fuerzas es:

$$-m_1\mathbf{R}_1\omega^2 - m_2\mathbf{R}_2\omega^2 - m_3\mathbf{R}_3\omega^2 - m_A\mathbf{R}_A\omega^2 - m_B\mathbf{R}_B\omega^2 = 0 \qquad (12.4a)$$

Al dividir entre ω^2 y reordenar se obtiene:

$$m_A\mathbf{R}_A + m_B\mathbf{R}_B = -m_1\mathbf{R}_1 - m_2\mathbf{R}_2 - m_3\mathbf{R}_3 \qquad (12.4b)$$

Separando en las componentes *x* y *y:*

$$\begin{aligned} m_A R_{A_x} + m_B R_{B_x} &= -m_1 R_{1_x} - m_2 R_{2_x} - m_3 R_{3_x} \\ m_A R_{A_y} + m_B R_{B_y} &= -m_1 R_{1_y} - m_2 R_{2_y} - m_3 R_{3_y} \end{aligned} \qquad (12.4c)$$

Las ecuaciones 12.4c tienen cuatro incógnitas en la forma de los productos mR en el plano A y de los productos mR en el plano *B.* Para resolver se necesita la ecuación de la suma de los momentos, la cual se puede tomar como un punto en uno de los planos de

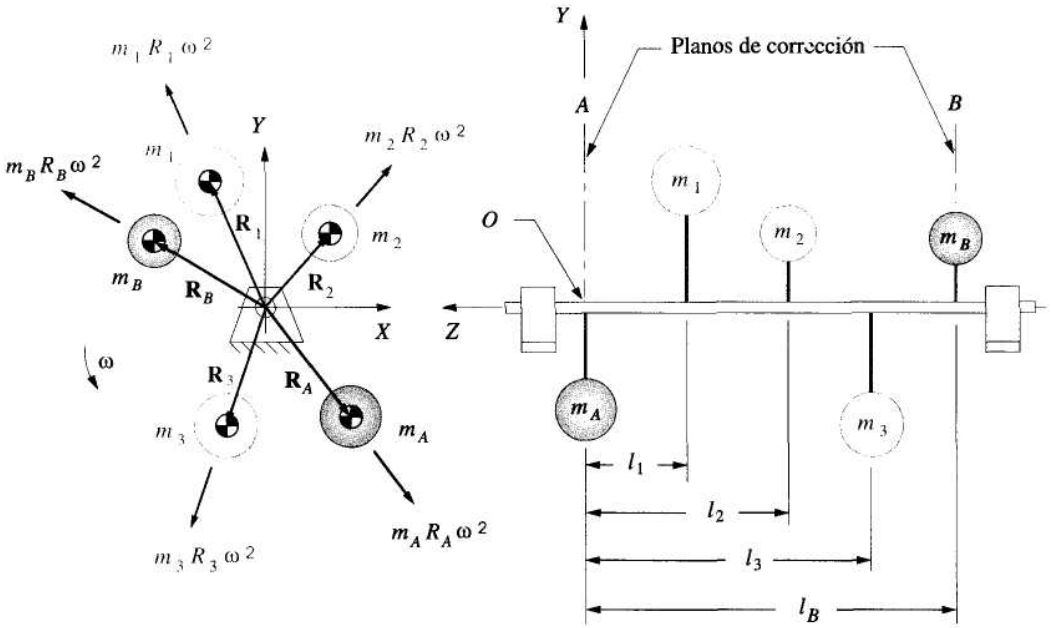


FIGURA 12-3
Equilibrio dinámico en dos planos

corrección tal como el punto *O*. Las distancias del brazo de momento *z* de cada fuerza medidas desde el plano *A* se indican en la figura como l_1, l_2, l_3, l_B; por lo tanto,

$$a(m_B\mathbf{R}_B\omega^2)l_B = -(m_1\mathbf{R}_1\omega^2)l_1 - (m_2\mathbf{R}_2\omega^2)l_2 - (m_3\mathbf{R}_3\omega^2)l_3 \tag{12.4d}$$

Al dividir entre ω^2, separar en las componentes *x y y* reordenar:

El momento en el plano *XZ* (es decir, con respecto al eje *Y)* es:

$$m_B R_{B_x} = \frac{-(m_1 R_{1_x})l_1 - (m_2 R_{2_x})l_2 - (m_3 R_{3_x})l_3}{l_B} \tag{12.4e}$$

El momento en el plano *YZ* (es decir, con respecto al eje *X)* es:

$$m_B R_{B_y} = \frac{-(m_1 R_{1_y})l_1 - (m_2 R_{2_y})l_2 - (m_3 R_{3_y})l_3}{l_B} \tag{12.4f}$$

Éstas pueden determinar los productos *mR* en las direcciones *x y y* para el plano de corrección *B*, que entonces se sustituyen en la ecuación 12.4c para encontrar los valores necesarios en el plano *A*. Las ecuaciones 12.2d y 12.2e se aplican entonces a cada plano de corrección para determinar los ángulos en los que deben colocarse las masas de equi-

librio y los productos *mR* necesarios en cada plano. Los contrapesos físicos pueden entonces diseñarse de acuerdo con las restricciones resumidas en la sección sobre equilibrio estático. Observe que los radios R_A y R_B no tienen el mismo valor.

EJEMPLO 12-2

Equilibrio dinámico

Datos: El sistema mostrado en la figura 12-3 tiene los siguientes datos:

$m_1 = 1.2$ kg $\qquad R_1 = 1.135$ m @ $\angle 113.4°$

$m_2 = 1.8$ kg $\qquad R_2 = 0.822$ m @ $\angle 48.8°$

$m_3 = 2.4$ kg $\qquad R_3 = 1.04$ m @ $\angle 251.4°$

Las distancias *z*, en metros, del plano *A* son:

$$l_1 = 0.854, \qquad l_2 = 1.701, \qquad l_3 = 2.396, \qquad l_B = 3.097,$$

Halle: Los productos masa-radio y sus localizaciones angulares necesarias para equilibrar dinámicamente el sistema utilizando los planos de corrección *A y B.*

Solución:

1 Descomponga los vectores de posición en las componentes *xy* en el sistema coordenado arbitrario, asociados con la posición de marco congelado del eslabonamiento elegido para el análisis.

$$\begin{aligned} R_1 &= 1.135 \ @ \ \angle 113.4°; & R_{1_x} &= -0.451, & R_{1_y} &= +1.042 \\ R_2 &= 0.822 \ @ \ \angle 48.8°; & R_{2_x} &= +0.541, & R_{2_y} &= +0.618 \\ R_3 &= 1.135 \ @ \ \angle 251.4°; & R_{3_x} &= -0.332, & R_{3_y} &= -0.986 \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

2 Resuelva las ecuaciones 12.4e para la suma de momentos con respecto al punto *O.*

$$m_B R_{B_x} = \frac{-(m_1 R_{1_x}) l_1 - (m_2 R_{2_x}) l_2 - (m_3 R_{3_x}) l_3}{l_B} \qquad \text{(b)}$$

$$= \frac{-(1.2)(-0.451)(0.854) - (1.8)(0.541)(1.701) - (2.4)(-0.332)(2.396)}{3.097} = 0.230$$

$$m_B R_{B_y} = \frac{-(m_1 R_{1_y}) l_1 - (m_2 R_{2_y}) l_2 - (m_3 R_{3_y}) l_3}{l_B} \qquad \text{(c)}$$

$$= \frac{-(1.2)(1.042)(0.854) - (1.8)(0.618)(1.701) - (2.4)(-0.986)(2.396)}{3.097} = 0.874$$

3 Resuelva las ecuaciones 12.2d y 12.2e para el producto de masa y radio en el plano *B.*

$$\theta_B = \arctan\frac{0.874}{0.230} = 75.27°$$

$$m_B R_B = \sqrt{(0.230)^2 + (0.874)^2} = 0.904 \text{ kg-m} \tag{d}$$

4 Resuelva las ecuaciones 12.4c para las fuerzas en las direcciones *x y y.*

$$m_A R_{A_x} = -m_1 R_{1_x} - m_2 R_{2_x} - m_3 R_{3_x} - m_B R_{B_x}$$
$$m_A R_{A_y} = -m_1 R_{1_y} - m_2 R_{2_y} - m_3 R_{3_y} - m_B R_{B_y}$$
$$m_A R_{A_x} = -(1.2)(-0.451) - 1.8(0.541) - (2.4)(-0.332) - 0.230 = 0.134 \tag{e}$$
$$m_A R_{A_y} = -(1.2)(1.042) - (1.8)(0.618) - (2.4)(-0.986) - 0.874 = 0.870$$

5 Resuelva las ecuaciones 12.2d y 12.2e para el producto de masa y radio en el plano *A.*

$$\theta_A = \arctan\frac{-0.870}{0.134} = -81.25°$$

$$m_A R_A = \sqrt{(0.134)^2 + (-0.870)^2} = 0.880 \text{ kg-m} \tag{f}$$

6 Estos productos masa-radio se obtienen con una variedad de formas agregadas al ensamble en los planos *A y B.* Son posibles muchas formas. El sistema se equilibrará dinámicamente mientras se proporcionen los productos masa-radio requeridos en los ángulos requeridos en cada plano de corrección.

De modo que cuando el diseño esté todavía en la mesa de dibujo, se pueden emplear estas técnicas de análisis simple para determinar los tamaños y localizaciones necesarios de las masas de equilibrio para cualquier ensamble en rotación pura en el cual se define la distribución de la masa. Este método de equilibrio en dos planos se emplea para equilibrar dinámicamente cualquier sistema en rotación pura y todos los sistemas semejantes deben equilibrarse, a menos que el propósito del dispositivo sea producir fuerzas o momentos de sacudimiento.

12.3 EQUILIBRIO DE ESLABONAMIENTOS

Se han creado muchos métodos para equilibrar eslabonamientos. Algunos logran un equilibrio completo de un factor dinámico, como la fuerza de sacudimiento, a expensas de otros factores como el momento de sacudimiento o el par de torsión impulsor. Otros buscan una disposición óptima que minimice de manera colectiva (pero no a cero) las fuerzas, momentos y pares de torsión de sacudimiento para un mejor desempeño. Lowen y Berkof[11] y Lowen, Tepper y Berkoñ[21] proporcionan análisis extensos de la literatura sobre este tema hasta 1983. Desde ese entonces se han realizado obras adicionales sobre el problema, algunas de éstas se señalan en las referencias que se incluyen al final del capítulo.

El equilibrio completo de cualquier mecanismo se obtiene creando un mecanismo secundario de "imagen especular" conectado a éste de manera que se eliminen todas las fuerzas y momentos dinámicos. Ciertas configuraciones de motores multicilíndricos de

combustión interna lo hacen. Los pistones y las manivelas de algunos cilindros contrarrestan los efectos inerciales de otros. Estos mecanismos de motor se estudiarán en el capítulo 14. Sin embargo, este enfoque es costoso y sólo se justifica si el mecanismo agregado sirve para algún propósito secundario, como aumentar la potencia, por ejemplo en el caso de los cilindros adicionales en un motor. Muy pocas veces se justifica económicamente la adición de un mecanismo "ficticio" cuyo único propósito sea contrarrestar los efectos dinámicos.

La mayoría de los esquemas prácticos de equilibrio de eslabonamientos tratan de minimizar o eliminar uno o más de los efectos dinámicos (fuerzas, momentos, pares de torsión) al redistribuir la masa de los eslabones existentes. Por lo general esto implica la adición de contrapesos y/o el cambio de las formas de los eslabones para relocalizar sus *CG*. Además de redistribuir su masa los esquemas más elaborados agregan contrapesos engranados a algunos eslabones. Como en cualquier intento de diseño existen transacciones. Por ejemplo, generalmente la eliminación de las fuerzas de sacudimiento incrementa el momento de sacudimiento y el par de torsión impulsor. De este problema sólo se pueden presentar unos cuantos planteamientos, ya que se dispone de poco espacio. Para información sobre otros métodos se aconseja al lector consultar la literatura relacionada con ellos.

Equilibrio total de fuerzas de eslabonamientos

Los eslabones rotatorios (manivelas, balancines) de un eslabonamiento pueden equilibrarse individualmente mediante los métodos de equilibrio rotacional descritos en la sección anterior. Los efectos de los acopladores que están en movimiento complejo son más difíciles de compensar. Observe que el proceso de equilibrar estáticamente un eslabón rotatorio en efecto obliga a su centro de masa *(CG)* a estar en su pivote fijo y, por lo tanto, estacionario. En otras palabras, la condición de **equilibrio estático** también puede **definirse como** aquél que *hace estacionario el centro de masa.* Un acoplador no tiene pivote fijo, así que en general su centro de masa está en movimiento.

Cualquier mecanismo, sin importar qué tan complejo sea, tendrá, para toda posición instantánea, un *centro de masa global* localizado en algún punto particular. Su localización se determina conociendo sólo las masas del eslabón y las localizaciones de los *CG* de los eslabones individuales en ese instante. Normalmente el centro de masa global cambiará de posición conforme se mueve el eslabonamiento. Si de alguna manera se puede obligar a que este centro de masa global sea estacionario, se tendrá un estado de equilibrio estático para el eslabonamiento total.

El método de Berkof-Lowen de vectores linealmente independientes[131] proporciona un medio para calcular la magnitud y localización de los contrapesos que se colocarán en los eslabones rotatorios, los cuales harán estacionario el centro de masa global para todas las posiciones del eslabonamiento. La colocación de las masas de equilibrio apropiadas en los eslabones provocará que las fuerzas dinámicas en los pivotes fijos sean siempre iguales y opuestas, es decir, un par, de modo que se produzca equilibrio estático $(\Sigma F = 0$ pero $\Sigma M \neq 0)$ en el eslabonamiento móvil.

El método funciona para cualquier eslabonamiento plano de *n* eslabones que tenga una combinación de juntas de revoluta (de pasador) y prismáticas (de corredera), siempre que exista una trayectoria a la fijación de cada eslabón que sólo contenga juntas derevoluta.[141] En otras palabras, si todas las trayectorias posibles de cualquier eslabón a la fijación contienen juntas de deslizamiento, entonces fallará el método. Cualquier eslabo-

namiento de *n* eslabones que cumpla el criterio anterior puede equilibrarse por la adición de *n/2* pesos de equilibrio, cada uno en un eslabón diferente."[41] Para un eslabonamiento de cuatro barras se aplicará el método de la referencia [3].

En la figura 12-4 se muestra un eslabonamiento de cuatro barras con su centro de masa global localizado en el vector de posición R_t. Los *CG* individuales de los eslabones se localizan *en el sistema global* mediante los vectores de posición R_2, R_3 y R_4 (magnitudes R_2, R_1, R_4) fijos con respecto a su origen, el pivote de manivela O_2- Las longitudes de eslabón se determinan por los vectores de posición indicados como L_1, L_2, L_3, L_4 (magnitudes l_{lt} 1_2, $/_3$, $/_4$) y los vectores de posición local que localizan los *CG dentro de cada eslabón* son B_2, B_3, B_4 (magnitudes £>,, *b-*,, b_4). Los ángulos de los vectores B_2, B_3, B_4 son ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 medidos internamente en los eslabones con respecto a las líneas de los centros de los eslabones $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_3$, $\mathbf{L}_4$. Los ángulos instantáneos del eslabón que localizan a $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_3$, $\mathbf{L}_4$ en el sistema global son θ_2, θ_3, θ_4. La masa total del sistema es simplemente la suma de las masas individuales de eslabón:

$$m_t = m_2 + m_3 + m_4 \tag{12.5a}$$

El momento total de masa con respecto al origen debe ser igual a la suma de los momentos de masa debidos a los eslabones individuales:

$$\sum M_{O_2} = m_t \mathbf{R}_t = m_2 \mathbf{R}_2 + m_3 \mathbf{R}_3 + m_4 \mathbf{R}_4 \tag{12.5b}$$

La posición del centro de masa global es entonces:

$$\mathbf{R}_t = \frac{m_2 \mathbf{R}_2 + m_3 \mathbf{R}_3 + m_4 \mathbf{R}_4}{m_t} \tag{12.5c}$$

y a partir de la geometría del eslabonamiento:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2 &= b_2 e^{j(\theta_2 + \phi_2)} = b_2 e^{j\theta_2} e^{j\phi_2} \\ \mathbf{R}_3 &= l_2 e^{j\theta_2} + b_3 e^{j(\theta_3 + \phi_3)} = l_2 e^{j\theta_2} + b_3 e^{j\theta_3} e^{j\phi_3} \\ \mathbf{R}_4 &= l_1 e^{j\theta_1} + b_4 e^{j(\theta_4 + \phi_4)} = l_1 e^{j\theta_1} + b_4 e^{j\theta_4} e^{j\phi_4} \end{aligned} \tag{12.5d}$$

Se puede determinar la localización del centro de masa global para cualquier posición de eslabón para el que se conocen los ángulos θ_2, θ_3, θ_4. Se desea que este vector de posición R, sea constante. El primer paso es sustituir las ecuaciones 12.5d en las 12.5b,

$$m_t \mathbf{R}_t = m_2 (b_2 e^{j\theta_2} e^{j\phi_2}) + m_3 (l_2 e^{j\theta_2} + b_3 e^{j\theta_3} e^{j\phi_3}) + m_4 (l_1 e^{j\theta_1} + b_4 e^{j\theta_4} e^{j\phi_4}) \tag{12.5e}$$

y reordenando para agrupar los términos constantes como coeficientes de términos dependientes de tiempo:

$$m_t \mathbf{R}_t = (m_4 l_1 e^{j\theta_1}) + (m_2 b_2 e^{j\phi_2} + m_3 l_2) e^{j\theta_2} + (m_3 b_3 e^{j\phi_3}) e^{j\theta_3} + (m_4 b_4 e^{j\phi_4}) e^{j\theta_4} \tag{12.5f}$$

Advierta que todos los términos entre paréntesis son constantes con el tiempo. Los únicos términos dependientes del tiempo son los que contienen a θ_2, θ_3 y θ_4.

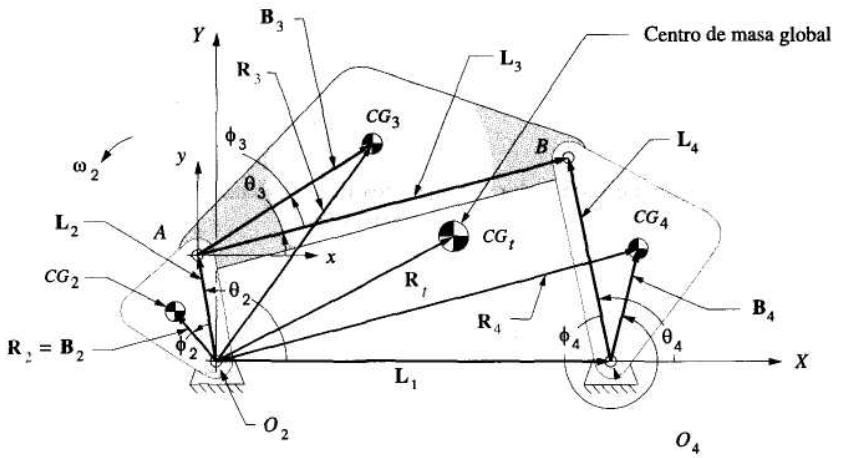


FIGURA 12-4

Equilibrio estático (de fuerzas) de un eslabonamiento de cuatro barras

También se puede escribir la ecuación de lazo vectorial para el eslabonamiento,

$$l_2 e^{j\theta_2} + l_3 e^{j\theta_3} - l_4 e^{j\theta_4} - l_1 e^{j\theta_1} = 0 \qquad (12.6a)$$

y resolverla para uno de los vectores unitarios que definen la dirección de un eslabón, por ejemplo el eslabón 3:

$$e^{j\theta_3} = \frac{\left(l_1 e^{j\theta_1} - l_2 e^{j\theta_2} + l_4 e^{j\theta_4}\right)}{l_3} \qquad (12.6b)$$

Sustituyendo esto en la ecuación 12.5f para eliminar el término θ_3 y reordenando:

$$m_t \mathbf{R}_t = \left(m_2 b_2 e^{j\phi_2} + m_3 l_2\right) e^{j\theta_2} + \frac{1}{l_3}\left(m_3 b_3 e^{j\phi_3}\right)\left(l_1 e^{j\theta_1} - l_2 e^{j\theta_2} - l_4 e^{j\theta_4}\right)$$
$$+\left(m_4 b_4 e^{j\phi_4}\right) e^{j\theta_4} + \left(m_4 l_1 e^{j\theta_1}\right) \qquad (12.7a)$$

y al agrupar los términos:

$$m_t \mathbf{R}_t = \left(m_2 b_2 e^{j\phi_2} + m_3 l_2 - m_3 b_3 \frac{l_2}{l_3} e^{j\phi_3}\right) e^{j\theta_2} + \left(m_4 b_4 e^{j\phi_4} + m_3 b_3 \frac{l_4}{l_3} e^{j\phi_3}\right) e^{j\theta_4}$$
$$+ m_4 l_1 e^{j\theta_1} + m_3 b_3 \frac{l_1}{l_3} e^{j\phi_3} e^{j\theta_1} \qquad (12.7b)$$

Esta expresión proporciona la herramienta para forzar a que R, sea constante y hacer estacionario el centro de masa del eslabonamiento. Para que esto sea así los términos entre paréntesis que multiplican las dos únicas variables dependientes del tiempo, θ_2 y θ_4, se deben forzar a ser cero. (El ángulo del eslabón fijo θ_1 es una constante.) Por lo tanto, el requisito para el equilibrio de fuerzas del eslabonamiento es:

$$\left(m_2 b_2 e^{j\phi_2} + m_3 l_2 - m_3 b_3 \frac{l_2}{l_3} e^{j\phi_3}\right) = 0$$

$$\left(m_4 b_4 e^{j\phi_4} + m_3 b_3 \frac{l_4}{l_3} e^{j\phi_3}\right) = 0 \tag{12.8a}$$

Al reordenar para aislar los términos de un eslabón (por ejemplo, el eslabón 3) a uno de los lados de cada una de estas ecuaciones:

$$m_2 b_2 e^{j\phi_2} = m_3\left(b_3 \frac{l_2}{l_3} e^{j\phi_3} - l_2\right)$$

$$m_4 b_4 e^{j\phi_4} = -m_3 b_3 \frac{l_4}{l_3} e^{j\phi_3} \tag{12.8b}$$

Ahora se tienen dos ecuaciones que involucran tres eslabones. Se pueden suponer los parámetros de un eslabón cualquiera y determinar los de los otros dos. Comúnmente un eslabonamiento se diseña primero para cumplir las restricciones del movimiento y embalaje requeridas, antes de intentar el procedimiento de equilibrio de fuerzas. En este caso la geometría y las masas de los eslabones ya están definidas, al menos en una forma preliminar. Una estrategia útil es dejar la masa del eslabón 3 y la localización del *CG* como se diseñaron originalmente y determinar las masas y las localizaciones del *CG* necesarias de los eslabones 2 y 4 con el fin de satisfacer estas condiciones para fuerzas equilibradas. Los eslabones 2 y 4 se encuentran en rotación pura, por lo que es sencillo agregarles contrapesos para mover sus *CG* hacia las localizaciones necesarias. Con este enfoque los lados derechos de las ecuaciones 12.8b se reducen a números para un eslabonamiento diseñado. Se desea determinar los productos masa-radio $m_2 b_2$ y $m_4 b_4$, y también las localizaciones angulares de los *CG* dentro de los eslabones. Advierta que en la ecuación 12.8 los ángulos ϕ_2 y ϕ_4 se miden con respecto a las líneas de centros de sus respectivos eslabones.

Las ecuaciones 12.8b son ecuaciones vectoriales. Se sustituye la identidad de Euler (ecuación 4.4a) para separarla en las componentes real e imaginaria, y se determinan las componentes x y y de los productos masa-radio.

$$(m_2 b_2)_x = m_3\left(b_3 \frac{l_2}{l_3} \cos\phi_3 - l_2\right)$$

$$(m_2 b_2)_y = m_3\left(b_3 \frac{l_2}{l_3} \operatorname{sen}\phi_3\right) \tag{12.8c}$$

$$(m_4 b_4)_x = -m_3 b_3 \frac{l_4}{l_3} \cos\phi_3$$

$$(m_4 b_4)_y = -m_3 b_3 \frac{l_4}{l_3} \operatorname{sen}\phi_3 \tag{12.8d}$$

Estas componentes del producto *mR*, necesarias para equilibrar las fuerzas del eslabonamiento, representan la cantidad total requerida. Si los eslabones 2 y 4 se diseñaron con cierto desequilibrio individual (el *CG* no es el pivote), entonces el producto existente *mR* del eslabón desequilibrado debe restarse del determinado por las ecuaciones 12.8c y

12.8d para determinar el tamaño y la localización de los contrapesos adicionales que se agregarán a estos eslabones. Como se hizo en el equilibramiento de los eslabones rotatorios, cualquier combinación de masa y radio que proporcione el producto deseado es aceptable. Emplee las ecuaciones 12.2d y 12.2e para convertir los productos cartesianos *mR* en las ecuaciones 12.8c y 12.8d, a coordenadas polares para determinar la magnitud y el ángulo del vector *mR* del contrapeso. Observe que el ángulo del vector *mR* para cada eslabón se relacionará con la línea de centros de dicho eslabón. Diseñe la forma de los contrapesos físicos que se colocarán en los eslabones como se analizó en la sección 12.1.

12.4 EFECTO DEL EQUILIBRIO EN FUERZAS DE SACUDIMIENTO Y PASADOR

En la figura 12-5 se muestra un eslabonamiento de cuatro barras* al cual, de acuerdo con las ecuaciones 12.8, se le han agregado masas de equilibrio. Observe que se colocaron los contrapesos en los eslabones 2 y 4, en las localizaciones determinadas para equilibrar las fuerzas por completo. En la figura 12-6a) se muestra una gráfica polar de las fuerzas de sacudimiento de este eslabonamiento sin las masas de equilibrio. La máxima es de 462 libras a 15°. En la figura 12-6¿?) se muestran las fuerzas de sacudimiento después de agregarse las masas de equilibrio. Las fuerzas de sacudimiento se reducen esencialmente a cero. Las pequeñas fuerzas residuales que se aprecian en la figura *l2-6b)* se deben a los errores de redondeo del cálculo; el método proporciona resultados teóricamente exactos.

Sin embargo, las fuerzas de pasador en los pivotes de la manivela y del balancín no han desaparecido como resultado de la adición de las masas de equilibrio. En las figuras 12-7*a)* y *12-7b)* se muestran, respectivamente, las fuerzas en los pivotes de la manivela y el balancín después del equilibrio. Ahora, estas fuerzas son iguales y opuestas. Después del equilibrio el patrón de fuerzas en el pivote O_2 es la imagen especular del modelo en el pivote O_4. La **fuerza de sacudimiento neta** es la suma vectorial de estos dos conjuntos de fuerzas para cada intervalo de tiempo (sección 11.8). Los pares de fuerzas iguales y opuestas que actúan en los pivotes de fijación en cada intervalo de tiempo crean un par de sacudimientos variables en el tiempo que inclinan el plano de fijación. Estas fuerzas de pasador pueden ser mayores debido a los pesos de equilibrio, y si es así incrementarán el

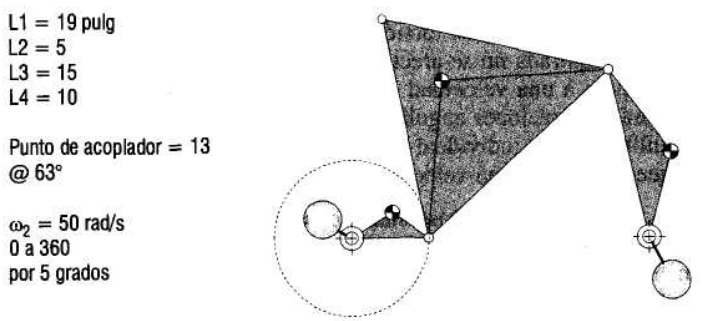
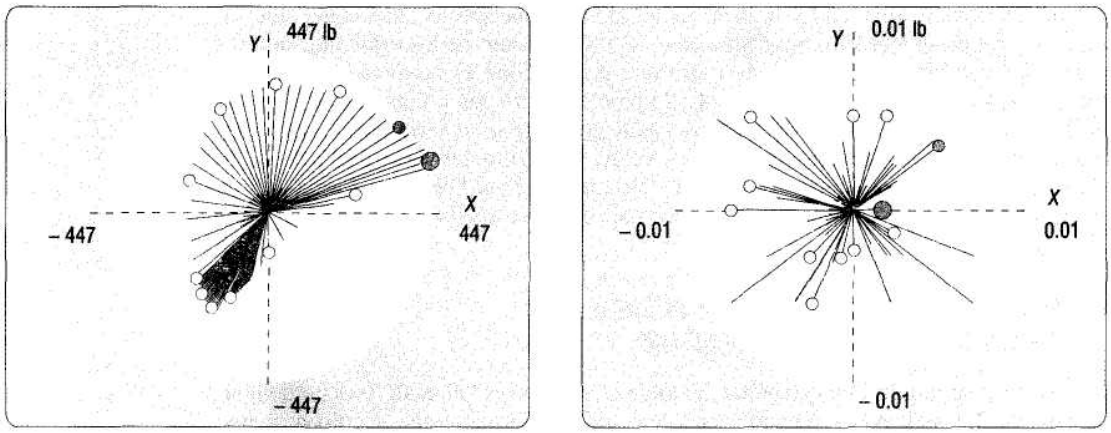


FIGURA 12-5
Eslabonamiento de cuatro barras que muestra las masas de equilibrio aplicadas a los eslabones 2 y 4

* Abra el archivo F12-O5.4br del programa FOURBAR para observar este eslabonamiento y su equilibrio con más detalle.



a) Fuerza de sacudimiento con el eslabonamiento desequilibrado

b) Fuerza de sacudimiento con el eslabonamiento equilibrado

FIGURA 12.5

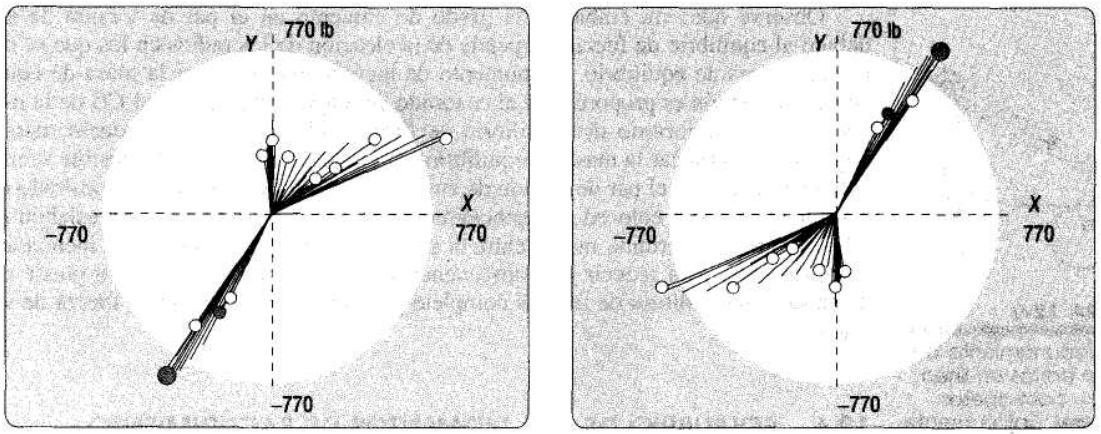
Gráfica polar de las fuerzas de sacudimiento desequilibradas sobre el plano de fijación del eslabonamiento de cuatro barras de la figura 12-5

par de sacudimiento en comparación con su valor anterior en el eslabonamiento desequilibrado; una transacción para reducir las fuerzas de sacudimiento a cero. Los esfuerzos en los eslabones y los pasadores también pueden incrementarse como resultado del equilibrio de las fuerzas.

12.5 EFECTO DEL EQUILIBRIO SOBRE EL PAR DE TORSIÓN DE ENTRADA

Si se equilibra individualmente un eslabón que esté en rotación pura mediante la adición de un contrapeso, se tendrá el efecto secundario del aumento de su momento de inercia. El "efecto del volante" del eslabón se incrementará por este aumento en su momento de inercia. En consecuencia, el par de torsión necesario para acelerar tal eslabón será mayor. El par de torsión de entrada no se afectará por ningún cambio en el / de la manivela de entrada cuando opera a una velocidad angular constante. Pero, cualquier balancín en el mecanismo tendrá aceleraciones angulares, incluso cuando la manivela no las tenga. Por lo tanto, el equilibramiento individual de los balancines tenderá a elevar el par de torsión de entrada requerido, aun a una velocidad constante de la manivela de entrada.

La adición de contrapesos a los eslabones rotatorios, necesarios para equilibrar por completo las fuerzas en el eslabonamiento, incrementa su momento de inercia y también (individualmente) *desequilibra* tales eslabones rotatorios para alcanzar el equilibrio global. Entonces los *CG* de los eslabones rotatorios no estarán en sus pivotes fijos. Cualquier aceleración angular de estos eslabones se sumará a la carga del par de torsión en el eslabonamiento. Al equilibrar por completo un eslabonamiento mediante este método se puede entonces tener el efecto secundario del aumento de la variación en el par de torsión de entrada requerido. En un eslabonamiento equilibrado quizá se necesita un volante



a) Fuerza del pivote de manivela F21

b) Fuerza deí pivote de balancín F41

FIGURA **12-7**

Gráficas polares de las fuerzas F21 y F41 que actúan sobre el plano de fijación del eslabonamiento de cuatro barras con fuerzas equilibradas de la figura 12-5

mayor para alcanzar el mismo coeficiente de fluctuación que en la versión desequilibrada del mecanismo.

En la figura 12-8 se muestra la curva del par de torsión de entrada para el eslabonamiento desequilibrado y para el mismo eslabonamiento después de que se ha realizado un equilibrio de fuerzas completo. El valor pico del par de torsión de entrada requerido ha aumentado como resultado del equilibrio de fuerzas.

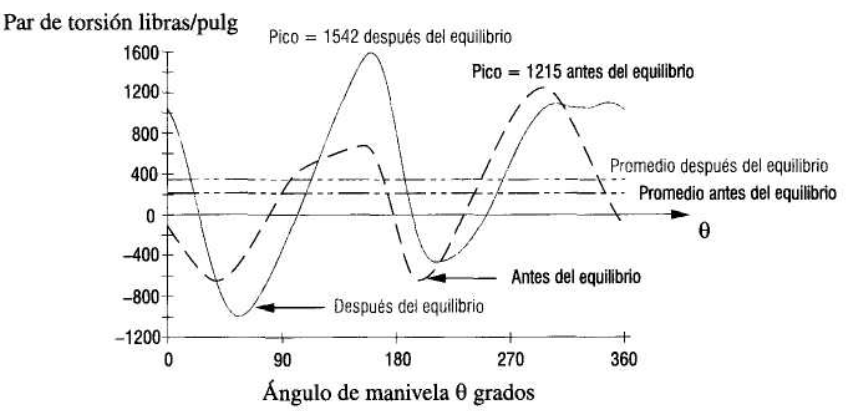


FIGURA 12-8

Curvas del par de torsión de entrada equilibrado y desequilibrado para el eslabonamiento de cuatro barras de la figura 12-5

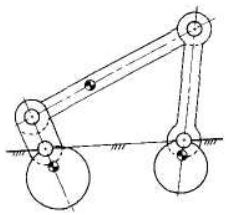


FIGURA 12-9
Un eslabonamiento de cuatro barras en línea (6) con contrapesos circulares óptimamente localizados. (5)

Observe que, sin embargo, el grado de aumento en el par de torsión de entrada debido al equilibrio de fuerzas depende de la elección de los radios en los que se colocarán las masas de equilibrio. El momento de inercia adicional que la masa de equilibrio agrega al eslabón es proporcional al cuadrado del radio con respecto al *CG* de la masa de equilibrio. El algoritmo del equilibrio de fuerzas sólo calcula el producto masa-radio requerido. Al colocar la masa de equilibrio a un radio lo más pequeño posible se minimizará el aumento en el par de torsión de entrada. Weiss y Fenton[151] han demostrado que un contrapeso circular colocado tangencialmente en el centro del pivote del eslabón (figura 12-9) es un buen término medio entre el peso agregado y el momento de inercia aumentado. Además, para reducir las consecuencias del par de torsión, también puede optarse por hacer un equilibrio de fuerzas completo y aceptar a cambio alguna fuerza de sacudimiento.

12.6 EQUILIBRIO DE LOS MOMENTOS DE SACUDIMIENTO EN LOS ESLABONAMIENTOS

El momento de sacudimiento M_S en un eslabonamiento con fuerzas equilibradas es la suma del par de torsión de reacción T_{21} y el par de sacudimiento (despreciando cualquier carga aplicada externamente). [6]*

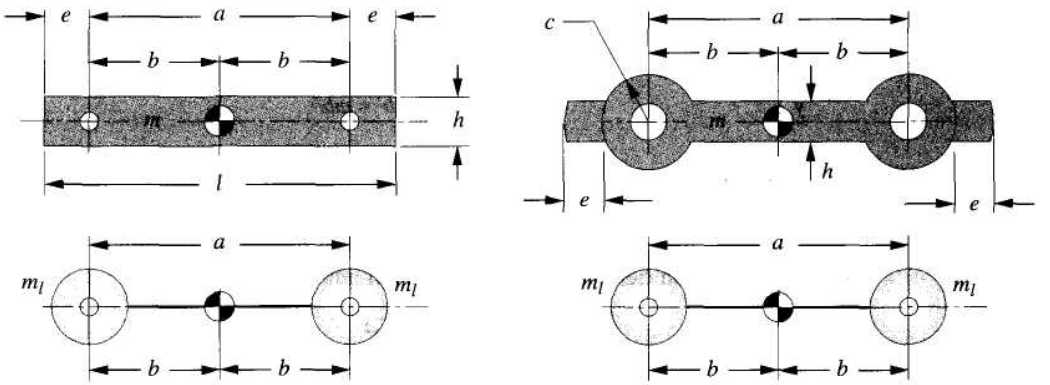
$$M_S = T_{21} + (R_1 \times F_{41}) \tag{12.9}$$

donde T_{21} es el negativo del par de torsión impulsor T_{12}, R_1 es el vector de posición desde O_2 hasta O_4 (es decir, eslabón 1) y F_{41} es la fuerza del balancín sobre el plano de fijación. En un eslabonamiento general la magnitud del momento de sacudimiento puede reducirse, pero no eliminarse por medios de redistribución de masa dentro de sus eslabones. El equilibramiento completo de estos momentos de sacudimiento requiere la adición de eslabones suplementarios y después sólo funciona para ciertas configuraciones especiales de un eslabonamiento de cuatro barras. [7]

Se han desarrollado muchas técnicas que utilizan los métodos de optimización para determinar la configuración de la masa de un eslabonamiento que minimizará el momento de sacudimiento solo o en combinación con la minimización de la fuerza de sacudimiento y/o el par de torsión de entrada. Hockey[8], [9] demuestra que la fluctuación en la energía cinética y en el par de torsión de entrada de un mecanismo, puede reducirse mediante la distribución adecuada de la masa dentro de sus eslabones y que este enfoque es más eficiente que la adición de un volante al eje de entrada. Berkof[10] también describe un método para minimizar el par de torsión de entrada por medio de una reordenación de masa. Lee y Cheng[11] y Qi y Pennestri[12] enseñan métodos para equilibrar óptimamente la fuerza de sacudimiento, el momento de sacudimiento y el par de torsión de entrada combinados en eslabonamientos a altas velocidades, mediante la redistribución de masas y la adición de contrapesos. Porter[13] sugiere el uso de un algoritmo genético para optimizar el mismo coniunto de parámetros. Bagci [14] describe diversos enfoques para equilibrar las fuerzas y momentos de sacudimiento en el eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera. La mayoría de estos métodos requiere fuentes de cálculo significativas; el espacio de este capítulo no permite realizar un análisis completo de todos ellos. Para mayor información se aconseja al lector consultar las referencias.

El método de Berkof para un equilibrio de momentos completo del eslabonamiento de cuatro barras [7] es sencillo y útil, aunque se limita a eslabonamientos "en línea", es

* Observe que esta expresión sólo es verdadera si el eslabonamiento tiene fuerzas equilibradas, lo que hace del momento del par de sacudimiento un vector libre. De lo contrario se refiere al sistema coordenado global elegido. Véase la referencia [6] para las deducciones completas del momento de sacudimiento para los eslabonamientos con fuerzas equilibradas y desequilibradas.



a) Eslabón acoplador rectangular

b) Eslabón acoplador en forma de hueso de perro

FIGURA 12-10

Creación del eslabón acoplador como un péndulo físico

decir, aquellos cuyos *CG* de eslabón se encuentran en sus respectivas líneas centrales de eslabón como se muestra en la figura 12-9. Ésta no es una restricción demasiado limitada ya que se fabrican muchos eslabonamientos prácticos con eslabones rectos. Aun si un eslabón debe tener una forma que se desvíe de su línea de centros, su *CG* puede seguirse colocando en esa línea al agregar masa al eslabón en la localización apropiada, el peso aumentado será la transacción.

Para un equilibrio de momentos completo, además de que será un eslabonamiento en línea, se debe volver a configurar el acoplador para que sea un péndulo físico de tal manera que sea dinámicamente equivalente al modelo de la masa concentrada, como se muestra en la figura 12-10. En la figura 12-10a) se muestra el acoplador como una barra rectangular uniforme de masa m, longitud *a* y ancho, *h, y* en la figura 12-10¿») como un "hueso de perro". Éstas son sólo dos de muchas posibilidades. Se desea que las masas concentradas estén en los pasadores del pivote, conectadas por una barra "sin masa". Entonces las masas concentradas del acoplador estarán en rotación pura, ya sea como parte de la manivela o como parte del balancín.* Esto puede llevarse a cabo agregando una masa como lo indica la dimensión *e* en los extremos del acoplador.

Los tres requisitos para la equivalencia dinámica se establecieron en la sección 10.2 y son: masa igual, misma localización de *CG* y mismo momento de inercia. El primero y el segundo de éstos se cumplen fácilmente al colocar a$m_l = m/2$ en cada pasador. El tercer requisito puede expresarse en términos del radio de giro *k* en vez del momento de inercia mediante la ecuación 10.10.

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} \tag{12.10}$$

Al tomar cada masa concentrada por separado, como si la barra sin masa estuviese dividida en dos barras en el *CG,* cada una de longitud *b,* el momento de inercia /, de cada masa concentrada será

* Observe que esta disposición también hace de cada junta de pasador el centro de percusión para el otro pasador, al igual que con el centro de rotación. Esto significa que una fuerza aplicada en cualquier pasador tendrá una fuerza de reacción cero en el otro pasador, desacoplándolos efectivamente de manera dinámica. Véase la sección 10.8 y también la figura 13-10 para un análisis más a fondo de este efecto.

$$I_l = \frac{I}{2} = m_l b^2$$

y
$$I = 2m_l b^2 = mb^2 \tag{12.11a}$$

entonces
$$k = \sqrt{\frac{mb^2}{m}} = b = \frac{a}{2} \tag{12.11b}$$

Para la configuración del eslabón en la figura 12- 10a), esto se cumplirá si las dimensiones del eslabón tienen la siguiente relación adimensional.

$$\frac{e}{h} = \frac{1}{2}\sqrt{3\left(\frac{a}{h}\right)^2 - 1} - \frac{a}{2h} \tag{12.12}$$

donde *e* determina la longitud del material que debe agregarse en cada extremo para satisfacer la ecuación 12.11b.

Para la configuración del eslabón en la figura 12-10¿>), la longitud *e* del material agregado de ancho *h*, necesario para hacerlo un péndulo físico puede determinarse a partir de

$$A\left(\frac{e}{h}\right)^3 + B\left(\frac{e}{h}\right)^2 + C\left(\frac{e}{h}\right) + D = 0 \tag{12.13}$$

donde:
$$A = 8$$

$$B = 12\left(\frac{a}{c}\right) + 24$$

$$C = 24\left(\frac{a}{c}\right) + 26$$

$$D = -2\left(\frac{a}{c}\right)^3 + 13\left(\frac{a}{c}\right) + 12\pi - 10$$

El segundo paso es equilibrar las fuerzas del eslabonamiento con su acoplador modificado mediante el método de la sección 12.3 y determinar los contrapesos requeridos en los eslabones 2 y 4. Con las fuerzas de sacudimiento eliminadas, el momento de sacudimiento es un vector libre, como el par de torsión de entrada.

12

Después, como tercer paso, el momento de sacudimiento puede contrarrestarse al agregar contrapesos de inercia engranados a los eslabones 2 y 4 como se muestra en la figura 12-11. Éstos deben girar en dirección opuesta a los eslabones, de manera que requieran una relación de engranes de -1. Ya que un contrapeso de inercia puede equilibrarse en cualquier momento planar que sea proporcional a una aceleración angular y que no presente ninguna fuerza de inercia neta que afecte el equilibrio de fuerzas del eslabonamiento. Las transacciones incluyen el par de torsión de entrada aumentado y las fuerzas de pasador mayores del par de torsión requerido para acelerar la masa adicional de inercia rotacional. También puede haber cargas grandes e impacto en los dientes del engrane, cuando las inversiones del par de torsión tomen el juego de los engranajes, generando ruido.

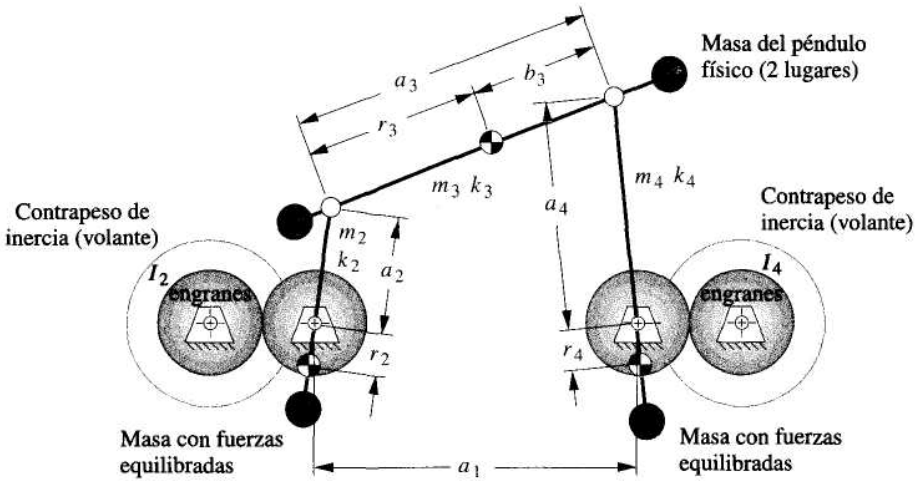


FIGURA 12-11

Eslabonamiento de cuatro barras en línea con equilibrio de fuerzas y momento completo con un acoplador del péndulo físico y contrapesos de inercia en los eslabones rotatorios

El momento de sacudimiento de un eslabonamiento de cuatro barras en línea se deduce en la referencia [6] como

$$M_s = \sum_{i=2}^{4} A_i \alpha_i \tag{12.14}$$

donde:

$$A_2 = -m_2\left(k_2^2 + r_2^2 + a_2 r_2\right)$$

$$A_3 = -m_3\left(k_3^2 + r_3^2 + a_3 r_3\right)$$

$$A_4 = -m_4\left(k_4^2 + r_4^2 + a_4 r_4\right)$$

α_i es la aceleración angular del eslabón *i*. Las otras variables se definen en la figura 12-11.

Al sumar los efectos de los dos contrapesos de inercia se obtiene

$$M_s = \sum_{i=2}^{4} A_i \alpha_i + I_2 \alpha_2 + I_4 \alpha_4 \tag{12.15}$$

Se puede forzar el momento de inercia para que sea igual a cero si

$$I_2 = -A_2$$

$$I_4 = -A_4 \tag{12.16}$$

$$A_3 = 0, \quad \text{o} \quad k_3^2 = r_3(a_3 - r_3)$$

Esto lleva a un sistema de cinco ecuaciones de diseño que deben cumplirse para un equilibrio de fuerzas y de momentos completo de un eslabonamiento de cuatro barras en línea.

$$m_2 r_2 = m_3 b_3 \left(\frac{a_2}{a_3} \right) \tag{12.17a}$$

$$m_4 r_4 = m_3 r_3 \left(\frac{a_4}{a_3} \right) \tag{12.17b}$$

$$k_3^2 = r_3 b_3 \tag{12.17c}$$

$$I_2 = m_2 \left(k_2^2 + r_2^2 + a_2 r_2 \right) \tag{12.17d}$$

$$I_4 = m_4 \left(k_4^2 + r_4^2 + a_4 r_4 \right) \tag{12.17e}$$

Las ecuaciones 12.17a y 12.17b son los criterios del equilibrio de fuerzas de la ecuación 12.8 expresados para el caso del eslabonamiento en línea. La ecuación 12-17c define al acoplador como un péndulo físico. Las ecuaciones 12.17d y *12.11 z* definen los momentos de inercia requeridos para los dos contrapesos de inercia. Observe que si el eslabonamiento opera a una velocidad angular constante, α_2 será cero en la ecuación 12.14 y el contrapeso de inercia en el eslabón 2 puede suprimirse.*

12.7 MEDICIÓN Y CORRECCIÓN DEL DESEQUILIBRIO

Aunque se puede hacer mucho para asegurar el equilibrio cuando se diseña una máquina, las variaciones y las tolerancias en la fabricación evitarán que incluso un diseño bien equilibrado esté en equilibrio perfecto cuando se construya. Por lo tanto, se necesitan medios para medir y corregir el desequilibrio en los sistemas rotatorios. Probablemente el mejor ejemplo de ensamble para analizar es el rin y la llanta de un automóvil, con el que la mayoría de los lectores estarán familiarizados. Ciertamente el diseño de este dispositivo contribuye al equilibrio, ya que es esencialmente cilindrico y simétrico. Si se fabrica para que sea perfectamente uniforme en geometría y homogéneo en material, debe estar en equilibrio perfecto. Pero comúnmente no lo está. La rueda (o el rin) parece estar más equilibrada, en su fabricación, que la llanta. El rin está fabricado de un metal homogéneo y tiene una geometría y sección transversal muy uniformes. En cambio la llanta es un compuesto de un elastómero de caucho sintético y de un tejido de canutillo o de alambre metálico. El conjunto se comprime en un molde y se endurece con vapor a una temperatura alta. El material resultante varía en densidad y distribución y a menudo su geometría se deforma en el proceso de pasarlo al molde y enfriarlo.

EQUILIBRIO ESTÁTICO Una vez que se ensambla la llanta al rin, el ensamble debe equilibrarse para reducir la vibración a altas velocidades. El enfoque más simple es equilibrarlo estáticamente, aunque no es en realidad lo ideal para este enfoque, ya que es axialmente gruesa en comparación con su diámetro. Para efectuar esto por lo general se suspende en un plano horizontal sobre un cono a través de su agujero central. Se fija un nivel de burbuja a la rueda y se colocan pesos en posiciones alrededor del rin de la rueda hasta que se nivela. Después estos pesos se conectan al rin en dichos puntos. Éste es un equilibrio uniplanar y, por lo tanto, sólo puede cancelar las fuerzas desequilibradas. No tiene ningún efecto en cualquiera de los momentos desequilibrados debidos a la distribución desigual de la masa a lo largo del eje de rotación. Tampoco es muy exacto.

* Las componentes del producto *mR* necesarias para el equilibrio de fuerzas en el eslabonamiento es todo lo que se requiere. Si los eslabones 2 y 4 se hubieran diseñado con algún desequilibrio individual (es decir, el *CG* no tomado como pivote), entonces el producto existente *mR* del eslabón en desequilibrio se debe restar del calculado con las ecuaciones 12.17a y 12.17b para determinar el tamaño y la ubicación de contrapesos adicionales a agregarse a esos eslabones.

EQUILIBRIO DINÁMICO El mejor método es equilibrarlo dinámicamente. Esto requiere la utilización de una máquina de equilibramiento dinámico. En la figura 12-12 se muestra un esquema del dispositivo utilizado para equilibrar los riñes y llantas o cualquier otro ensamble rotatorio. El ensamble que se equilibrará se monta temporalmente sobre un eje, denominado mandril, apoyado sobre cojinetes dentro del equilibrador. Cada uno de estos dos cojinetes se monta en una suspensión que contiene un transductor que mide la fuerza dinámica. Un tipo común de transductor de fuerza contiene un cristal piezoeléctrico que transmite un voltaje proporcional a la fuerza aplicada. Este voltaje se amplifica electrónicamente y se transmite al conjunto de circuitos o al software que puede calcular su magnitud pico y el ángulo de fase de dicho pico con respecto a alguna señal de referencia de tiempo. La señal de referencia se suministra por un codificador de eje sobre el mandril, el cual genera un pulso eléctrico de corta duración, una vez por revolución, en exactamente la misma localización angular. Este pulso de codificador acciona la computadora para comenzar a procesar la señal de fuerza. El codificador también proporciona un número grande de pulsos equidistantes adicionales alrededor de la circunferencia del eje (normalmente 1024). Éstos se utilizan para accionar el registro de cada muestra de datos de los transductores, exactamente en la misma localización alrededor del eje y para proporcionar una medida de la velocidad del eje mediante un contador electrónico.

El ensamble que se equilibrará "gira" entonces a cierta velocidad angular, a menudo con una transmisión de fricción que está en contacto con su circunferencia. Después se elimina el par de torsión impulsor y se detiene el motor de impulsión, permitiendo al ensamble "marchar con rueda libre". (Esto es para evitar la medición, de cualquier fuerza

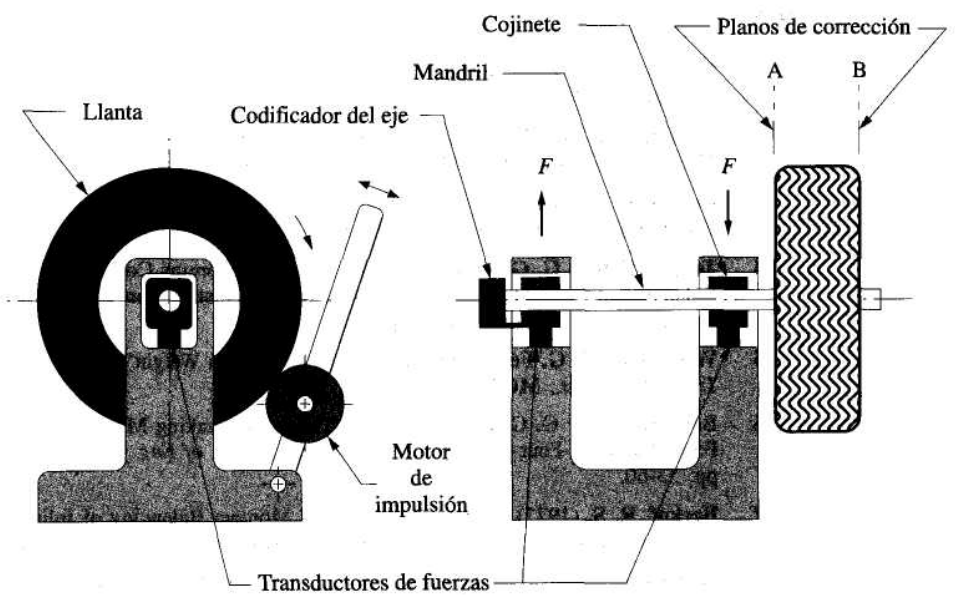


FIGURA 12-12

Equilibrador de ruedas dinámico

debida a los desequilibrios en el sistema de impulsión.) Se inicia la secuencia de medición y las fuerzas dinámicas en cada cojinete se miden simultáneamente y se almacenan sus formas de onda. Para mejorar la calidad de la medición pueden medirse y promediarse muchos ciclos. Debido a que las fuerzas se medirán en dos localizaciones desplazadas a lo largo del eje, se calculan los datos de la suma de momentos y los de la suma de fuerzas.

Las señales de fuerzas se envían a una computadora integrada para procesar y calcular las masas de equilibrio, y las localizaciones necesarias. Los datos necesarios de las mediciones son las magnitudes de las fuerzas pico y las localizaciones angulares de tales picos con respecto al ángulo de referencia del codificador del eje (que corresponde a un punto conocido en el rin). Las localizaciones axiales del borde interno y externo del rin de la rueda (los planos de corrección) con respecto a las localizaciones del transductor de la máquina de equilibramiento se transmiten a la computadora de la máquina por medio de la medición del operador. A partir de estos datos se pueden calcular la fuerza desequilibrada neta y el momento desequilibrado neto, ya que se conoce la distancia entre las fuerzas de cojinete medidas. Los productos masa-radio necesarios en los planos de corrección en cada lado del rin pueden entonces calcularse a partir de las ecuaciones 12.3 en términos del producto mR de los pesos de equilibrio. El radio de corrección es el del rin de la rueda. Las masas de equilibrio y las localizaciones angulares se calculan en cada plano de corrección para poner el sistema en equilibrio dinámico. Los pesos que tienen las masas necesarias se sujetan en el borde interior y exterior de los riñes de las ruedas (que en este caso son los planos de corrección), en las localizaciones angulares apropiadas. El resultado es un rin y llanta equilibrados dinámicamente con mucha precisión.

12.8 REFERENCIAS

1 **Lowen G. G. y R. S. Berkof** (1968) "Survey of Investigations into the Balancing of Linkages". /. *Mechanisms,* 3(4), pp. 221-231.

2 **Lowen, G. G.,** ***et al.*** (1983) "Balancing of Linkages—An Update". *Journal of Mechanisms and Machine Theory,* **18(3),** pp. 213-220.

3 **Berkof, R. S. y G. G. Lowen** (1969). "A New Method for Completely Forcé Balan cing Simple Linkages". *Trans. ASME J. of Eng. for Industry,* (Febrero) pp. 21-26.

4 **Tepper, F. R. y G. G. Lowen** (1972). "General Theorems Concerning Full Forcé Balancing of Planar Linkages by Internal Mass Redistribution". *Trans ASME J. of Eng. for Industry,* **94 serie B(3),** pp. 789-796.

5 **Weiss, K. y R. G. Fenton** (1972). "Minimum Inertia Weight". *Mech. Chem. Engng. Trans. I. E. Aust.,* **MC8(1),** pp. 93-96.

6 **Berkof, R. S. y G. G. Lowen** (1971). 'Theory of Shaking Moment Optimization of Force-Balanced Four-Bar Linkages". *Trans. ASME J. of Eng. for Industry,* (Febrero), pp. 53-60.

7 **Berkof, R. S.** (1972). "Complete Forcé and Moment Balancing of Inline Four-Bar Linkages". / *Mechanism and Machine Theory,* 8 (Agosto), pp. 397-410.

8 **Hockey, B. A.** (1971). "An Improved Technique for Reducing the Fluctuation of Kinetic Energy in Plañe Mechanisms". /. *Mechanisms,* 6, pp. 405-418.

9 **Hockey,** B. A. (1972). 'The Minimization of the Fluctuation of Input Torque in Plañe Mechanisms". *Mechanism and Machine Theory,* 7, pp. 335-346.

10 **Berkof, R. S.** (1979). "The Input Torque in Linkages". *Mechanism and Machine Theory,* 14, pp. 61-73.

11 **Lee, T. W.** y **C. Cheng** (1984). "Optimum Balancing of Combined Shaking Forcé, Shaking Moment, and Torque Fluctuations in High Speed Linkages". *Trans. ASME J. Mechanisms, Transmission, Automation and Design,* 106, pp. 242-251.

12 **Qi, N. M.** y E. **Pennestri** (1991). "Optimum Balancing of Fourbar Linkages". *Mechanism and Machine Theory,* 26(3), pp. 337-348.

13 **Porter, B.,** *et al.* (1994). "Genetic Design of Dynamically Optimal Fourbar Linkages". *Proc. of23rd Biennial Mechanisms Conference,* Minneapolis, Minnesotta, p. 413.

14 **Bagci, C.** (1975). "Shaking Forcé and Shaking Moment Balancing of the Plañe Slider-Crank Mechanism". *Proc. of The 4th OSU Applied Mechanism Conference,* Stillwater, Oklahoma, pp. 25-31.

12.9 PROBLEMAS

*†12-1 Se diseñará un sistema de dos brazos coplanares en un eje común, como se muestra en la figura 12-1. Para los renglones señalados en la tabla P12-1, determine la fuerza de sacudimiento del eslabonamiento, cuando funciona en desequilibrio a 10 rad/s y diseñe un contrapeso para equilibrar estáticamente el sistema. Trabaje con el sistema de unidades consistente que usted prefiera.

†12-2 El minutero del Big Ben pesa 40 libras y tiene una longitud de 10 pies. Su *CG* está a 4 pies del pivote. Calcule el producto *mR* y la localización angular necesarios para equilibrar estáticamente este eslabón y diseñe un contrapeso físico, en una posición cerca del centro. Seleccione el material y diseñe la forma detallada del contrapeso, que tiene un grosor uniforme de 2 pulgadas en la dirección Z.

†12-3 Se diseñará una señal publicitaria de "V por la victoria" para que oscile con respecto al vértice de la V, en un cartel, como el balancín de un eslabonamiento de cuatro barras. El ángulo formado por las piernas de la V es de 20°. Cada pierna tiene 8 pies de longitud y 1.5 pies de ancho. El material es lámina de aluminio de 0.25 pulgadas de espesor. Diseñe el eslabón en V para el equilibrio estático.

†12-4 Un ventilador de techo tiene tres aspas rectangulares equidistantes, de 1.5 pies por 0.25 pies, cada aspa pesa nominalmente 2 libras. Las tolerancias de fabricación provocarán que el peso de la aspa varíe en más o menos 5%. La exactitud del montaje de las aspas variará la localización del *CG* con respecto al eje de rotación en más o menos 10% de los diámetros de las aspas. Calcule el peso del mayor contrapeso de acero necesario a un radio de 2 pulgadas para equilibrar estáticamente en el peor caso de ensamble de aspas si el radio mínimo de las aspas es de 6 pulg.

*†12-5 Un sistema de tres pesos no coplanares generalmente se fija en un eje como se muestra en la figura 12-3. Para las dimensiones de los renglones señalados en la tabla P12-2 determine las fuerzas y el momento de sacudimiento cuando opera en desequilibrio a 100 rpm, y especifique el producto *mR* y el ángulo de los contrapesos en los

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

TABLA P12-1 Datos para el problema 12-1

Renglón	m_1	m_2	R_1	R_2
a.	0.20	0.40	1.25 @ 30°	2.25 @ 120°
b.	2.00	4.36	3.00 @ 45°	9.00 @ 320°
c.	3.50	2.64	2.65 @ 100°	5.20 @ –60°
d.	5.20	8.60	7.25 @ 150°	6.25 @ 220°
e.	0.96	3.25	5.50 @ –30°	3.55 @ 120°

planos de corrección *A* y *B* necesarios para equilibrar dinámicamente el sistema. Los planos de corrección están a 20 unidades de distancia. Trabaje con cualquier sistema de unidades consistente que prefiera.

*†12-6 Un ensamble de rin y llanta operó a 100 rpm en una máquina de equilibramiento dinámico como se muestra en la figura 12-12. La fuerza medida en el cojinete izquierdo tenía un pico de 5 libras a un ángulo de fase de 45° con respecto al ángulo de referencia cero en la llanta. La fuerza medida en el cojinete derecho tenía un pico de 2 libras a un ángulo de fase de -120° con respecto al ángulo de referencia cero en la llanta. La distancia entre los dos cojinetes en la máquina es de 10 pulgadas. El borde izquierdo del rin de la rueda está a 4 pulgadas de la línea central del cojinete más próximo. La llanta tiene 7 pulgadas de ancho en el rin. Calcule el tamaño y la localización con respecto al ángulo de referencia cero de la llanta, de los pesos de equilibrio necesarios a cada lado del rin para equilibrar dinámicamente el ensamble de la llanta. El rin de la rueda tiene un diámetro de 15 pulgadas.

*†12-7 Repita el problema 12-6 para las fuerzas medidas de 6 libras a un ángulo de fase de -60° con respecto al ángulo cero de referencia en la llanta, medido en el cojinete izquierdo, y de 4 libras a un ángulo de fase de 150° con respecto al cero de referencia en la llanta, medido en el cojinete derecho. El diámetro de la llanta es de 16 pulgadas.

*††12-8 En la tabla Pl 1-3 se muestran los datos geométricos y cinemáticos para diversos eslabonamientos de cuatro barras.

a. Para los renglones de la tabla Pl 1-3 asignados en este problema, calcule el tamaño y las localizaciones angulares de los productos masa-radio de contraequilibrio necesarios en los eslabones 2 y 4 para equilibrar por completo las fuerzas en el eslabonamiento mediante el método de Berkof y Lowen. Verifique su cálculo manual con el programa FOURBAR.

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad*, *Matlab* o *TKSolver*.

‡ Estos problemas son adecuados para resolverse usando el programa FOURBAR que se encuentra en el CD-ROM anexo.

TABLA P12-2 Datos para el problema 12-5

Renglón	m_1	m_2	m_3	l_1	l_2	l_3	R_1	R_2	R_3
a.	0.20	0.40	1.24	2	8	17	1.25 @ 30°	2.25 @ 120°	5.50 @ -30°
b.	2.00	4.36	3.56	5	7	16	3.00 @ 45°	9.00 @ 320°	6.25 @ 220°
c.	3.50	2.64	8.75	4	9	11	2.65 @ 100°	5.20 @ -60°	1.25 @ 30°
d.	5.20	8.60	4.77	7	12	16	7.25 @ 150°	6.25 @ 220°	9.00 @ 320°
e.	0.96	3.25	0.92	1	3	18	5.50 @ 30°	3.55 @ 120°	2.65 @ 100°

b. Calcule el par de torsión de entrada para el eslabonamiento con o sin las pesas de equilibrio agregadas y compare los resultados. Utilice el programa FOURBAR. El

*†12-9 eslabón 2 en la figura P12-1 gira a 500 rpm. Los eslabones son de acero con secciones transversales de 1 x 2 pulg. La mitad del peso de 29 libras de la barra descubierta y la lengüeta son soportadas por el eslabonamiento en el punto *B.* Diseñe los contrapesos para equilibrar las fuerzas de eslabonamiento y determine su cambio en el par de torsión pico con respecto a la condición de desequilibrio. Véase el problema 11-13 para mayor información sobre el mecanismo global.



FIGURA P12-1
Problema 12-9

†‡12-10 En la figura P12-2a) se muestra un eslabonamiento de cuatro barras y sus dimensiones en metros. La manivela y el balancín de acero tienen secciones transversales de 50 mm de ancho por 25 mm de espesor. El acoplador de aluminio mide 25 mm de espesor. La manivela O_2A gira a una velocidad constante de $\omega = 40$ rad/s. Diseñe los contrapesos para equilibrar las fuerzas del eslabonamiento y determine su cambio en el par de torsión pico con respecto a la condición de desequilibrio.

†‡12-11 En la figura P12-2&) se muestra un eslabonamiento de cuatro barras y sus dimensiones en metros. La manivela y el balancín de acero tienen secciones transversales de 50 mm de ancho por 25 mm de espesor. El acoplador de aluminio tiene 25 mm de espesor. La manivela O_2A gira a una velocidad constante de $\omega = 50$ rad/s. Diseñe los contrapesos para equilibrar las fuerzas del eslabonamiento y determine su cambio en el par de torsión pico con respecto a la condición de desequilibrio.

†12-12 Utilice un programa de computadora o un resolvedor de ecuaciones como *Mathcad, Matlab* o *TKSolver* para determinar los productos masa-radio que equilibrarán las fuerzas de cualquier eslabonamiento de cuatro barras para el cual son conocidas las propiedades de la geometría y la masa.

†12-13 En la figura P12-3 se muestra un sistema con dos pesos en un eje rotatorio. $W_1 = 15$ libras @ 0° a un radio de 6 pulgadas y $W_2 = 20$ libras @270° a un radio de 5 pulgadas. Determine las magnitudes y los ángulos de los pesos de equilibrio necesarios para equilibrar dinámicamente el sistema. El peso de equilibrio en el plano 3 se localiza a un radio de 5 pulgadas y en el plano 4 a uno de 8 pulgadas.

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

‡ Estos problemas son adecuados para resolverse usando el programa FOURBAR que se encuentra en el CD-ROM anexo.

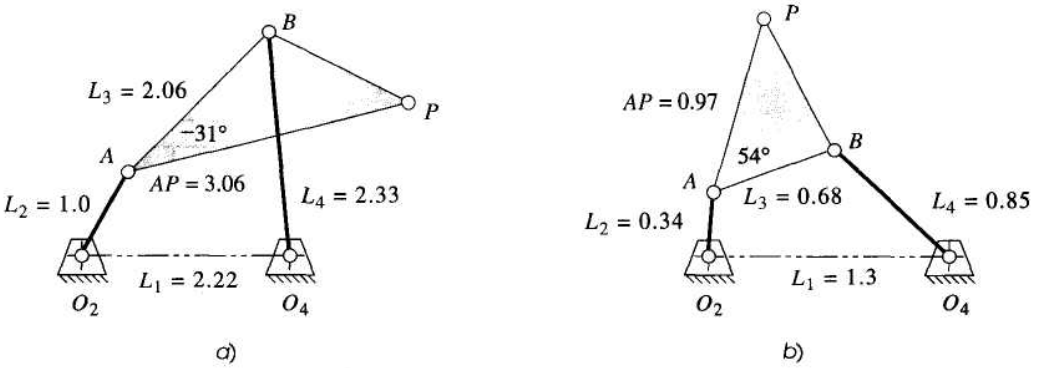


FIGURA P12-2
Problemas 12-10 y 12-11

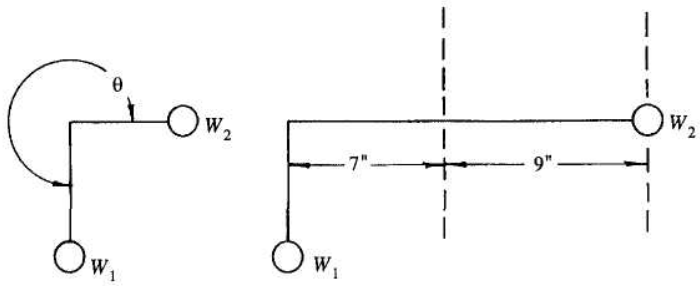


FIGURA P12-3

Problema 12-13

†12-14 En la figura P12-4 se muestra un sistema con dos pesos en un eje de rotación. $W_1 = 15$ libras @ 30° en un radio de 4 pulgadas y $W_2 = 20$ libras @ 270° en un radio de 6 pulgadas. Determine los radios y los ángulos de los pesos de equilibrio necesarios para equilibrar dinámicamente el sistema. El peso de equilibrio en el plano 3 pesa 15 libras y en el plano 4 pesa 30 libras.

†12-15 En la figura P12-5 se muestra un sistema con dos pesos en un eje rotatorio. $W_1 = 10$ libras @ 90° en un radio de 3 pulgadas y $W_2 = 15$ libras @ 240° en un radio de 3 pulgadas. Determine las magnitudes y los ángulos de los pesos de equilibrio necesarios para equilibrar dinámicamente el sistema. Los pesos de equilibrio en los planos 3 y 4 se colocan a un radio de 3 pulgadas.

†12-16 En la figura P12-6 se muestra un sistema con tres pesos en un eje rotatorio. $W_1 = 9$ libras @ 90° en un radio de 4 pulgadas, $W_2 = 9$ libras @ 225° en un radio de 6 pulgadas y $W_3 = 6$ libras @ 315° en un radio de 10 pulgadas. Determine las magnitudes y los ángulos de los pesos de equilibrio necesarios para equilibrar dinámicamente el sistema. Los pesos de equilibrio en los planos 4 y 5 se colocan a un radio de 3 pulgadas.

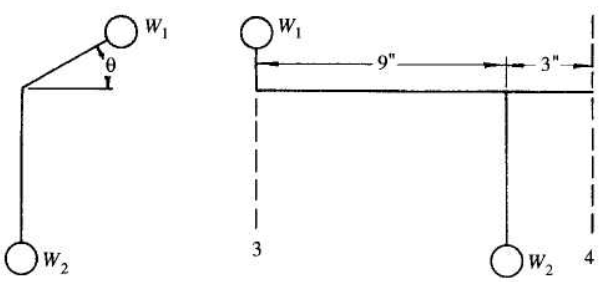


FIGURA P12-4

Problema 12-14

† Estos problemas son adecuados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

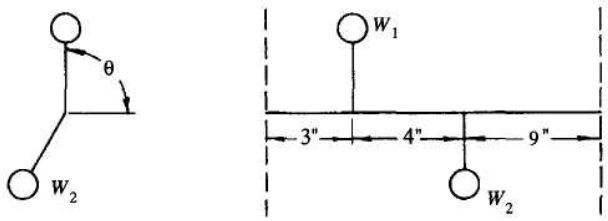


FIGURA P12-5

Problema 12-15

†12-17 En la figura P12-7 se muestra un sistema con tres pesos en un eje rotatorio. $W_2 = 10$ libras @ 90° en un radio de 3 pulgadas, $W_3 = 10$ libras @ 180° en un radio de 4 pulgadas y $W_4 = 8$ libras @ 315° en un radio de 4 pulgadas. Determine las magnitudes y los ángulos de los pesos de equilibrio necesarios para equilibrar dinámicamente el sistema. El peso de equilibrio en el plano 1 se coloca a un radio de 4 pulgadas y en el plano 5 a 3 pulgadas.

†12-18 El rodillo de acero de 400 mm de diámetro ilustrado en la figura P12-8 se ha probado en una máquina de equilibramiento dinámico a 100 rpm y presenta una fuerza desequilibrada de F_1 0.291 N @ θ_1 45° en el plano *x-y* en 1 y F_4 0.514 N @ θ_4 210° en el plano *x-y* en 4. Determine las localizaciones angulares y los diámetros requeridos de los agujeros de 25 mm de profundidad perforados radialmente hacia adentro de la superficie en los planos 2 y 3 para equilibrar dinámicamente el sistema.

†12-19 El rodillo de acero de 500 mm de diámetro ilustrado en la figura P12-8 se ha probado en una máquina de equilibramiento dinámico a 100 rpm y presenta una fuerza desequilibrada de 0.23 N @ 30° en el plano *x-y* en 1 y 0.62 N @ 135° en el plano *x-y* en 4. Determine las localizaciones angulares y los diámetros requeridos de los agujeros de 25 mm de profundidad perforados radialmente hacia adentro de la superficie en los planos 2 y 3 para equilibrar dinámicamente el sistema.

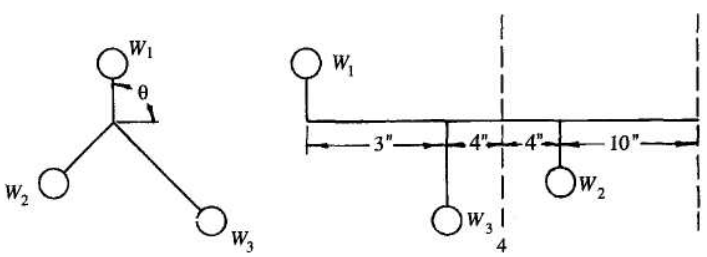


FIGURA P12-6

Problema 12-16

† Estos problemas son adecuados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad*, *Matiab* o *TKSolver*.

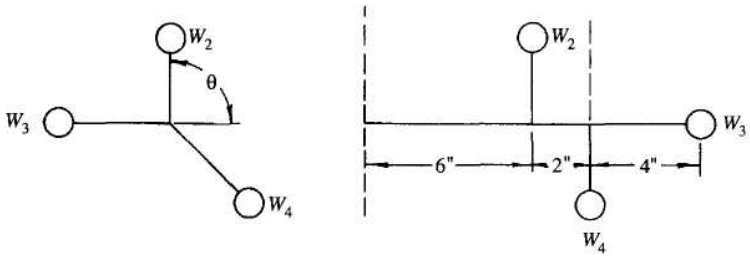


FIGURA P12-7

Problema 12-17

†‡12-20 El eslabonamiento de la figura P12-9a) tiene eslabones de acero rectangulares de 20 x 10 mm con una sección transversal similar al mostrado en la figura 12-10a). Diseñe los pesos de equilibrio necesarios y otras características necesarias para eliminar por completo la fuerza de sacudimiento y el momento de sacudimiento. Plantee todas las suposiciones.

†‡12-21 Repita el problema 12-20 mediante los eslabones configurados en la figura 12-10¿>) con la misma sección transversal pero que tengan extremos en forma de "hueso de perro" de 50 mm de diámetro.

†‡12-22 El eslabonamiento en la figura P12-96) tiene eslabones de acero rectangulares de 20 x 10 mm con una sección transversal similar a la mostrada en la figura 12-10a). Diseñe los pesos de equilibrio y otras características necesarias para eliminar por completo la fuerza y el momento de sacudimiento. Plantee todas las suposiciones.

†‡12-23 Repita el problema 12-22 usando los eslabones de acero configurados como en la figura 12-10¿) con una sección transversal de 20 x 10 mm, cuyos extremos en forma de "hueso de perro" miden 50 mm de diámetro.

† Estos problemas son adecuados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

‡ Estos problemas son adecuados para resolverse usando el programa FOURBAR que se encuentra en el CD-ROM anexo.

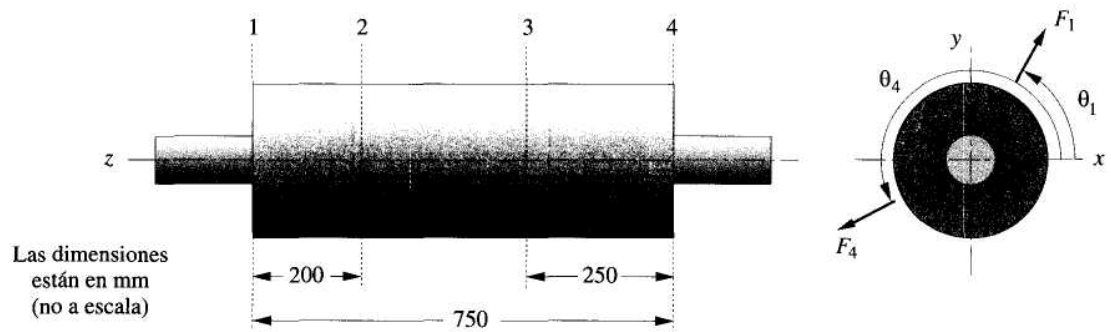


FIGURA P12-8

Problemas 12-18 y 12-19

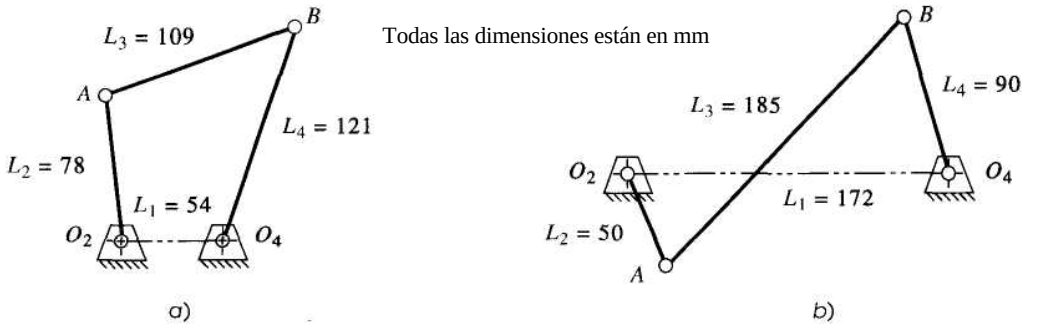


FIGURA P12-9

Problemas 12-20 al 12-23

Capítulo 13



DINÁMICA DE MOTORES

Siempre he pensado que la sustitución del caballo por la máquina de combustión interna marcó una época muy oscura en el progreso de la humanidad.
WINSTON S. CHURCHILL

13

13.0 INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se presentaron técnicas de análisis para la determinación de fuerzas dinámicas, momentos y pares de torsión en maquinaria. También se analizaron fuerzas de sacudimiento, momentos y su equilibrio. Ahora se integrarán todas estas consideraciones dinámicas en el diseño de un dispositivo común, el eslabonamiento de manivela-corredera, como el que se utiliza en el motor de combustión interna. Se verá que este mecanismo, aparentemente simple, es en realidad muy complejo en términos de las consideraciones dinámicas necesarias para su diseño de operación a alta velocidad. Servirá, pues, como un excelente ejemplo de la aplicación de los conceptos de dinámica recién presentados. No se tratarán los aspectos termodinámicos del motor de combustión interna más allá de la definición de las fuerzas de combustión que son necesarias para impulsar el dispositivo. Muchos textos, como los de la bibliografía al final de este capítulo, tratan aspectos muy complejos de la termodinámica y la dinámica de fluidos de este dispositivo ubicuo. Este capítulo se concentrará sólo en los aspectos cinemáticos y dinámicos de la mecánica. No se trata de que el estudiante se convierta en un "diseñador de motores", sino que aplique los principios de la dinámica a un problema de diseño real de interés general, y también exprese la complejidad y la fascinación implícita en el diseño de un dispositivo dinámico aparentemente simple.

Algunos estudiantes han tenido la oportunidad de desarmar y dar mantenimiento a un motor de combustión interna, pero muchos nunca lo habrán hecho. Por consiguiente, se comenzará con descripciones fundamentales sobre el diseño y operación de un motor. El programa ENGINE, que se proporciona con este texto, está diseñado para reforzar y ampliar los conceptos presentados. Realizará todos los cálculos tediosos necesarios para proporcionar al estudiante la información dinámica para las elecciones y transacciones de

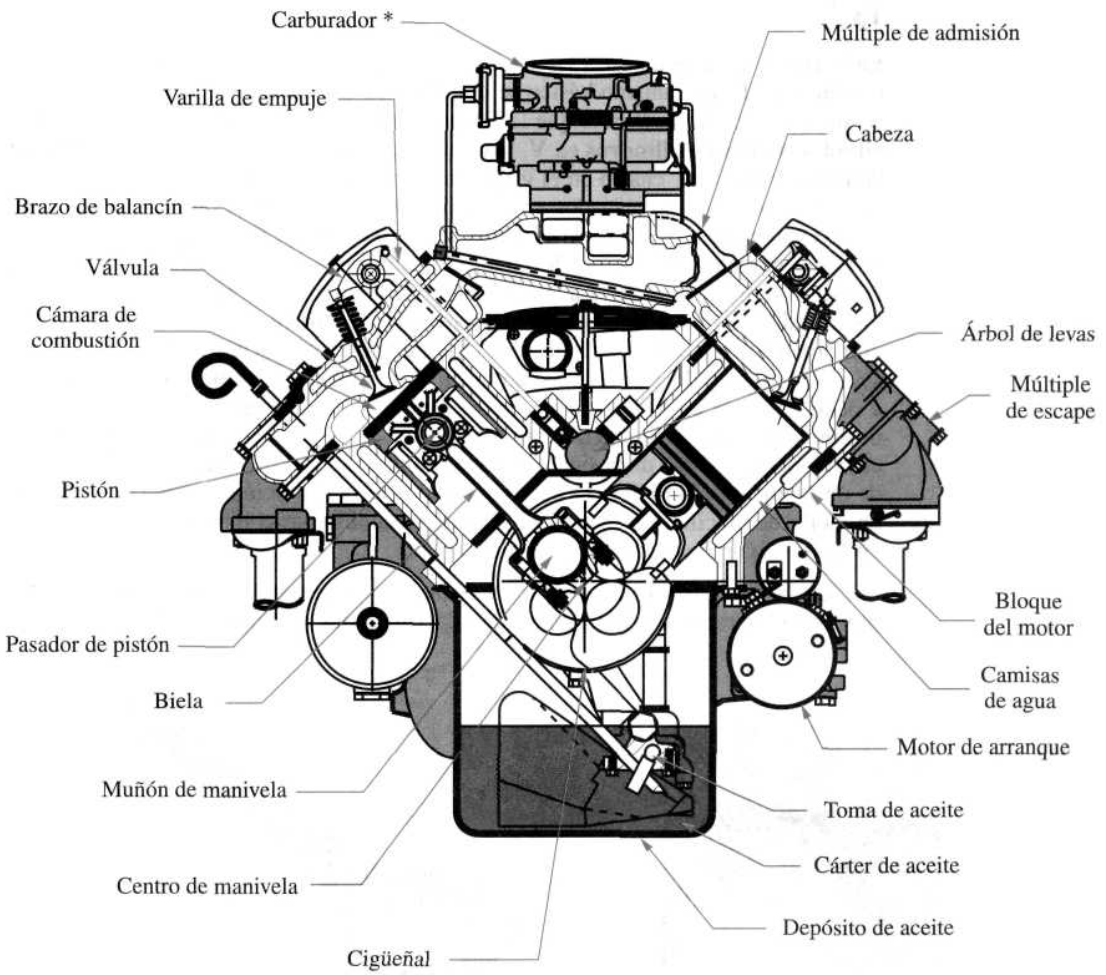


FIGURA 13-1

Corte de una sección transversal de un motor de ocho cilindros en V
Adaptado de un dibujo de Lañe Thomas, Universidad Occidental de Carolina, Departamento de Educación Industrial, con autorización

diseño. Se aconseja al estudiante utilizar este programa simultáneamente con la lectura del texto. Muchos ejemplos e ilustraciones del texto se generarán con este programa y con frecuencia se aludirán para que se realicen. En el apéndice A se proporciona el manual del usuario para el programa ENGINE, que puede leerse o citarse en cualquier momento para familiarizarse con la operación del programa. Los ejemplos de los capítulos 13 y 14 que tratan acerca de la dinámica de motores se incorporan el programa ENGINE para la observación y práctica del estudiante. En dicho programa estos ejemplos pueden encontrarse en un menú. En el CD-ROM se encuentran otros archivos de ejemplos de motores para el programa ENGINE.

* Los carburadores fueron remplazados por sistemas de inyección de combustible en motores automotrices, y en aquellos otros que requieran cumplir las normas cada vez más estrictas del control de emisiones del escape en Estados Unidos. La inyección de combustible proporciona un mejor control sobre la mezcla de combustible y aire que un carburador.

13.1 DISEÑO DEL MOTOR

En la figura 13-1 se muestra en detalle una sección transversal de un motor de combustión interna. El mecanismo básico se compone de una manivela, una biela (acoplador) y un pistón (corredera). Puesto que la figura describe la configuración de un motor **multicilíndrico de ocho cilindros en V,** hay cuatro manivelas en un cigüeñal y ocho conjuntos de bielas y pistones, cuatro en el grupo izquierdo de cilindros y cuatro en el derecho. En esta vista sólo se aprecian dos ensamblajes de pistón y biela, ambos en un muñón de manivela común. Los otros están detrás de los mostrados. En la figura 13-2 se muestran modelos por elemento finito de un pistón, una biela y un cigüeñal para un motor de cuatro cilindros en línea. La disposición más usual es un motor en línea con todos los cilindros en un plano común. Los **motores en línea** de tres, cuatro, cinco y seis cilindros se producen en todo el mundo. También se producen **motores en** V de cuatro, seis, ocho, diez y doce cilindros, pero los más comunes son los de configuraciones de seis y ocho cilindros en V. Las disposiciones geométricas del cigüeñal y los cilindros tienen un efecto significativo en la dinámica del motor. En el siguiente capítulo se explorarán los efectos debidos a las disposiciones multicilíndricas. En esta etapa se analizará el diseño de un motor **unicilíndrico.** Después de optimizar la condición geométrica y dinámica de un motor de un cilindro, se estará listo para ensamblar las combinaciones de los cilindros en las configuraciones multicilíndricas.

En la figura 13-3 se muestra un esquema del mecanismo básico **unicilíndrico de manivela-corredera** y la terminología de sus partes principales. Observe que éste "es

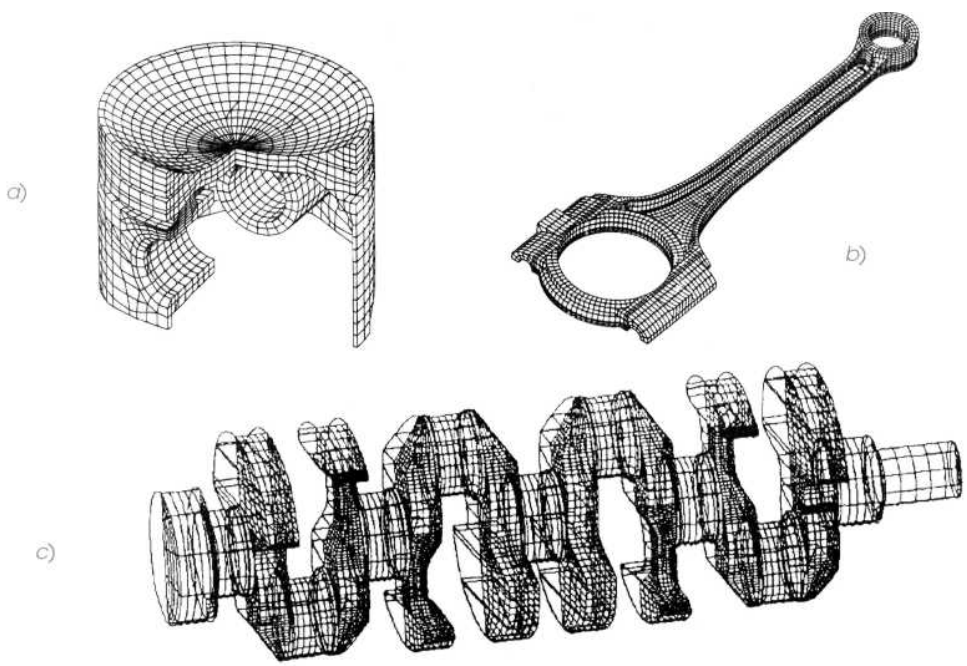


FIGURA 13-2

Modelos por elemento finito de un pistón a), biela b) y cigüeñal c) de un motor *Cortesía de General Motors Co.*

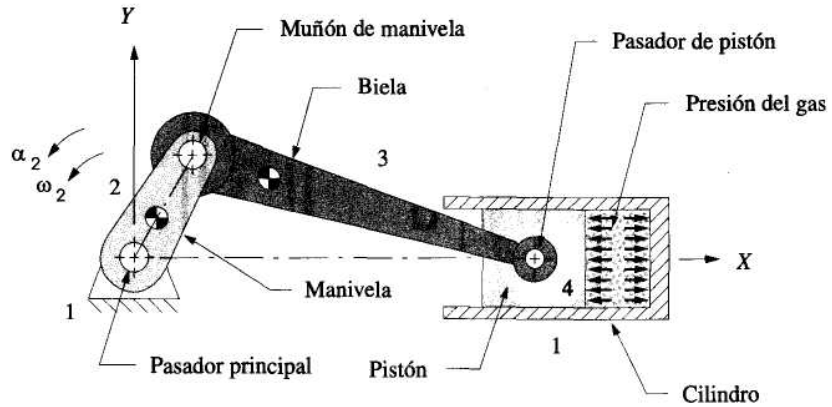


FIGURA 13-3

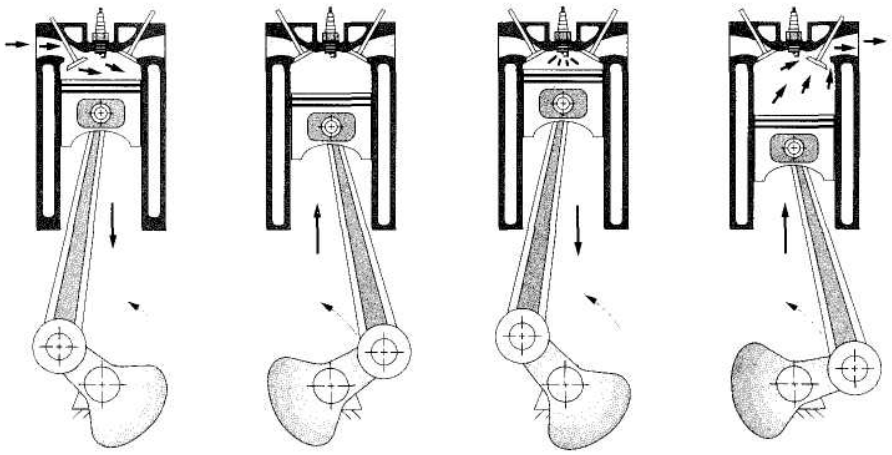
Mecanismo de cuatro barras de manivela-corredera para un motor de combustión interna de un cilindro

impulsado hacia atrás" al contrario de los eslabonamientos que se han analizado en los capítulos anteriores. Es decir, la explosión de la mezcla de combustible en el cilindro impulsa el pistón hacia la izquierda en la figura 13-3 o hacia abajo en la figura 13-4, y hace girar la manivela. El par de torsión de la manivela que resulta se transmite en última instancia a las ruedas del vehículo mediante una transmisión (véase la sección 9.11) para propulsar el auto, motocicleta u otro dispositivo. El mismo mecanismo de manivela-corredera también puede "impulsarse hacia adelante", al propulsar mecánicamente la manivela y obtener la energía de salida del extremo del pistón. Entonces se denomina **bomba de pistón** y se emplea para comprimir aire, bombear gasolina, extraer agua, etcétera.

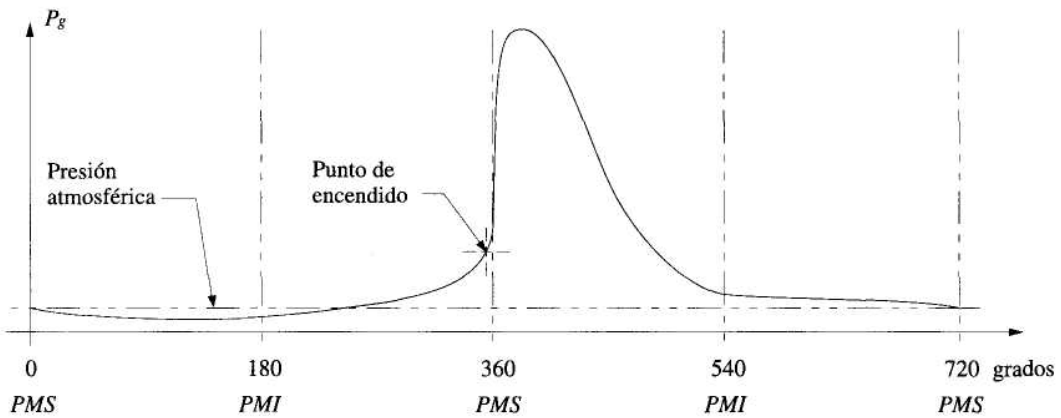
En el motor de combustión interna de la figura 13-3 es bastante obvio esperar que sólo se transmita energía de los gases de explosión a la manivela durante la carrera de explosión del ciclo. El pistón debe regresar del punto muerto inferior (PMI) al punto muerto superior (PMS) con su propia cantidad de movimiento antes de que reciba otro empuje de la siguiente explosión. De hecho, se debe almacenar cierta energía cinética rotacional en el cigüeñal tan sólo para llevarlo por los puntos PMI y PMS cuando el brazo de momento para la fuerza del gas sea cero en dichos puntos. A esto se debe que, para arrancar un motor de combustión interna, sea necesario "inicializarlo" con una manivela de mano, con el tirón de una cuerda o con un motor de arranque.

Existen dos ciclos de combustión en los motores de combustión interna, el **ciclo de dos tiempos de Clerk y** el **ciclo de cuatro tiempos de Otto,** llamados así en honor de sus inventores del siglo xix. El ciclo de cuatro tiempos es el más común en los motores de automóviles, camiones y de gasolina estacionarios. El ciclo de dos tiempos se emplea en motocicletas, motores fuera de borda, sierras de cadena y otras aplicaciones donde su mejor relación entre potencia y peso supera sus desventajas de niveles altos de contaminación y de gasto excesivo de combustible en comparación con el de cuatro tiempos.

CICLO DE CUATRO TIEMPOS En la figura 13-4 se muestra el **ciclo Otto de cuatro tiempos.** Para completar un ciclo Otto se realizan cuatro carreras completas del pistón. Una carrera del pistón se define como su recorrido del PMS al PMI o viceversa. Así que



a) Carrera de admisión b) Carrera de compresión c) Carrera de explosión a) Carrera



e) Curva de presión del gas

FIGURA 13-4

Ciclo de Otto de combustión de cuatro tiempos

13

hay dos carreras por revolución de manivela de 360° y se tienen 720° de rotación del cigüeñal para completar un ciclo de cuatro tiempos. Este motor requiere por lo menos de dos válvulas por cilindro, una para la admisión y otra para el escape. Para su análisis se puede empezar el ciclo en cualquier punto, ya que se repite cada dos revoluciones de la manivela. En la figura 13-4a) se muestra la **carrera de admisión** que empieza con el pistón en el PMS. Una mezcla de combustible y aire entra en el cilindro desde el sistema de inducción (los inyectores de combustible, o el carburador y el múltiple de admisión en

la figura 13-1) conforme el pistón desciende al PMI, incrementando el volumen del cilindro y generando una ligera presión negativa.

Durante la carrera de compresión, que se muestra en la figura *\3-4b),* todas las válvulas están cerradas y el gas se comprime conforme el pistón viaja del PMI al PMS. Un poco antes del PMS se enciende una chispa para que el gas comprimido explote. La presión de esta explosión se forma muy rápidamente y empuja el pistón hacia abajo del PMS al PMI durante la carrera de explosión que se muestra en la figura 13-4c). La válvula de escape se abre y la carrera de escape del pistón desde el PMI hasta el PMS (figura 13-4ÉT)) expulsa los gases resultantes del cilindro hacia el múltiple de escape (véase también la figura 13-1) y de allí al convertidor catalítico para que se limpien antes de expulsarlos por el tubo de escape. El ciclo está listo entonces para repetir otra carrera de admisión. Las válvulas se abren y se cierran en los tiempos correctos en el ciclo por medio de un árbol de levas que se acciona en sincronía con el cigüeñal mediante una transmisión de engranes, de cadena o de banda dentada. (Véase la figura 9-24.) En la figura 13-4e) se muestra la curva de presión del gas para un ciclo. En un motor de un cilindro con ciclo de Otto, la potencia se transmite al cigüeñal, a lo más en 25% del tiempo, ya que sólo hay 1 carrera de explosión por 2 revoluciones.

CICLO DE DOS TIEMPOS En la figura 13-5 se muestra el ciclo de Clerk de dos tiempos. Este motor no necesita válvulas, aunque para incrementar su eficiencia algunas veces está provisto de una válvula pasiva (operada por un diferencial de presión) en el puerto de admisión. No tiene árbol de levas o tren de válvulas o engranes impulsores de levas para aumentar el peso y volumen del motor. Como su nombre lo indica, requiere sólo de dos tiempos, o 360°, para completar su ciclo. Hay un pasaje denominado puerto de transferencia entre la cámara de combustión arriba del pistón y debajo del cárter del cigüeñal. Existe también un puerto de escape al lado del cilindro. El pistón actúa secuencialmente para cubrir o exponer estos puertos conforme se mueve hacia arriba o hacia abajo. Se cierra el cárter del cigüeñal y se monta el carburador sobre él, que sirve también como múltiple de admisión.

Al comenzar en el PMS (figura 13-5a)) el ciclo de dos tiempos se efectúa como sigue: la bujía enciende la mezcla de combustible y aire comprimido en la revolución anterior. La expansión de los gases que se queman lleva al pistón hacia abajo, transmitiendo par de torsión al cigüeñal. En alguna parte hacia abajo el pistón destapa el puerto de escape y permite que los gases quemados (y también algunos no quemados) pasen al sistema de escape.

Conforme desciende el pistón (figura *l3-5ba))* comprime la mezcla de combustible y aire en el cárter cerrado. El pistón cierra el puerto de admisión para prevenir un regreso hacia el carburador. Conforme el pistón atraviesa el puerto de transferencia en la pared del cilindro, su movimiento hacia abajo empuja una nueva carga de combustible y aire hacia arriba por el puerto de transferencia hacia la cámara de combustión. La cantidad de movimiento de los gases de escape que salen de la cámara en el otro lado ayuda a que también entre la nueva carga.

El pistón pasa por el PMI (figura 13-5), comienza a subir y expulsa los gases de combustión remanentes. Conforme el pistón asciende cierra el puerto de escape y permite la compresión de la nueva carga. A medida que el pistón se aproxima al PMS, abre el puerto de admisión (figura 13-5É/)) y succiona una nueva carga de aire y combustible desde el carburador hacia el cárter ampliado. Un poco antes de llegar al PMS se enciende la chispa y se repite el ciclo conforme el pistón pasa por el PMS.

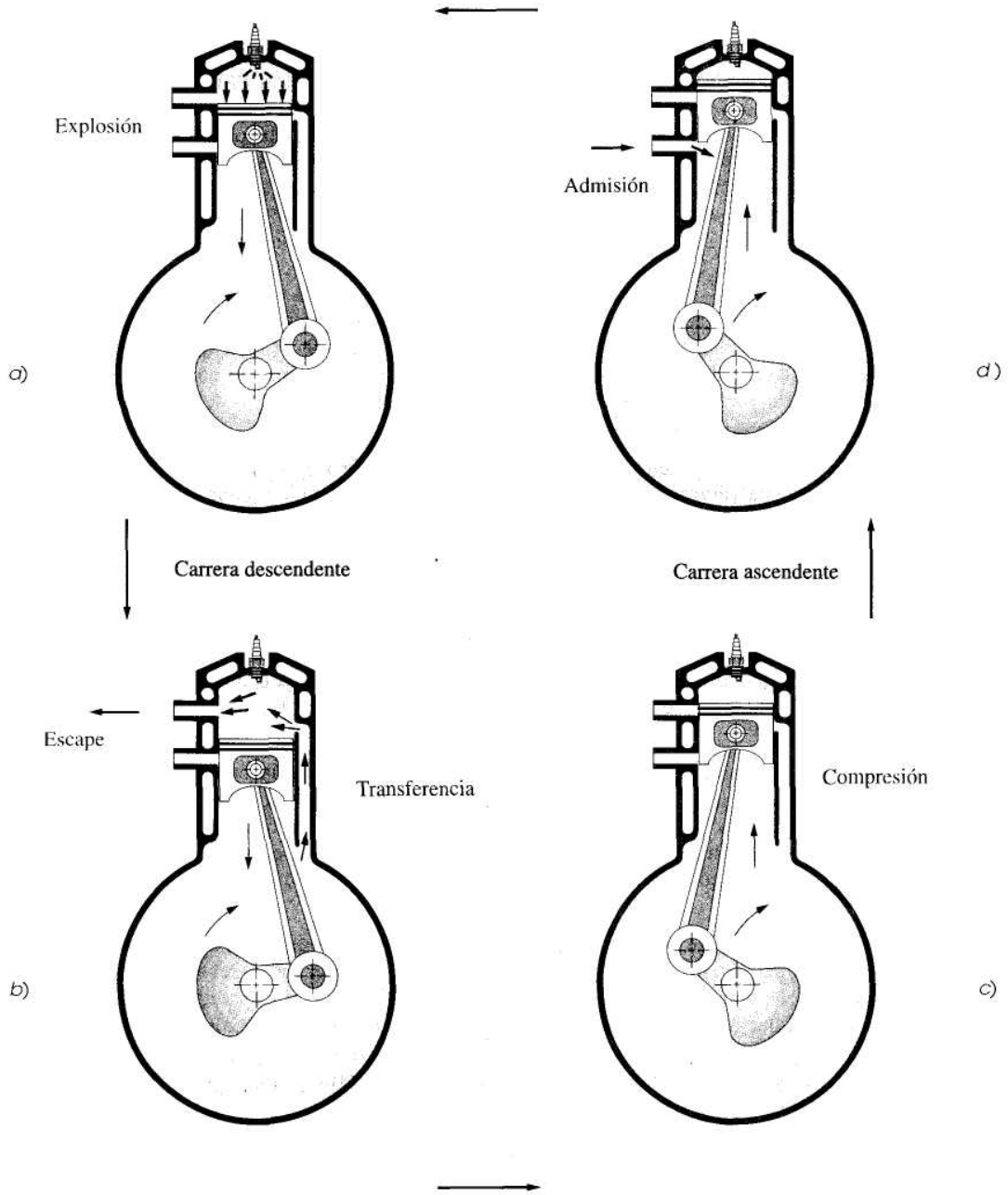


FIGURA 13-5

Ciclo Clerk de combustión de dos tiempos

Evidentemente, este ciclo Clerk no es tan eficiente como el Otto, en el que cada evento está claramente más separado de los otros. Aquí se mezclan en alto grado las diferentes fases del ciclo. Los hidrocarburos no quemados escapan del motor en mayor cantidad. Esto origina desperdicio de combustible y mayor emisión de contaminantes del motor Clerk.* No obstante, se utiliza sobre todo en tareas en que el peso reducido es de mucha importancia.

La lubricación también resulta más difícil en el motor de dos tiempos que en el de cuatro tiempos, ya que el cárter no está disponible como depósito de aceite. Por consiguiente, el aceite lubricante debe mezclarse con el combustible. Esto agrava más el problema de emisiones contaminantes, en comparación con el motor del ciclo de Otto, que quema sólo gasolina y bombea por separado su aceite lubricante a través del motor.

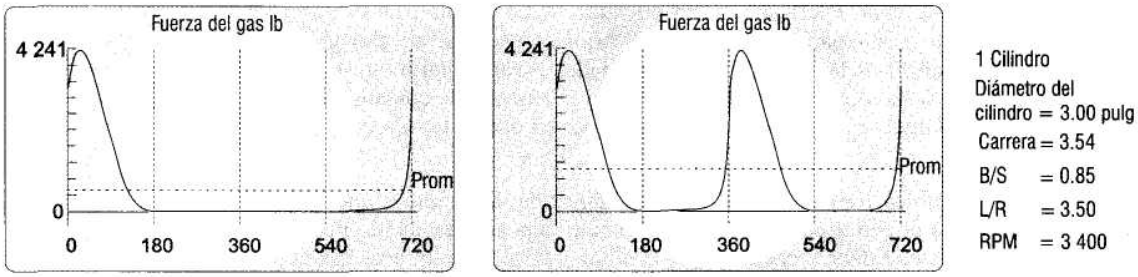
CICLO DIESEL El **ciclo Diesel** puede ser de dos o de cuatro tiempos. Es un ciclo de **encendido por compresión.** No necesita ninguna chispa para encender la mezcla de aire y combustible. El aire se comprime en el cilindro en una relación aproximada de 14 a 15 (en comparación con 8 a 10 en el motor de encendido por chispa) y se inyecta un combustible de baja volatilidad en el cilindro justo antes de que el pistón llegue al PMS. El calor de la compresión causa la explosión. Los motores diesel son más grandes y pesados que los motores de encendido por chispa para la misma potencia de salida, esto se debe a que las altas presiones y fuerzas en que operan requieren partes más pesadas y resistentes. Los motores diesel con ciclo de dos tiempos son muy comunes. El combustible diesel es un mejor lubricante que la gasolina.

FUERZA DEL GAS En todos los motores que aquí se analizan, el **par de torsión de salida** utilizable se crea por la presión explosiva del gas generada dentro del cilindro una o dos veces cada dos revoluciones del cigüeñal, dependiendo del ciclo utilizado. La magnitud y forma de esta curva de presión explosiva variará según el diseño del motor, el ciclo de funcionamiento, el combustible empleado, la velocidad de la operación y otros factores relacionados con la termodinámica del sistema. Con objeto de analizar la dinámica mecánica del sistema, se necesita mantener estable la función de la presión del gas, al tiempo que se cambian otros parámetros de diseño a fin de comparar los resultados de los cambios de diseño mecánicos. Con este propósito se ha proporcionado el programa ENGINE con una **curva de presión del gas,** cuyo valor pico es de aproximadamente 600 psi y cuya forma es similar a la curva de un motor real. En la figura 13-6 se muestra la **curva de fuerza del gas** que resulta de la función de presión del gas incluida en el programa ENGINE aplicada a un pistón de área particular, para motores de dos y cuatro tiempos. Obviamente, los cambios en el área del pistón afectarán la magnitud de la fuerza del gas para esta función de presión estable, pero no habrá ningún cambio en los parámetros del diseño del motor introducidos en esíe programa que cambien su curva de presión incorporada. Para ver esta curva de fuerza del gas corra el programa ENGINE y seleccione cualquiera de los motores de ejemplo del menú de entrada. Posteriormente calcule y trace la fuerza de gas.

* La investigación y el desarrollo están en curso para eliminar las emisiones del motor de dos tiempos mediante el uso de la inyección de combustible y la expulsión del aire comprimido de los cilindros. Estos esfuerzos pueden producir diseño de motor potencialmente aún más fuerte que cumpla las especificaciones de calidad del aire.

13.2 CINEMÁTICA DEL MECANISMO DE MANIVELA-CORREDERA

En los capítulos 4, 6, 7 y 11 se desarrollaron ecuaciones generales para la determinación exacta de las posiciones, velocidades, aceleraciones y fuerzas en el eslabonamiento de cuatro barras de juntas de pasador, y también para las dos inversiones del **eslabonamiento de manivela-corredera** mediante ecuaciones vectoriales. Se podría aplicar de nuevo



o) Ciclo de Otto de cuatro tiempos

b) Ciclo de Clerk de dos tiempos

FIGURA 13-6

Funciones de la fuerza del gas en los motores con ciclo de dos y cuatro tiempos

dicho método al análisis de eslabonamiento de manivela-corredera "estándar" empleado en la mayoría de los motores de combustión interna, como se muestra en la figura 13-7. Observe que su movimiento de corredera se ha alineado con el eje *X*. Este es un mecanismo de manivela-corredera "sin corrimiento", pues el eje de deslizamiento prolongado pasa por el pivote de la manivela. También tiene su corredera de traslación con respecto al plano de fijación estacionario; así que no habrá ninguna componente de aceleración de Coriolis (véase la sección 7.3).

La geometría simple de esta inversión particular del mecanismo de manivela-corredera permite un enfoque sencillo del análisis exacto de la posición, velocidad y aceleración de su corredera, utilizando sólo trigonometría plana y ecuaciones escalares. Dada la simplicidad de este método, y para presentar un enfoque de solución alternativa, se volverá a analizar este dispositivo.

Sea *r* el radio de la manivela y / la longitud de la biela. El ángulo de la manivela es θ, y el ángulo que forma la biela con el eje *X* es ϕ. Para cualquier velocidad angular constante de la manivela ω, el ángulo de ésta es $\theta = \omega t$. La posición instantánea del pistón es *x*. Se construyen dos triángulos rectángulos *rqs* y *Iqu*. A partir de la configuración:

$$q = r \operatorname{sen} \theta = l \operatorname{sen} \phi$$

$$\theta = \omega t \tag{13.1a}$$

$$sen\ \phi = \frac{r}{l} \operatorname{sen} \omega t$$

$$s = r \cos \omega t$$

$$u = l \cos \phi$$

$$x = s + u = r \cos \omega t + l \cos \phi \tag{13.1b}$$

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \phi} = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \operatorname{sen} \omega t\right)^2} \tag{13.1c}$$

$$x = r \cos \omega t + l \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \operatorname{sen} \omega t\right)^2} \tag{13.1d}$$

La ecuación 13. Id es una expresión exacta para la posición del pistón *x* como una función de *r*, *l* y ωt. Esto puede derivarse con respecto al tiempo a fin de obtener expresiones exactas para la velocidad y aceleración del pistón. Para un análisis de estado estable se supondrá que ω es constante.

$$\dot{x} = -r\omega\left[\operatorname{sen}\omega t + \frac{r}{2l}\frac{\operatorname{sen} 2\omega t}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\operatorname{sen}\omega t\right)^2}}\right] \tag{13.1e}$$

$$\ddot{x} = -r\omega^2\left\{\cos\omega t - \frac{r\left[l^2(1-2\cos^2\omega t) - r^2\operatorname{sen}^4\omega t\right]}{\left[l^2-(r\operatorname{sen}\omega t)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right\} \tag{13.1f}$$

Las ecuaciones 13-1 pueden resolverse fácilmente con una computadora para todos los valores necesarios de coi. Sin embargo, es un poco difícil observar la ecuación 13-lf y visualizar qué efectos tienen en la aceleración los cambios en los parámetros de diseño *r* y /. Sería conveniente obtener una expresión más simple, aun aproximada, que permitiera predecir más fácilmente los resultados de las decisiones del diseño que involucran estas variables. Para ello se empleará el teorema del binomio, y de este modo se desarrollará el radical de la ecuación 13.Id para la posición del pistón, con el fin de expresar las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración en formas más simples y aproximadas que aclararán el comportamiento dinámico del mecanismo.

La forma general del teorema del binomio es:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots \tag{13.2a}$$

El radical de la ecuación 13.Id es:

$$\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\operatorname{sen}\omega t\right)^2} = \left[1-\left(\frac{r}{l}\operatorname{sen}\omega t\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{13.2b}$$

donde, para el desarrollo del binomio:

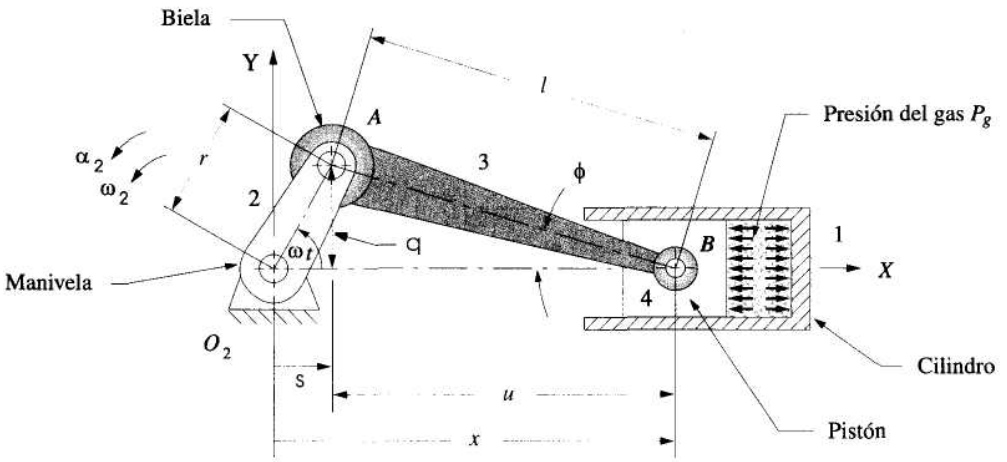
$$a = 1 \qquad b = -\left(\frac{r}{l}\operatorname{sen}\omega t\right)^2 \qquad n = \frac{1}{2} \tag{13.2c}$$

Se desarrollará:

$$1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{l}\operatorname{sen}\omega t\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{r}{l}\operatorname{sen}\omega t\right)^4 - \frac{1}{16}\left(\frac{r}{l}\operatorname{sen}\omega t\right)^6 + \cdots \tag{13.2d}$$

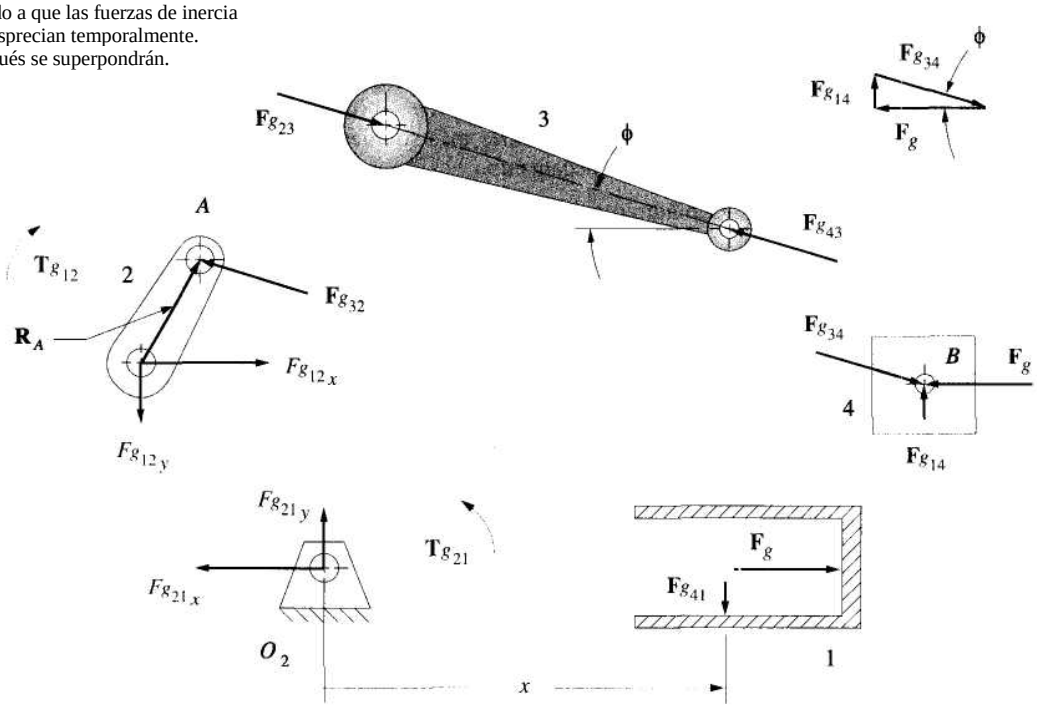
o bien:

$$1 - \left(\frac{r^2}{2l^2}\right)\operatorname{sen}^2\omega t + \left(\frac{r^4}{8l^4}\right)\operatorname{sen}^4\omega t - \left(\frac{r^6}{16l^6}\right)\operatorname{sen}^6\omega t + \cdots \tag{13.2e}$$



a) Configuración del eslabonamiento

Nota:
El eslabón 3 puede considerarse como un elemento de fuerza 2 para este análisis de fuerza del gas debido a que las fuerzas de inercia se desprecian temporalmente. Después se superpondrán.



b) Diagramas de cuerpo libre

FIGURA 13-7

Análisis de posición y de fuerza del gas de un eslabonamiento de cuatro barras de manivela-corredera. (Véase la figura 13-2, para el análisis de la fuerza de inercia.)

Cada término no constante contiene la **relación manivela-biela** *r/l* para cierta potencia. Al aplicar el sentido común de ingeniería en la representación del mecanismo de manivela-corredera de la ñgura 13-7a), se puede observar que si *r/l* fuese mayor que 1 la manivela no podría realizar una revolución completa. De hecho, aun cuando *r/l* fuera casi 1, el pistón golpearía el pivote fijo O_2 antes de que la manivela terminara su revolución. Si *r/l* es tan grande como 1/2, el ángulo de transmisión ($\pi/2 - \phi$) sería muy pequeño (véase las secciones 3.3 y 4.10) y el eslabonamiento no operaría bien. Un límite superior práctico del valor de *r/l* es de aproximadamente 1/3. La mayoría de los eslabonamientos de manivela-corredera tendrán esta **relación manivela-biela** en algún punto entre 1/3 y 1/5 para su operación normal. Si en la ecuación 13.2e se sustituye este límite superior práctico de *r/l* = 1/3, se obtiene:

$$1-\left(\frac{1}{18}\right)\text{sen}^2\,\omega t+\left(\frac{1}{648}\right)\text{sen}^4\,\omega t-\left(\frac{1}{11\,664}\right)\text{sen}^6\,\omega t+\cdots$$

$$1-0.05556\,\text{sen}^2\,\omega t+0.00154\,\text{sen}^4\,\omega t-0.00009\,\text{sen}^6\,\omega t+\cdots \tag{13.2f}$$

Es evidente que después del segundo término se pueden eliminar todos los demás con un error muy pequeño. Al sustituir esta expresión aproximada para el radical de la ecuación 13.Id, se obtiene una expresión aproximada para el desplazamiento del pistón con una fracción de error de sólo uno por ciento.

$$x \cong r\cos\omega t + l\left[1-\left(\frac{r^2}{2l^2}\right)\text{sen}^2\,\omega t\right] \tag{13.3a}$$

Al sustituir la identidad trigonométrica:

$$\text{sen}^2\,\omega t = \frac{1-\cos 2\omega t}{2} \tag{13.3b}$$

y simplificando:

$$x \cong l - \frac{r^2}{4l} + r\left(\cos\omega t + \frac{r}{4l}\cos 2\omega t\right) \tag{13.3c}$$

Al derivar con respecto a la velocidad del pistón (con ω constante):

$$\dot{x} \cong -r\omega\left(\text{sen}\,\omega t + \frac{r}{2l}\text{sen}\,2\omega t\right) \tag{13.3d}$$

Al derivar de nuevo con respecto a la aceleración (con ω constante):

$$\ddot{x} \cong -r\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right) \tag{13.3e}$$

En este caso particular el desarrollo del binomio conduce a las aproximaciones de series de Fourier de las expresiones exactas para el desplazamiento, la velocidad y aceleración del pistón. Fourier* demostró que cualquier función periódica se puede aproximar por una serie de términos seno y coseno de múltiplos enteros de la variable independiente. Recuerde que se eliminaron los términos elevados a la cuarta, sexta y subsecuentes

* En 1822 el barón Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) publicó la descripción de la serie matemática que lleva su nombre en *The Analytic Theory ofHeat*. La serie de Fourier se utiliza ampliamente en análisis armónicos de todos los tipos de sistemas físicos. Su forma general es:

$$y = \frac{a_0}{2} + (a_1\cos x + b_1\,\text{sen}\,x) + (a_2\cos 2x + b_2\,\text{sen}\,2x) + \cdots + (a_n\cos nx + b_n\,\text{sen}\,nx)$$

potencias en el desarrollo del binomio que habrían aportado los términos eos 4cof, eos 6o)í, etcétera, en esta expresión. Estas funciones de múltiplos del ángulo se denominan **armónicas** del término fundamental eos ωt. El término eos cof se repite una vez por revolución de la manivela y se denomina frecuencia fundamental o **componente primaria.** La segunda armónica, eos$2\omega t$, se repite dos veces por revolución de la manivela y se denomina **componente secundaria.** Las armónicas de orden superior se eliminaron cuando se truncó la serie. El término constante en la función de desplazamiento es la **componente de CD** o **valor promedio.** La función completa es la suma de sus armónicas. En la forma de la serie de Fourier de las expresiones para el desplazamiento y sus derivadas se aprecian las contribuciones relativas de las diversas componentes armónicas de estas funciones. Este enfoque resultará muy útil cuando se intente equilibrar dinámicamente un diseño de motor.

El programa ENGINE calcula la posición, velocidad y aceleración del pistón de acuerdo con las ecuaciones 13.3c, d y e. En las figuras 13-8a), *b)* y *c)* se muestran estas funciones para este motor de ejemplo en el programa como se granearon para una constante de manivela ω sobre dos revoluciones completas. La curva de aceleración muestra más claramente los efectos del segundo término armónico, ya que el coeficiente del término es mayor que su correspondiente en cualquiera de las otras dos funciones. El término fundamental (-eos coi) da una función armónica pura con un periodo de 360°. Este término fundamental domina la función, ya que tiene el coeficiente mayor en la ecuación 13.3e. La parte superior plana y la ligera depresión en el pico positivo de la aceleración de la figura 13-8c) se genera al sumar o restar la segunda armónica eos$2\omega t$ de la fundamental. Advierta el valor tan alto de la aceleración pico del pistón, aun cuando el motor se encuentra a una velocidad media de 3 400 rpm. ¡Equivale a 747 *g*\ A 6 000 rpm esto aumenta a aproximadamente 1 300 *g*. Este es un motor de tamaño mediano, de 3 pulgadas (76 mm) de diámetro de cilindro y 3.54 pulgadas (89 mm) de carrera, con 25 pulgadas^3 (400 cm^3) de desplazamiento por cilindro.

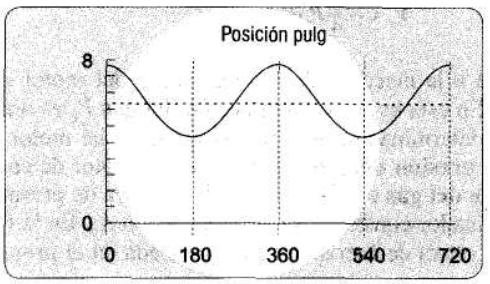
SUPERPOSICIÓN Ahora se analizará el comportamiento dinámico del motor unicilíndrico con base en el modelo cinemático aproximado desarrollado anteriormente. Puesto que se tienen que considerar diversas fuentes de acción dinámica, se empleará el método de superposición para analizarlas por separado y después combinar sus efectos. Primero se considerarán las **fuerzas** y **pares de torsión** debidos a las **fuerzas de expansión del gas** en el cilindro que impulsan el motor. Después se analizarán las **fuerzas de inercia y pares de torsión** que resultan del movimiento a alta velocidad de los elementos. La fuerza total y el estado del par de torsión de la máquina en cualquier instante será la suma de estas componentes. Finalmente se considerarán las **fuerzas de sacudimiento y pares de torsión** sobre el plano de fijación y las **fuerzas de pasador** en el eslabonamiento que resultan de la combinación de las fuerzas aplicadas y dinámicas sobre el sistema.

13

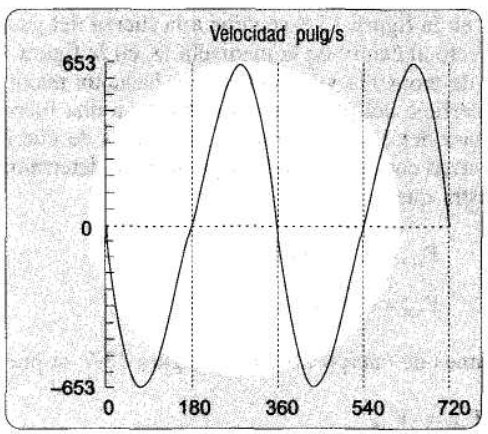
13.3 FUERZA DEL GAS Y PAR DE TORSIÓN DEL GAS

La **fuerza del gas** se debe a la presión ejercida por la explosión de la mezcla combustible-aire que incide sobre la cabeza del pistón, como se muestra en la figura 13-3. Sea F_g = fuerza del gas, P_g = presión del gas, A_p = área del pistón y B = diámetro del cilindro, que es igual al diámetro del pistón. Entonces:

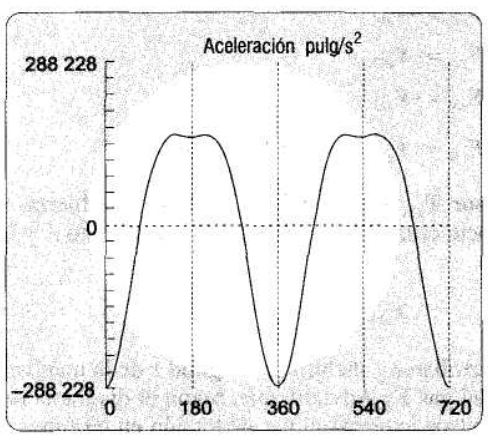
a)



b)



c)



1 Cilindro
Ciclo de 4 tiempos
Diámetro
del cilindro = 3.00 pulg
Carrera = 3.54
B/S = 0.85
L/R = 3.50
RPM = 3 400

FIGURA 13-8

Funciones de posición, velocidad y aceleración para un motor de un cilindro

$$\mathbf{F}_g = -P_g A_p \,\hat{\mathbf{i}}; \qquad A_P = \frac{\pi}{4} B^2$$
$$\mathbf{F}_g = -\frac{\pi}{4} P_g B^2 \,\hat{\mathbf{i}} \tag{13.4}$$

El signo negativo se debe a la elección de la orientación del motor en el sistema coordenado de la figura 13-3. En esta expresión la **presión del gas** P_a es una función del ángulo de manivela coi y está determinada por la termodinámica del motor. En la figura 13-4 se muestra una **curva de presión del gas** común para un motor de cuatro tiempos. La forma de la **curva de fuerza del gas** es idéntica a la de la curva de presión del gas, ya que sólo difiere por un multiplicador constante, el área del pistón A_p. En la figura 13-6 se muestra la aproximación de la curva de fuerza del gas empleada en el programa ENGINE para motores de cuatro y dos tiempos.

El **par de torsión del gas** en la figura 13-9 se debe a la fuerza del gas que actúa en un brazo de momento con respecto al centro de la manivela O_2 en la figura 13-7. Conforme gira la manivela este brazo de momento varía desde cero hasta un máximo. La fuerza del gas distribuida sobre la superficie del pistón se ha reducido a una fuerza simple que actúa a través del centro de masa del eslabón 4 en los diagramas de cuerpo libre de la figura 13-7¿>). El sistema de fuerzas concurrentes en el punto *B* se determina con base en el diagrama vectorial que muestra que:

$$\mathbf{F}_{g14} = F_g \tan\phi \,\hat{\mathbf{j}} \tag{13.5a}$$

$$\mathbf{F}_{g34} = F_g \,\hat{\mathbf{i}} - F_g \tan\phi \,\hat{\mathbf{j}} \tag{13.5b}$$

De acuerdo con los diagramas de cuerpo libre de la figura 13-7 se puede ver que:

$$\mathbf{F}_{g41} = -\mathbf{F}_{g14}$$
$$\mathbf{F}_{g43} = -\mathbf{F}_{g34}$$
$$\mathbf{F}_{g23} = -\mathbf{F}_{g43}$$
$$\mathbf{F}_{g32} = -\mathbf{F}_{g23}$$

así:
$$\mathbf{F}_{g32} = -\mathbf{F}_{g34} = -F_g \,\hat{\mathbf{i}} + F_g \tan\phi \,\hat{\mathbf{j}} \tag{13.5c}$$

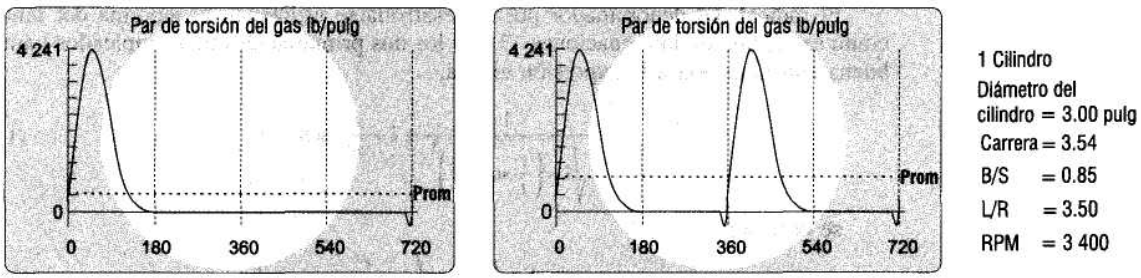
El **par de torsión impulsor** $\mathbf{T}_{g21}$ en el eslabón 2 debido a la fuerza del gas puede determinarse a partir del producto cruz del vector de posición al punto A y la fuerza en el punto *A:*

$$\mathbf{T}_{g21} = \mathbf{R}_A \times \mathbf{F}_{g32} \tag{13.6a}$$

13

Esta expresión puede desarrollarse e incluirá la longitud *r* de la manivela y los ángulos θ y ϕ, así como la fuerza del gas $\mathbf{F}_g$. Advierta que, según el diagrama de cuerpo libre para el eslabón 1, también se puede expresar el par de torsión en términos de las fuerzas $\mathbf{F}_{g14}$ o $\boldsymbol{F}_{g41}$ que actúan siempre perpendicularmente al movimiento de la corredera (despreciando la fricción) y la distancia *x*, la cual es su brazo de momento instantáneo con respecto a O_2. El par de torsión de reacción $\mathbf{T}_{g12}$ debido a la fuerza del gas que intenta inclinar el plano de fijación es:

$$\mathbf{T}_{g12} = F_{g41} \cdot x \,\hat{\mathbf{k}} \tag{13.6b}$$



a) Ciclo de Otto de cuatro tiempos

b) Ciclo de Clerk de dos tiempos

FIGURA 13-9

Funciones del par de torsión del gas en los motores de dos y cuatro tiempos

Si alguna vez ha abierto violentamente la mariposa del motor de un automóvil en marcha, quizás habrá notado que el motor se mueve hacia un lado, ya que se inclina en su montaje por el par de torsión de reacción. El par de torsión impulsor $\mathbf{T}_{g21}$ es el negativo de este par de torsión de reacción:

$$\mathbf{T}_{g21} = -\mathbf{T}_{g12}$$

$$\mathbf{T}_{g21} = -F_{g41} \cdot x\ \hat{\mathbf{k}} \tag{13.6c}$$

y: $$F_{g14} = -F_{g41}$$

así: $$\mathbf{T}_{g21} = F_{g14} \cdot x\ \hat{\mathbf{k}} \tag{13.6d}$$

La ecuación 13.6d da una expresión para el **par de torsión del gas** que implica el desplazamiento lineal del pistón *x* para el que ya se ha derivado la ecuación 13.3a. Al sustituir la ecuación 13.3a por *x* y la magnitud de la ecuación 13.5a por F_{g14} se obtiene:

$$\mathbf{T}_{g21} = \left(F_g \tan\phi\right)\left[l - \frac{r^2}{4l} + r\left(\cos\omega t + \frac{r}{4l}\cos 2\omega t\right)\right]\hat{\mathbf{k}} \tag{13.6e}$$

La ecuación 13.6e contiene el ángulo de la biela ϕ y la variable independiente, es decir, el ángulo de manivela ωt. Sería conveniente tener una expresión que sólo incluyera a ωt. A partir de la geometría generada de la figura 13-7a) se puede sustituir una expresión para tan ϕ.

$$\tan\phi = \frac{q}{u} = \frac{r \operatorname{sen}\omega t}{l\cos\phi} \tag{13.7a}$$

Al sustituir la ecuación 13.1c por eos ϕ:

$$\tan\phi = \frac{r \operatorname{sen}\omega t}{l\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\operatorname{sen}\omega t\right)^2}} \tag{13.7b}$$

El radical del denominador puede desarrollarse utilizando el teorema del binomio como se efectuó en las ecuaciones 13.2, y los dos primeros términos empleados para una buena aproximación a la expresión exacta,

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\operatorname{sen}\omega t\right)^2}} \cong 1+\frac{r^2}{2l^2}\operatorname{sen}^2\omega t \tag{13.7c}$$

se obtiene:

$$\tan\phi \cong \frac{r}{l}\operatorname{sen}\omega t\left(1+\frac{r^2}{2l^2}\operatorname{sen}^2\omega t\right) \tag{13.7d}$$

Sustituyendo esto en la ecuación 13.6e para el par de torsión del gas:

$$\mathbf{T}_{g21} \cong F_g\left[\frac{r}{l}\operatorname{sen}\omega t\left(1+\frac{r^2}{2l^2}\operatorname{sen}^2\omega t\right)\right]\left[l-\frac{r^2}{4l}+r\left(\cos\omega t+\frac{r}{4l}\cos 2\omega t\right)\right]\hat{\mathbf{k}} \tag{13.8a}$$

Se desarrolla esta expresión y se desprecian los términos que contengan la relación manivela-biela *rll* elevada a cualquier potencia mayor que uno, ya que éstos tendrán coeficientes muy pequeños como se vio en la ecuación 13.2. El resultado es una expresión más simple, pero aún más aproximada para el par de torsión del gas:

$$\mathbf{T}_{g21} \cong F_g\, r\operatorname{sen}\omega t\left(1+\frac{r}{l}\cos\omega t\right) \tag{13.8b}$$

Observe que el **valor exacto** de este **par de torsión del gas** siempre puede calcularse a partir de la combinación de las ecuaciones 13.Id, 13.5a y 13.6d, o del desarrollo de la ecuación 13.6a, si usted requiere una respuesta más exacta. Para los propósitos del diseño la ecuación aproximada 13.8b será siempre la más conveniente. El programa ENGINE calcula el par de torsión del gas utilizando la ecuación 13.8b y su curva de presión del gas incorporada para generar la función de la fuerza del gas. En la figura 13-9 se muestran las gráficas del par de torsión del gas para ciclos de dos y cuatro tiempos. Observe la semejanza en forma con la de la curva de fuerza del gas de la figura 13-6. Advierta también que la de dos tiempos tiene en teoría el doble de potencia disponible que la de cuatro tiempos; todos los otros factores son iguales, ya que hay dos veces más impulsos de par de torsión por unidad de tiempo. No obstante, la poca eficiencia de la de dos tiempos reduce esta ventaja teórica.

13

13.4 MASAS EQUIVALENTES

Para efectuar un análisis de fuerzas dinámicas completo de cualquier mecanismo se necesitan conocer las propiedades geométricas (masa, centro de gravedad, momento de inercia) de los eslabones móviles tal como se analizó en los capítulos anteriores (véase las secciones 10.3 a 10.8 y el capítulo 11). Esto es fácil de realizar si se diseñó detalladamente el eslabón y se conocen sus dimensiones. Cuando se diseña el mecanismo en borrador por lo común no se conoce el nivel de detalle de la geometría de los eslabones. Sin embargo, se debe realizar cierta estimación de sus parámetros geométricos para comenzar el proceso de iteración que eventualmente concurrirá en un diseño detallado.

En el caso de este mecanismo de manivela-corredera, la **manivela** se encuentra en **rotación pura y el pistón en traslación pura.** Suponiendo ciertas configuraciones y materiales razonables se pueden efectuar aproximaciones de sus parámetros dinámicos. Sus movimientos cinemáticos se determinan fácilmente. En las ecuaciones 13.3 se han derivado las expresiones para el movimiento del pistón. Asimismo, si se equilibra la manivela rotatoria como se describe y recomienda en el capítulo anterior, entonces el *CG* de la manivela no tendrá movimiento en su centro O_2 y no contribuirá a las fuerzas dinámicas. Esto se realizará en una sección posterior.

La biela se encuentra en movimiento complejo. Para efectuar un análisis dinámico exacto como se dedujo en la sección 11.5 se necesita determinar la aceleración lineal de su *CG* para todas las posiciones. Al principio del diseño la localización del *CG* de la biela no se define exactamente. Para "elevar el potencial" del diseño es necesario un modelo simplificado de esta biela, que se puede perfeccionar más adelante conforme se genere mayor información dinámica acerca del diseño del motor. Los requerimientos para un modelo dinámicamente equivalente se expusieron en la sección 10.2 y por conveniencia se repiten aquí en la tabla 13-1.

Si se pudiera modelar la biela que aún no se diseña como dos masas puntuales concentradas, una en el muñón de manivela (punto *A* en la figura 13.7) y otra en el pasador de pistón (punto *B* en la figura 13-7), se sabría por lo menos cuáles son los movimientos de estas masas. La masa concentrada en *A* estaría en rotación pura como parte de la manivela, y la masa concentrada en el punto *B* estaría en traslación pura como parte del pistón. Estas masas puntuales concentradas no tienen dimensión y se supone que se conectan con una barra impresionante, sin masa pero rígida.*

MODELO DINÁMICAMENTE EQUIVALENTE En la figura 13-10a) se muestra una biela común. En la figura 13-lOfr) se muestra un modelo genérico de las dos masas de la biela. Una masa m, se localiza a una distancia /, del *CG* de la barra original y la segunda masa m_p a una distancia l_p del *CG*. La masa de la parte original es m_i y su momento de inercia con respecto a su *CG* es $/_{C3}$. Al expresar matemáticamente los tres requisitos para la equivalencia dinámica de la tabla 13-1 en términos de estas variables se obtiene:

$$m_p + m_t = m_3 \tag{13.9a}$$

$$m_p l_p = m_t l_t \tag{13.9b}$$

$$m_p l_p^2 + m_t l_t^2 = I_{G3} \tag{13.9c}$$

Existen cuatro incógnitas en estas tres ecuaciones, m_p, l_p, m_t, l_t, lo que significa que se debe elegir un valor para cualquier variable a fin de resolver el sistema. Se elegirá la distancia I, que será igual a la distancia al pasador del pistón, l_b, como se muestra en la figura 13-10c). Esto colocará una masa en una localización deseada. Al resolver simultáneamente las ecuaciones 13.9a y 13.9b con dicha sustitución se obtienen las expresiones para las dos masas concentradas:

$$m_p = m_3 \frac{l_b}{l_p + l_b}$$

$$m_b = m_3 \frac{l_p}{l_p + l_b} \tag{13.9d}$$

* Estos modelos de masas concentradas deben fabricarse con materiales *muy* especiales. El *Unobtainium 206* tiene la propiedad de densidad infinita, por lo que no ocupa espacio y puede utilizarse para "masas puntuales". El *Unobtainium 208* tiene una rigidez infinita y masa cero, por lo tanto, puede utilizarse para barras rígidas pero "sin masa".

a) Biela original

b) Modelo genérico con dos masas

c) Modelo dinámico exacto

(i) Modelo aproximado

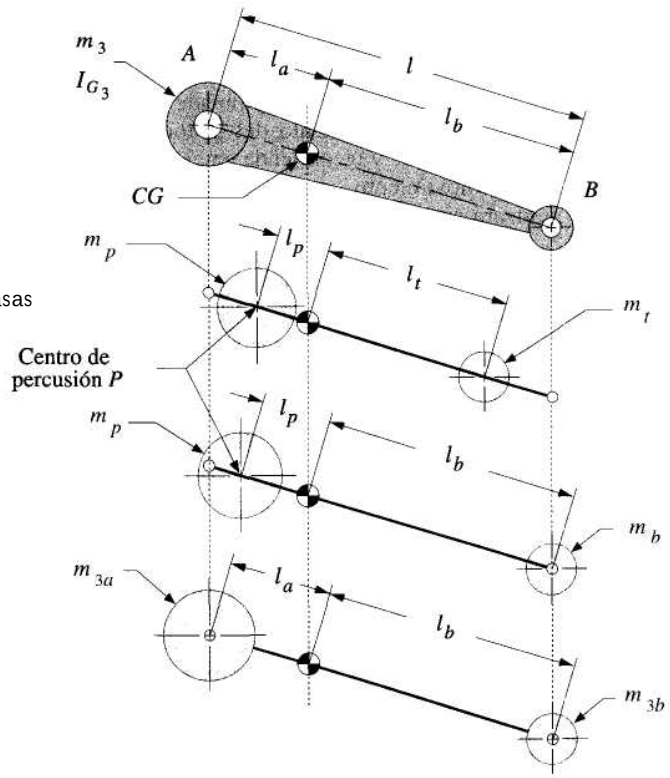


FIGURA 13-10

Modelos dinámicos de masa concentrada de una biela

Sustituyendo la ecuación 13.9d en la 13.9c se obtiene una relación entre l_p y l_b:

$$m_3 \frac{l_b}{l_p + l_b} l_p^2 + m_3 \frac{l_p}{l_p + l_b} l_p^2 = I_{G3} = m_3 l_p l_b \tag{13.9b}$$

$$l_p = \frac{I_{G3}}{m_3 l_b}$$

13

Consulte la sección 10.8 y la ecuación 10.13 que definen el *centro de percusión* y su relación geométrica con un *centro de rotación* correspondiente. La ecuación 13.9e es igual a la ecuación 11.13 (excepto por el signo que se debe a una elección arbitraria de la orientación del eslabón en el sistema coordenado). La distancia l_p es la localización del centro de percusión correspondiente a un centro de rotación en l_b. Así que la segunda masa m_p debe colocarse en el **centro de percusión** *P* del eslabón (utilizando el punto *B* como su centro de rotación) para obtener una equivalencia dinámica exacta. Las masas deben definirse como en la ecuación 13.9d.

TABLA 13-1 Requerimientos para la equivalencia dinámica

1 La masa del modelo debe ser igual a la del cuerpo original.
2 El centro de gravedad debe estar en la misma localización que el del cuerpo original.
3 El momento de inercia debe ser igual que el del cuerpo original.

La configuración de la biela común, como se muestra en las figuras 13-2 y 13-10a), es grande en el extremo del muñón de manivela *(A)* y pequeña en el extremo del pasador del pistón *(B).* Esto coloca el *CG* cerca del "extremo grande". El centro de percusión *P* estará aún más cerca del extremo grande de lo que estaría el *CG.* Por esta razón se puede colocar la segunda masa concentrada, que pertenece a *P,* en el punto *A* con un error relativamente pequeño en la exactitud del modelo dinámico. Este modelo aproximado es adecuado para los cálculos de diseño iniciales. Una vez establecida una configuración de diseño viable, se tiene que efectuar un análisis de fuerzas completo y exacto con los métodos del capítulo 11 antes de considerar terminado el diseño.

Al sustituir la distancia l_a por l_p y considerando las masas concentradas a esas distancias m_{3a} y m_{36}, para reflejar su identidad con el eslabón 3, y con los puntos A y 8 se vuelven a escribir las ecuaciones 13.9d.

sea: $$l_p = l_a$$

entonces: $$m_{3a} = m_3 \frac{l_b}{l_a + l_b} \qquad (13.10a)$$

y: $$m_{3b} = m_3 \frac{l_a}{l_a + l_b} \qquad (13.10b)$$

Estas ecuaciones determinan la cantidad de la masa total de la biela que se debe colocar en cada extremo para modelar dinámicamente dicho eslabón en forma aproximada. En la figura 13-10á) se muestra este modelo dinámico. Si no se tiene información sobre la forma de la biela, al principio de un diseño se puede obtener información preliminar de las fuerzas dinámicas mediante el método empírico de colocar dos tercios de la masa de la biela en el muñón de manivela y un tercio en el pasador de pistón.

MODELO ESTÁTICAMENTE EQUIVALENTE ES posible crear un modelo similar de la masa concentrada de la manivela. Aun cuando se intente equilibrar la manivela antes de que se realice, por lo general se modelará inicialmente *desequilibrada* como se muestra en la figura 13-11. Su *CG* se localiza a cierta distancia r_{G2} del pivote, O_2, en la línea hasta el muñón de la manivela, *A.* Sería conveniente modelarla como una masa concentrada en *A* en una barra sin masa pivotada en O_2. Si el interés principal es un análisis de estado estable, entonces la velocidad de la manivela oo se mantendrá constante. Una ausencia de aceleración angular en la manivela permite que se utilice un modelo estáticamente equivalente debido a que la ecuación T = *la* será cero sin importar valor de /. Un modelo estáticamente equivalente necesita tener sólo una masa equivalente y los primeros momentos equivalentes, como se muestra en la tabla 13-2. No se necesita igualar los momentos de inercia. Se modelará como dos masas concentradas, una en el punto *A* y otra en el pivote fijo O_2. Al escribir los dos requerimientos para la equivalencia estática de la tabla 13-2:

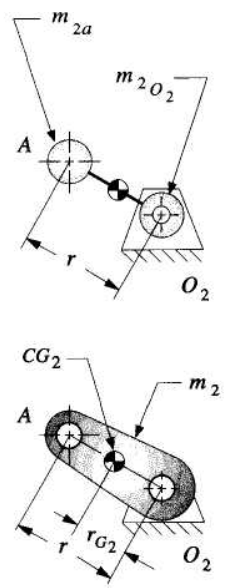


FIGURA 13-11
Modelo de la masa concentrada estáticamente equivalente de una manivela

$$m_2 = m_{2a} + m_{2O_2}$$

$$m_{2a} r = m_2 r_{G2} \tag{13.11}$$

$$m_{2a} = m_2 \frac{r_{G_2}}{r}$$

La masa concentrada m_{2a} puede colocarse en el punto *A* para representar la manivela desequilibrada. La segunda masa concentrada en el pivote fijo 0_2 no es necesaria para ningún cálculo, ya que tal punto es estacionario.

Estas simplificaciones llevan al modelo de parámetros concentrados del eslabonamiento de manivela-corredera mostrado en la figura 13-12. El muñón de manivela, punto *A,* tiene dos masas concentradas, la masa equivalente de la manivela $m^{\wedge}$ y la porción de la biela m_{3a}. La suma de éstas es m_A. En el pasador del pistón, punto *B,* se concentran también dos masas, la masa del pistón m_4 y la porción restante de la masa de la biela m_{3b}. Su suma es m_B. Este modelo tiene masas que están en rotación pura (m_A) o en traslación pura (m_B), por lo tanto, es muy fácil analizarlo dinámicamente.

$$m_A = m_{2a} + m_{3a}$$

$$m_B = m_{3b} + m_4 \tag{13.12}$$

VALOR DE LOS MEDIOS *El valor de construir modelos simples de masas concentradas de sistemas complejos se incrementa con la complejidad del sistema que se diseñará.* Tiene poco sentido dedicar mucho tiempo a realizar análisis de diseños sofisticados y detallados, que al principio se definen tan mal que su viabilidad conceptual es dudosa. Es mejor obtener una respuesta rápida y razonablemente aproximada que señale que se necesita volver a considerar el concepto, en vez de desperdiciar mucho tiempo para llegar a la misma conclusión con más lugares decimales.

13.5 FUERZAS DE INERCIA Y DE SACUDIMIENTO

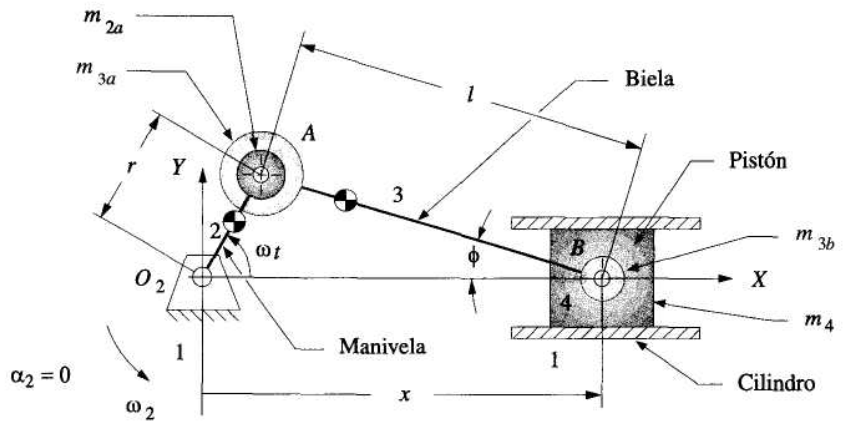
El modelo simplificado de masas concentradas de la figura 13-12 se utiliza en el desarrollo de expresiones para las fuerzas y pares de torsión debidos a las aceleraciones de las masas en el sistema. El método de d'Alembert es útil para visualizar los efectos de estas masas móviles en el sistema y en el plano de fijación. En consecuencia, los diagramas de cuerpo libre de la figura 13-12£>) muestran las fuerzas de inercia de d'Alembert que actúan sobre las masas en los puntos A y *B.* De nuevo se desprecia la fricción. La aceleración para el punto *B* se da en la ecuación 13.3e. La aceleración del punto *A* en rotación pura se obtiene al derivar dos veces el vector de posición R_A, suponiendo una velocidad constante en el cigüeñal co, lo que da:

13

TABLA 13-2 Requerimientos para la equivalencia estática

1 La masa del modelo debe ser igual que la del cuerpo original.
2 El centro de gravedad debe estar en la misma localización que el del cuerpo original.

o) Modelo dinámico



b) Diagramas de cuerpo libre

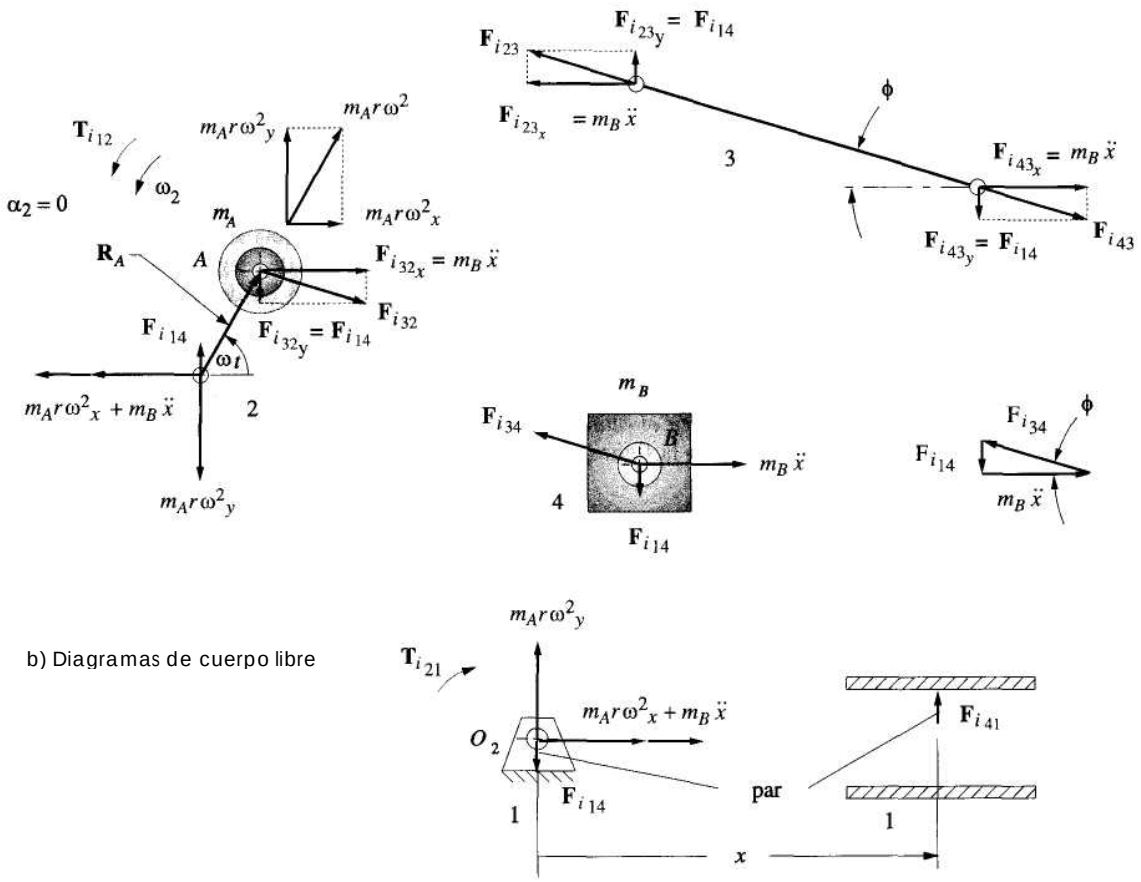


FIGURA 13-12

Modelo dinámico de masa concentrada de una manivela-corredera; las flechas indican la dirección y sentido del vector, los rótulos, la magnitud

$$\mathbf{R}_A = r\cos\omega t\,\hat{\mathbf{i}} + r\,\text{sen}\,\omega t\,\hat{\mathbf{j}}$$
$$\mathbf{a}_A = -r\omega^2\cos\omega t\,\hat{\mathbf{i}} - r\omega^2\,\text{sen}\,\omega t\,\hat{\mathbf{j}} \tag{13.13}$$

La fuerza total de inercia F, es la suma de la fuerza centrífuga (de inercia) en el punto A y la fuerza de inercia en el punto *B.*

$$\mathbf{F}_i = -m_A\,\mathbf{a}_A - m_B\,\mathbf{a}_B \tag{13.14a}$$

Al separarla en las componentes *x* y y:

$$F_{i_x} = -m_A\,(-r\omega^2\cos\omega t) - m_B\ddot{x} \tag{13.14b}$$

$$F_{i_y} = -m_A\,(-r\omega^2\,\text{sen}\,\omega t) \tag{13.14c}$$

Advierta que sólo la aceleración del pistón afecta a la componente *x.* Al sustituir la ecuación 13.3e en la ecuación 13.14b:

$$F_{i_x} \cong -m_A\left(-r\omega^2\cos\omega t\right) - m_B\left[-r\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right)\right]$$
$$F_{i_y} = -m_A\left(-r\omega^2\,\text{sen}\,\omega t\right) \tag{13.14d}$$

Observe que las fuerzas de inercia en la dirección x tienen componentes primarias en la frecuencia de manivela, y las fuerzas secundarias (segunda armónica) en dos veces la frecuencia de manivela. También existen armónicas pares de magnitud pequeña y grande que se truncaron en el desarrollo binomial de la función de desplazamiento lineal del pistón. La fuerza debida a la masa rotatoria en el punto *A* sólo tiene una componente primaria.

La **fuerza de sacudimiento** se definió en la sección 11.8 como *la suma de todas las fuerzas que actúan en el plano de fijación.* De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre para el eslabón 1 en la figura 13-12:

$$\sum F_{s_x} \cong -m_A\left(r\omega^2\cos\omega t\right) - m_B\left[r\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right)\right]$$
$$\sum F_{s_y} = -m_A\left(r\omega^2\,\text{sen}\,\omega t\right) + F_{i41} - F_{i41} \tag{13.14e}$$

Advierta que la fuerza lateral del pistón en la pared del cilindro F_{i41} se cancela con una fuerza igual y opuesta F_{i14} que pasa a través de la biela y el cigüeñal hacia el pasador principal en $a + O_2$. Estas dos fuerzas crean un par que proporciona el par de torsión de sacudimiento. La fuerza de sacudimiento F. es igual a la negativa de la fuerza de inercia.

$$\mathbf{F}_s = -\mathbf{F}_i \tag{13.14f}$$

Observe que la fuerza del gas de la ecuación 13.4 no contribuye a la fuerza de sacudimiento. Sólo las fuerzas de inercia y las fuerzas externas ocasionan fuerzas de sacudimiento. La fuerza del gas es una fuerza interna que se cancela en el propio meca-

nismo. Actúa de manera igual y opuesta en la parte superior del pistón y en la cabeza del cilindro, como se muestra en la figura 13-7.

El programa ENGINE calcula la fuerza de sacudimiento con una co constante para cualquier combinación de parámetros de eslabonamientos introducidos. En la figura 13-13 se muestra la gráfica de fuerzas de sacudimiento para el mismo motor desequilibrado del ejemplo incorporado, como se muestra en la gráfica de aceleración (figura 13-8c)). La orientación del eslabonamiento es la misma que en la figura 13-12 con el eje *x* horizontal. La componente *x* es mayor que la componente y debido a la alta aceleración del pistón. Se presume que las fuerzas serán muy grandes a pesar de que éste sea un motor relativamente pequeño (con 0.4 litros por cilindro) que funcionará a una velocidad moderada (3 400 rpm). Después se investigarán las técnicas para reducir o eliminar esta fuerza de sacudimiento del motor. Ésta es una característica no deseada que genera ruido y vibración.

13.6 PARES DE TORSIÓN DE INERCIA Y DE SACUDIMIENTO

El **par de torsión de inercia** resulta de la acción de las fuerzas de inercia en un brazo de momento. La fuerza de inercia en el punto *A* en la figura 13-12 tiene dos componentes, radial y tangencial. (La componente radial no tiene brazo de momento.) La componente tangencial tiene un brazo de momento de radio de manivela *r*. Si la ω de la manivela es constante, la masa en *A* no contribuirá al par de torsión de inercia. La fuerza de inercia en *B* tiene una componente distinta de cero, perpendicular a la pared del cilindro excepto cuando el pistón se encuentra en el PMS o el PMI. Como se hizo para el par de torsión del gas, se puede expresar el par de torsión de inercia en términos del par $-\mathbf{F}_{i41}$, $\mathbf{F}_{i41}$, cuyas fuerzas actúan siempre perpendicularmente al movimiento de la corredera (despreciando la fricción) y la distancia *x*, que es su brazo de momento instantáneo (véase figura 13.12). El par de torsión de inercia es:

$$\mathbf{T}_{i21} = \left(F_{i41} \cdot x\right)\hat{\mathbf{k}} = \left(-F_{i14} \cdot x\right)\hat{\mathbf{k}} \tag{13.15a}$$

Al sustituir por F_{i14} (véase la figura 13-12¿>)) y por *x* (véase la ecuación 13.3a) se obtiene:

$$\mathbf{T}_{i21} \equiv -\left(-m_B \ddot{x} \tan\phi\right)\left[l - \frac{r^2}{4l} + r\left(\cos\omega t + \frac{r}{4l}\cos 2\omega t\right)\right]\hat{\mathbf{k}} \tag{13.15b}$$

Anteriormente se desarrollaron expresiones para *x con doble punto* (ecuación 13.3e) y tan ϕ (ecuación 13.7d) que ahora se sustituirán:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{i21} \equiv m_B &\left[-r\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right)\right] \\ &\cdot \left[\frac{r}{l}\,\text{sen}\,\omega t\left(1 + \frac{r^2}{2l^2}\,\text{sen}^2\,\omega t\right)\right] \\ &\cdot \left[l - \frac{r^2}{4l} + r\left(\cos\omega t + \frac{r}{4l}\cos 2\omega t\right)\right]\hat{\mathbf{k}}\end{aligned} \tag{13.15c}$$

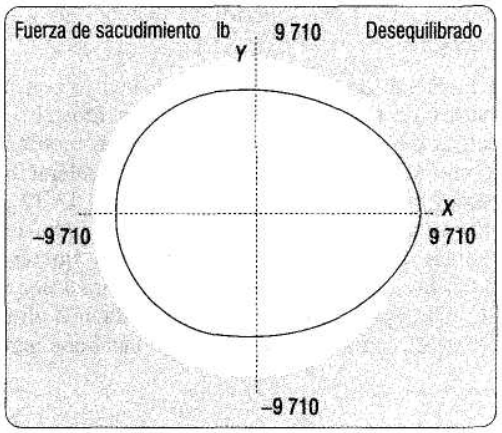


FIGURA 13-13

Fuerza de sacudimiento en un eslabonamiento de manivela-corredera desequilibrado

Desarrollando esto y eliminando después todos los términos con coeficientes que contengan *rll* a potencias mayores que uno, se tendrá la siguiente ecuación aproximada para el par de torsión de inercia con ω del eje constante:

$$\mathbf{T}_{i_{21}} \cong -m_B r^2 \omega^2 \operatorname{sen} \omega t \left(\frac{r}{2l} + \cos \omega t + \frac{3r}{2l} \cos 2\omega t \right) \hat{\mathbf{k}} \tag{13.15d}$$

Esto contiene productos de términos de seno y coseno. El expresarlo completamente en términos de armónicas será instructivo, así que se sustituyen las identidades:

$$2 \operatorname{sen} \omega t \cos 2\omega t = \operatorname{sen} 3\omega t - \operatorname{sen} \omega t$$

$$2 \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t = \operatorname{sen} 2\omega t$$

$$\text{para obtener:} \quad \mathbf{T}_{i_{21}} \cong \frac{1}{2} m_B r^2 \omega^2 \left(\frac{r}{2l} \operatorname{sen} \omega t - \operatorname{sen} 2\omega t \frac{3r}{2l} \operatorname{sen} 3\omega t \right) \hat{\mathbf{k}} \tag{13.15f}$$

Esto muestra que el **par de torsión de inercia** tiene un término de tercera armónica, así como uno de primera y uno de segunda. La segunda armónica es el término dominante, ya que tiene el coeficiente mayor debido a que *rll* es siempre menor que 2/3.

El par de torsión de sacudimiento es igual al par de torsión de inercia.

$$\mathbf{T}_s = \mathbf{T}_{i_{21}} \tag{13.15f}$$

El programa ENGINE calcula el par de torsión de inercia de la ecuación 13.15e. En la figura 13-14 se muestra una gráfica del par de torsión de inercia para este motor de ejemplo incorporado. Observe el predominio de la segunda armónica. La magnitud ideal para el par de torsión de inercia es cero, ya que es parásita. Su valor promedio siempre es cero, de modo que *no contribuye en nada al par de torsión impulsor neto.* Simplemente crea grandes oscilaciones positivas y negativas en el par de torsión total que aumentan la

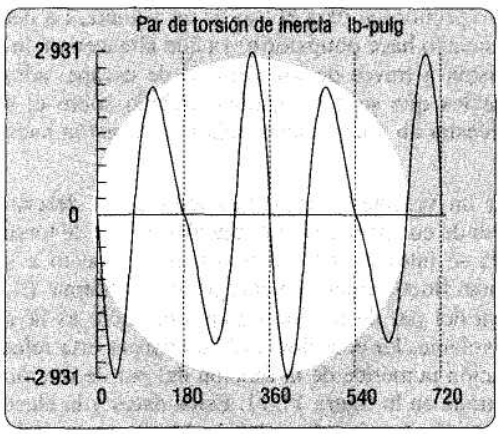


FIGURA 13-14

Par de torsión de inercia en el eslabonamiento de manivela-corredera

vibración y la irregularidad. Más tarde se investigarán los medios para reducir o eliminar este par de torsión de inercia y de sacudimiento en los diseños de motor. Es posible contrarrestar sus efectos por medio de una disposición apropiada de los cilindros en un motor multicüíndrico, como se estudiará en el siguiente capítulo.

13.7 PAR DE TORSIÓN TOTAL DEL MOTOR

El par de torsión total del motor es la suma del par de torsión del gas y del par de torsión de inercia.

$$\mathbf{T}_{total} = \mathbf{T}_g + \mathbf{T}_i \tag{13.16}$$

El par de torsión del gas es menos sensible a la velocidad del motor que el par de torsión de inercia, el cual es una función de ω^2. Por lo que las contribuciones relativas de estas dos componentes al par de torsión total variarán con la velocidad del motor. En la figura 13- 15a) se muestra el par de torsión total para este motor de ejemplo graneado mediante el programa ENGINE para una velocidad de marcha lenta de 800 rpm. Compare esto con la gráfica del par de torsión del gas del mismo motor en la figura 13-9a). La componente del par de torsión de inercia a esta velocidad baja es despreciable en comparación con la componente del par de torsión del gas. En la figura 13-15c) se muestra al mismo motor que gira a 6 000 rpm. Compare esto con la gráfica del par de torsión de inercia en la figura 13-14. La componente del par de torsión de inercia es dominante a esta alta velocidad. A la velocidad media de 3 400 rpm (véase la figura 13-15Í?)) se aprecia una mezcla de ambas componentes.

13.8 VOLANTES

En la sección 11.11 se vio que las grandes oscilaciones en la función par de torsión-tiempo pueden reducirse significativamente por la adición de un volante al sistema. El

motor de un cilindro es un candidato primordial para el uso de un volante. La naturaleza intermitente de sus carreras de potencia lo hace obligatorio, ya que almacenará la energía cinética necesaria para llevar el pistón a través de los tiempos de escape, admisión y compresión del ciclo Otto, durante los que se debe realizar trabajo sobre el sistema. Incluso el motor de dos tiempos necesita un volante para impulsar el pistón hacia arriba en la carrera de compresión.

El procedimiento para diseñar un volante de motor es idéntico al descrito en la sección 11.11 para el eslabonamiento de cuatro barras. La función del par de torsión total para una revolución de la manivela se integra, pulso a pulso, con respecto a su valor promedio. Estas integrales representan fluctuaciones de energía en el sistema. El cambio máximo en la energía bajo la curva del par de torsión durante un ciclo es la cantidad necesaria que se almacenará en el volante. La ecuación 11.20c expresa esta relación. El programa ENGINE realiza la integración numérica de la función del par de torsión total y presenta una tabla similar a la mostrada en la figura 11-11. Estos datos y la elección del diseñador de un coeficiente de fluctuación k (véase la ecuación 11.19) son todo lo que se necesita para resolver las ecuaciones 11.20 y 11.21 para el momento de inercia requerido del volante.

El cálculo debe realizarse a cierta co promedio de la manivela. Puesto que el motor común opera sobre un amplio rango de velocidades, se necesita dar cierta importancia a la velocidad más apropiada para utilizarla en el cálculo del volante. La energía cinética almacenada en el volante es proporcional a co^2 (véase la ecuación 11.17). De esta manera, un volante a altas velocidades puede tener un momento de inercia pequeño y seguir siendo efectivo. La velocidad de operación menor requerirá el volante más grande y es la que se debe emplear para calcular el tamaño del volante requerido.

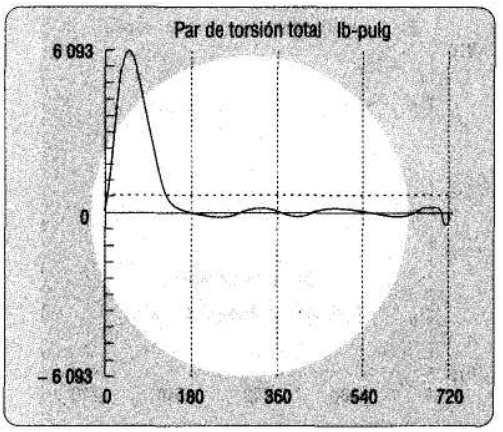
El programa ENGINE permite graficar el par de torsión total de un volante regular para un coeficiente de fluctuación k proporcionado por el usuario. En la figura 13-16 se muestran las funciones suavizadas del par de torsión para $k = 0.05$ correspondientes a las no suavizadas de la figura 13-15. Observe que las curvas, suavizadas que se muestran para cada velocidad de motor son las que resultarían con el tamaño del volante necesario para obtener ese coeficiente de fluctuación a esa velocidad. En otras palabras, el volante aplicado al motor a 800 rpm es mucho más grande que el del motor a 6 000 rpm en estas gráficas. Compare los renglones correspondientes (velocidades) entre las figuras 13-15 y 13-16 para observar el efecto de la adición de un volante. Pero no compare directamente las partes a, b y c dentro de la figura 13-16 en cuanto al grado de suavizamiento ya que los tamaños de los volantes empleados son diferentes en cada velocidad de operación.

Normalmente, un volante de motor se diseña como un disco plano atornillado a un extremo del cigüeñal. Por lo común una cara del volante se utiliza para enlazarla con el embrague. El embrague es un dispositivo de fricción que permite la desconexión del motor del tren de impulsión (las ruedas de un vehículo) cuando no se desea potencia de salida. Entonces el motor puede permanecer funcionando a una velocidad de marcha lenta con el vehículo o dispositivo de salida en reposo. Cuando se acopla el embrague todo el par de torsión del motor se transmite a través de él al eje de salida por fricción.

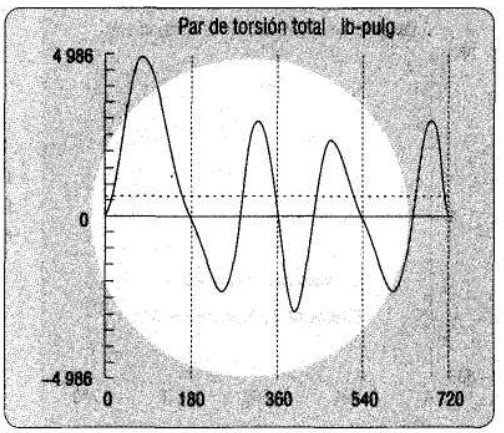
13.9 FUERZAS DE PASADOR EN UN MOTOR DE UN CILINDRO

Además del cálculo de los efectos globales en el plano de fijación de las fuerzas dinámicas presentes en el motor, también se necesita conocer las magnitudes de las fuerzas en

a) 800 rpm



b) 3 400 rpm



1 Cilindro
Ciclo de 4 tiempos
Diámetro
del cilindro = 3.00 pulg
Carrera = 3.54
B/S = 0.85
L/R = 3.50

c) 6 000 rpm

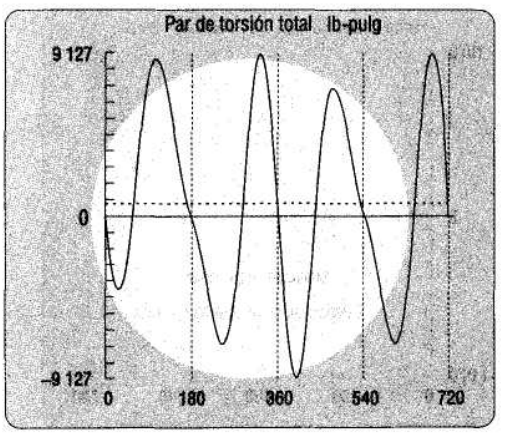


FIGURA 13-15

La forma y la magnitud de la función del par de torsión total varían con la velocidad del cigüeñal

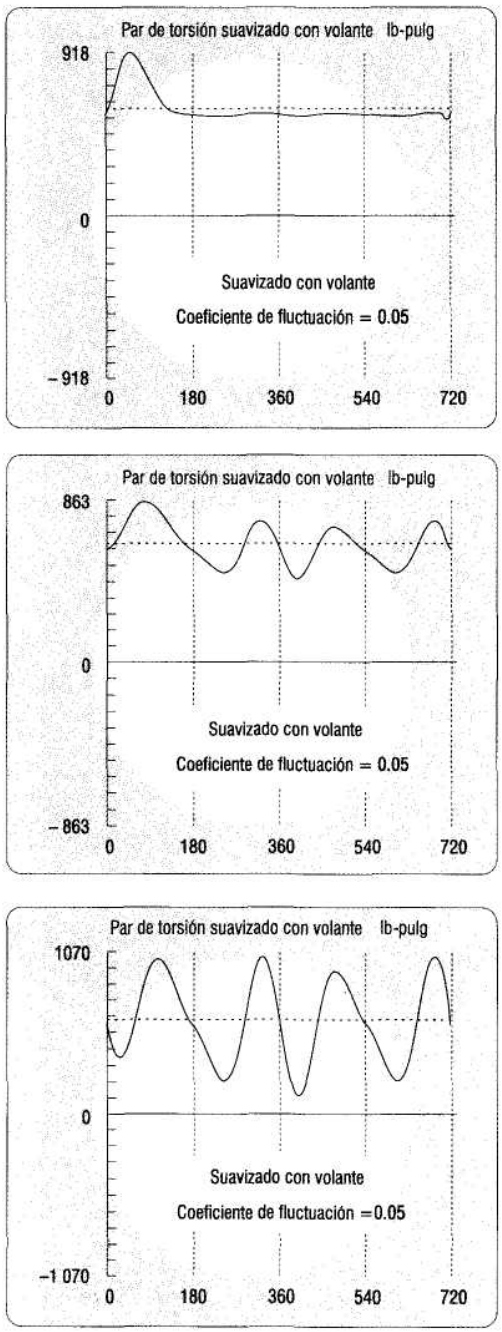


FIGURA 13-16

La forma y la magnitud de la función del par de torsión total varían con la velocidad del cigüeñal

las juntas de pasador. Estas fuerzas determinarán el diseño de los pasadores y los cojinetes en las juntas. Aunque se fuese capaz de concentrar la masa debida a la biela y al pistón, o a la biela y a la manivela, en los puntos *A y B* para un análisis global de los efectos del eslabonamiento en el plano de fijación, no se puede efectuar así para los cálculos de la fuerza de pasador. Esto se debe a que los pasadores sufren el efecto de la biela que tira hacia un "lado" y el del pistón (o manivela) que tira hacia el otro "lado" del pasador, como se muestra en la figura 13-17. Por lo tanto, se deben separar los efectos de las masas de los eslabones unidos por los pasadores.

Se calculará el efecto de cada componente debido a las diversas masas y a la fuerza del gas, y después se sobrepondrán para obtener la fuerza completa de pasador en cada junta. Se necesita de un sistema de registro para monitorear todos estos componentes. Anteriormente ya se emplearon algunos subíndices para estas fuerzas, los cuales se mantendrán y se agregarán otros. Las cargas resultantes de los cojinetes tienen las siguientes componentes:

1 Las componentes de fuerza del gas, con el subíndice *g,* como en F_g.

2 La fuerza de inercia debida a la masa del pistón, con el subíndice *ip,* como en F_{ip}.

3 La fuerza de inercia debida a la masa de la biela en el pasador de pistón, con el subíndice *iw* como en F_{iw}.

4 La fuerza de inercia debida a la masa de la biela en el muñón de manivela, con el subíndice *ic* como en F_{ic}.

5 La fuerza de inercia debida a la masa de la manivela en el muñón de manivela, con el subíndice *ir* como en F_{jr}.

De la misma manera se añadirán las designaciones numéricas del eslabón a cada subíndice como se hizo antes, indicando el eslabón donde se origina la fuerza como el primer número y el eslabón que se analiza como el segundo. (Véase la sección 11.2 para un análisis mayor de esta notación).

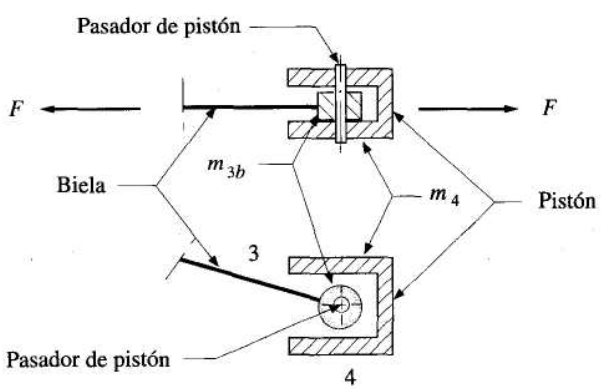


FIGURA 13-17
Fuerzas sobre un pasador de pivote

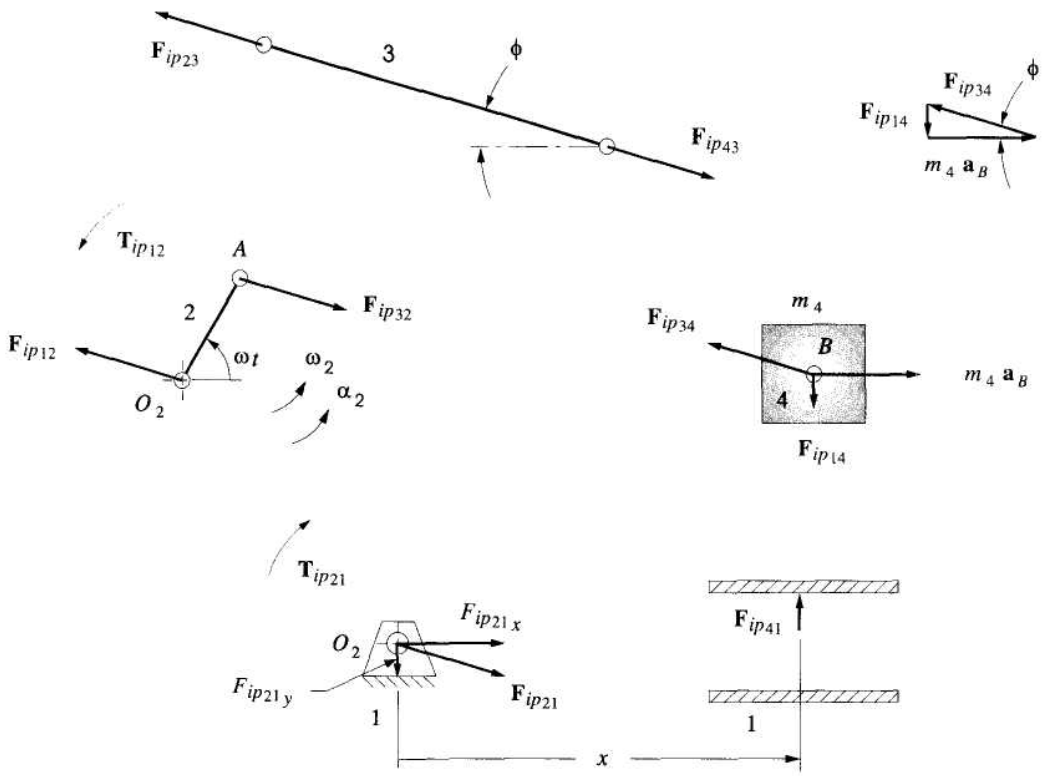


FIGURA 13-18

Diagramas de cuerpo libre para las fuerzas debidas a la masa del pistón

En la figura 13-18 se muestran los diagramas de cuerpo libre para las fuerzas debidas sólo a la aceleración de la masa del pistón, m_4. Estas componentes son:

$$\mathbf{F}_{ip41} = -m_4 a_B \tan\phi\,\hat{\mathbf{j}} \tag{13.17a}$$

$$\mathbf{F}_{ip34} = m_4 a_B\,\hat{\mathbf{i}} - m_4 a_B \tan\phi\,\hat{\mathbf{j}} \tag{13.17b}$$

$$\mathbf{F}_{ip32} = -\mathbf{F}_{ip34} \tag{13.17c}$$

$$\mathbf{F}_{ip21} = \mathbf{F}_{ip32} \tag{13.17d}$$

En la figura 13-19 se muestran los diagramas de cuerpo libre para las fuerzas debidas sólo a la aceleración de la masa de la biela localizada en el pasador de pistón, m_{Jh}. Estas componentes son:

$$\mathbf{F}_{iw41} = -m_{3b} a_B \tan\phi\,\hat{\mathbf{j}} \tag{13.18a}$$

$$\mathbf{F}_{iw34} = \mathbf{F}_{iw41} \tag{13.18b}$$

$$\mathbf{F}_{iw32} = -m_{3b} a_B\,\hat{\mathbf{i}} + m_{3b} a_B \tan\phi\,\hat{\mathbf{j}} \tag{13.18c}$$

$$\mathbf{F}_{iw21} = \mathbf{F}_{iw32} \tag{13.18d}$$

En la figura 13-20*a*) se muestran los diagramas de cuerpo libre para las fuerzas debidas sólo a la aceleración de la masa de la biela localizada en el muñón de manivela, m_{3a}. Esa componente es:

$$\mathbf{F}_{ic32} = -m_{3a}\mathbf{a}_A \tag{13.19a}$$

Al sustituir la ecuación 13.13 por $\mathbf{a}_A$:

$$\mathbf{F}_{ic32} = m_{3_a} r\omega^2\left(\cos\omega t\,\hat{\mathbf{i}} + \text{sen}\omega t\,\hat{\mathbf{j}}\right) \tag{13.19b}$$

En la figura 13-20*b*) se muestran los diagramas de cuerpo libre para las fuerzas debidas sólo a la aceleración de la masa concentrada de la manivela en el muñón de manivela, m_{2a}. Éstas afectan sólo al pasador principal en O_2. Tal componente es:

$$\mathbf{F}_{ir21} = m_{2a} r\omega^2\left(\cos\omega t\,\hat{\mathbf{i}} + \text{sen}\,\omega t\,\hat{\mathbf{j}}\right) \tag{13.19c}$$

Las componentes de la fuerza del gas se mostraron en la figura 13-7 y se definieron en las ecuaciones 13.5.

Ahora se pueden sumar las componentes de las fuerzas en cada junta de pasador. Para la fuerza de la pared lateral $\mathbf{F}_{41}$ del pistón contra la pared del cilindro:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{41} &= \mathbf{F}_{g41} + \mathbf{F}_{ip41} + \mathbf{F}_{iw41} \\ &= -F_g \tan\phi\,\hat{\mathbf{j}} - m_4 a_B \tan\phi\,\hat{\mathbf{j}} - m_{3b} a_B \tan\phi\,\hat{\mathbf{j}} \\ &= -\left[(m_4 + m_{3b})a_B + F_g\right]\tan\phi\,\hat{\mathbf{j}}\end{aligned} \tag{13.20}$$

La fuerza total $\mathbf{F}_{34}$ en el pasador de pistón es:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{34} &= \mathbf{F}_{g34} + \mathbf{F}_{ip34} + \mathbf{F}_{iw34} \\ &= \left(F_g\,\hat{\mathbf{i}} - F_g \tan\phi\,\hat{\mathbf{j}}\right) + \left(m_4 a_B\,\hat{\mathbf{i}} - m_4 a_B \tan\phi\,\hat{\mathbf{j}}\right) + \left(-m_{3b} a_B \tan\phi\,\hat{\mathbf{j}}\right) \\ &= \left(F_g + m_4 a_B\right)\hat{\mathbf{i}} - \left[F_g + \left(m_4 + m_{3_b}\right)a_B\right]\tan\phi\,\hat{\mathbf{j}}\end{aligned} \tag{13.21}$$

La fuerza total $\mathbf{F}_{32}$ en el muñón de manivela es:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{32} &= \mathbf{F}_{g32} + \mathbf{F}_{ip32} + \mathbf{F}_{iw32} + \mathbf{F}_{ic32} \\ &= \left(-F_g\,\hat{\mathbf{i}} + F_g \tan\phi\,\hat{\mathbf{j}}\right) + \left(-m_4 a_B\,\hat{\mathbf{i}} + m_4 a_B \tan\phi\,\hat{\mathbf{j}}\right) \\ &\quad + \left(-m_{3b} a_B\,\hat{\mathbf{i}} + m_{3b} a_B \tan\phi\,\hat{\mathbf{j}}\right) + \left[m_{3a} r\omega^2\left(\cos\omega t\,\hat{\mathbf{i}} + \text{sen}\,\omega t\,\hat{\mathbf{j}}\right)\right] \\ &= \left[m_{3a} r\omega^2 \cos\omega t - \left(m_{3b} + m_4\right)a_B - F_g\right]\hat{\mathbf{i}} \\ &\quad + \left\{m_{3a} r\omega^2\,\text{sen}\,\omega t + \left[(m_{3b} + m_4)a_B + F_g\right]\tan\phi\right\}\hat{\mathbf{j}}\end{aligned} \tag{13.22}$$

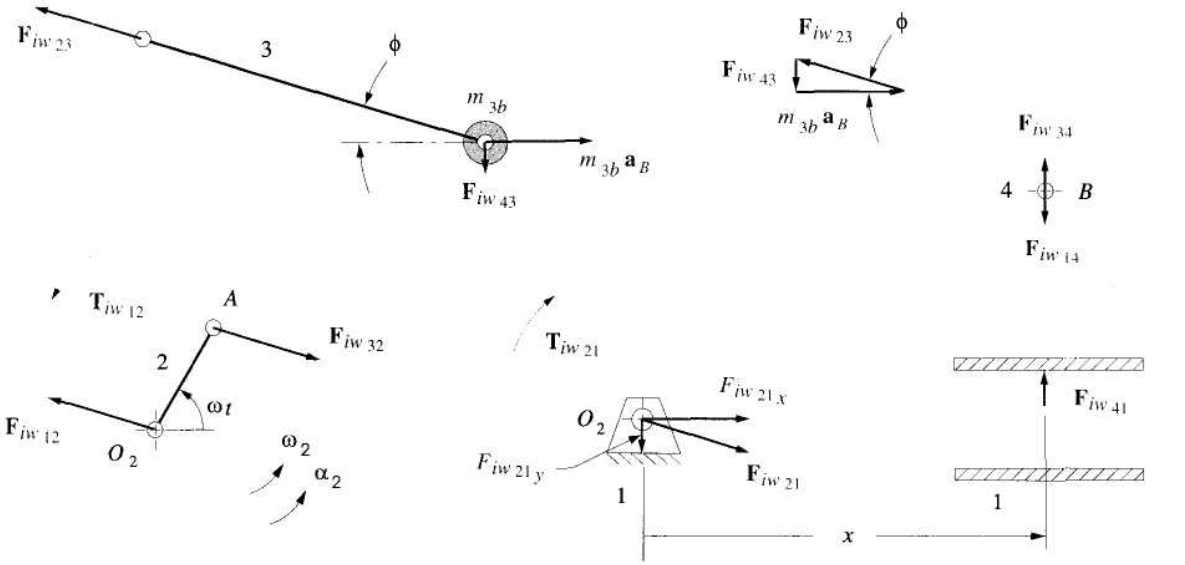


FIGURA 13-19

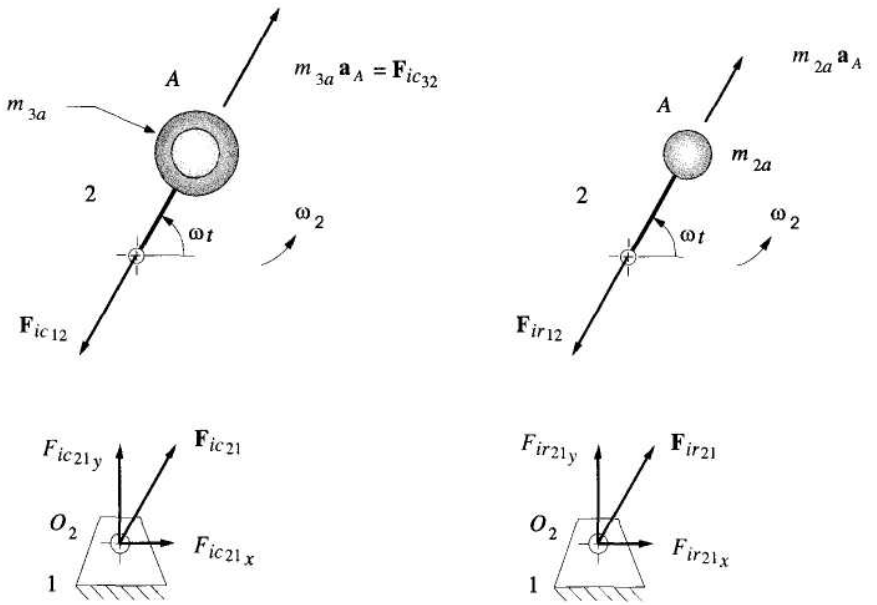
Diagramas de cuerpo libre para las fuerzas debidas a la masa concentrada de la biela en el pasador de pistón.

La fuerza total $\mathbf{F}_{21}$ en el pasador principal es:

$$\mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_{ir21} \tag{13.23}$$

Observe que, a diferencia de la fuerza de inercia en la ecuación 13.14, la cual no se afectó por la fuerza del gas, estas fuerzas de pasador **son** una función de la fuerza del gas así como de las fuerzas -ma. Los motores con mayores diámetros de pistón experimentarán mayores fuerzas de pasador como resultado de la presión por explosión que actúa en el área más grande del pistón.

En el programa ENGINE se calculan las fuerzas de pasador en todas las juntas mediante las ecuaciones 13.20 a 13.23. En la figura 13-21 se muestra la fuerza de pasador de pistón en el mismo ejemplo del motor desequilibrado, como se ilustra en las figuras anteriores, para tres velocidades del motor. El lazo en forma de "corbatín" es la fuerza de inercia y el lazo en forma de "lágrima" es la porción de fuerza del gas de la curva de fuerza. Una transacción interesante ocurre entre las componentes de la fuerza del gas y las componentes de la fuerza de inercia de las fuerzas de pasador. A una velocidad baja de 800 rpm (figura 13-21a)) domina la fuerza del gas, ya que las fuerzas de inercia son despreciables a una co pequeña. La fuerza pico del pasador de pistón es entonces de aproximadamente 4 200 Ib. A una velocidad alta (6 000 rpm), las componentes de inercia dominan y la fuerza pico es de aproximadamente 4 500 Ib (figura 13-21c)). Pero a una velocidad media (3 400 rpm) la fuerza de inercia elimina parte de la fuerza del gas y la fuerza pico es de aproximadamente 3 200 Ib (figura 13-21/?)). Estas gráficas muestran que las fuerzas de pasador pueden ser muy grandes incluso en un motor de tamaño moderado (de 0.4 litros/cilindro). Todos los pasadores, eslabones y cojinetes tienen que diseñarse para soportar sin fallas cientos de millones de ciclos de estas fuerzas reversivas.



a) Masa de la biela en el muñón de manivela *b)* Masa de la manivela en el muñón de la manivela

FIGURA 13-20

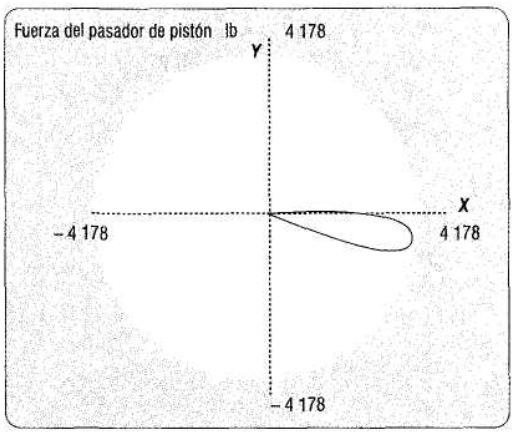
Diagramas de cuerpo libre para las fuerzas debidas a las masas en el muñón de manivela

En la figura 13-22 se muestra otra evidencia de la interacción de las fuerzas de gas y de las fuerzas de inercia en el muñón de manivela y el pasador del pistón. En las figuras 13-22a) y 13-22c) se muestra la variación en la componente de la fuerza de inercia en el muñón de manivela y el pasador del pistón, respectivamente, sobre una revolución de la manivela conforme aumenta la velocidad del motor desde el reposo hasta la velocidad máxima. En las figuras 13-22¿>) y *d)* se muestra la variación en la fuerza total sobre los mismos pasadores respectivos con las componentes de la fuerza de inercia y de gas incluidas. Estas dos gráficas muestran sólo la primera revolución de 90° de la manivela donde se presenta la fuerza del gas en un cilindro de cuatro tiempos. Obsérvese que las componentes de la fuerza del gas y de la fuerza de inercia se contrarrestan entre sí dando como resultado una velocidad particular donde la fuerza total de pasador es mínima durante la carrera de potencia. Éste es el mismo fenómeno que se vio en la figura 13-21.

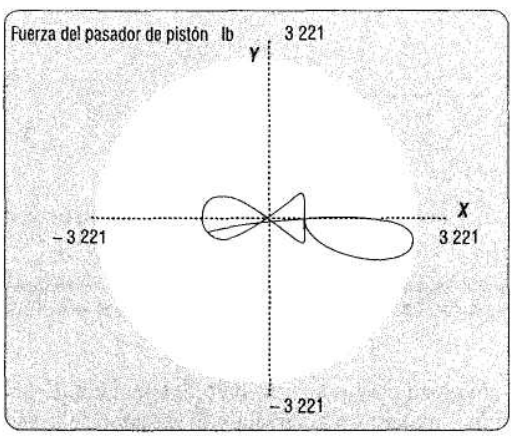
13.10 EQUILIBRIO DEL MOTOR DE UN CILINDRO

Las deducciones y las figuras en las secciones anteriores han mostrado que las fuerzas significativas se desarrollan sobre los pasadores del pivote y sobre el plano de fijación debido a la fuerza del gas y las fuerzas de inercia y sacudimiento. El equilibrio no tendrá ningún efecto en las fuerzas del gas, que son internas, pero puede tener un efecto drástico sobre las fuerzas de inercia y de sacudimiento. La fuerza del pasador principal puede

a) 800 rpm



b) 3 400 rpm



1 Cilindro
Ciclo de 4 tiempos
Diámetro
del cilindro = 3.00 pulg
Carrera = 3.54
B/S = 0.85
L/R = 3.50

c) 6 000 rpm

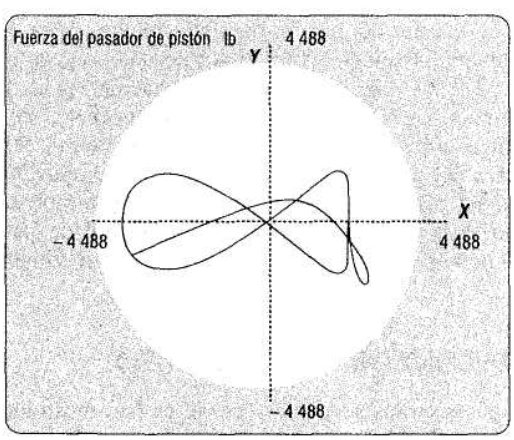


FIGURA 13-21

Fuerzas en el pasador de pistón del motor de un cilindro a diversas velocidades

reducirse, pero las fuerzas del muñón de manivela y del pasador de pistón no se afectarán por ningún equilibrio del cigüeñal que se realice. En la figura 13-13 se muestra la fuerza de sacudimiento desequilibrada como se considera sobre el rjlano de fijación del motor, del ejemplo de 0.4 litros por cilindro del programa ENGINE. Esta es de aproximadamente 9 700 Ib incluso a una velocidad moderada de 3 400 rpm. A 6 000 rpm aumenta a más de 30 000 libras. Los métodos del capítulo 12 pueden aplicarse a este mecanismo para equilibrar los elementos en rotación pura y reducir estas enormes fuerzas de sacudimiento.

En la figura 13-23a) se muestra el modelo dinámico del mecanismo de manivela-corredera con la masa de la biela concentrada en el muñón de manivela A y el pasador de pistón *B.* Este motor de un cilindro se puede considerar como un dispositivo uniplanar, por lo tanto, es conveniente para el equilibrio estático (véase la sección 13.1). Es sencillo equilibrar estáticamente la manivela. Se necesita una masa de equilibrio a cierto radio, a 180° de la masa concentrada en el punto A, cuyo producto *mr* es igual al producto de la masa en A y su radio *r*. Aplicando la ecuación 13.2 a este problema simple se obtiene:

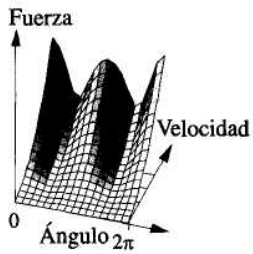
$$m_{equi}r_{equi} = -m_A r_A \tag{13.24}$$

Cualquier combinación de masa y radio que tenga este producto, localizado a 180° del punto A, equilibrará la manivela. Para hacer más sencillo el ejemplo se empleará un radio de equilibrio igual a *r*. Entonces una masa igual a m_A colocada en A' equilibrará con exactitud las masas rotatorias. El *CG* de la manivela estará entonces en el pivote fijo O_2 como se muestra en la figura 13-23a). En un cigüeñal verdadero, en realidad no funcionará colocar el contrapeso con este gran radio. La masa de equilibrio debe mantenerse cerca de la línea central para que el pistón pase al PMI. Er> la figura 13-2c) se muestra la forma de los contrapesos de un cigüeñal común.

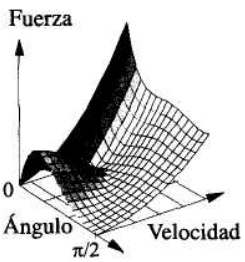
En la figura 13-24a) se muestra la fuerza de sacudimiento del mismo motor de la figura 13-13 después de que la manivela se ha equilibrado de esta manera. La componente *Y* de la fuerza de sacudimiento se ha reducido a cero y la componente *X* a aproximadamente 3 200 Ib a 3 400 rpm. Éste es un factor de tres reducciones sobre el motor desequilibrado. Observe que la única fuente de la fuerza de inercia dirigida a *Y* es la masa rotatoria en el punto A de la figura 13-23 (véase las ecuaciones 13.14). Lo que queda después de equilibrar la masa rotatoria es la fuerza debida a la aceleración de las masas del pistón y de la biela en el punto *B* de la figura 13-23, las cuales se encuentran en traslación lineal a lo largo del eje *X*, como lo muestra la fuerza de inercia $-m_B\mathbf{a}_B$ en el punto *B* en dicha figura.

Para eliminar por completo esta fuerza de sacudimiento alternativa en desequilibrio se requerirá la introducción de otras masas alternativas que oscilen a 180° fuera de fase con el pistón. Esto se puede llevar a cabo añadiendo un segundo pistón y un cilindro, dispuestos apropiadamente. Una de las ventajas principales de los motores multicilíndricos es su capacidad para reducir o eliminar las fuerzas de sacudimiento. Esto se investigará en el siguiente capítulo.

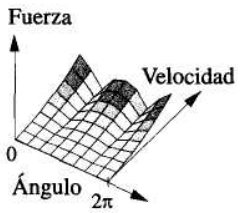
En el motor de un cilindro no existe forma alguna de eliminar por completo el desequilibrio alternativo con un solo contrapeso rotatorio, pero la fuerza de sacudimiento se puede reducir aún más. En la figura 13-23&) se muestra una cantidad adicional de la masa m_P agregada al contrapeso en el punto A'. (Observe que ahora el *CG* de la manivela se ha apartado del pivote fijo.) Esta masa extra de equilibrio produce una fuerza de inercia adicional $(-m_P r\omega^2)$ dividida en las componentes *x y y* como se muestra en la



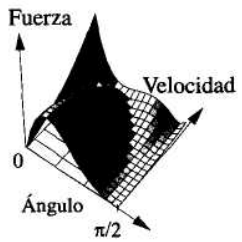
a) Fuerza de inercia del muñón de manivela



b) Fuerza total del muñón de manivela

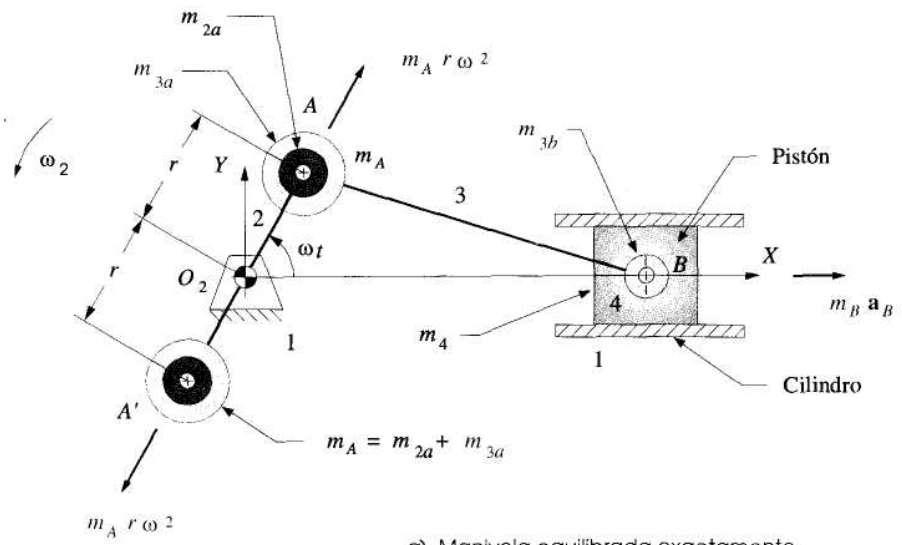


c) Fuerza de inercia del pasador del pistón

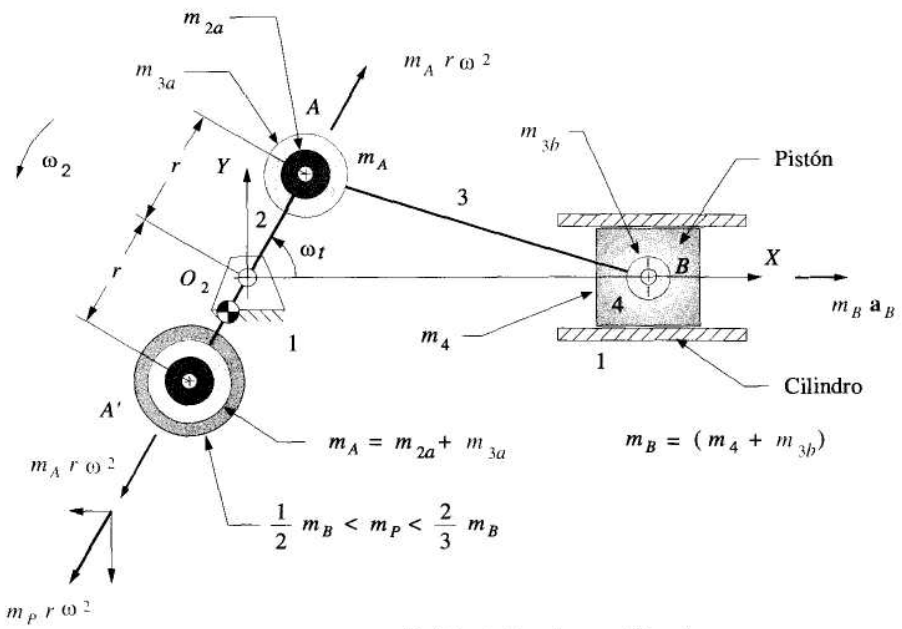


d) Fuerza total del pasador del pistón

FIGURA 13-22
Variación de la fuerza de pasador



a) Manivela equilibrada exactamente



b) Manivela sobreequilibrada

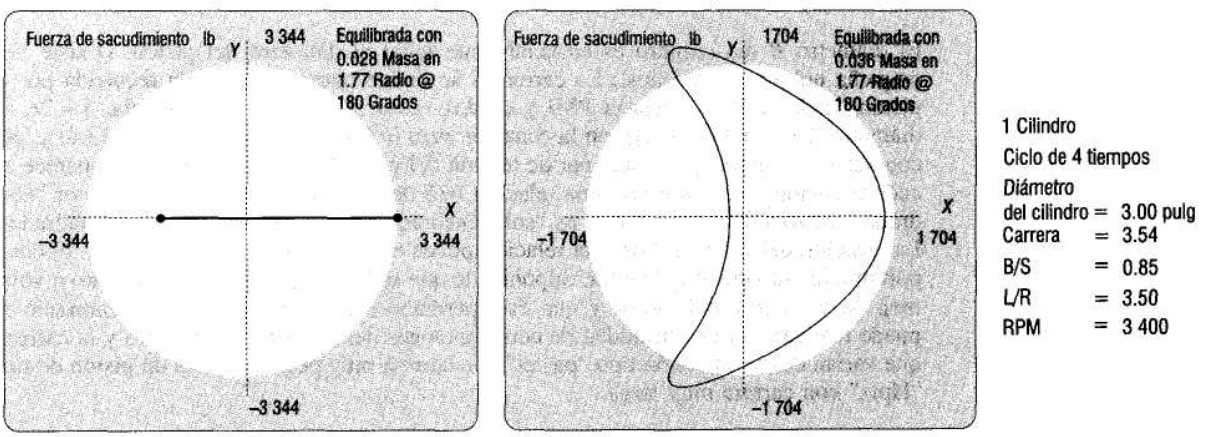
FIGURA 13-23

Equilibrio y sobreequilibrio del motor de un cilindro

13

misma figura. La componente *y* no se opone a alguna de las otras fuerzas de inercia presentes, pero la componente *x* siempre se opondrá a la fuerza de inercia reciprocante en el punto *B.* Por lo tanto, esta masa extra, m_P, que *sobreequilibra la manivela,* reducirá la fuerza de sacudimiento dirigida a lo largo de x, a expensas de agregar hacia atrás cierta fuerza de sacudimiento dirigida a *y.* Ésta es una transacción útil, ya que la dirección de la fuerza de sacudimiento es por lo general de menor interés que su magnitud. Las fuerzas de sacudimiento producen vibraciones en la estructura de soporte que se transmiten a través de ésta y se modifican por ésta. Como ejemplo, es poco probable que usted pudiera definir la dirección de las fuerzas de sacudimiento de un motor de motocicleta por la sensación de sus vibraciones resultantes en el manillar, pero **detectará** un incremento en la magnitud de las fuerzas de sacudimiento por la mayor amplitud de vibración que causan en el bastidor de la motocicleta.

La cantidad correcta de la masa adicional "sobreequilibrada" necesaria para minimizar la fuerza pico de sacudimiento, a pesar de su dirección, variará con el diseño de un motor en particular. Esta cantidad estará frecuentemente entre un medio y dos tercios de la masa reciprocante en el punto *B* (el pistón más la biela en el pasador del pistón), si se colocó en el radio de la manivela *r.* Desde luego, una vez que se ha determinado este producto de masa-radio se puede lograr con cualquier combinación de masa y radio. En la figura 13-24¿>) se muestra la fuerza de sacudimiento mínima alcanzada por este motor con un aumento de 65.5% de la masa en *B,* que actúa a un radio *r.* Ahora, la fuerza de sacudimiento se ha reducido a 1 700 Ib a 3 400 rpm, lo cual es el **18% de su valor original desequilibrado.** Los beneficios del equilibrio y el sobreequilibrio en el caso del motor de un cilindro ahora son obvios.



a) Manivela equilibrada exactamente

b) Manivela sobreequilibrada

FIGURA 13-24

Efectos del equilibrio y sobreequilibrio en la fuerza de sacudimiento en el eslabonamiento de manivela-corredera

13.11 TRANSACCIONES Y RELACIONES DE DISEÑO

En el diseño de cualquier sistema o dispositivo, no importa qué tan simple sea, siempre habrá demandas, requerimientos o deseos conflictivos que deben transigirse para lograr el mejor convenio de diseño. Este motor de un cilindro no es la excepción. Hay dos relaciones de diseño adimensionales que pueden emplearse para caracterizar el comportamiento dinámico de un motor en una forma general. La primera es la relación manivela/biela *rll* presentada en la sección 13.2, o su inversa, la **relación biela/manivela** *llr*. La segunda es la **relación diámetro/carrera,** *BIS.*

Relación biela/manivela

La relación manivela/biela *rll* aparece en todas las ecuaciones para la aceleración, fuerzas y pares de torsión. En general, cuanto más pequeña sea la relación *rll,* más uniforme será la función de aceleración y, por consiguiente, todos los otros factores en los que influye. El programa ENGINE emplea la inversa de esta relación como un parámetro de entrada. La **relación biela/manivela** *llr* debe ser mayor que casi dos para obtener ángulos de transmisión aceptables en el eslabonamiento de manivela-corredera. El valor ideal para *llr* desde un punto de vista cinemático sería infinito, ya que tendría por resultado que la función de aceleración del pistón fuese una armónica pura. En las ecuaciones 13.3 los términos armónicos segundo, y todos los subsecuentes, serán cero en este caso, y el valor pico de la aceleración será un mínimo. Sin embargo, un motor de esta altura no se integraría muy bien y a menudo las consideraciones del conjunto especifican el valor máximo de la relación *llr.* La mayoría de los motores tendrá una relación *llr* entre tres y cinco, dichos valores dan una uniformidad aceptable en un motor razonablemente pequeño.

Relación diámetro/carrera

El diámetro *B* del cilindro es esencialmente igual al diámetro del pistón. (Existe una pequeña holgura entre ellos.) La carrera *S* se define como la distancia recorrida por el pistón desde el PMS hasta el PMI y es dos veces el radio de la manivela, *S = Ir.* El diámetro del cilindro aparece en la ecuación para la fuerza del gas (ecuación 13.4) y, por consiguiente, también afecta al par de torsión del gas. El radio de la manivela aparece en cada ecuación. Un motor con una relación *BIS* de 1 se determina como un motor "cuadrado". Si *BIS* es mayor que 1, es "sobrecuadrado"; si es menor que 1, "subcuadrado". La elección del diseñador de esta relación puede tener un efecto significativo en el comportamiento dinámico del motor. Suponiendo que se ha elegido el desplazamiento o volumen de carrera *V* del motor y que éste permanece constante, este desplazamiento se puede realizar con una infinidad de combinaciones del diámetro de cilindro y la carrera, que varían desde un pistón tipo "pastel" con carrera muy pequeña hasta un pistón de tipo "lápiz" con carrera muy larga.

$$V = \frac{\pi B^2}{4} S \tag{13.25}$$

Aquí hay una transacción clásica de diseño entre *B y S* para un volumen de carrera constante *V.* Un diámetro de cilindro grande y una carrera pequeña tendrán como resultado altas fuerzas del gas, que afectarán las fuerzas de pasador en forma desfavorable. Una gran carrera y un pequeño diámetro tendrán como resultado grandes fuerzas de inercia,

que afectarán las fuerzas de pasador (así como otras fuerzas y pares de torsión) en forma desfavorable. De manera que en cada caso debe haber un valor óptimo para la relación *BIS* que minimizará estos efectos desfavorables. La mayoría de los motores de producción tiene relaciones *BIS* dentro del rango de aproximadamente 0.75 a 1.5.

Como ejercicio se deja al estudiante investigar los efectos de la variación en las relaciones *BIS* y *l/r* en las fuerzas y pares de torsión en el sistema. El programa ENGINE demostrará los efectos de los cambios realizados independientemente de cada una de estas relaciones, mientras que todos los otros parámetros de diseño se mantienen constantes. Se aconseja al estudiante experimentar con el programa para tener una idea del papel de estas relaciones en el funcionamiento dinámico del motor.

Materiales

Siempre habrá una transacción resistencia/peso. Las fuerzas en este dispositivo pueden ser muy grandes, debido tanto a la explosión como a la inercia de los elementos móviles. Sería conveniente mantener las masas de las partes lo más pequeñas posible, ya que las aceleraciones son comúnmente muy grandes, como se aprecia en la figura 13-8c). Pero las partes deben ser lo suficientemente fuertes para soportar las fuerzas, por lo que se necesitan materiales con buenas relaciones de resistencia a peso. Generalmente los pistones se fabrican de una aleación de aluminio, fundido o forjado. Las bielas a menudo son de hierro fundido o acero forjado, excepto en motores muy pequeños (podadoras, sierras de cadena, motocicletas), donde pueden ser de una aleación de aluminio. Los motores de alto funcionamiento pueden tener bielas de titanio. Por lo general los cigüeñales son de hierro fundido o de acero forjado, y los pasadores de pistón son de tubos o barras de acero templado. Frecuentemente se utilizan cojinetes de casquillo de una aleación suave especial de un metal no férreo llamado babbitt. En el motor de cuatro tiempos éstos se lubrican a presión con aceite bombeado a través de los pasajes en el bloque, el cigüeñal y las bielas. En el motor de dos tiempos el combustible lleva el lubricante a estas partes. Los bloques de motor son de hierro fundido o de una aleación de aluminio fundido. Los anillos de acero cromado del pistón sellan y pasan contra los cilindros de hierro fundido. La mayoría de bloques de motor se fabrica a la medida con revestimientos de aluminio alrededor de los diámetros de los cilindros. Algunos no tienen revestimiento y están fabricados de una aleación de aluminio de alto silicio que se enfría especialmente después del colado para precipitar el silicio duro en las paredes del cilindro, de modo que éste resista el desgaste.

13.12 BIBLIOGRAFÍA

1 **Heywood, J. B.** (1988). *Infernal Combustión Engine Fundamentáis.* McGraw-Hill: Nueva York.

2 **Taylor,** C. **F.** (1966). *The Infernal Combustión Engine in Theory and Practice.* MIT Press: Cambridge, Massachusetts.

13.13 PROBLEMAS

*†13-1 Un eslabonamiento de manivela-corredera tiene $r = 3$ y $/ = 12$. Tiene una velocidad angular de 200 rad/s en un tiempo $t = 0$. Su ángulo de manivela inicial es cero.

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

Calcule la aceleración del pistón en $t = 1$ s. Emplee dos métodos, la solución exacta y la solución aproximada por series de Fourier y compare los resultados.

†13-2 Repita el problema 13-1 para $r = 4$, $l = 15$ y $t = 0.9$ s.

*†13-3 Un eslabonamiento de manivela-corredera tiene $r = 3$, $I = 12$ y un diámetro de pistón $B = 2$. La presión pico del gas en el cilindro se presenta a un ángulo de manivela de 10° y es de 1 000 unidades de presión. Calcule la fuerza del gas y el par de torsión del gas en esta posición.

†13-4 Un eslabonamiento de manivela-corredera tiene r = 4 y / = 1 5 y u n diámetro de pistón $B = 3$. La presión pico del gas en el cilindro se presenta a un ángulo de manivela de 5^o y es de 600 unidades de presión. Calcule la fuerza y el par de torsión del gas en esta posición.

*†13-5 Repita el problema 13-3 empleando el método exacto del cálculo del par de torsión del gas y compare su resultado con el que se obtuvo mediante la expresión aproximada en la ecuación 13.8b. ¿Cuál es el porcentaje de error?

†13-6 Repita el problema 13-4 empleando el método exacto del cálculo del par de torsión del gas y compare su resultado con el que se obtuvo mediante la expresión aproximada en la ecuación 13.8b. ¿Cuál es el porcentaje de error?

*†13-7 Una biela de longitud $l = 12$ tiene una masa $m_3 = 0.020$. Su momento de inercia es de 0.620. Su *CG* se localiza a 0.4 l del muñón de manivela, punto *A*.

a. Calcule un modelo dinámico exacto utilizando dos masas concentradas, una en el pasador de pistón, punto *B,* y la otra en cualquier otro punto que se requiera. Determine las masas concentradas y sus localizaciones.
b. Calcule un modelo dinámico aproximado utilizando dos masas concentradas, una en el pasador de pistón, punto *B,* y otra en el muñón de manivela, punto *A.* Determine las masas concentradas y sus localizaciones.
c. Calcule el error en el momento de inercia del modelo aproximado como un porcentaje del momento de inercia original.

†13-8 Repita el problema 13-7 con estos datos: $l = 15$, masa $m_3 = 0.025$, momento de inercia de 1.020. Su *CG* se localiza a 0.25 *l* del muñón de manivela, punto *A*.

*†13-9 Una manivela de longitud $r = 3.5$ tiene una masa $m_2 = 0.060$. Su momento de inercia con respecto a su pivote es de 0.300. Su *CG* se localiza a 0.30 *r* del pasador principal, punto O_2. Calcule un modelo dinámico estáticamente equivalente de dos masas concentradas, con las masas concentradas colocadas en el pasador principal y en el muñón de manivela. ¿Cuál es el porcentaje de error en el momento de inercia del modelo con respecto al pivote de la manivela?

†13-10 Repita el problema 13-9 con una longitud de manivela $r = 4$, una masa $ra_2 = 0.050$, un momento de inercia con respecto a su pivote de 0.400. Su *CG* se localiza a 0.40 *r* del pasador principal, punto O_2.

*†13-11 Combine los datos de los problemas 13-7 y 13-9. El eslabonamiento funciona a una velocidad constante de 2 000 rpm. Calcule la fuerza y el par de torsión de inercia a (0/ = 45°. La masa del pistón = 0.012.

†13-12 Combine los datos de los problemas 13-7 y 13-10. El eslabonamiento funciona a una velocidad constante de 3 000 rpm. Calcule la fuerza y el par de torsión de inercia a $\omega t = 30°$. La masa del pistón = 0.019.

13

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

†13-13 Combine los datos de los problemas 13-8 y 13-9. El eslabonamiento funciona a una velocidad constante de *1* 500 rpm. Calcule la fuerza y el par de torsión de inercia a coi = 24°. La masa del pistón = 0.023.

*†13-14 Combine los datos de los problemas 13-8 y 13-10. El eslabonamiento funciona a una velocidad constante de 4 000 rpm. Calcule la fuerza y el par de torsión de inercia a $\omega t = 18°$. La masa del pistón = 0.015.

†13-15 Combine los datos de los problemas 13-7 y 13-9. El eslabonamiento funciona a una velocidad constante de 2 000 rpm. Calcule las fuerzas de pasador a $\omega t = 45°$. La masa del pistón = 0.022. $F_g = 300$.

†13-16 Combine los datos de los problemas 13-7 y 13-10. El eslabonamiento funciona a una velocidad constante de 3 000 rpm. Calcule las fuerzas de pasador a coi = 30°. La masa del pistón = 0.019. $F_g = 600$.

†13-17 Combine los datos de los problemas 13-8 y 13-9. El eslabonamiento funciona a una velocidad constante de 2 500 rpm. Calcule las fuerzas de pasador a $\omega t = 24°$. La masa del pistón = 0.032. $F_g = 900$.

†13-18 Combine los datos de los problemas 13-8 y 13-10. El eslabonamiento funciona a una velocidad constante de 4 000 rpm. Calcule las fuerzas de pasador a $\omega t = 18°$. La masa del pistón = 0.014. $F_g = 1\ 200$.

*†‡13-19 Mediante los datos del problema 13-11:

a. Equilibre exactamente la manivela y vuelva a calcular la fuerza de inercia.
b. Sobreequilibre la manivela con aproximadamente dos tercios de la masa en el pasador de pistón, colocado a un radio -*r* en la manivela, y vuelva a calcular la fuerza de inercia.
c. Compare estos resultados con aquéllos para la manivela desequilibrada.

†‡13-20 Repita el problema 13-19 usando los datos del problema 13-12.

†‡13-21 Repita el problema 13-19 usando los datos del problema 13-13.

†‡13-22 Repita el problema 13-19 usando los datos del problema 13-14.

†13-23 Combine las ecuaciones necesarias para desarrollar expresiones que muestren cómo varía cada uno de estos parámetros dinámicos, sólo como una función de la relación manivela/biela:

a. Aceleración del pistón
b. Fuerza de inercia
c. Par de torsión de inercia
d. Fuerzas de pasador

Grafique las funciones. Verifique sus conclusiones con el programa ENGINE.

Sugerencia: *Considere que todos los otros parámetros son temporalmente constantes. Establezca el ángulo de manivela a cierto valor, de manera que la fuerza del gas sea distinta de cero.*

†13-24 Combine las ecuaciones necesarias para desarrollar las expresiones que se muestran conforme varíe cada uno de estos parámetros como una función sólo de la relación diámetro/carrera:

a. Fuerza del gas
b. Par de torsión del gas

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

‡ Estos problemas son adecuados para resolverse usando el programa ENGINE que se encuentra en el CD-ROM anexo.

c. Fuerza de inercia
d. Par de torsión de inercia
e. Fuerzas de pasador

Grafique las funciones. Verifique sus conclusiones con el programa ENGINE.
Sugerencia: *Considere que todos los otros parámetros son temporalmente constantes. Establezca el ángulo de manivela a cierto valor, de manera que la fuerza del gas sea distinta de cero.*

†13-25 Desarrolle una expresión para determinar la relación óptima diámetro/carrera para minimizar la fuerza del pasador de pistón. Grafique la función.

†‡13-26 Utilice el programa ENGINE, SU propio programa de computadora, o un resol vedor de ecuaciones para calcular el valor máximo y la forma de la gráfica polar de la fuerza en el pasador principal de un motor de un cilindro con un desplazamiento de 1 pulg^3, con un diámetro de cilindro = 1.12838 pulg para las siguientes situaciones:

a. Masas del pistón, biela y manivela = 0
b. Masa del pistón = 1 blob, masas de la biela y de la manivela = 0
c. Masa de la biela = 1 blob, masas del pistón y de la manivela = 0
d. Masa de la manivela = 1 blob, masas de la biela y del pistón = 0

Coloque el *CG* de la manivela a 0.5 *r y* el de la biela a 0.33 /. Compare y explique las diferencias en la fuerza del pasador principal bajo estas diferentes condiciones en relación con las ecuaciones dominantes.

†13-27 Repita el problema 13-26 para el muñón de manivela.

†13-28 Repita el problema 13-26 para el pasador de pistón.

†‡13-29 Utilice el programa ENGINE, SU propio programa de computadora o un resolvedor de ecuaciones para calcular el valor máximo y la forma de la gráfica polar de la fuerza en el pasador principal de un motor de un cilindro con un desplazamiento de 1 pulg^3, con un diámetro de cilindro = 1.12838 pulg para las siguientes situaciones:

a. Motor desequilibrado.
b. Manivela exactamente equilibrada con respecto a la masa en el muñón de manivela.
c. Manivela óptimamente sobreequilibrada con respecto a las masas en el muñón de manivela y el pasador de pistón.

Las masas del pistón, de la biela y de la manivela = 1. Coloque el *CG* de la manivela a 0.5 r y el de la biela a 0.33 /. Compare y explique las diferencias en la fuerza de pasador principal en estas condiciones en relación con las ecuaciones dominantes.

†‡13-30 Repita el problema 13-29 para la fuerza del muñón de manivela.

†‡13-31 Repita el problema 13-29 para la fuerza del pasador de pistón.

†‡13-32 Repita el problema 13-29 para la fuerza de sacudimiento.

† Estos problemas son adecuados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

‡ Estos problemas son adecuados para resolverse usando el programa ENGINE que se encuentra en el CD-ROM anexo.

13

13.14 PROYECTOS

Éstos son problemas de diseño imprecisamente estructurados pensados para una solución mediante el programa ENGINE. Todos implican el diseño de un motor de un cilindro y difieren sólo en los datos específicos para el motor. El planteamiento general del problema es:

Diseñe un motor de un cilindro para un ciclo específico de desplazamiento y de carrera. Optimice la relación biela/manivela y diámetro/carrera para minimizar las fuerzas de sacudimiento, el par de torsión de sacudimiento y las fuerzas de pasador, considerando también el tamaño del conjunto. Diseñe sus formas de eslabón y calcule parámetros dinámicos realistas (masa, localización del CG, momento de inercia) para esos eslabones empleando los métodos descritos en el capítulo 11 y la sección 12.12. Modele dinámicamente los eslabones como se describe en este capítulo. Equilibre o sobreequilibre el eslabonamiento como se requiera para alcanzar estos resultados. Se desea la uniformidad global del par de torsión total. Diseñe y dimensione un volante de peso mínimo por medio del método del capítulo 12 para regularizar el par de torsión total. Escriba un reporte de ingeniería sobre su diseño.

P13-1 Ciclo de dos tiempos, con un desplazamiento de 0.125 litros.

P13-2 Ciclo de cuatro tiempos, con un desplazamiento de 0.125 litros.

P13-3 Ciclo de dos tiempos, con un desplazamiento de 0.25 litros.

P13-4 Ciclo de cuatro tiempos, con un desplazamiento de 0.25 litros.

P13-5 Ciclo de dos tiempos, con un desplazamiento de 0.50 litros.

P13-6 Ciclo de cuatro tiempos con un desplazamiento de 0.50 litros.

P13-7 Ciclo de dos tiempos con un desplazamiento de 0.75 litros.

P13-8 Ciclo de cuatro tiempos con un desplazamiento de 0.75 litros.

Capítulo 14



MOTORES MULTICILÍNDRICOS

Contemple detenidamente
un motor es, dulce a los ojos.
MACKNIGHT BLACK

14.0 INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se analizó el diseño del mecanismo de manivela-corredera como se usa en un motor de combustión interna de un cilindro y en las bombas de pistón. Ahora se ampliará el diseño a las configuraciones multicilíndricas. Algunos de los problemas con las fuerzas de sacudimiento y los pares de torsión pueden aligerarse con una combinación apropiada de eslabonamientos múltiples de manivela-corredera en un cigüeñal común. El programa ENGINE, que se incluye en este texto, calculará las ecuaciones deducidas en este capítulo y le permitirá al estudiante practicar muchas de las variaciones del diseño de un motor en poco tiempo. Se proporcionan algunos ejemplos como archivos de disco para que se lean en el programa. Estos se señalan en el texto. Se anima al estudiante a investigar estos ejemplos con el programa ENGINE a fin de comprender y tener una idea de las sutilezas de este tema. En el apéndice A se proporciona un manual del usuario para el programa ENGINE, el cual puede leerse o consultarse fuera de la secuencia, sin perder continuidad, para familiarizarse con la operación del programa.

Como con el caso de un solo cilindro, no se consideran los aspectos termodinámicos del motor de combustión interna más allá de la definición de las fuerzas de combustión necesarias para impulsar el dispositivo presentado en el capítulo anterior. Se concentrará la atención en la cinemática de los motores y en los aspectos dinámicos de la maquinaria. No se intenta hacer del estudiante un "diseñador de motores", sino enseñarlo a aplicar los principios de dinámica a un problema de diseño práctico de interés general y ayudarlo a entender la complejidad y la fascinación implícitas en el diseño de un dispositivo dinámico más complicado que el motor de un solo cilindro.

14.1 DISEÑOS DE MOTORES MULTICIUNDRICOS

Los motores multicilíndricos están diseñados en una amplia variedad de configuraciones, desde la simple disposición de cilindros en línea hasta las disposiciones de cilindros en V opuestos y radiales, algunas de las cuales se muestran en la figura 14-1. Estas disposiciones utilizan cualquiera de los ciclos de los tiempos analizados en el capítulo 13: Clerk, Otto o Diesel.

MOTORES EN LÍNEA La disposición más común y simple es un motor en línea, con todos sus cilindros en un plano común, como se muestra en la figura 14-2. Los **motores en línea** de dos,* tres,* cuatro, cinco y seis cilindros son de uso común. Cada cilindro tendrá su propio mecanismo de manivela-corredera que consiste de una manivela, una biela y un pistón. Las manivelas se forman en un **cigüeñal** común, como se muestra en la figura 14-3. A cada manivela de cilindro en el cigüeñal se le llama **codo de cigüeñal.** Estos codos de cigüeñal se dispondrán con cierta relación de **ángulo de fase** entre sí, con el fin de alternar los movimientos de los pistones en el tiempo. A partir del análisis de las fuerzas de sacudimiento y de equilibrio del capítulo anterior, es evidente que se deseará tener pistones que se muevan en direcciones opuestas uno con respecto al otro al mismo tiempo, con el fin de cancelar las fuerzas inerciales recíprocas. Las relaciones óptimas de ángulo de fase entre los codos de cigüeñal diferirán dependiendo del número de cilindros y del ciclo de los tiempos del motor. Normalmente hay una (o un pequeño número) disposición de codos de cigüeñal viable para la configuración de un motor dada para alcanzar esta meta. El motor de la figura 14-2 es un motor con ciclo de cuatro tiempos,

* Principalmente en motocicletas y botes.

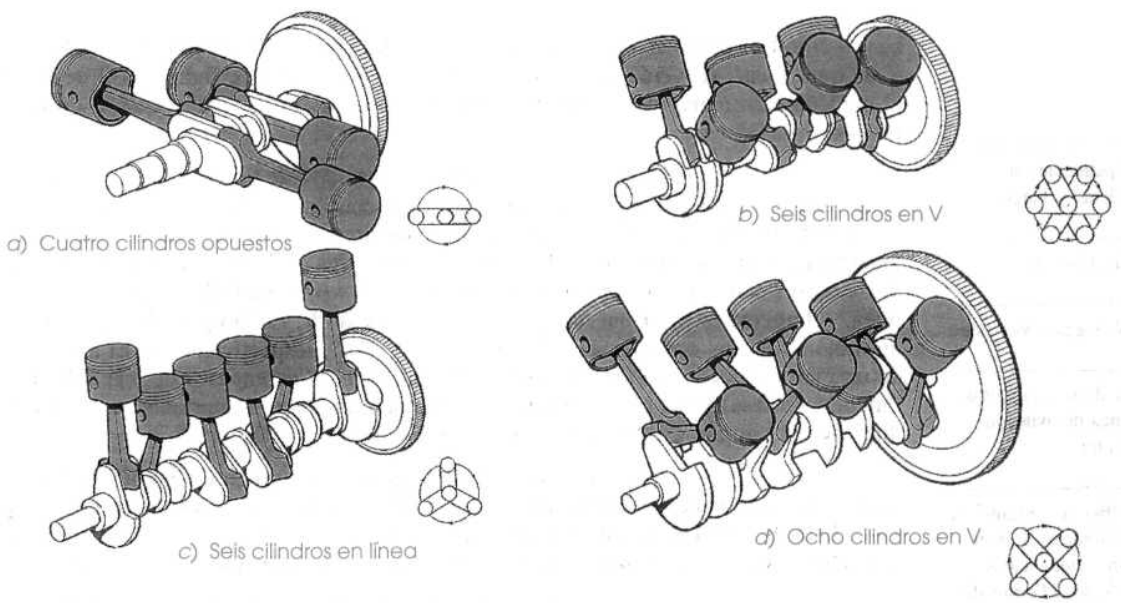


FIGURA 14-1

Diversas configuraciones de motor multicilíhdrico

Ilustrations Copyright Eaglemoss Publications/Car Care Magazine. Reproducido con autorización

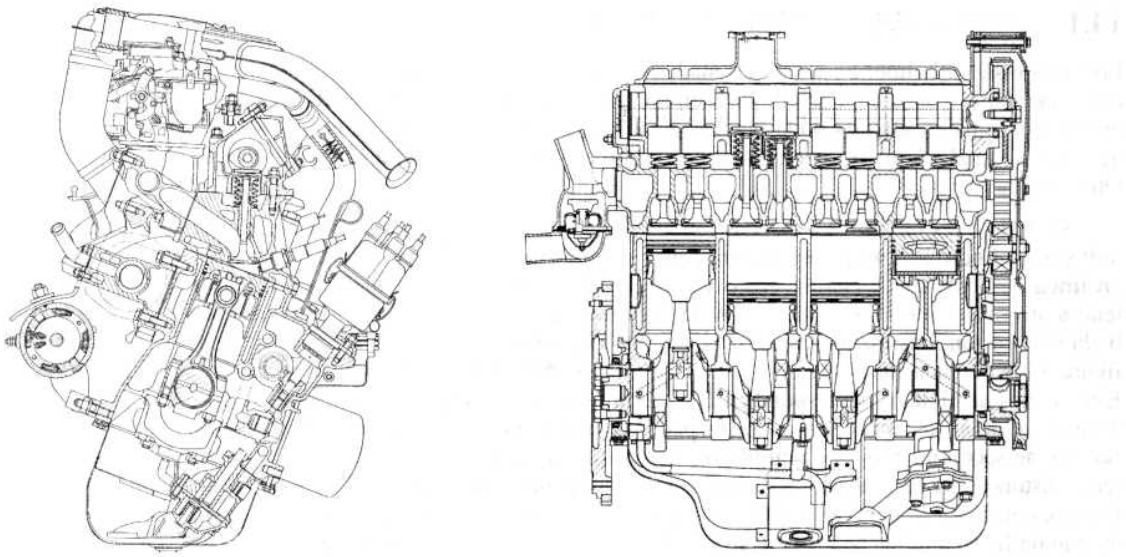


FIGURA 14-2

vistas en corte ae un motor ae cuatro cilindros en linea de cuatro tiempos *Cortesía* de *FIAT Corporation, Italia*

cuatro cilindros en línea, con sus codos de cigüeñal en ángulos de fase de 0°, 180°, 180° y 0° que, como se verá, son óptimos para este motor. En la figura 14-3 se muestra el cigüeñal, las bielas y los pistones para el mismo diseño de motor que el de la figura 14-2.

MOTORES V se producen versiones de motores de este tipo con dos,* cuatro,* seis, ocho, diez^ y doce cilindros,í en los cuales las configuraciones más comunes son los V-6 y V-8. En la figura 14-4 se muestra una sección transversal y en la figura 14-5 se muestra un corte de un motor V-12 a 60°. Los motores en V pueden considerarse como *dos motores con cilindros montados en línea en un mismo cigüeñal.* Las dos partes "en línea" o bancos, están dispuestas entre sí en un ángulo V. En la figura *14-ld)* se muestra un motor V-8. Sus codos están a 0°, 90°, 270° y 180°, respectivamente. El ángulo en V de un motor de ocho cilindros es de 90°. La disposición geométrica del eje del cigüeñal (ángulos de fase) y los cilindros (ángulo V) tienen un efecto importante en la condición dinámica del motor. Pronto se explorarán en detalle estas relaciones.

MOTORES OPUESTOS son esencialmente motores en V con un ángulo de 180°. Los pistones de cada banco están en lados opuestos del cigüeñal, como se muestra en la figura 14-6. Esta disposición permite eliminar a las fuerzas inerciales y se emplea bastante en los motores de avión.§ También se ha usado en algunas aplicaciones automotrices."

MOTORES RADIALES tienen los cilindros dispuestos radialmente, alrededor del cigüeñal, casi en un plano común. Fueron de uso muy frecuente en algunos aviones de la Segunda Guerra Mundial, ya que permitían grandes desplazamientos volumétricos, y, por tanto, alta potencia, en máquinas compactas cuya forma se adapta a la del aeroplano. Normalmente enfriados por aire, la disposición de sus cilindros permitía una buena expo-

* Principalmente en motocicletas y barcos.

† Honda, Chrysler.

‡ BMW, Jaguar, Mercedes.

§ Motor de seis cilindros de la línea de aviación Continental.

|| VW "Beetle" original de cuatro cilindros, Subaru de cuatro, motocicleta Honda de seis, Ferrari de doce, Porche de seis, el desafortunado Corvair de seis, y el efímero Tucker (Continental) de seis, entre otros.

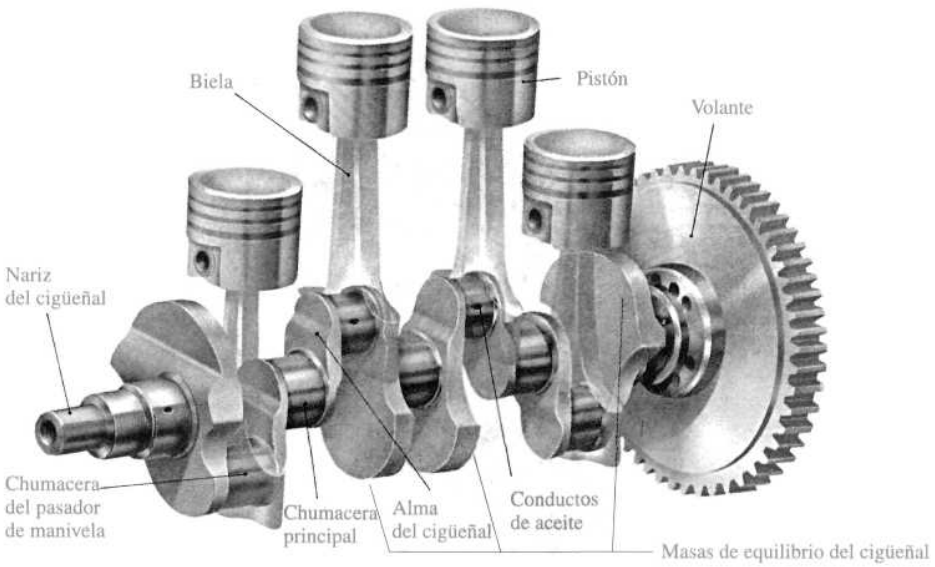
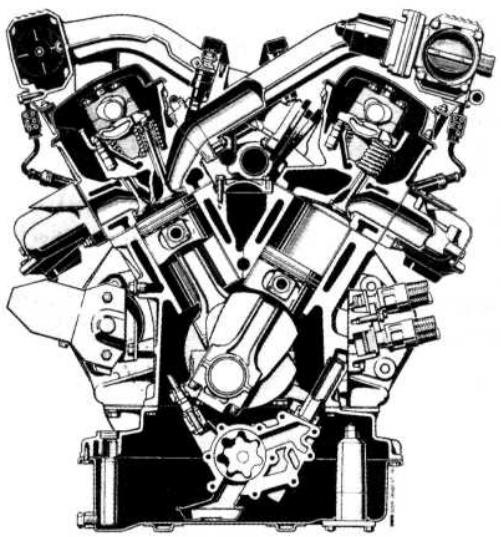


FIGURA 14-3

Cigüeñal de un motor de cuatro cilindros en línea con pistones, bielas y volante
Ilustration copyright Eaglemoss Publications/Car Core Magazine. Reproducido con autorización



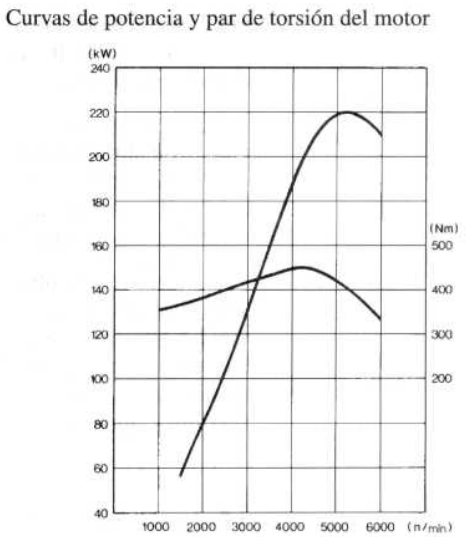


FIGURA 14-4

Sección transversal de un motor BMW V-12 de cinco litros y sus curvas de potencia y de par de torsión *Cortesía de BMW of North America Inc.*

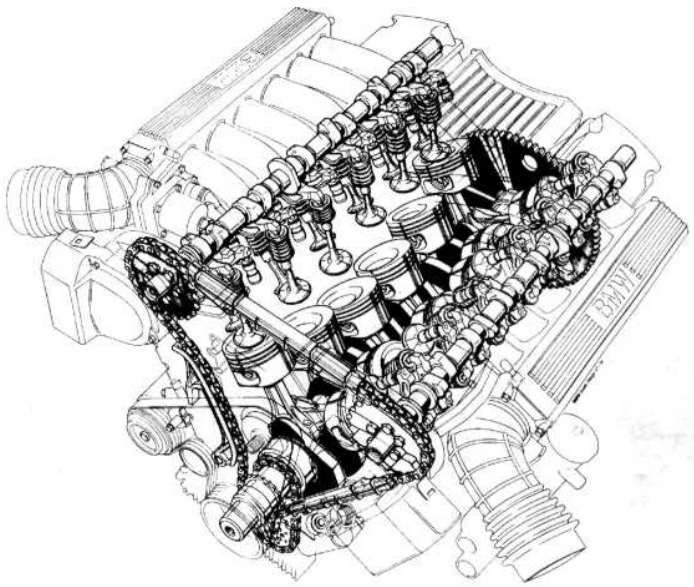


FIGURA 14-5
Vista en corte de un motor BMW V-l 2 de cinco litros *Cortesía de BMW of North America Inc.*

sición de todos al flujo de aire. En versiones grandes había varias hileras de cilindros radiales, escalonadas rotacionalmente, para permitir que el aire de enfriamiento alcanzara todas las hileras traseras. El motor de turbina de gas ha ocasionado que los motores radiales para aeronaves se consideren obsoletos.

MOTORES ROTATORIOS fueron una variante interesante del motor radial de aviación. Son similares en apariencia y disposición a los cilindros de los motores radiales, la diferencia radica en que el cigüeñal es el elemento fijo estacionario. ¡La hélice propulsora estaba fija al bloque (o al cárter), el cual giraba alrededor del cigüeñal! Ésta es una inversión cinemática del motor de tipo radial. Al menos no necesita un volante.

A lo largo de un siglo se han intentado muchas otras configuraciones de motores de estas ubicuas máquinas. La bibliografía al final de este capítulo contiene bastantes referencias que describen otros diseños de motores, los usuales, los inusuales y los exóticos. Se comenzará una exploración detallada del diseño de motores multicilíndricos con la configuración más simple, los motores en línea, y el progreso a los motores en V y sus versiones opuestas.

14.2 DIAGRAMA DE FASE DE LA MANIVELA

Es fundamentalmente para el diseño de cualquier motor multicilíndrico (o bomba de pistón) la disposición de los codos del cigüeñal en el cigüeñal. Se utilizará el motor en línea de cuatro cilindros como ejemplo. Hay muchas opciones para los ángulos fase de la manivela en el motor de cuatro cilindros. Se comenzará, por ejemplo, con el más obvio

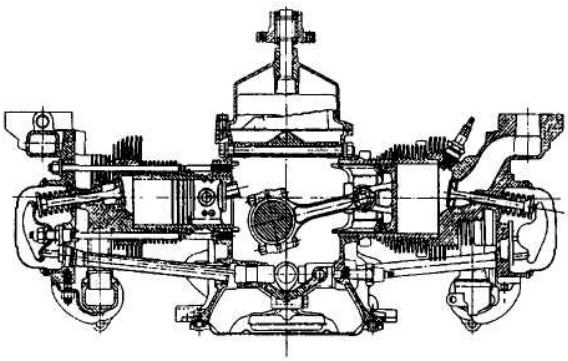


FIGURA 14-6

Motor Chevrolet Corvair de seis cilindros opuestos horizontalmente *Cortesía de Chevrolet Div, General Motors Corp.*

desde un punto de vista común. Hay 360° en cualquier cigüeñal. Se tienen cuatro cilindros, por lo tanto, un arreglo de 0°, 90°, 180° y 270° parece el apropiado. El **desfasamiento** entre los codos es entonces de 90°. En general, para una máxima cancelación de fuerzas inerciales, que tienen un periodo de una revolución, el ángulo fase delta óptimo será:

$$\Delta\phi_{\text{inercia}} = \frac{360°}{n} \tag{14.1}$$

donde n es el número de cilindros.

Se deben establecer algunas convenciones para la medición de estos ángulos de fase, por ejemplo:

1 El primer cilindro (frontal) será el número 1 y su ángulo de fase será siempre cero. Es el cilindro de referencia para los demás.

2 El ángulo de fase de todos los demás cilindros se medirá con respecto al codo del cigüeñal del cilindro 1.

3 Los ángulos de fase se miden internamente con respecto al cigüeñal, es decir, en relación con un sistema coordenado que se encuentra en el primer codo del cigüeñal.

4 Los cilindros se enumeran consecutivamente del frente hacia atrás del motor.

Los ángulos de fase se definen en el **diagrama de fase de la manivela** como se muestra en la figura 14-7 para un motor en línea de cuatro cilindros. En la figura 14-7a) se muestra el cigüeñal con sus codos numerados en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del eje. El eje gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj. En este diagrama los pistones oscilan horizontalmente a lo largo del eje x. Se muestra al cilindro 1 con su pistón en el punto muerto superior (PMS). Si se toma esta posición como el punto inicial para las abscisas (así el tiempo es cero) en la figura 14-7b), se gráfica la velocidad de cada pistón para dos revoluciones de la manivela (a fin de adaptar un ciclo completo de cuatro tiempos). El pistón 2 llega al PMS 90° después del pistón 1. Así que

se dice que el cilindro 2 se retrasa respecto del cilindro 1 por 90 grados. Por convención, *un evento con retraso se define como aquel que tiene un ángulo de fase negativo,* como se muestra por medio de la numeración en el sentido de las manecillas del reloj de los codos del cigüeñal. En la gráfica de velocidad se muestra claramente que cada cilindro llega al PMS (velocidad cero) 90° después que el anterior. La velocidad negativa en las gráficas de la figura \A-lb) indican el movimiento del pistón a la izquierda (carrera descendente) en la figura 14-7a); la velocidad positiva indica movimiento a la derecha (carrera ascendente).

En el análisis de este capítulo se supondrá una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj de todos los cigüeñales, y todos los ángulos de fase serán negativos. Sin embargo, se omitirá el signo negativo de la lista de ángulos de fase en la inteligencia de que seguirán esta convención.

En la figura 14-7 se muestra la temporización de eventos dentro del ciclo, que es útil y necesaria en la definición del diseño del cigüeñal. Sin embargo, no se requiere dibujar las formas senoidales correctas de las gráficas de velocidad para obtener la información necesaria. Todo lo que se necesita es una indicación esquemática de las posiciones relativas dentro del ciclo de los ascensos y descensos de los cilindros. Esta misma información la proporciona el diagrama de fase de manivela simplificado de la figura 14-8. Aquí los movimientos de los pistones están representados por bloques rectangulares con un bloque negativo usado en forma arbitraria para mostrar un pistón en carrera descendente y uno positivo para mostrar un pistón en carrera ascendente. Es estrictamente esquemático. Los valores positivos y negativos de los bloques no implican más que lo establecido. El diagrama de fase de la manivela puede (y debe) trazarse para cualquier disposición propuesta de ángulos de fase del cigüeñal. Para trazarlo simplemente cambie cada bloque de cilindros a la derecha en su ángulo de fase con respecto al primer cilindro.

14.3 FUERZAS DE SACUDIMIENTO EN MOTORES CON CILINDROS EN LÍNEA

Se desea determinar todas las fuerzas de sacudimiento globales que resultan de la disposición del ángulo de fase del cigüeñal seleccionado. Cada uno de los cilindros contribuirá en forma individual a la fuerza total de sacudimiento. Se pueden sobreponer sus efectos tomando en cuenta sus cambios de fase. La ecuación 13.14e define la fuerza de sacudimiento para un cilindro cuyo cigüeñal rota con <a constante.

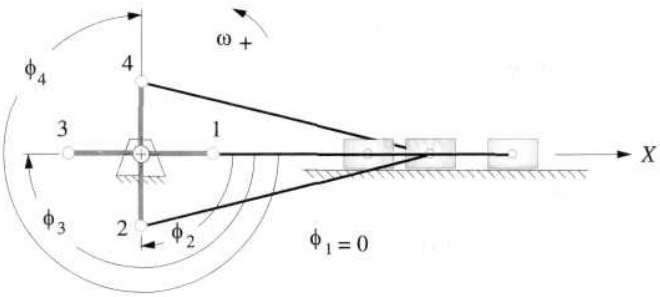
Para $\alpha = 0$:

$$\mathbf{F_S} \equiv \left[m_A r\omega^2 \cos \omega t + m_B r\omega^2 \left(\cos \omega t + \frac{r}{l} \cos 2\omega t \right) \right] \hat{\mathbf{i}} + \left[m_A r\omega^2 \operatorname{sen} \omega t \right] \hat{\mathbf{j}} \qquad (14.2a)$$

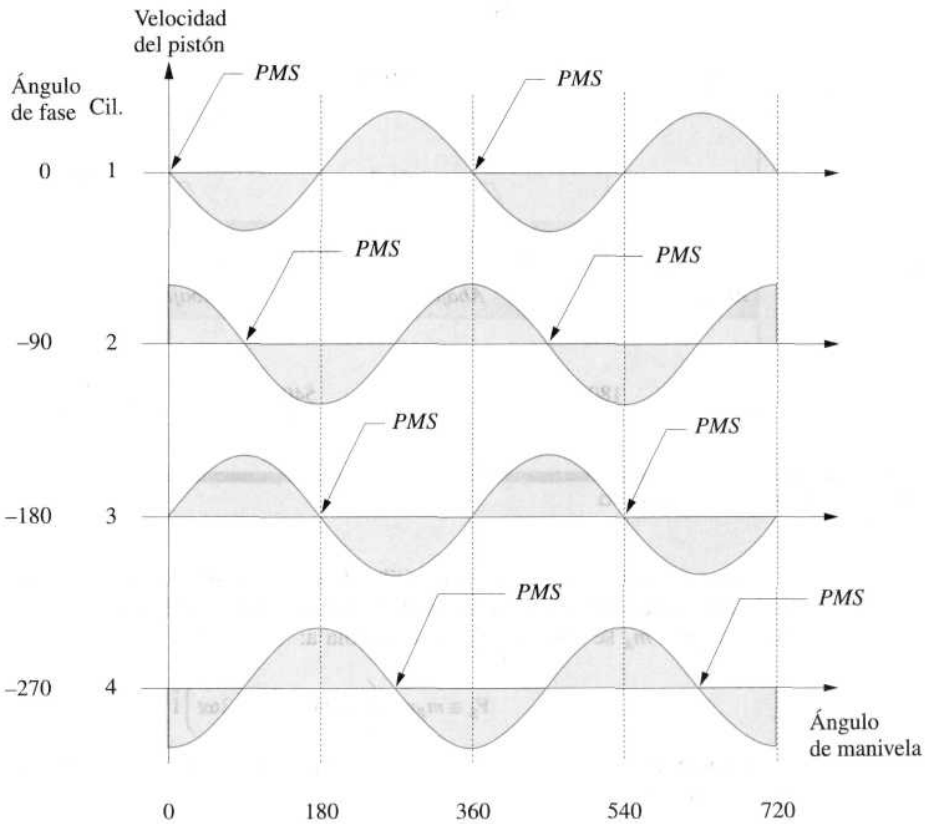
Esta expresión es para una manivela desequilibrada. En los motores multicilíndricos cada codo del cigüeñal en el cigüeñal es un contrapeso que sirve por lo menos para eliminar los efectos de las fuerzas de sacudimiento de la masa combinada m_A de la biela y manivela que se suponen concentradas en el muñón del cigüeñal. (Véase la sección 13.10 y la ecuación 13.24.) A veces los codos del cigüeñal en un motor multicilíndrico también están sobreequilibrados, aunque con una menor extensión que para el motor de un solo cilindro.* La necesidad del sobreequilibrio es menor si los ángulos de fase del cigüeñal se disponen para cancelar los efectos de las masas recíprocas en los pasadores del pistón. Esto es posible, excepto en algunos motores en línea de dos cilindros y de cuatro tiempos.

14

* Un motor V-8 a 90° tiene en general aproximadamente $m_B/2$ de masa sobreequilibrada agregada por codo del cigüeñal.



a) Ángulos de fase del cigüeñal



b) Diagrama de fase de manivela

FIGURA 14-7

Ángulos de fase de manivela y diagrama de fase

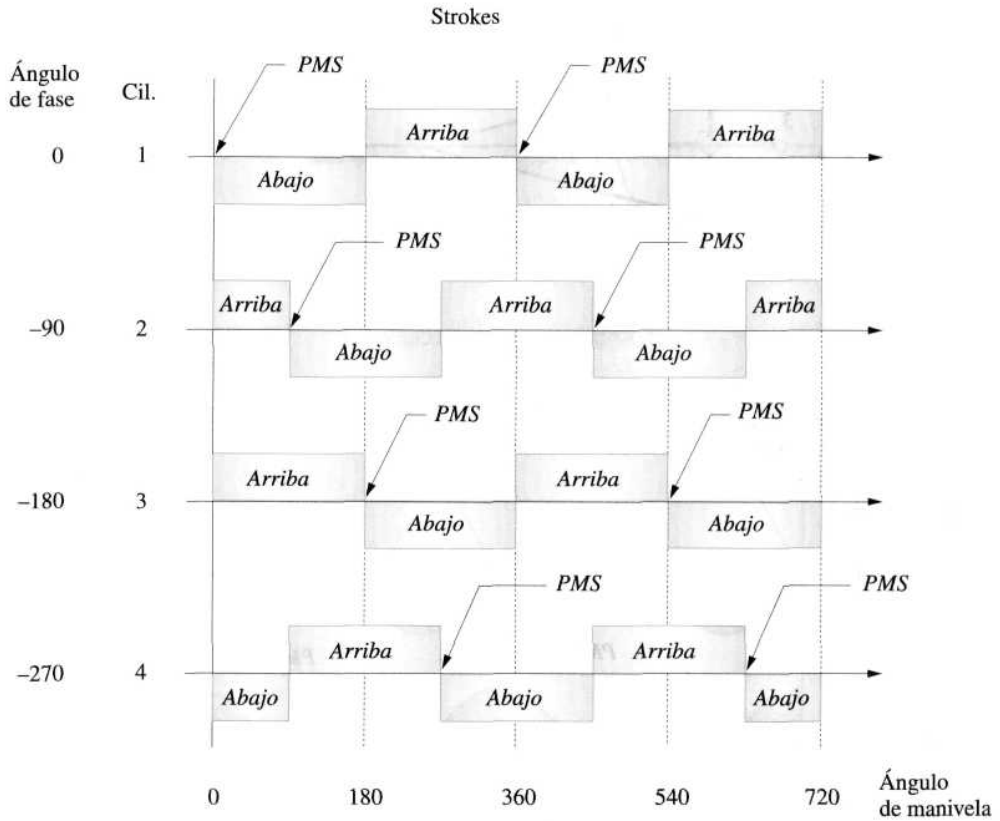


FIGURA 14-8

Diagrama esquemático de fases de manivela

Si se proporciona una masa equilibrada con un producto mr igual a $m_A r_A$ para cada codo del cigüeñal como se muestra en la figura 14-3, los términos en la ecuación 14.2a que incluyen m_A se eliminarán, reduciéndola a:

$$\mathbf{F}_S \cong m_B r\omega^2\left(\cos\omega t + \frac{r}{l}\cos 2\omega t\right)\hat{\mathbf{i}} \tag{14.2b}$$

Recuerde que éstas son expresiones aproximadas que excluyen todas las armónicas superiores a la segunda.

Se supondrá que todos los cilindros en el motor son de igual desplazamiento y que todos los pistones y todas las bielas son intercambiables. Esto es deseable para un equilibrio dinámico y para costos más bajos de producción. Si el ángulo de manivela ωt representa la posición instantánea del codo del cigüeñal de referencia para el cilindro 1, las posiciones correspondientes de las otras manivelas se definen por sus ángulos de fase como se muestra en la figura 14-7. La fuerza total de sacudimiento para un motor en línea multicilíndrico es entonces:

$$\mathbf{F}_S \equiv m_B r\omega^2 \sum_{i=1}^{n}\left[\cos(\omega t-\phi_i)+\frac{r}{l}\cos 2(\omega t-\phi_i)\right]\hat{\mathbf{i}} \qquad (14.2c)$$

donde n = número de cilindros y $\phi_1 = 0$. Se sustituye la identidad:

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

y factorizando:

$$\mathbf{F}_S \equiv m_B r\omega^2\left[\begin{array}{l}\cos\omega t\sum_{i=1}^{n}\cos\phi_i+\operatorname{sen}\omega t\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen}\phi_i \\ +\frac{r}{l}\left(\cos 2\omega t\sum_{i=1}^{n}\cos 2\phi_i+\operatorname{sen} 2\omega t\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen} 2\phi_i\right)\end{array}\right]\hat{\mathbf{i}} \qquad (14.2d)$$

El valor ideal para la fuerza de sacudimiento es cero. Esta expresión sólo es cero para todos los valores de ωt si:

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\phi_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen}\phi_i = 0 \qquad (14.3a)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\cos 2\phi_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen} 2\phi_i = 0 \qquad (14.3b)$$

Por consiguiente, hay algunas combinaciones de ángulos de fase ϕ_i que provocarán la cancelación de la fuerza de sacudimiento hasta la segunda armónica. Si se desea cancelar las armónicas superiores, se puede remplazar esos términos armónicos truncados de la representación de la serie de Fourier y se encontrará que la cuarta y sexta armónica se cancelarán si:

$$\sum_{i=1}^{n}\cos 4\phi_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen} 4\phi_i = 0 \qquad (14.3c)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\cos 6\phi_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n}\operatorname{sen} 6\phi_i = 0 \qquad (14.3d)$$

Las ecuaciones 14.3 predicen convenientemente el comportamiento de las fuerzas de sacudimiento para cualquier diseño propuesto de motor en línea. El programa ENGINE calcula las ecuaciones 14.3 y muestra una tabla de sus valores. Observe que **las sumatorias del seno y del coseno de cualquier múltiplo de los ángulos de fase debe ser cero para que la armónica de la fuerza de sacudimiento sea cero.** El cálculo para el ejemplo de un motor de cuatro cilindros con ángulos de fase de $\phi_1 = 0°$, $\phi_2 = 90°$, $\phi_3 = 180°$, $\phi_4 = 270°$ en la tabla 14-1 muestra que las fuerzas de sacudimiento son cero para la primera, segunda y sexta armónicas, y diferente de cero para la cuarta. Por lo tanto, esta elección con base en el sentido común ha resultado ser buena en cuanto a las fuerzas de sacudimiento se refiere. Los coeficientes de los términos de la cuarta y sexta armónicas son muy pequeños, así que cualquiera de sus contribuciones, si hay alguna, es despreciable. La componente primaria es la de mayor importancia, debido a su magnitud potencial. El término secundario (segunda armónica) es menos crítico que el primario cuando se multiplica por r/l, el cual generalmente es menor que 1/3. Una armónica secundaria desequilibrada de la fuerza de sacudimiento es indeseable pero puede presentarse, especialmente si el motor es de carrera pequeña (menor que 1/2 litro por cilindro).

TABLA 14-1 Estado de equilibrio de fuerza de un motor de cuatro cilindros en línea con cigüeñal de 0°, 90°, 180°, 270°

Fuerzas primarias:	$\sum_{i=1}^{n} \text{sen}\,\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} \cos\phi_i = 0$
Fuerzas secundarias:	$\sum_{i=1}^{n} \text{sen}\,2\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} \cos 2\phi_i = 0$
Fuerzas de cuarta armónica:	$\sum_{i=1}^{n} \text{sen}\,4\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} \cos 4\phi_i = 4$
Fuerza de sexta armónica:	$\sum_{i=1}^{n} \text{sen}\,6\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} \cos 6\phi_i = 0$

Para ver con más detalle los resultados de esta configuración de motor en línea de cuatro cilindros 0°, 90°, 180°, 270°, corra el programa ENGINE, elija del menú la configuración *Example,* y después *Plot* para la fuerza de sacudimiento. Véase el apéndice A para instrucciones más detalladas sobre el uso del programa ENGINE.

14.4 PAR DE TORSIÓN DE INERCIA EN MOTORES CON CILINDROS EN LÍNEA

El par de torsión de inercia para motores de un solo cilindro se definió en la sección 13.6 y en la ecuación 13.15e. Ahora el punto es reducir este par de torsión de inercia, preferiblemente a cero, porque se suma al par de torsión del gas para formar el par de torsión total. (Véase la sección 13.7.) El par de torsión de inercia no agrega nada a la red del par de torsión impulsor cuyo valor promedio es siempre cero, pero crea grandes oscilaciones en el par de torsión total que lo aleja de su uniformidad. Las oscilaciones del par de torsión de inercia se encubren hasta cierto punto con la adición de un volante adecuado al sistema, o bien, su efecto externo se cancela con la elección de ángulos de fase apropiados. Sin embargo, las oscilaciones del par de torsión, incluso si están ocultas para el observador, o hacen que la suma sea cero, están presentes en el cigüeñal y pueden ocasionar una fractura por fatiga torsional si esta parte no se diseña apropiadamente. (Véase también la figura 14-22.) La aproximación de la ecuación del par de torsión de inercia de un cilindro para tres armónicas es:

$$\mathbf{T}_{i21} \cong \frac{1}{2} m_B r^2 \omega^2 \left(\frac{r}{2l} \text{sen}\,\omega t - \text{sen}\,2\omega t - \frac{3r}{2l} \text{sen}\,3\omega t \right) \hat{\mathbf{k}} \qquad (14.4a)$$

Al sumar para todos los cilindros e incluir sus ángulos de fase:

$$\mathbf{T}_{i21} \cong \frac{1}{2} m_B r^2 \omega^2 \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{r}{2l} \text{sen}\,(\omega t - \phi_i) - \text{sen}\,2(\omega t - \phi_i) - \frac{3r}{2l} \text{sen}\,3(\omega t - \phi_i) \right] \hat{\mathbf{k}} \qquad (14.4b)$$

Sustituyendo la identidad:

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b$$

y factorizando:

$$\mathbf{T}_{i21} \equiv \frac{1}{2} m_B r^2 \omega^2 \left[\begin{array}{l} \dfrac{r}{2l}\left(\operatorname{sen} \omega t \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \cos \phi_i - \cos \omega t \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} \phi_i \right) \\ -\left(\operatorname{sen} 2\omega t \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \cos 2\phi_i - \cos 2\omega t \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} 2\phi_i \right) \\ -\dfrac{3r}{2l}\left(\operatorname{sen} 3\omega t \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \cos 3\phi_i - \cos 3\omega t \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} 3\phi_i \right) \end{array} \right] \hat{\mathbf{k}} \qquad (14.4c)$$

Éste sólo puede ser cero para todos los valores de ωt si:

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} \phi_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \cos \phi_i = 0 \qquad (14.5a)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} 2\phi_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \cos 2\phi_i = 0 \qquad (14.5b)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} 3\phi_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \cos 3\phi_i = 0 \qquad (14.5c)$$

Las ecuaciones 14.5 predicen en forma adecuada el comportamiento del par de torsión de inercia para cualquier motor con cilindros en línea propuesto. El cálculo para el ejemplo de un motor de cuatro cilindros con ángulos de fase de : $\phi_1 = 0°$, $\phi_2 = 90°$, $\phi_3 = 180°$, $\phi_4 = 270°$ muestra que las componentes del par de torsión de inercia son iguales a cero para la primera, segunda y tercera armónicas. Por lo tanto, este ejemplo también es apropiado para los pares de torsión de inercia.

14.5 MOMENTO DE SACUDIMIENTO EN MOTORES CON CILINDROS EN LÍNEA

Se considera que el motor de un solo cilindro es un dispositivo en un solo plano, o en dos dimensiones, por lo tanto, se podría equilibrar estáticamente. El motor multicilíndrico está en tres dimensiones. Sus múltiples cilindros se distribuyen a lo largo del eje del cigüeñal. Aunque es posible cancelar las fuerzas de sacudimiento, ahí aún se puede desequilibrar por momentos en el plano del bloque del motor. Es necesario aplicar criterios para el equilibrio dinámico. (Véase la sección 12.2 y la ecuación 12.3.) En la figura 14-9 se muestra el esquema de un motor en línea de cuatro cilindros con ángulo de fase de la manivela de $\phi_1 = 0°$, $\phi_2 = 90°$, $\phi_3 = 180°$, $\phi_4 = 270°$. El espacio entre los cilindros es normalmente uniforme. Se pueden sumar los momentos en el plano de los cilindros respecto de algún punto conveniente tal como el extremo del cigüeñal.

$$\sum M_L = \sum_{i=1}^{n} z_i \mathbf{F}_{S_i} \hat{\mathbf{j}} \qquad (14.6a)$$

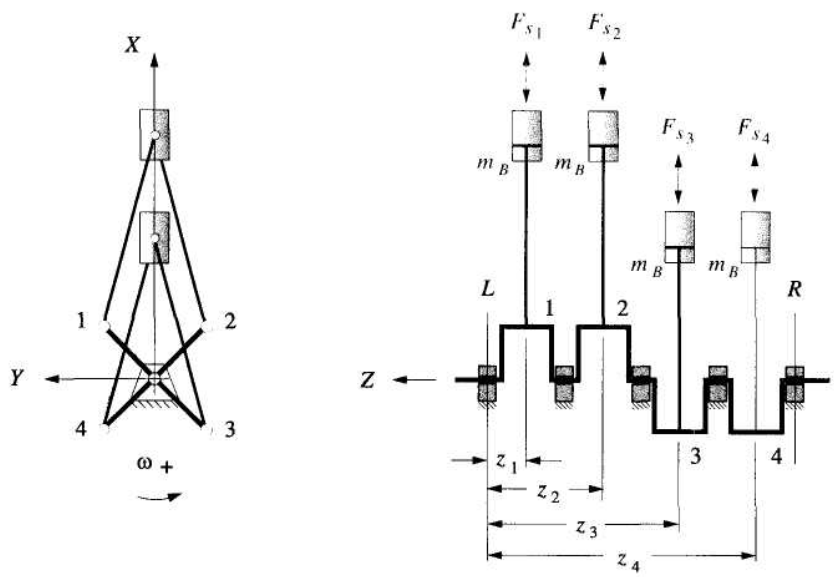


FIGURA 14-9

Brazos de momento correspondientes a los momentos de sacudimiento

donde $\mathbf{F}_{si}$ es la fuerza de sacudimiento y z_i es el brazo de momento del *i*ésimo cilindro. Sustituyendo $\mathbf{F}_{si}$ en la ecuación 14.2d:

$$\sum M_L \equiv m_B r\omega^2 \left[\begin{array}{l} \cos \omega t \sum_{i=1}^{n} z_i \cos \phi_i + \operatorname{sen} \omega t \sum_{i=1}^{n} z_i \operatorname{sen} \phi_i \\ + \dfrac{r}{l} \left(\cos 2\omega t \sum_{i=1}^{n} z_i \cos 2\phi_i + \operatorname{sen} 2\omega t \sum_{i=1}^{n} z_i \operatorname{sen} 2\phi_i \right) \end{array} \right] \hat{\mathbf{j}} \qquad (14.6b)$$

Esta expresión sólo es cero para todos los valores de ωt si:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i \cos \phi_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} z_i \operatorname{sen} \phi_i = 0 \qquad (14.7a)$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_i \cos 2\phi_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} z_i \operatorname{sen} 2\phi_i = 0 \qquad (14.7b)$$

Esto garantizará que no se presenten momentos de sacudimiento hasta la segunda armónica. Se puede extender a armónicas superiores como se hizo para la fuerza de sacudimiento.

$$\sum_{i=1}^{n} z_i \cos 4\phi_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} z_i \operatorname{sen} 4\phi_i = 0 \qquad (14.7c)$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_i \cos 6\phi_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} z_i \operatorname{sen} 6\phi_i = 0 \qquad (14.7d)$$

Observe que las sumatorias del seno y del coseno para cualquier múltiplo de los ángulos de fase debe ser cero, de modo que la armónica en el momento de sacudimiento sea cero. El cálculo para el eiemplo de un motor de cuatro cilindros con áneulos de fase de $\phi_1 = 0°$, $\phi_2 = 90°$, $\phi_3 = 180°$, $\phi_4 = 270°$, suponiendo un espaciamiento entre los cilindros de una unidad de longitud ($z_i = 1$), en la tabla 14-2, se muestra que los momentos de sacudimiento son distintos de cero para cualquiera de estas armónicas. Por lo tanto, la elección de los ángulos de fase es buena para las fuerzas de sacudimiento y momentos de torsión, pero falla en la prueba para momentos de sacudimiento iguales a cero. Los coeficientes de los términos de la cuarta y sexta armónicas en las ecuaciones de momento son muy pequeños, así que pueden despreciarse. El término secundario (segunda armónica) es menos crítico que el primario, pues se multiplica por *rll* que es generalmente menor que 1/3. Una armónica secundaria desequilibrada del momento de sacudimiento es indeseable, pero puede ser tolerada, especialmente si el motor es de carrera pequeña (menos de 1/2 litro por cilindro). Debido a su magnitud, la componente primaria es la de mayor importancia. Si se desea usar esta configuración del cigüeñal, se necesitará aplicar una técnica que equilibre el motor como se describirá en una sección posterior para eliminar por lo menos el momento primario. No es deseable un gran momento de sacudimiento ya que ocasionará un **cabeceo** en el motor hacia adelante y hacia atrás (como un caballo bronco que repara), debido a que el momento oscila de positivo a negativo en el plano de los cilindros. *No confunda este momento de sacudimiento con el par de torsión de sacudimiento* que hace **rotar** el motor hacia adelante y hacia atrás con respecto al eje del cigüeñal.

En la figura 14-10 se muestran las componentes primarias y secundarias del momento de sacudimiento para este ejemplo de motor de dos revoluciones de la manivela. Cada una es armónica pura de valor promedio cero. El momento total es la suma de estas dos componentes. Use el ejemplo engine #6 en el programa ENGINE para ver estas funciones. Véase el apéndice A para usar este programa.

14.6 ENCENDIDO UNIFORME

Las fuerzas de inercia, los pares de torsión y los momentos son sólo un conjunto de los criterios que deben tomarse en cuenta en el diseño de motores multicilíndricos. La fuerza

TABLA 14-2 Estado de equilibrio de momentos de un motor de cuatro cilindros en línea con cigüeñal de 0°, 90°, 180°, 270° y $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, $z_3 = 3$, $z_4 = 4$

Momentos primarios:	$\sum_{i=1}^{n} z_i \operatorname{sen} \phi_i = -2$	$\sum_{i=1}^{n} z_i \cos \phi_i = -2$
Momentos secundarios:	$\sum_{i=1}^{n} z_i \operatorname{sen} 2\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} z_i \cos 2\phi_i = -2$
Momentos de cuarta armónica:	$\sum_{i=1}^{n} z_i \operatorname{sen} 4\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} z_i \cos 4\phi_i = 6$
Momentos de sexta armónica:	$\sum_{i=1}^{n} z_i \operatorname{sen} 6\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} z_i \cos 6\phi_i = -2$

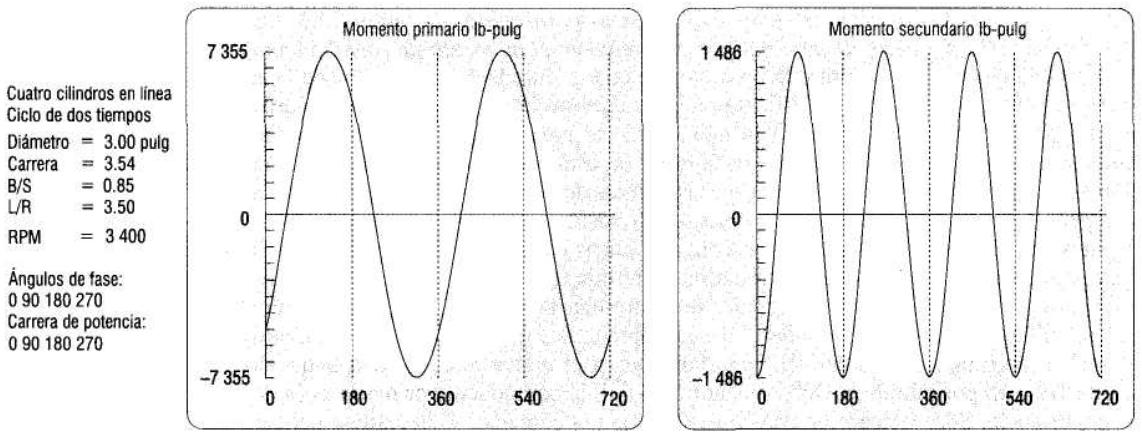


FIGURA 14-10

Momentos primario y secundario de un motor de cuatro cilindros con cigüeñal de 0°, 90°, 180°, 270°

y el par de torsión del gas se consideran de la misma importancia. En general, es deseable crear un patrón de encendido para los cilindros que estén uniformemente espaciados en el tiempo. Si el encendido de los cilindros ocurre en forma desigual habrá vibraciones inaceptables. Lo que se quiere es la uniformidad de los pulsos de potencia. Los pulsos de potencia dependen de los ciclos de carrera. Si el motor es de dos tiempos habrá un pulso de potencia por revolución en cada uno de sus *n* cilindros. El desfasamiento óptimo entre los codos del cigüeñal de los cilindros para pulsos de potencia regularmente espaciados será entonces:

$$\Delta\phi_{dos\ tiempos} = \frac{360°}{n} \tag{14.8a}$$

Para un motor de cuatro tiempos habrá un pulso de potencia en cada cilindro cada dos revoluciones. El desfasamiento óptimo de los codos del cigüeñal para pulsos de potencia uniformemente espaciados será:

$$\Delta\phi_{cuatro\ tiempos} = \frac{720°}{n} \tag{14.8b}$$

Compare las ecuaciones 14.8a y 14.8b con la ecuación 14.1 que define el desfasamiento óptimo para la cancelación de las fuerzas de inercia. Un motor de dos tiempos puede tener encendido uniforme y equilibrio inercial, pero en un motor de cuatro tiempos hay un conflicto entre estos dos criterios. Así que serán necesarias algunas transacciones de diseño para obtener la mejor disposición entre estos factores en el caso de un motor de cuatro tiempos.

14

Motor con un ciclo de dos tiempos

Para determinar el patrón de encendido del diseño de un motor se debe regresar al diagrama de fase de la manivela. En la figura 14-11 se reproduce la figura 14-8 y se le agrega

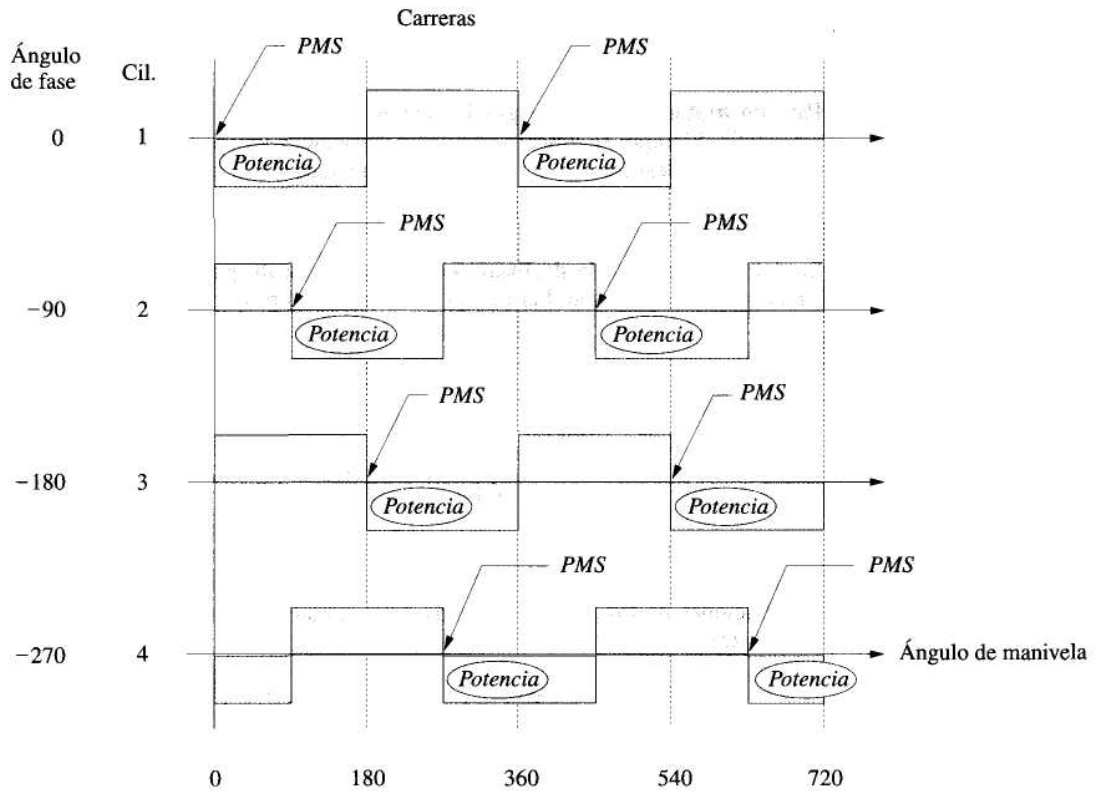


FIGURA 14-11

Diagrama de fases de manivela para un motor de dos tiempos y cuatro cilindros en línea con ángulos de fase del cigüeñal de 0º, 90°, 180°, 270°

nueva información. Se muestra que los pulsos de potencia para un **motor de cuatro cilindros con ciclo de dos tiempos,** con configuración de ángulo de fase de la manivela $\phi_i = 0°, 90°, 180°, 270°$. Observe que cada bloque negativo del cilindro en la figura 14-11 está corrido hacia la derecha en su ángulo de fase con respecto al cilindro de referencia 1. En esta representación esquemática sólo los bloques negativos en el diagrama están disponibles para pulsos de potencia, ya que representan la carrera descendente del pistón. Por convención el primer cilindro se enciende primero, así que su bloque negativo en 0° se llama *Potencia.* Los otros cilindros pueden encenderse en cualquier orden, pero sus pulsos de potencia se deben espaciar lo más uniformemente posible en el intervalo.

Los ángulos de fase de la manivela ordenan los espaciamientos de los pulsos de potencia. Existe más de un orden de encendido que dará un encendido uniforme, especialmente con un número grande de cilindros. En este sencillo ejemplo el orden de encendido 1, 2, 3, 4 funcionará bien, ya que se establece proporcionando pulsos sucesivos de potencia cada 90° a través del intervalo. Los **ángulos de carrera de potencia** ψ_i son los ángulos en el ciclo en que los cilindros se encienden, son definidos por los ángulos ae fase del cigüeñal y la elección del orden de encendido en combinación; en este ejemplo

los ángulos son $\psi_i = 0^o$, 90°, 180° y 270°. En general, ψ_i no es igual a ϕ_i. Su correspondencia con los ángulos de fase en este ejemplo resulta de la elección del orden consecutivo de encendido 1, 2, 3, 4.

Para un **motor de dos tiempos** los ángulos de carrera de potencia ψ_i deben estar *entre* 0 *y* 360 . Siempre se deseara que estén espaciados uniformemente en ese intervalo con un ángulo de desfasamiento carrera de potencia definido por la ecuación 14.8c. Para este motor de dos tiempos de cuatro cilindros, los ángulos ideales de carrera de potencia deben ser cuando $\psi_i = 0°, 90°, 180°, 270°$, los que se han alcanzado en este ejemplo.

Se define el **ángulo de desfasamiento de carrera de potencia** en forma diferente para cada ciclo de operación. Para el motor de dos tiempos:

$$\Delta\psi_{dos\ tiempos} = \frac{360°}{n} \tag{14.8c}$$

Para el motor de cuatro tiempos:

$$\Delta\psi_{cuatro\ tiempos} = \frac{720°}{n} \tag{14.8d}$$

El par de torsión del gas para un motor con un cilindro se definió en la ecuación 13.8b. El par de torsión combinado del gas para todos los cilindros debe ser la suma de las contribuciones de los *n* cilindros, cada desfasamiento mediante su ángulo de carrera de potencia ψ_i:

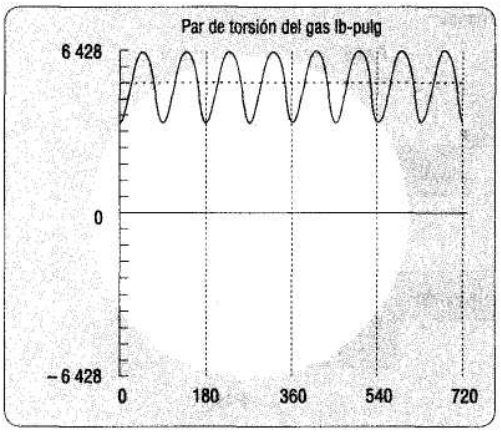
$$\mathbf{T}_{g21} \cong F_g r \sum_{i=1}^{n} \left\{ \operatorname{sen}(\omega t - \psi_i) \left[1 + \frac{r}{l} \cos(\omega t - \psi_i) \right] \right\} \hat{\mathbf{k}} \tag{14.9}$$

En la figura 14-12 se muestra el par de torsión del gas, el par de torsión de inercia y las fuerzas de sacudimiento para este motor de cuatro cilindros de dos tiempos graneados usando el programa ENGINE. En la figura 14-10 se muestran las componentes del momento de sacudimiento. Con excepción de los momentos de sacudimiento desequilibrados este diseño es aceptable. La fuerza de inercia y el par de torsión de inercia son cero, lo que resulta ideal. El par de torsión del gas consiste en pulsos uniformemente formados y espaciados en el intervalo, cuatro por revolución. Observe que el programa ENGINE gráfica dos revoluciones completas para el caso de cuatro tiempos; así que se ven ocho pulsos de potencia. Abra el archivo F14-12.eng en el programa para practicar con este ejemplo.

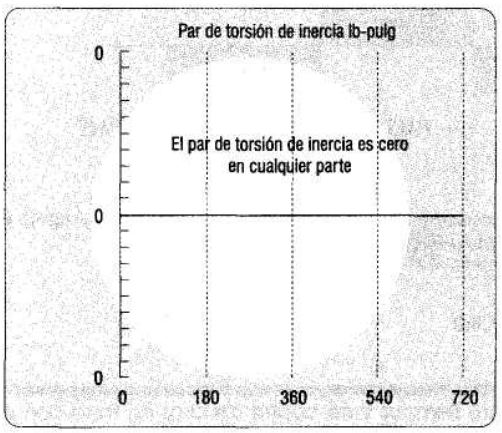
Motor con ciclo de cuatro tiempos

En la figura 14-13 se muestra un diagrama de fase de manivela para *el mismo diseño de cigüeñal* que en la figura 14-11, sólo que en este caso corresponde a un *motor con ciclo de cuatro tiempos.* Ahora sólo hay una carrera de potencia cada 720° para cada cilindro. El segundo bloque negativo para cada cilindro se debe usar para cada carrera de admisión. De nuevo el cilindro 1 es el primero en encender. Se desea un patrón de pulsos de potencia uniformemente espaciadas entre los otros cilindros pero ahora no es posible con este cigüeñal. En todo caso el orden de encendido es 1, 3, 4, 2 o 1, 2, 4, 3, o 1, 4, 2, 3; se puede escoger cualquier otro, y habrá tantos espacios como superposiciones en los pulsos de potencia. Se ha elegido para este ejemplo el primer orden de encendido, 1, 3, 4, 2. Esto da como resultado que el conjunto de ángulos de carrera de potencia $\psi_i = 0°, 180°, 270°,$

a)



b)



Cuatro cilindros en línea
Ciclo de dos tiempos

Diámetro = 3.00 pulg
Carrera = 3.54
B/S = 0.85
L/R = 3.50

RPM = 3 400

Ángulos de fase:
0 90 180 270
Carreras de potencia:
0 90 180 270

c)

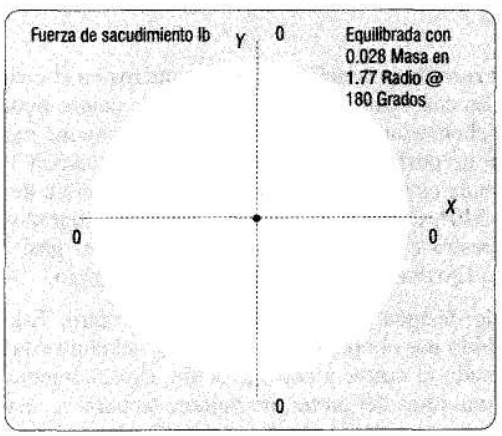


FIGURA 14-12

Par de torsión y fuerza de sacudimiento en ei motor de dos tiempos y cuatro cilindros en línea

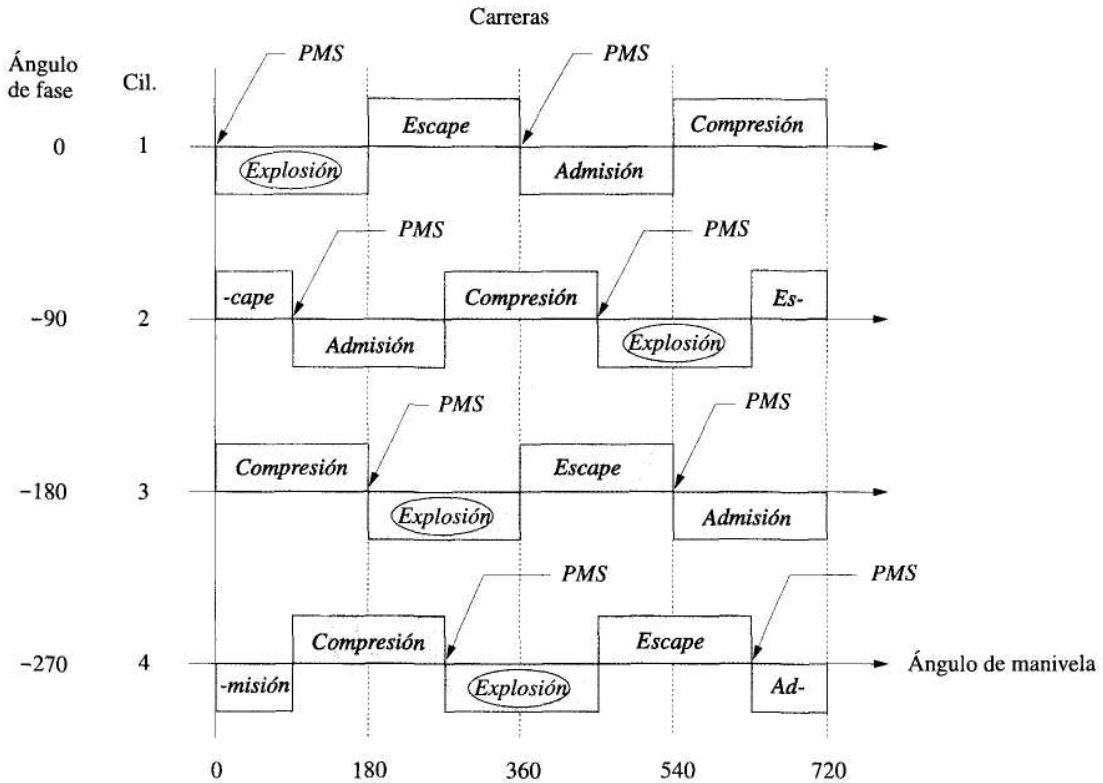


FIGURA 14-13

Diagrama de fases de manivela de un motor de cuatro tiempos y de cuatro cilindros en línea con ángulos de fase en el cigüeñal de 0°, 90°, 180°, 270°

450°. Estos **ángulos de carrera de potencia** definen los puntos en el **ciclo de 720°** donde se enciende cada cilindro. En consecuencia, para un motor de cuatro tiempos, los ángulos de carrera de potencia v|/, deben estar entre 0° y 720°. Es conveniente para cada intervalo un espaciado uniforme con un desfasamiento definido por la ecuación 14.8d. Para nuestro motor de cuatro tiempos de cuatro cilindros los ángulos de carrera de potencia ideales serían ψ_i = 0°, 180°, 360°, 540°. Claramente se ve que no se han logrado en este ejemplo. En la figura 14-14 se muestra el par de torsión resultante del gas. Abra el archivo F14-14.eng en el programa ENGINE para practicar con este ejemplo.

El orden de encendido desigual de la figura 14-14 es claro. Este par de torsión desigual del gas será percibido por el operario de cualquier vehículo con este motor cuyo funcionamiento es accidentado al correr y con vibración, especialmente en la velocidad de marcha. A velocidades más altas del motor, un volante tendería a encubrir este efecto, pero los volantes no son eficaces a velocidades bajas. Este hecho ocasiona que la mayoría de los diseñadores de motores *favorezcan el encendido uniforme sobre la eliminación de efectos de inercia* en su selección de ángulos de fase del cigüeñal. La fuerza de inercia, el par de torsión y el momento son funciones de la velocidad del motor al cuadrado. Pero

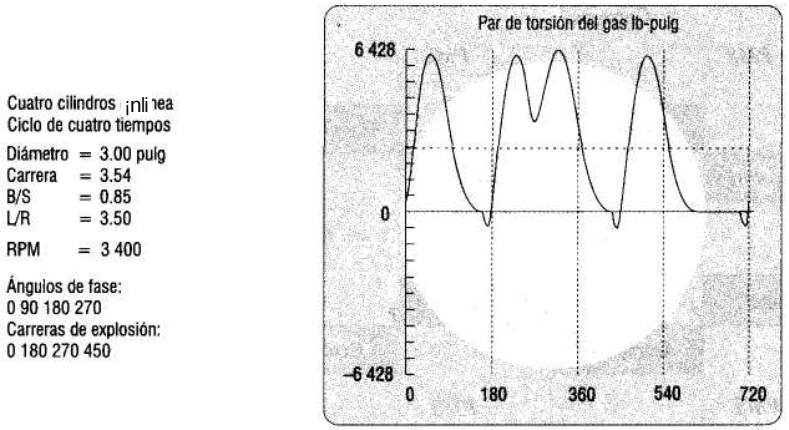


FIGURA 14-14

Encendido desigual de un motor de cuatro tiempos y cuatro cilindros en línea con cigüeñal a 0°, 90°, 180°, 270°

conforme la velocidad del motor aumenta la magnitud de estos factores, la misma velocidad aumenta también la capacidad del volante para encubrir sus efectos. No tanto con las asperezas del par de torsión del gas sino debido a un encendido desigual. Esto es malo para todas las velocidades y el volante no lo encubriría a una baja velocidad.

Por lo tanto, se debe rechazar este diseño de cigüeñal para el motor de cuatro cilindros de cuatro tiempos. La ecuación 14.8b indica que se necesita un desfasamiento del ángulo de fase $\Delta\phi_i = 180°$ en este cigüeñal para obtener un encendido uniforme. Se necesitarán cuatro codos de cigüeñal, y todos los ángulos de fase de la manivela deben ser menores a 360°. Por lo tanto, se debe repetir algún ángulo si se usa un desfasamiento del ángulo de fase de 180°. Una posibilidad es $\phi_i = 0°, 180°, 0°, 180°$ para los cuatro codos del cigüeñal.* El diagrama de fase de la manivela para este diseño se muestra en la figura 14-15. Las carreras de potencia pueden estar ahora espaciadas uniformemente sobre 720°. Se ha elegido un orden de encendido de 1, 4, 3, 2 que proporciona la secuencia deseada de los ángulos de carrera de potencia, $\psi_i = 0°, 180°, 360°, 540°$. (Observe que un orden de encendido de 1, 2, 3, 4 funcionaría también con este motor.) †

La condición del balance de inercia para este diseño se debe comprobar con las ecuaciones 14.3, 14.5 y 14.7. Éstas muestran que la fuerza de inercia primaria es cero, pero el momento primario, la fuerza secundaria, el momento secundario y el par de torsión de inercia son todos distintos de cero como se muestra en la tabla 14-3. Por lo tanto, este diseño de encendido uniforme ha puesto en riesgo el buen estado de equilibrio de inercia del diseño anterior para lograr un encendido uniforme. Las variaciones del par de torsión pueden ser encubiertas por un volante. Las fuerzas y los momentos secundarios son relativamente pequeños en un motor pequeño y pueden ser tolerados. El momento primario diferente de cero es un problema que se necesita manejar. Para ver los resultados de esta configuración de motor corra el programa ENGINE y seleccione *Example* del menú. Después grafique los resultados. Véase el apéndice A para instrucciones más detalladas sobre el uso del programa ENGINE.

* Observe que 0°, 180°, 360°, 540°, con módulo de 360° son iguales a 0°, 180°, 0°, 180°.

† Observe el patrón de órdenes aceptables de encendido (OE). Escriba el valor de dos revoluciones de cualquier OE aceptable, como en, 1, 4, 3, 2, 1,4, 3, 2. Cualquier conjunto de cuatro números sucesivos en esta secuencia, *uno u otro hacia adelante o hacia atrás*, es una OE aceptable. Si se requiere que el primero sea el cilindro 1, en este caso la única otra posibilidad es el conjunto hacia atrás 1, 2, 3, 4.

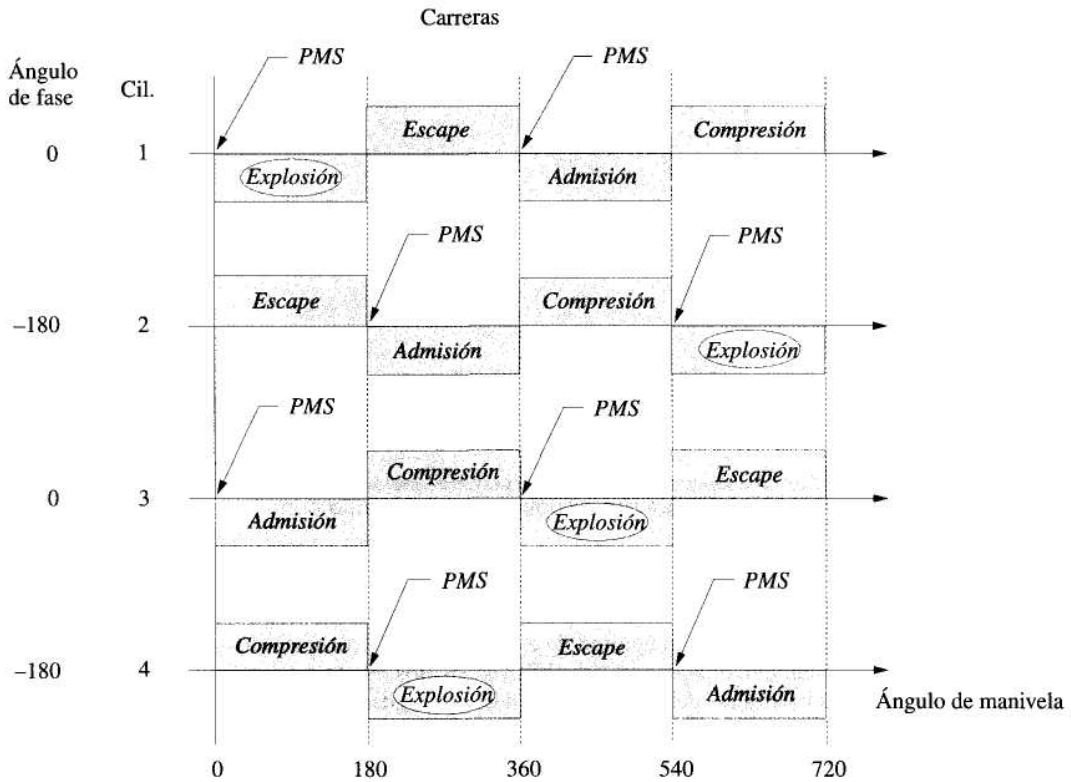


FIGURA 14-15

Diagrama de fases de manivela para un motor de cuatro tiempos y cuatro cilindros con encendido uniforme con ángulos de fase del cigüeñal de 0º, 180°, 0º, 180°

Pronto se analizarán las formas de contrarrestar un momento desequilibrado con la adición de ejes equilibrados, pero se puede usar un modo más directo para este ejemplo. En la figura 14-16 se muestra que el momento de sacudimiento se debe a la acción de las fuerzas de inercia individuales de los cilindros que actúan en los brazos del momento con respecto de algún centro. Si se considera que el centro será el punto *C* en el centro del motor, debe ser visible para cualquier diseño de fuerzas equilibradas primarias del cigüeñal, el cual presenta simetría de espejo respecto a un plano transversal del punto *C* cuyos momentos primarios también estarían equilibrados en todos los espaciamientos de los cilindros uniformes y todas las fuerzas inerciales iguales. En la figura 14-16a) se muestra que el cigüeñal a 0°, 180°, 0°, 180° no tiene simetría de espejo. El par $\mathbf{F}_{s1}\Delta z$, de los cilindros 1, 2, tiene la misma magnitud y sentido que el par $\mathbf{F}_{s3}\Delta z$ debido a los cilindros 3 y 4, así que se suman. En la figura 14-16/?) se muestra el cigüeñal a 0º, 180°, 180°, 0º que tiene *simetría de espejo*. El par $\mathbf{F}_{s1}\Delta z$ debido a la pareja de cilindros 1, 2 tiene la misma magnitud pero sentido opuesto al del par $\mathbf{F}_{s3}\Delta z$ de los cilindros 3, 4, así que se cancelan. Entonces se puede lograr un encendido y un momento primario equilibrado

TABLA 14-3 Estado de equilibrio de fuerza y momento de un motor de cuatro cilindros en línea con cigüeñal de 0°, 180°, 0°, 180° y $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 2$, $z_4 = 3$

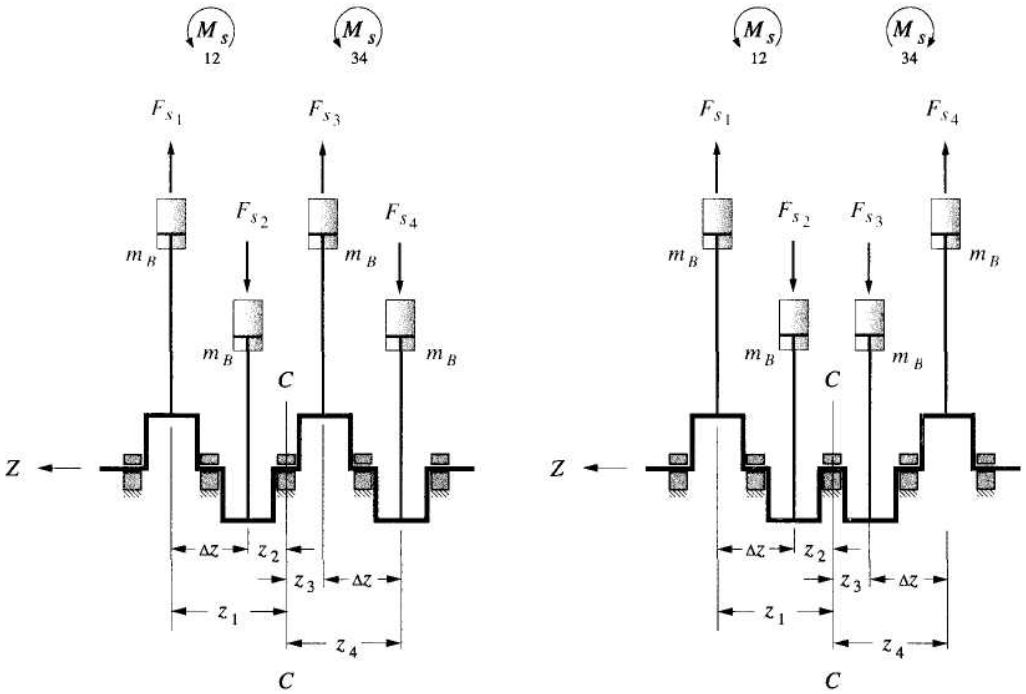
Fuerzas primarias:	$\sum_{i=1}^{n} \text{sen } \phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} \cos \phi_i = 0$
Fuerzas secundarias:	$\sum_{i=1}^{n} \text{sen } 2\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} \cos 2\phi_i = 4$
Fuerzas de cuarta armónica:	$\sum_{i=1}^{n} \text{sen } 4\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} \cos 4\phi_i = 4$
Fuerza de sexta armónica:	$\sum_{i=1}^{n} \text{sen } 6\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} \cos 6\phi_i = 4$
Momentos primarios:	$\sum_{i=1}^{n} z_i \text{ sen } \phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} z_i \cos \phi_i = -2$
Momentos secundarios:	$\sum_{i=1}^{n} z_i \text{ sen } 2\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} z_i \cos 2\phi_i = 6$
Momentos de cuarta armónica:	$\sum_{i=1}^{n} z_i \text{ sen } 4\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} z_i \cos 4\phi_i = 6$
Momentos de sexta armónica:	$\sum_{i=1}^{n} z_i \text{ sen } 6\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} z_i \cos 6\phi_i = 6$

cambiando la secuencia de los ángulos de fase del codo del cigüeñal; a $\phi_i = 0°, 180°, 180°, 0°$, lo que corresponde a la *simetría de espejo.*

El diagrama de fase de la manivela para este diseño se muestra en la figura 14-17. Las carreras de potencia pueden aún estar uniformemente espaciadas sobre 720°. Se ha elegido un orden de encendido de 1, 3, 4, 2 que dará la misma secuencia de ángulos de carrera de potencia deseada, $\psi_i = 0°, 180°, 360°, 540°$. (Observe que el orden de encendido de 1, 2, 4, 3 también funciona para este motor.)* Las ecuaciones 14.3, 14.5 y 14.7 y la tabla 14-4 muestran que la fuerza inercial primaria y el momento primario son cero, pero la fuerza secundaria, el momento secundario y el par de torsión de inercia son aún distintos de cero.

Este cigüeñal con $\phi_i = 0°, 180°, 180°, 0°$ se considera el mejor diseño de la transacción y se utiliza universalmente en la producción de motores de cuatro cilindros en línea. En las figuras 14-2 y 14-3 se observa tal diseño de un motor de cuatro cilindros. El equilibrio de inercia se sacrifica para ganar un encendido uniforme por las razones antes citadas. En la figura 14-18 se muestra el par de torsión del gas, el par de torsión de inercia y el par de torsión total para este diseño. En la figura 14-19 se muestra el segundo momento de sacudimiento, la segunda componente de la fuerza de sacudimiento y una gráfica polar de la fuerza total de sacudimiento de este diseño. Observe que las figuras

*En los motores carburados en línea, normalmente es preferible un orden no consecutivo de encendido (es decir, no 1,2, 3, 4), ya que los cilindros adyacentes cercanos a los extremos del motor no encienden secuencialmente. Esto le permite al múltiple de admisión más tiempo para recargarse localmente entre los tiempos de admisión. Con la inyección de combustible esto es menos crítico.



a) Cigüeñal no simétrico de 0°, 180°, 0°, 180°

o) Cigüeñal simétrico de 0°, 180°, 180°, 0°

FIGURA 14-16

En los cigüeñales con simetría de espejo se cancelan los momentos primarios

14-19*b*) y *c)* son simplemente vistas diferentes del mismo parámetro. La gráfica polar de la fuerza de sacudimiento en la figura 14-19c) es una vista de cómo se observan las fuerzas de sacudimiento en el final del eje del cigüeñal con un movimiento del pistón horizontal. La gráfica cartesiana de la figura 14-19¿>) muestra las mismas fuerzas sobre un eje de tiempo. Como la primera componente es cero, esta fuerza total se debe sólo a la componente secundaria. Se analizarán formas para eliminar estas fuerzas y momentos secundarios.

Para ver los resultados de esta configuración de motor corra el programa ENGINE y seleccione del menú *Examples*. Después seleccione *trazar (Plot)* o *imprimir (Print)* los resultados. Véase el apéndice A para instrucciones más detalladas sobre el uso del programa.

14

14.7 CONFIGURACIONES DE MOTORES EN V

Los mismos principios de diseño que se aplican a los motores en línea se pueden aplicar a los motores en V y los de configuraciones opuestas. El encendido uniforme tiene prio-

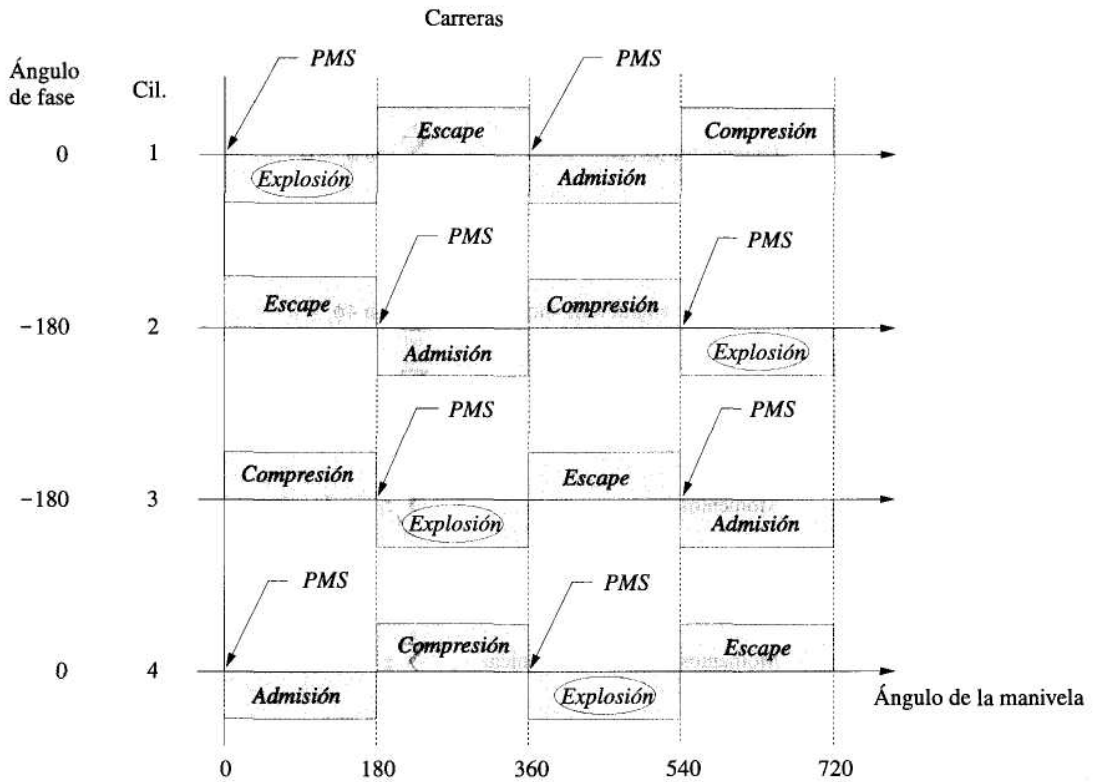


FIGURA 14-17

Diagrama de fases de manivela para un motor de cuatro tiempos y cuatro cilindros con simetría de espejo y cigüeñal de 0º, 180°, 180°, 0° con encendido uniforme

ridad sobre el equilibrio de inercia, y la simetría de espejo del cigüeñal equilibra los momentos primarios. En general, un motor en V tendrá un equilibrio de inercia semejante al de los motores en línea a partir de los cuales se construye. Un motor V-6 es esencialmente igual a dos motores de tres cilindros en línea sobre un cigüeñal común, un V-8 equivale a dos motores de cuatro cilindros en línea, etc. El mayor número de cilindros permite espaciar más pulsos de potencia por ciclo para un par de torsión del gas más suave (y de promedio mayor). La existencia de un **ángulo en V** entre los dos motores en línea introduce un corrimiento adicional de los eventos de inercia y de gas, análogo a los efectos del ángulo de fase pero independiente de ellos. Este ángulo en V es la elección del diseñador, pero hay buenas y malas elecciones. Los mismos criterios de encendido uniforme y de equilibrio de inercia se aplican a esta selección.

El **ángulo en V,** o sea, 2y se define como se muestra en la figura 14-20. Cada banco está corrido por su **ángulo de banco** *y* con respecto al eje central *X* del motor. El ángulo de la manivela coi se mide a partir del eje *X*. El cilindro 1 del banco derecho es el cilindro de referencia. Los sucesos en cada banco estarán ahora con corrimiento de fase en su

TABLA 14-4 Estado de equilibrio de fuerza y momento de un motor de cuatro cilindros en línea, con cigüeñal a 0°, 180°, 180°, 0°, y $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 2$, $z_4 = 3$

Fuerzas primarias:	$\sum_{i=1}^{n} \text{sen}\,\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} \cos\phi_i = 0$
Fuerzas secundarias:	$\sum_{i=1}^{n} \text{sen}\,2\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} \cos 2\phi_i = 4$
Fuerzas de cuarta armónica:	$\sum_{i=1}^{n} \text{sen}\,4\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} \cos 4\phi_i = 4$
Fuerza de sexta armónica:	$\sum_{i=1}^{n} \text{sen}\,6\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} \cos 6\phi_i = 4$
Momentos primarios:	$\sum_{i=1}^{n} z_i \,\text{sen}\,\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} z_i \cos\phi_i = 0$
Momentos secundarios:	$\sum_{i=1}^{n} z_i \,\text{sen}\,2\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} z_i \cos 2\phi_i = 6$
Momentos de cuarta armónica:	$\sum_{i=1}^{n} z_i \,\text{sen}\,4\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} z_i \cos 4\phi_i = 6$
Momentos de sexta armónica:	$\sum_{i=1}^{n} z_i \,\text{sen}\,6\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} z_i \cos 6\phi_i = 6$

ángulo de banco así como en sus ángulos de fase del cigüeñal. Estos dos corrimientos de fase se superpondrán. Al tomar cualquier cilindro en uno de los bancos como ejemplo, se tiene que su ángulo instantáneo de manivela se representa por:

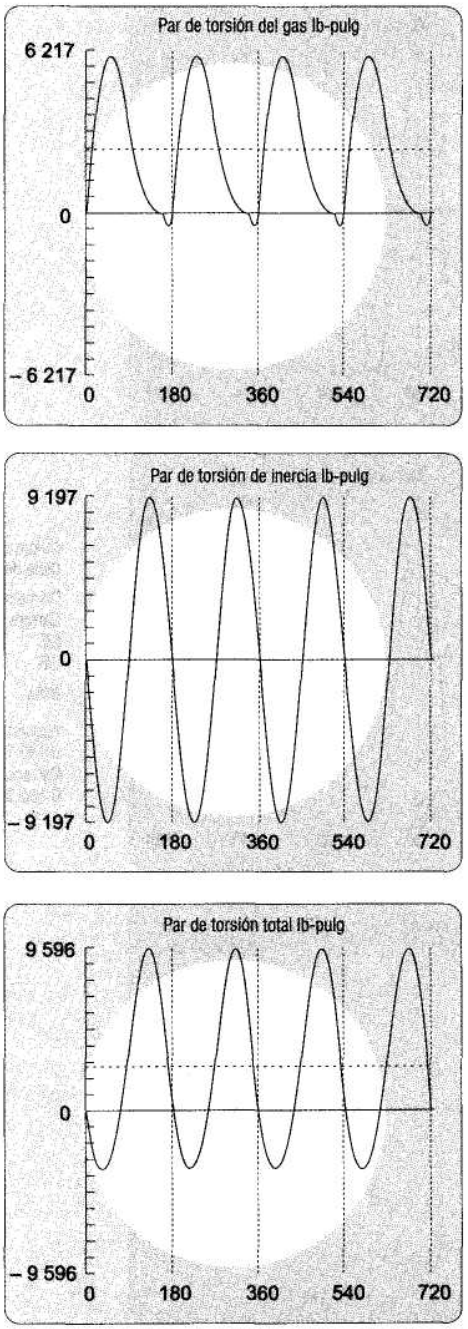
$$\theta = (\omega t - \phi_i) \tag{14.10a}$$

Considere primero un motor en V de dos cilindros con un cilindro en cada banco y con ambos compartiendo un codo de cigüeñal común. La fuerza de sacudimiento para un solo cilindro en la dirección del movimiento de un pistón u *circunflejo* con 0 medido desde el eje del pistón es:

$$\mathbf{F}_S \cong m_B r\omega^2 \left(\cos\theta + \frac{r}{l}\cos 2\theta\right)\hat{\mathbf{u}} \tag{14.10b}$$

La fuerza de sacudimiento total es la suma vectorial de las contribuciones de cada banco:

$$\mathbf{F}_S = \mathbf{F}_{S_I} + \mathbf{F}_{S_D} \tag{14.10c}$$



Cuatro cilindros en línea
Ciclo de cuatro tiempos

Diámetro = 3.00 pulg
Carrera = 3.54
B/S = 0.85
L/R = 3.50

RPM = 3 400

Ángulos de fase:
0 180 180 0
Carreras de explosión:
0 180 360 540

FIGURA 14-18

Par de torsión en el motor de cuatro tiempos y cuatro cilindros en línea, con un cigüeñal de 0º, 180°. 180°. 0º

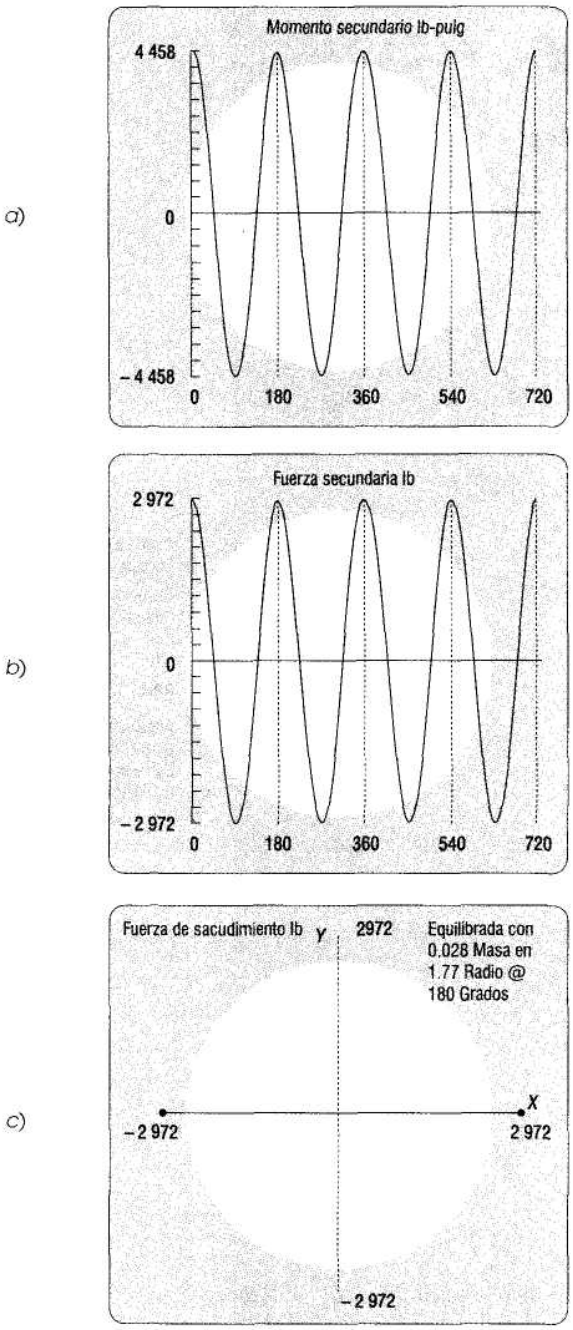


FIGURA 14-19

Fuerzas y momentos de sacudimiento en un motor de cuatro tiempos y de cuatro cilindros de 0°, 180°, 180°, 0°

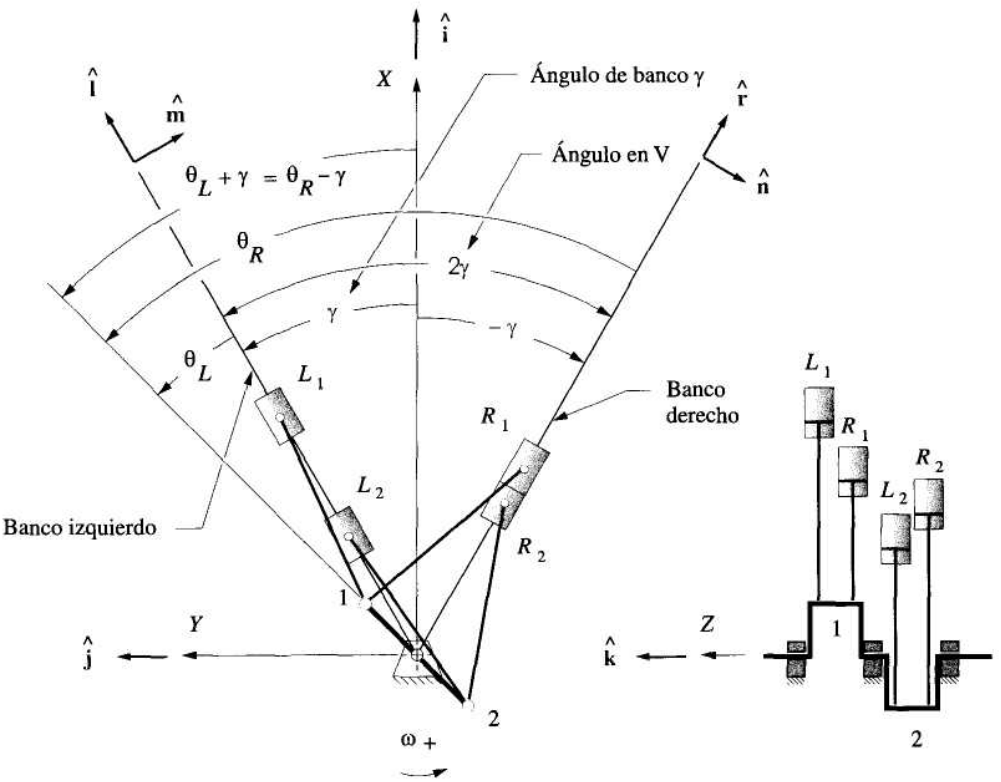


FIGURA 14-20

Geometría de un motor en V

Ahora conviene referirse al ángulo de la manivela con respecto al eje central *X*. Las fuerzas de sacudimiento para los bancos de la derecha *(D)* y de la izquierda (/), en los planos de los bancos de cada cilindro respectivo se pueden expresar como:

$$\mathbf{F}_{S_D} \equiv m_B r\omega^2\left[\cos(\theta+\gamma)+\frac{r}{l}\cos 2(\theta+\gamma)\right]\hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{F}_{S_I} \equiv m_B r\omega^2\left[\cos(\theta-\gamma)+\frac{r}{l}\cos 2(\theta-\gamma)\right]\hat{\mathbf{l}} \qquad (14.10d)$$

Observe que el ángulo del banco y se suma o se resta del ángulo de la manivela para cada banco de cilindros respecto al eje central *X*. Las fuerzas aún están dirigidas a lo largo de los planos de los bancos de cilindros. Si las identidades se sustituyen:

$$\cos(\theta+\gamma) = \cos\theta\cos\gamma - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\gamma$$

$$\cos(\theta-\gamma) = \cos\theta\cos\gamma + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\gamma \qquad (14.10e)$$

se obtiene:

$$\mathbf{F}_{S_R} \equiv m_B r\omega^2 \left[\begin{array}{l} \cos\theta\cos\gamma - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\gamma \\ +\dfrac{r}{l}(\cos 2\theta\cos 2\gamma - \operatorname{sen} 2\theta\operatorname{sen} 2\gamma) \end{array} \right] \hat{\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{F}_{S_L} \equiv m_B r\omega^2 \left[\begin{array}{l} \cos\theta\cos\gamma + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\gamma \\ +\dfrac{r}{l}(\cos 2\theta\cos 2\gamma + \operatorname{sen} 2\theta\operatorname{sen} 2\gamma) \end{array} \right] \hat{\mathbf{l}} \qquad (14.10f)$$

Ahora se considera la posibilidad de cilindros múltiples, con corrimiento de fase dentro de cada banco, sustituyendo la ecuación 14.10a en lugar de θ y remplazando las sumas de los términos de ángulo con productos de las identidades:

$$\cos(\omega t - \phi_i) = (\cos\omega t\cos\phi_i + \operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}\phi_i)$$
$$\operatorname{sen}(\omega t - \phi_i) = (\operatorname{sen}\omega t\cos\phi_i - \cos\omega t\operatorname{sen}\phi_i) \qquad (14.10g)$$

Después de hacer muchas operaciones algebraicas, las expresiones para las contribuciones de los bancos derecho e izquierdo se reducen a:

para el banco derecho:

$$\mathbf{F}_{S_R} \equiv m_B r\omega^2 \left[\begin{array}{l} (\cos\omega t\cos\gamma - \operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}\gamma)\displaystyle\sum_{i=1}^{n/2}\cos\phi_i \\ +(\cos\omega t\operatorname{sen}\gamma + \operatorname{sen}\omega t\cos\gamma)\displaystyle\sum_{i=1}^{n/2}\operatorname{sen}\phi_i \\ +\dfrac{r}{l}(\cos 2\omega t\cos 2\gamma - \operatorname{sen} 2\omega t\operatorname{sen} 2\gamma)\displaystyle\sum_{i=1}^{n/2}\cos 2\phi_i \\ +\dfrac{r}{l}(\cos 2\omega t\operatorname{sen} 2\gamma + \operatorname{sen} 2\omega t\cos 2\gamma)\displaystyle\sum_{i=1}^{n/2}\operatorname{sen} 2\phi_i \end{array} \right] \hat{\mathbf{r}} \qquad (14.10h)$$

y para el banco izquierdo:

$$\mathbf{F}_{S_L} \equiv m_B r\omega^2 \left[\begin{array}{l} (\cos\omega t\cos\gamma + \operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}\gamma)\displaystyle\sum_{i=n/2+1}^{n}\cos\phi_i \\ -(\cos\omega t\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{sen}\omega t\cos\gamma)\displaystyle\sum_{i=n/2+1}^{n}\operatorname{sen}\phi_i \\ +\dfrac{r}{l}(\cos 2\omega t\cos 2\gamma + \operatorname{sen} 2\omega t\operatorname{sen} 2\gamma)\displaystyle\sum_{i=n/2+1}^{n}\cos 2\phi_i \\ -\dfrac{r}{l}(\cos 2\omega t\operatorname{sen} 2\gamma - \operatorname{sen} 2\omega t\cos 2\gamma)\displaystyle\sum_{i=n/2+1}^{n}\operatorname{sen} 2\phi_i \end{array} \right] \hat{\mathbf{l}} \qquad (14.10i)$$

Las sumatorias en las ecuaciones 14.10h y 14.10Í dan un conjunto de criterios suficientes para **fuerzas de sacudimiento cero** por medio de la segunda armónica de cada banco, similares a las de un motor en línea de la ecuación 14.3. Se pueden resolver las

fuerzas de sacudimiento para cada banco en componentes a lo largo y normal al eje central *X* para los motores en V:

$$F_{s_x} = \left(F_{s_I} + F_{s_D}\right)\cos\gamma\,\hat{\mathbf{i}}$$

$$F_{s_y} = \left(F_{s_I} + F_{s_D}\right)\operatorname{sen}\gamma\,\hat{\mathbf{j}} \qquad (14.10j)$$

$$\mathbf{F}_S = F_{s_x}\,\hat{\mathbf{i}} + F_{s_y}\,\hat{\mathbf{j}}$$

La ecuación 14.10J proporciona oportunidades adicionales para la cancelación de las fuerzas de sacudimiento más allá de la opción de los ángulos de fase; por ejemplo, aun con valores distintos de cero para F_{SI} y F_{SD}, si y es 90°, entonces la componente *x* de la fuerza de sacudimiento será cero. También, si $F_{SI} = F_{SD}$, entonces la componente *y* de las fuerzas de sacudimiento será cero para cualquier y. Esta situación se obtiene para el caso de motores opuestos horizontales. (Véase la sección 14.8.) Con algunos motores en V o motores opuestos es posible obtener la cancelación de las componentes de las fuerzas de sacudimiento aun cuando no todas las sumatorias en la ecuación 14.10 sean cero.

Las ecuaciones de los **momentos de sacudimiento** se forman fácilmente a partir de las ecuaciones de las fuerzas de sacudimiento al multiplicar cada término en las sumatorias por el brazo de momento, tal y como se hizo en las ecuaciones 14.6. Los momentos en cada banco y sus vectores serán ortogonales con respecto al plano de su cilindro respectivo. Para el banco derecho se definió un vector unitario de momento **n** *circunflejo* perpendicular al r *circunflejo* del plano Z de la figura 14-20. Para el banco izquierdo se definió un vector unitario de momento **m** *circunflejo* perpendicular al I *circunflejo* del plano Z de la figura 14-20.

$$\mathbf{M}_{S_D} \equiv m_B r\omega^2 \left[\begin{array}{l} \left(\cos\omega t\cos\gamma - \operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}\gamma\right)\displaystyle\sum_{i=1}^{n/2} z_i\cos\phi_i \\ +\left(\cos\omega t\operatorname{sen}\gamma + \operatorname{sen}\omega t\cos\gamma\right)\displaystyle\sum_{i=1}^{n/2} z_i\operatorname{sen}\phi_i \\ +\dfrac{r}{l}\left(\cos 2\omega t\cos 2\gamma - \operatorname{sen}2\omega t\operatorname{sen}2\gamma\right)\displaystyle\sum_{i=1}^{n/2} z_i\cos 2\phi_i \\ +\dfrac{r}{l}\left(\cos 2\omega t\operatorname{sen}2\gamma + \operatorname{sen}2\omega t\cos 2\gamma\right)\displaystyle\sum_{i=1}^{n/2} z_i\operatorname{sen}2\phi_i \end{array}\right]\hat{\mathbf{n}} \qquad (14.11a)$$

$$\mathbf{M}_{S_I} \equiv m_B r\omega^2 \left[\begin{array}{l} \left(\cos\omega t\cos\gamma + \operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}\gamma\right)\displaystyle\sum_{i=n/2+1}^{n} z_i\cos\phi_i \\ -\left(\cos\omega t\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{sen}\omega t\cos\gamma\right)\displaystyle\sum_{i=n/2+1}^{n} z_i\operatorname{sen}\phi_i \\ +\dfrac{r}{l}\left(\cos 2\omega t\cos 2\gamma + \operatorname{sen}2\omega t\operatorname{sen}2\gamma\right)\displaystyle\sum_{i=n/2+1}^{n} z_i\cos 2\phi_i \\ -\dfrac{r}{l}\left(\cos 2\omega t\operatorname{sen}2\gamma - \operatorname{sen}2\omega t\cos 2\gamma\right)\displaystyle\sum_{i=n/2+1}^{n} z_i\operatorname{sen}2\phi_i \end{array}\right]\hat{\mathbf{m}} \qquad (14.11b)$$

Las sumatorias proporcionan un conjunto de criterios suficientes para **fuerzas de sacudimiento cero** por medio de la segunda armónica de cada banco, éstas son similares a las encontradas para los motores en línea de la ecuación 14.7. Al resolver los momentos de sacudimiento para cada banco en componentes a lo largo y normal al eje central *X* de los motores en V se obtiene:

$$\begin{aligned} M_{s_x} &= \left(M_{s_I} - M_{s_D}\right) \operatorname{sen} \gamma \\ M_{s_y} &= \left(-M_{s_I} - M_{s_D}\right) \cos \gamma \\ \mathbf{M_S} &= M_{s_x}\,\hat{\mathbf{i}} + M_{s_y}\,\hat{\mathbf{j}} \end{aligned} \tag{14.11c}$$

La ecuación 14.11c permite cancelaciones de las componentes de los momentos de sacudimiento para algunas configuraciones en V y opuestas aun cuando las sumatorias en la ecuación 14.11 no sean todas cero; por ejemplo, si γ es 90°, entonces la componente *y* del momento de sacudimiento es cero.

Los **pares de torsión** para los bancos izquierdos y derechos del motor en V son:

$$\mathbf{T}_{i21_D} \cong \frac{1}{2} m_B r^2 \omega^2 \left[\begin{array}{l} \dfrac{r}{2l}\left(\operatorname{sen}(\omega t + \gamma) \displaystyle\sum_{i=1}^{n/2} \cos \phi_i - \cos(\omega t + \gamma) \sum_{i=1}^{n/2} \operatorname{sen} \phi_i \right) \\ -\left(\operatorname{sen} 2(\omega t + \gamma) \displaystyle\sum_{i=1}^{n/2} \cos 2\phi_i - \cos 2(\omega t + \gamma) \sum_{i=1}^{n/2} \operatorname{sen} 2\phi_i \right) \\ -\dfrac{3r}{2l}\left(\operatorname{sen} 3(\omega t + \gamma) \displaystyle\sum_{i=1}^{n/2} \cos 3\phi_i - \cos 3(\omega t + \gamma) \sum_{i=1}^{n/2} \operatorname{sen} 3\phi_i \right) \end{array} \right] \hat{\mathbf{k}} \tag{14.12a}$$

$$\mathbf{T}_{i21_I} \cong \frac{1}{2} m_B r^2 \omega^2 \left[\begin{array}{l} \dfrac{r}{2l}\left(\operatorname{sen}(\omega t - \gamma) \displaystyle\sum_{i=n/2+1}^{n} \cos \phi_i - \cos(\omega t - \gamma) \sum_{i=n/2+1}^{n} \operatorname{sen} \phi_i \right) \\ -\left(\operatorname{sen} 2(\omega t - \gamma) \displaystyle\sum_{i=n/2+1}^{n} \cos 2\phi_i - \cos 2(\omega t - \gamma) \sum_{i=n/2+1}^{n} \operatorname{sen} 2\phi_i \right) \\ -\dfrac{3r}{2l}\left(\operatorname{sen} 3(\omega t - \gamma) \displaystyle\sum_{i=n/2+1}^{n} \cos 3\phi_i - \cos 3(\omega t - \gamma) \sum_{i=n/2+1}^{n} \operatorname{sen} 3\phi_i \right) \end{array} \right] \hat{\mathbf{k}} \tag{14.12b}$$

Al sumar las contribuciones de cada banco para el total. Para un **par de torsión de inercia cero** a través de la tercera armónica en los motores en V es suficiente (pero no necesario) que:

$$\sum_{i=1}^{n/2} \operatorname{sen} \phi_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n/2} \cos \phi_i = 0 \qquad \sum_{i=n/2+1}^{n} \operatorname{sen} \phi_i = 0 \qquad \sum_{i=n/2+1}^{n} \cos \phi_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n/2} \operatorname{sen} 2\phi_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n/2} \cos 2\phi_i = 0 \qquad \sum_{i=n/2+1}^{n} \operatorname{sen} 2\phi_i = 0 \qquad \sum_{i=n/2+1}^{n} \cos 2\phi_i = 0 \quad (14.12c)$$

$$\sum_{i=1}^{n/2} \operatorname{sen} 3\phi_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n/2} \cos 3\phi_i = 0 \qquad \sum_{i=n/2+1}^{n} \operatorname{sen} 3\phi_i = 0 \qquad \sum_{i=n/2+1}^{n} \cos 3\phi_i = 0$$

Observe que cuando se suman las ecuaciones 14.12a y b, combinaciones particulares de $\S i$ y y probablemente cancelen el par de torsión de inercia aun cuando algunos términos de la ecuación 14.12c sean distintos de cero.

El **par de torsión del gas** es:

$$\mathbf{T}_{g21} \cong F_g r \sum_{i=1}^{n} \left(\operatorname{sen}\left[\omega t - (\psi_i + \gamma_k)\right] \left\{ 1 + \frac{r}{l} \cos\left[\omega t - (\psi_i + \gamma_k)\right] \right\} \right) \hat{\mathbf{k}} \qquad (14.13)$$

donde el banco izquierdo tiene un *ángulo de banco,* $\gamma_k = +\gamma$ y el banco derecho un *ángulo de banco*, $\gamma_k = -\gamma$.

Es posible diseñar un motor en V que tenga tantos codos de cigüeñal como cilindros, pero por diversas razones no siempre se hace. La principal ventaja de un motor en V sobre un motor en línea con el mismo número de cilindros es que tiene un tamaño más compacto y una mayor rigidez. Puede tener casi la mitad de la longitud de un motor en línea (a expensas de una mayor anchura), lo que facilita que el cigüeñal esté diseñado para acomodar dos bielas por codo de cigüeñal como se muestra en la figura 14-21. Los cilindros en bancos opuestos comparten un codo de cigüeñal. Un banco de cilindros se corre a lo largo del eje del cigüeñal en el espesor de una biela. El bloque de cilindros más corto y más ancho, y el cigüeñal más corto dan más rigidez tanto a la torsión como a la flexión que en el caso de un motor en línea con el mismo número de cilindros. En la figura 14-22 se muestran simulaciones por computadora de diversos modos de flexión y un modo torsional de vibración para un cigüeñal de cuatro codos. Las deflexiones están muy exageradas. La necesaria forma retorcida del cigüeñal dificulta el control de estas flexiones por el diseño. Si es excesiva en magnitud podría ocasionar una fractura en la estructura.

Para ejemplificar se diseñará el cigüeñal para un motor V-8 con ciclo de cuatro tiempos. Se pueden colocar dos motores de cuatro cilindros juntos en un cigüeñal a $\phi_i = 0^o$, 180 , 180 , 0 y tener las mismas condiciones de equilibrio que en el motor de cuatro tiempos y cuatro cilindros diseñado en la sección previa (primarias equilibradas, secundarias desequilibradas). Sin embargo, la motivación para escoger el cigüeñal para un motor de cuatro cilindros es la necesidad de espaciar los cuatro pulsos de potencias disponibles, uniformemente en el ciclo. La ecuación 14.8b señala un desfasamiento de 180° para este motor. Ahora se tienen ocho cilindros disponibles y la ecuación 14-8b define un desfasamiento de 90° para un óptimo espaciamiento de los pulsos de potencia.

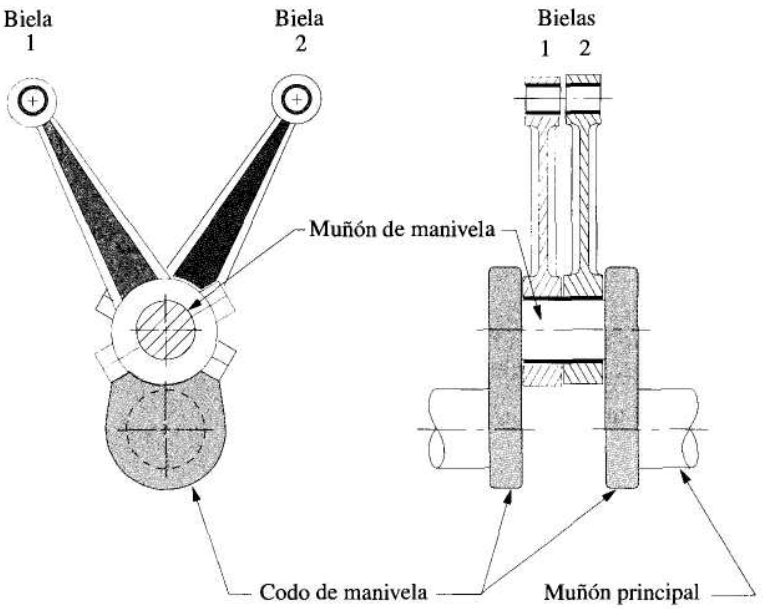


FIGURA 14-21
Dos bielas conectadas a un mismo codo de manivela

Esto significa que se puede usar el diseño del cigüeñal a $\phi_i = 0°, 90°, 180°, 270°$ para un motor de dos tiempos de cuatro cilindros como el que se muestra en la figura 14-11, y aprovechar su mejor condición de equilibrio de inercia así como lograr un encendido uniforme en un motor en V de ocho cilindros y de cuatro tiempos.

El cigüeñal de cuatro cilindros con $\phi_i = 0°, 90°, 180°, 270°$ tiene todos sus factores de inercia iguales a cero excepto para los momentos primario y secundario. Se ha aprendido que al disponer los codos del cigüeñal con simetría de espejo con respecto al plano medio se podrá equilibrar el momento primario. Algunos piensan que los esquemas revelarán que no es posible obtener esta simetría de espejo para cualquiera de los cuatro codos, con una delta del ángulo de fase de 90°. Sin embargo, el solo volver a acomodar el orden de los codos del cigüeñal de $\phi_i = 0°, 180°, 0°, 180°$ a $\phi_i = 0°, 180°, 180°, 0°$ tiene un efecto en los momentos de sacudimiento, el reordenamiento de este orden de codos del cigüeñal será lo mejor. Un cigüeñal a $\phi_i = 0°, 90°, 270°, 180°$ tiene todos los factores de inercia iguales a cero excepto el momento primario. El momento secundario no se presenta ahora*. Ésta es una ventaja que se debe aprovechar. Estos cigüeñales se usarán para los V-8 y después se tratará con el momento primario.

En la figura 14-23a) se muestra el diagrama de fase de manivela para el banco derecho de un motor V-8 con un cigüeñal a $\phi_i = 0°, 90°, 270°, 180°$. En la figura 14-23*b*) se muestra el diagrama de tase de manivela para el segundo banco (izquierda) que es idéntico al banco derecho (como debe ser, ya que comparten los codos de cigüeñal), pero está *corrido hacia la derecha en el ángulo V*, que es 2γ. Observe en la figura 14-20 que

* La explicación para esto es bastante simple. La ecuación 14.7b muestra que los momentos secundarios son una función de dos veces los ángulos de fase y los brazos de momento del cilindro. Si usted duplica los valores de la secuencia original de los ángulos de fase de 0º, 90°, 180°, 270° y los modula con 360°, obtendrá 0º, 180°, 0º, 180° que no tienen simetría de espejo. Duplicando la nueva secuencia del ángulo de fase de 0º, 90°, 270°, 180°, y los modula con 360° se obtendrá 0º, 180°, 180°, 0º que tiene simetría de espejo. Es esta simetría de un ángulo de fase doble lo que causa la cancelación de las segundas armónicas de un momento de sacudimiento.

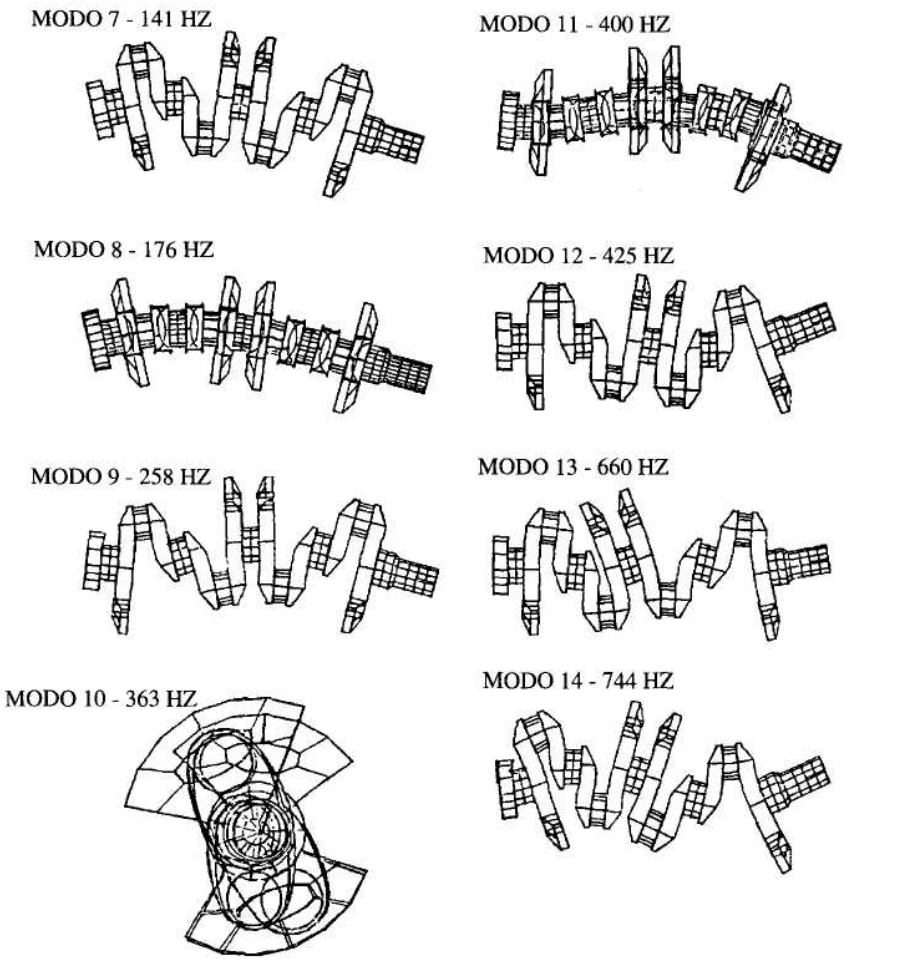


FIGURA 14-22

Modos de vibración flexional y torsional en un cigüeñal de cuatro codos *Cortesía de Chevrolet División, General Motors Co.*

los dos pistones son impulsados por bielas en un codo común de cigüeñal con una co positiva, y el pistón en el banco derecho alcanzará el PMS antes que el del banco izquierdo. Así como se ha demostrado, los movimientos del pistón del banco izquierdo se retrasan con respecto a los del banco derecho. Los eventos de retraso ocurren después en tiempo, por lo tanto se debe correr el segundo banco (izquierda) hacia la derecha por el ángulo V en el diagrama de fase del cigüeñal.

Convendría correr tanto el segundo banco de cilindros que sus pulsos de potencia estén espaciados uniformemente entre los del primer banco. Con algo de reflexión (y con referencia a la ecuación 14.8b) se advierte que, en este ejemplo, cada banco de cuatro

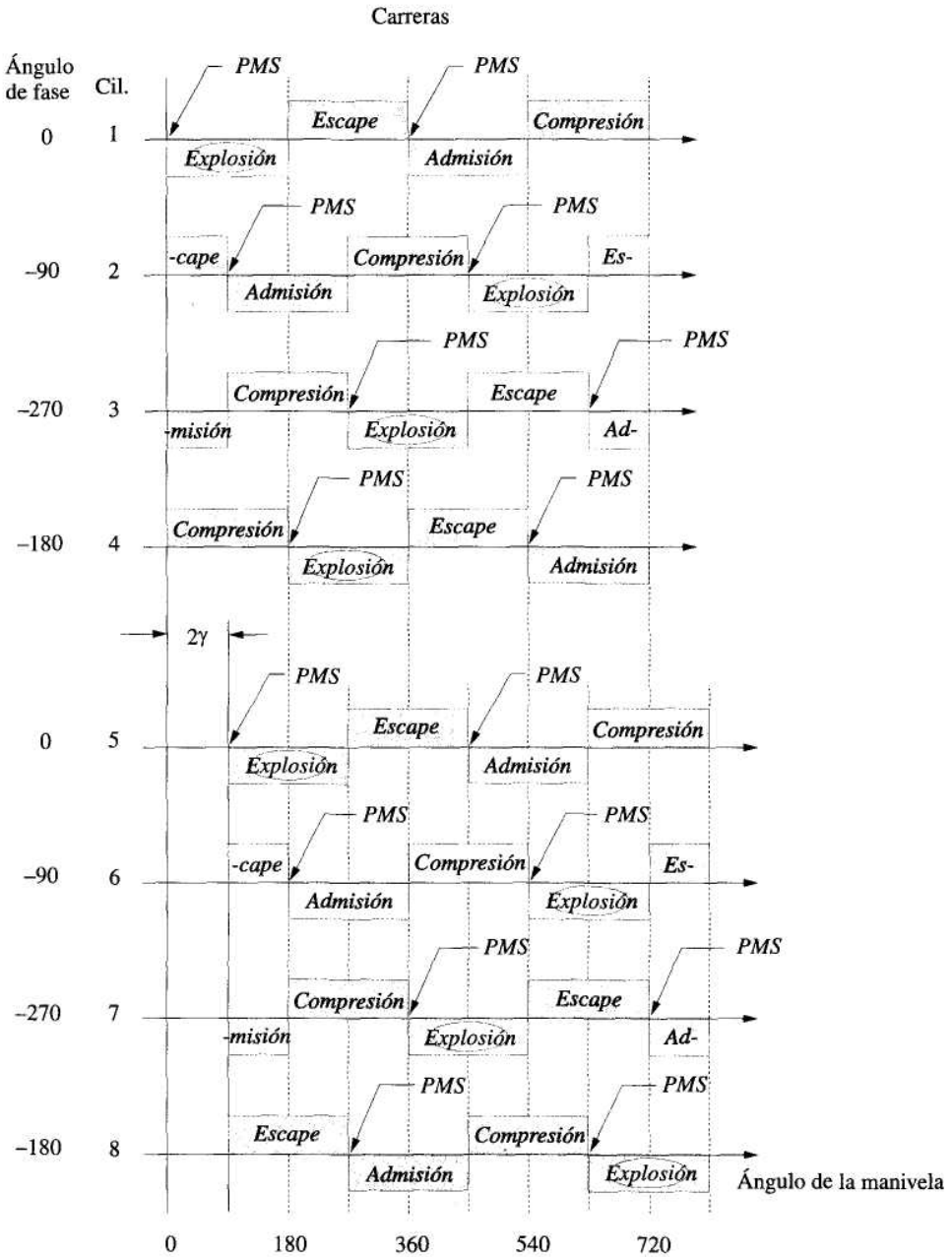


FIGURA 14-23

Diagrama de fases de manivela de un V-8 de cuatro tiempos con ángulos de fase del cigüeñal de 0°, 90°, 270°, 180°

cilindros tiene potencialmente 720°/4 = 180° entre los pulsos de potencia. Los codos de cigüeñal escogidos están espaciados por incrementos de 90°. Un ángulo de banco de 90° será el óptimo en este caso donde los ángulos de fase y los ángulos de banco se sumarán para crear un espacio efectivo de 180°. Todo diseño de motor en V tendrá uno o más ángulos en V óptimos que darán un encendido aproximadamente uniforme con un conjunto particular de ángulos de fase de la manivela.

Con esta cantidad de cilindros son posibles varios órdenes de encendido. Los motores en V a menudo están dispuestos para encender sucesivamente cilindros en bancos opuestos para equilibrar el flujo de la mezcla demandado en el múltiple de admisión Los cilindros son numerados desde el frente hacia atrás, primero baja el banco derecho y luego baja el banco izquierdo. El orden de encendido que se muestra en la figura *H-23b)* es 1, 5, 4, 3, 7, 2, 6, 8 y resulta en ángulos de carrera de potencia ψ_i = 0°, 90°, 180°, 270°, 360°, 450°, 540°, 630°. Esto dará claramente un encendido uniforme con un pulso de potencia cada 90°.

En la figura 14-24 se muestra el par de torsión total para este diseño de motor. El par de torsión total en este caso es igual al par de torsión del gas conforme el par de torsión de inercia es cero. En la tabla 14-5 y en la figura 14-25 se muestra la única componente de inercia desequilibrada importante en este motor que es un momento primario, el cual es muy grande. Los términos de la cuarta armónica tienen coeficientes despreciables en la serie de Fourier, y se eliminan de las ecuaciones. En una sección posterior del capítulo se tratará el equilibrio de este momento primario.

Cualquier configuración de cilindros en V puede tener uno o más ángulos deseables que darán un encendido uniforme y un balance de inercia aceptable. Sin embargo, los motores en V de menos de doce cilindros no tendrán un balance completo por medio de su configuración del cigüeñal. Los ángulos en V deseables serán usualmente un múltiplo entero (incluyendo el uno) o un submúltiplo del ángulo de desfasamiento óptimo definido en las ecuaciones 14.8 para ese motor. El ángulo óptimo V (2γ) para un motor en V de

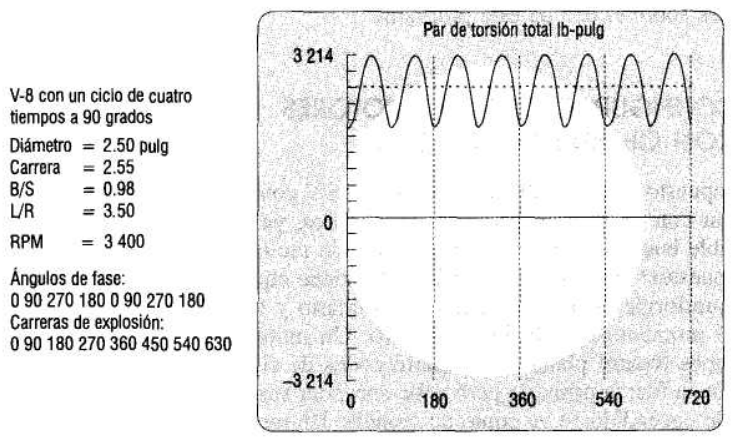


FIGURA 14-24

Par de torsión total a 90° en un motor V-8 con ángulos de fase del cigüeñal de 0°, 90°, 270°, 180°

TABLA 14-5 Estado de equilibrio de fuerza y momento de un motor V-8 con cigüeñal de 0°, 90°, 270°, 180°, y $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, $z_3 = 3$, $z_4 = 4$

Fuerzas primarias:	$\sum_{i=1}^{n} \text{sen}\,\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} \cos\phi_i = 0$
Fuerzas secundarias:	$\sum_{i=1}^{n} \text{sen}\,2\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} \cos 2\phi_i = 0$
Fuerzas de cuarta armónica:	$\sum_{i=1}^{n} \text{sen}\,4\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} \cos 4\phi_i = 8$
Fuerza de sexta armónica:	$\sum_{i=1}^{n} \text{sen}\,6\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} \cos 6\phi_i = 0$
Momentos primarios:	$\sum_{i=1}^{n} z_i\,\text{sen}\,\phi_i = -4$	$\sum_{i=1}^{n} z_i \cos\phi_i = -2$
Momentos secundarios:	$\sum_{i=1}^{n} z_i\,\text{sen}\,2\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} z_i \cos 2\phi_i = 0$
Momentos de cuarta armónica:	$\sum_{i=1}^{n} z_i\,\text{sen}\,4\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} z_i \cos 4\phi_i = 28$
Momentos de sexta armónica:	$\sum_{i=1}^{n} z_i\,\text{sen}\,6\phi_i = 0$	$\sum_{i=1}^{n} z_i \cos 6\phi_i = 0$

ocho cilindros es 90°. Para ver los resultados de la configuración del motor V-8 corra el programa ENGINE y seleccione el V-8 del menú *Examples.* Véase el apéndice A para instrucciones sobre el uso de este programa.

14.8 CONFIGURACIONES DE MOTORES CON CILINDROS OPUESTOS

Un motor opuesto es esencialmente un motor en V con un ángulo V de 180°. La ventaja, en particular con un número pequeño de cilindros, ya sean dos o cuatro, es la relativamente posible buena condición de equilibrio. Un motor de cuatro tiempos con cilindros gemelos opuestos* con manivela de 0°, 180° tiene equilibrio de la fuerza primaria más encendido uniforme, aunque el momento primario y todas las armónicas superiores de fuerza y el momento son distintos de cero. Un motor opuesto de cuatro cilindros de cuatro tiempos (cuatro planos) con cuatro codos de cigüeñal a 0°, 180°, 180°, 0°, tiene equilibrio de la fuerza primaria pero debe encender sus cilindros en parejas, por lo tanto, su patrón de encendido se ve como un gemelo. Un motor de cuatro tiempos en el plano con dos codos de cigüeñal de 0°, 180° tendrá un encendido uniforme y las mismas condiciones de equilibrio que un motor de cuatro en línea con manivela de 0°, 180°, 180°, 0°. El programa ENGINE calculará los parámetros para configuraciones de cilindros opuestos y para cilindros en V y en línea.

14

* Como en la motocicleta BMW.

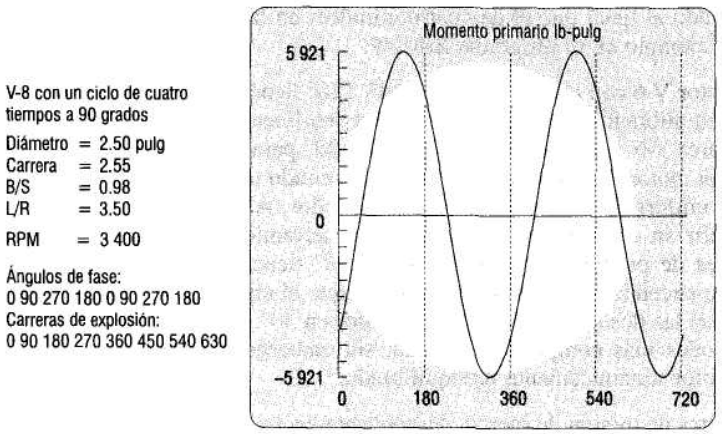


FIGURA 14-25

Momento primario desequilibrado en el motor V-8 de 90° con un cigüeñal a 0º, 90°, 270°, 180°

14.9 EQUILIBRIO DE MOTORES MULTICIUNDRICOS

Con un número suficiente de cilindros («), y una disposición apropiada, un motor puede estar inherentemente equilibrado. En un motor de dos tiempos con sus codos de cigüeñal dispuestos para un encendido uniforme, todas las armónicas de la fuerza de sacudimiento estarán equilibradas excepto aquellas cuyo número armónico sea un múltiplo de *n.* En un motor de cuatro tiempos con sus codos de cigüeñal dispuestos para un encendido uniforme, todas las armónicas de la fuerza de sacudimiento estarán equilibradas excepto aquellas cuyo número armónico sea un múltiplo de *n/2.* Las componentes de los momentos de sacudimiento primarios estarán equilibradas si el cigüeñal tiene simetría de espejo con respecto al plano central transversal. Una configuración de motor de cuatro tiempos en línea requiere al menos seis cilindros para estar inherentemente equilibrada hasta la cuarta armónica. Se ha visto que un motor de cuatro cilindros en línea con cigüeñal de 0°, 180°, 180°, 0° tiene fuerzas y momentos secundarios diferentes de cero así como un par de torsión de inercia diferente de cero. El motor de seis en línea con una manivela con simetría de espejo de ϕ_i = 0°, 240°, 120°, 120°, 240°, 0° tendrá fuerzas y momentos de sacudimiento hasta la cuarta armónica, aunque la tercera armónica del par de torsión de inercia seguirá presente. Para ver los resultados de la configuración de este motor de seis cilindros en línea, corra el programa ENGINE y seleccione el de seis en línea del menú *Examples.*

Un motor de doce cilindros en V es entonces el motor en V más pequeño con un estado inherente de equilibrio casi perfecto, ya que equivale a dos motores en línea de seis cilindros en un cigüeñal común. Se ha visto que los motores en V tienen las características de equilibrio de los bancos en línea a partir de los cuales están construidos. Las ecuaciones 14.10 y 14.11 no introducen nuevos criterios de equilibrio en los motores en V de los ya definidos en las ecuaciones 14.3 y 14.5 para la fuerza de sacudimiento y equilibrio de momentos en un motor de cilindros en línea. Abra el archivo BMWV12.ENG en el programa ENGINE para ver los resultados para un motor V-12. El motor V-8 común, con ángulos de fase del cigüeñal de ϕ_i = 0°, 90°, 270°, 180° tiene un momento primario

desequilibrado al igual que el de cuatro cilindros en línea a partir del cual se construye. Éste es un ejemplo en el programa ENGINE.

Un motor V-6 con cigüeñal de 0°, 240°, 120° tiene los momentos primarios y secundarios desequilibrados como el de 3-cilindros en línea a partir del cual está constituido. Estos motores V-6 necesitan un ángulo V de 120° para su propio equilibrio. Para reducir el ancho del motor, los motores V-6 tienen a menudo un ángulo en V de 60° que dará un encendido uniforme con una manivela de 6 codos. Algunos usan ángulos en V de 90° para permitir su ensamblaje con las mismas herramientas que los de V-8 a 90° en la misma línea de producción, pero los V-6 a 90° tienen un funcionamiento muy áspero debido a su encendido no uniforme, a menos que el cigüeñal esté rediseñado para correr (o desplazar) las dos bielas sobre cada pasador en 30°. Esto da como resultado un cigüeñal de 6-codos más complicado, el cual, sin embargo, tendrá un encendido uniforme, pero un motor dinámicamente desequilibrado.

Los pares de torsión de inercia desequilibrados se pueden regularizar con un volante, como se mostró en la sección 13.10 para el motor de un solo cilindro. Observe que aun cuando un motor tenga par de torsión de inercia cero posiblemente requerirá de un volante para suavizar sus variaciones en el par de torsión del gas. La función del par de torsión total debe ser usada para determinar las variaciones de energía que se absorberán por el volante, ya que contiene tanto el par de torsión del gas como al par de torsión de inercia (si es que lo hay). El método de la sección 11.11 también se aplica al cálculo del tamaño del volante necesario para un motor, basado en sus variaciones dentro de la función total del par de torsión. El programa ENGINE calculará las áreas debajo de los pulsos del par de torsión total necesarios para el cálculo. Observe en las secciones citadas el procedimiento apropiado para el diseño del volante.

Las fuerzas y los momentos de sacudimiento desequilibrados pueden ser cancelados por medio de la suma de uno o más ejes rotatorios de equilibrio dentro del motor. Para cancelar las componentes primarias se requieren dos ejes equilibrados que giren a la velocidad de la manivela, uno de los cuales puede ser el propio cigüeñal. Para cancelar las componentes secundarias usualmente se requiere al menos de dos ejes equilibrados que giren a dos veces la velocidad de la manivela, impulsados por engranes o cadenas desde el cigüeñal. En la figura 14-26a) se muestra un par de ejes de contrarrotación provistos con masas excéntricas a 180° fuera de fase.* Como se muestra, las fuerzas centrífugas desequilibradas a partir de masas iguales se sumarán para obtener la componente de la fuerza de sacudimiento en la dirección vertical, igual a dos veces la fuerza en desequilibrio de cada masa, mientras que sus componentes horizontales se cancelarán exactamente. Los pares de excéntricas contrarrotatorias se pueden disponer para proporcionar una fuerza armónicamente variable en un plano cualquiera. La frecuencia armónica será determinada por la velocidad de rotación de los ejes.

Si se disponen dos pares de excéntricas, con un par desplazado una cierta distancia de la otra a lo largo del eje, y también girado a un ángulo de 180° con respecto al eje de la primera, como se muestra en la figura 14-26&) se obtendrá un par armónicamente variable en un plano. Habrá entonces cancelación de las fuerzas en una dirección y suma en una dirección ortogonal.

Así que para cancelar el momento de sacudimiento en cualquier plano se puede disponer un par de ejes, cada uno de los cuales contiene dos masas excéntricas desplazadas a lo largo de ellos, 180° fuera de fase, y engranar los ejes entre sí para que giren en direcciones opuestas a un múltiplo de velocidad del cigüeñal. Para cancelar totalmente la

* Este es llamado equilibrador de Lanchester después de que su inventor inglés lo desarrolló para motores de aviación previos a la Primera Guerra Mundial (año 1913). Aún se usa en varios tipos de maquinaria, así como en motores para cancelar las fuerzas de inercia.

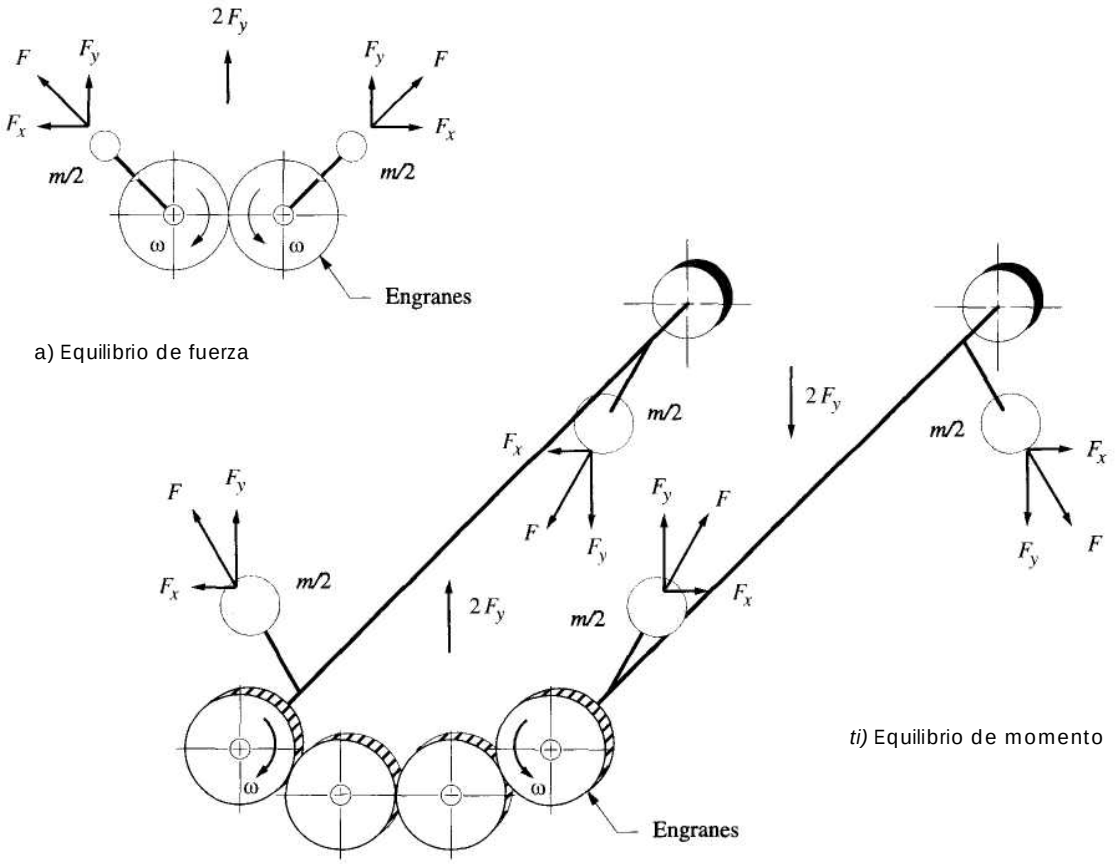


FIGURA 14-26

Masas excéntricas contrarrotatorias que pueden equilibrar fuerzas y momentos

fuerza de sacudimiento, sólo es necesario proporcionar una suficiente masa desequilibrada adicional en uno de los pares de masas excéntricas para generar una fuerza de sacudimiento opuesta a la del motor, además de la necesaria para generar las fuerzas del par.

En un motor en línea las fuerzas y los momentos desequilibrados están todos confinados al plano único de los cilindros, esto se debe a la reciprocidad de las masas que se supone están concentradas en el pasador del pistón. (Se supone que todos los codos del cigüeñal están en forma exacta equilibrados rotacionalmente para cancelar los efectos de las masas en el pasador de la manivela.) Sin embargo, en un motor en V, las fuerzas y los momentos de sacudimiento tienen componentes tanto en *x* como en *y*, como se muestra en las ecuaciones 14.10 y 14.11 y en la figura 14-20. Cada uno de los efectos en los bancos de pistones actúa en el plano de los bancos de cilindros, y el ángulo del banco *y* se usa para descomponerlas en las componentes *x* y *y*. En la figura 14-27 se muestra la fuerza {«dimensional de sacudimiento que se presenta en un motor de dos cilindros en V a 90°. Las dos bielas comparten un codo de cigüeñal común a un ángulo de fase igual a

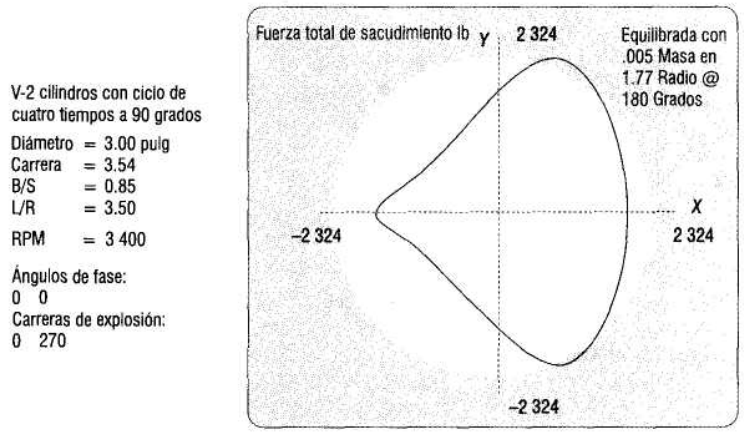


FIGURA 14-27

Fuerza de sacudimiento en un motor de cilindros gemelos en V a 90° (vista al extremo de la línea del eje del cigüeñal)

cero para este motor en particular. La fuerza debida a cada pistón está confinada al plano recíproco (banco) de cada pistón, pero el ángulo V entre los bancos de cilindros crea el patrón mostrado cuando las componentes primaria y secundaria de cada fuerza de pistón se suman en su propia relación de fase.

El motor V-8 a 90°, con un cigüeñal a 0°, 90°, 270°, 180°, que tiene sólo un momento primario desequilibrado, presenta un caso especial. El ángulo de 90° entre los bancos da como resultado componentes horizontales y verticales iguales del momento de sacudimiento primario, lo cual reduce un par de magnitud constante que gira alrededor del eje de manivela a la velocidad del cigüeñal, como se muestra en la figura 14-28, que corresponde a la vista desde el extremo del eje del cigüeñal.

Con este motor V-8, el momento primario se puede equilibrar por la adición de dos contrapesos excéntricos, de tamaño y orientación adecuados, únicamente al cigüeñal. No se necesita un segundo eje independiente de equilibrio para el motor V-8 con este cigüeñal. Los contrapesos a 180° fuera de fase normalmente están colocados cerca de los extremos del cigüeñal para obtener el mayor brazo de momento posible y reducir así su tamaño.

La fuerza de sacudimiento de un motor en V gemelo a 90° que se ilustra en la figura 14-27 tiene una componente primaria giratoria de magnitud constante que también puede ser cancelada con contrapesos sólo en el cigüeñal. Sin embargo, su segunda armónica está en un plano (en el plano *YZ).* Para cancelarla se requerirá de un par de ejes equilibrados con una velocidad doble como se muestra en la figura 14-26a).

El motor V-6 a 60° con un cigüeñal a 0°, 240°, 120°, 60°, 300°, 180° tiene momentos primarios y secundarios desequilibrados, cada uno con un vector de rotación de magnitud constante, como el del V-8 que se muestra en la figura 14-28. La componente primaria puede ser completamente equilibrada sumando contrapesos al cigüeñal como en el V-8 a 90°. Algunos fabricantes* también agregan un solo eje equilibrado en el valle de los V-6,

14

* General Motors Co., Buick V6.

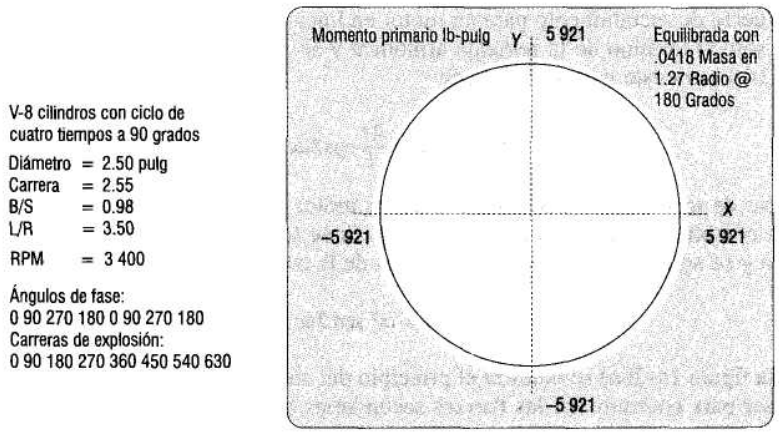


FIGURA 14-28

Momento primario en un motor V-8 a 90° (vista al extremo de la línea del eje del cigüeñal)

impulsados por engranajes a una doble velocidad del cigüeñal para cancelar la magnitud constante de la segunda armónica del momento de sacudimiento. Esta combinación da como resultado una cancelación completa del momento de sacudimiento en este motor.

El cálculo de la magnitud y la localización de las masas excéntricas equilibradas necesarias para cancelar cualquier fuerza o momento de sacudimiento es un ejercicio sencillo de **equilibrio estático** (para fuerzas) y de **equilibrio dinámico en dos planos** (para momentos) como se analiza en las secciones 12.1 y 12.2. Las fuerzas y momentos desequilibrados para una configuración de motor en particular son calculados a partir de las ecuaciones apropiadas de este capítulo. A lo largo de la longitud de equilibrio ejes/cigüeñal que se está diseñando se deben seleccionar dos planos de corrección. Las magnitudes y las localizaciones angulares de las masas equilibradas pueden ser calculadas entonces por los métodos descritos en las secciones mencionadas del capítulo 12.

Balance secundario en un motor de cuatro cilindros en línea

El motor de cuatro cilindros en línea con un cigüeñal de 0°, 180°, 180°, 0° es uno de los motores más extensamente usados en la industria automotriz. Como se describe en la sección previa, este motor experimenta desequilibrio de las fuerzas secundarias, momentos y pares de torsión. Si el desplazamiento del motor es menor que casi 2.0 litros, entonces las magnitudes de las fuerzas secundarias serán probablemente tan pequeñas como para despreciarlas, en especial si los soportes del motor proporcionan buen aislamiento a la vibración del motor desde el compartimento de pasajeros. Por encima de este desplazamiento, sonido objetable, vibración, y aspereza (RVA) puede llegar a ser sentido y oído por los pasajeros a ciertas velocidades del motor cuando la frecuencia de la segunda armónica del motor coincide con una frecuencia natural de la estructura del cuerpo humano. Entonces es necesario un equilibrio en el motor para evitar la insatisfacción del cliente.

La fuerza de sacudimiento para un motor en línea está dada por la ecuación 14.2d. Si se toma sólo el término de la segunda armónica y se aplican los factores importantes de la tabla 14.4 para este motor se obtiene

$$\mathbf{F}_{s_2} \cong m_B r\omega^2 \frac{4r}{l} \cos 2\omega t\, \hat{\mathbf{i}} \tag{14.14}$$

El par de torsión de sacudimiento para un motor en línea está dado por la ecuación 14.4c en combinación con la ecuación 13.15f. Si se toma sólo el término de la segunda armónica y se aplican los factores importantes de la tabla 14-4 para este motor se obtiene

$$\mathbf{T}_{s_2} \cong 2m_B r^2\omega^2 \operatorname{sen} 2\omega t\, \hat{\mathbf{k}} \tag{14.15}$$

En la figura 14-26a) se muestra el principio del equilibrador de Lanchester, el cual se puede usar para contrarrestar las fuerzas secundarias mediante el impulso de dos ejes de equilibrio contrarrotatorios con una velocidad de dos veces la velocidad del cigüeñal mediante cadenas o engranes. En la figura 14-29 se muestra esta disposición cuando se aplica al motor Mitsubishi de 2.6L, de cuatro cilindros.*

H. Nakamura[1] mejoró el diseño de Lanchester de 1913 al disponer los ejes de equilibrio dentro del motor para cancelar la segunda armónica del par de torsión de inercia así como la fuerza secundaria de inercia. Pero, esta disposición no afecta el momento secundario de sacudimiento desequilibrado. De hecho, está diseñado para proporcionar un momento neto igual a cero con respecto a un eje transversal para cualquier eje equilibrado, con el fin de minimizar los momentos de flexión en los ejes y, por tanto,

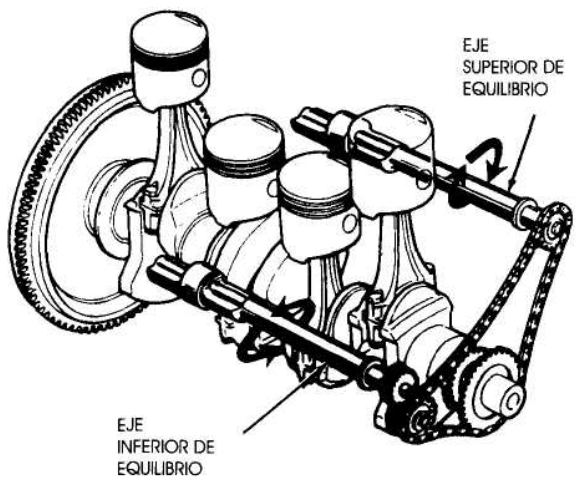


FIGURA 14-29
Ejes de equilibrio usados para eliminar el desequilibrio secundario en motores de cuatro cilindros en línea *Cortesía de Chrysler Corporation*

* También Chrysler y Porsche bajo licencia de Mitsubishi.

reducir las cargas de cojinete y las pérdidas por fricción. Esta característica es el asunto y el principal reclamo de la patente de Nakamura sobre este diseño.[2]

En la figura 14-30a) se muestra un esquema del equilibrador convencional de Lanchester dispuesto con dos ejes equilibrados contrarrotatorios, con sus centros en un plano horizontal transversal simple al plano vertical del movimiento del pistón.

La fuerza de equilibrio a partir de la combinación de los dos ejes de equilibrio es

$$\mathbf{F}_{bal} \cong -8m_{bal}r_{bal}\omega^2 \cos 2\omega t\,\hat{\mathbf{i}} \tag{14.16}$$

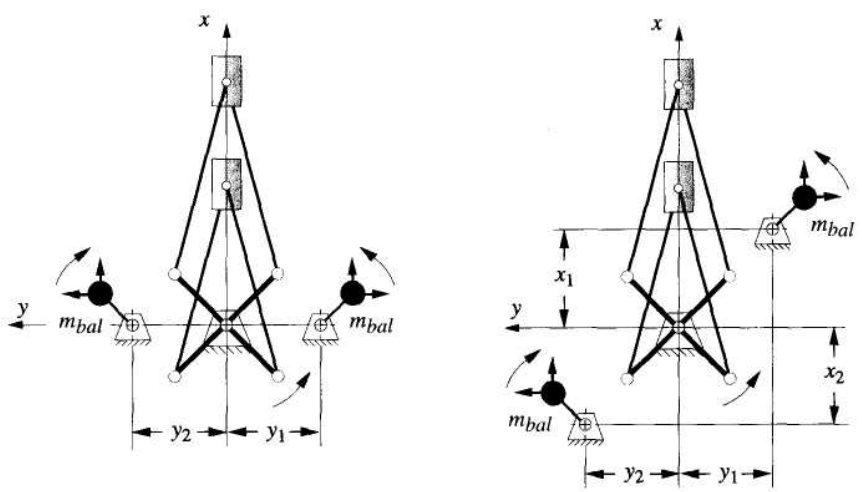
donde m_{bal} y r_{bal} son la masa y el radio de un peso equilibrado.

En la figura *H-30b)* se muestra un arreglo de Nakamura de ejes de equilibrio con un eje situado sobre el otro en planos horizontales separados. El corrimiento vertical $x_1 - x_2$ entre los ejes, en combinación con la dirección opuesta pero con componentes de igual magnitud horizontal de las fuerzas centrífugas de contrapeso, crea un par que varía con el tiempo *con respecto al eje del cigüeñal* definido como:

$$\mathbf{T}_{bal} \cong -4m_{bal}r_{bal}\omega^2\left(x_1 - x_2\right)\operatorname{sen} 2\omega t - \left(y_1 + y_2\right)\cos 2\omega t\,\hat{\mathbf{k}} \tag{14.17}$$

donde *x y y* se refieren a las coordenadas de los centros de los ejes con respecto al centro del cigüeñal, y los subíndices 1 y 2 se refieren, respectivamente, al eje de equilibrio que gira en la misma y en dirección opuesta al cigüeñal.

Las componentes verticales de las fuerzas centrífugas de los pesos equilibrados se seguirán sumando para proporcionar la fuerza de equilibrio como en la ecuación 14.16.



a) Equilibrador de Lanchester

fc>) Equilibrador de Nakamura

FIGURA 14-30

Dos tipos de mecanismos de equilibrio secundario para un motor de cuatro cilindros en línea

El par de torsión de la ecuación 14.17 tendrá un sentido opuesto al par de torsión de sacudimiento si el eje superior gira en la misma dirección del cigüeñal, y el eje inferior en la dirección opuesta.

Para el equilibrio de fuerzas, las ecuaciones 14.14 y 14.16 deben sumar cero,

$$m_B r\omega^2 \frac{4r}{l}\cos 2\omega t - 8m_{bal}r_{bal}\omega^2 \cos 2\omega t = 0$$

o

$$m_{bal}r_{bal} = \frac{r}{2l}m_B r \tag{14.18}$$

lo cual define el producto del radio por la masa necesario para el equilibrio del mecanismo.

Para el equilibrio del par de torsión las ecuaciones 14.15 y 14.17 deben sumar cero.

$$2m_B r^2\omega^2 \operatorname{sen} 2\omega t - 4m_{bal}r_{bal}\omega^2(x_1 - x_2)\operatorname{sen} 2\omega t - (y_1 + y_2)\cos 2\omega t = 0 \tag{14.19a}$$

Sustituyendo la ecuación 14.18 en la 14.19a.

$$2m_B r^2 \operatorname{sen} 2\omega t - 4\frac{r}{2l}m_B r(x_1 - x_2)\operatorname{sen} 2\omega t - (y_1 + y_2)\cos 2\omega t = 0 \tag{14.19b}$$

Para que esta ecuación sea cero para todo ωt,

$$\begin{aligned} y_2 &= -y_1 \\ x_1 - x_2 &= l \end{aligned} \tag{14.19c}$$

Por lo tanto, si los ejes de equilibrio están dispuestos simétricamente con respecto al plano del pistón en cualquier ubicación conveniente y_t y $-y_i$ y la distancia $x_i - x_2$ se hace igual a la longitud del acoplador I, entonces la segunda armónica del par de torsión de inercia será cancelada completamente. Ya que la segunda armónica es la única componente del par de torsión de inercia diferente de cero en este motor, como se ve en la figura 14-18¿»), no estará completamente equilibrada para la fuerza y el par de torsión de sacudimiento (pero no para el momento de sacudimiento).

También hay una oscilación importante del par de torsión del gas en un motor de cuatro cilindros, como se muestra en la figura 14- 18a). El par de torsión del gas está a 180° fuera de fase con un par de torsión de inercia, como se observa en la figura 14-18&), y así proporciona algunas cancelaciones naturales como se muestra en la curva total del par de torsión de la figura 14-18c). La magnitud del par de torsión del gas varía con la carga del motor y no puede ser cancelada por cualquier eje geométrico particular equilibrado para todas las condiciones. Sin embargo, se pueden seleccionar una velocidad de motor y una condición de carga como condiciones de la mayoría de impulsos usuales, y el sistema geométrico equilibrado se altera para dar una reducción óptima del par de torsión total del motor en estas condiciones. Nakamura estima que la magnitud del par de torsión del gas es de casi el 30% del par de torsión de inercia en condiciones comunes de impulso y, por lo tanto, sugiere un valor de $x_l - x_2$ — 0.7/ para la reducción total de las oscilaciones del par de torsión en este motor. Observe que el valor promedio

del par de torsión impulsor no es afectado por el equilibrio, debido a que el promedio del par de torsión de cualquier sistema equilibrado es siempre cero.

14.10 REFERENCIAS

1 **Nakamura, H.** (1976), "A *Low Vibration Engine with Unique Counter-Balance Shafts",* SAEPaper: 760111.

2 **Nakamura, H. *et al.*** (1977), *"Engine Balancer".* Derechos: Corp. Mitsubishi: Patente de E.U.A. 4,028,963.

14.11 BIBLIOGRAFÍA

Crouse, W. H. (1970), *Automotive Engine Design,* McGraw-Hill Inc., Nueva York.

Jennings, G. (1979), "A Short History of Wonder Engines", *Cycle Magazine,* mayo 1979, p. 68ff.

Setright, L. J. K. (1975), *Some Unusual Engines,* Mechanical Engineering Publications Ltd., The Inst. of Mech. Engr., Londres.

Thomson, W. (1978), *Fundamentáis of Automotive Balance,* Mechanical Engineering Publications Ltd., Londres.

14.12 PROBLEMAS

14-1 Dibuje un diagrama de fase de manivela para un motor de tres cilindros en línea con un cigüeñal de 0°, 120°, 240° y determine todos los órdenes posibles de encendido para:

a. Ciclo de cuatro tiempos b. Ciclo de dos tiempos

Seleccione la mejor disposición para obtener un encendido uniforme para cada ciclo de carrera.

14-2 Repita el problema 14-1 para un motor en línea de cuatro cilindros en línea con un cigüeñal de 0°, 90°, 270°, 180°.

14-3 Repita el problema 14-1 para un motor en V a 45° de cuatro cilindros, con un cigüeña de 0°, 90°, 270°, 180°.

14-4 Repita el problema 14-1 para un motor en V a 45° de dos cilindros, con un cigüeñal de 0°, 90°.

14-5 Repita el problema 14-1 para un motor en V a 90° de dos cilindros, con un cigüeñal de0°, 180°.

14-6 Repita el problema 14-1 para un motor opuesto a 180°, de dos cilindros, con un cigüeñal de 0°, 180°.

14-7 Repita el problema 14-1 para un motor de cuatro cilindros opuestos a 180° con un cigüeñal a 0°, 180°, 180°, 0°.

† 14-8 Calcule las condiciones de equilibrio de la fuerza de sacudimiento, par de torsión, y momento hasta la segunda armónica, para el diseño de motor del problema 14-1.

† Estos problemas son adecuados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

†14-9 Calcule las condiciones de equilibrio de la fuerza de sacudimiento, par de torsión, y momento hasta la segunda armónica, para el diseño de motor del problema 14-2.

†14-10 Determine las condiciones de equilibrio de fuerza, par de torsión, y momento de sacudimiento hasta la segunda armónica para el diseño de motor del problema 14-3.

†14-11 Determine las condiciones de equilibrio de la fuerza de sacudimiento, par de torsión, y momento hasta la segunda armónica, para el diseño de motor del problema 14-4.

†14-12 Determine las condiciones de equilibrio de la fuerza de sacudimiento, par de torsión, y momento hasta la segunda armónica, para el diseño de motor del problema 14-5.

†14-13 Determine las condiciones de equilibrio de la fuerza de sacudimiento, par de torsión, y momento hasta la segunda armónica, para el motor diseñado en el problema 14-6.

†14-14 Determine las condiciones de equilibrio de la fuerza de sacudimiento, par de torsión, y momento hasta la segunda armónica, para el motor diseñado en el problema 14-7.

14-15 Deduzca expresiones, en términos generales, para la magnitud y la localización angular respecto al primer codo de cigüeñal, de los productos de la masa-radio necesarios en el cigüeñal para equilibrar el momento de sacudimiento en un motor en V-8 a 90° con un cigüeñal de 0^o, 90°, 270°, 180°.

14-16 Repita el problema 14-15 para un V-6 a 90° con cigüeñal de 0^o, 240°, 120°.

14-17 Repita el problema 14-15 para un V-4 a 90° con un cigüeñal de 0°, 180°.

†14-18 Diseñe un par de ejes de equilibrio de Nakamura para cancelar la fuerza de sacudimiento y reducir las oscilaciones del par de torsión en el motor que se muestra en la figura 14-18.*

14.13 PROYECTOS

Éstos son problemas de diseño vagamente estructurados que se proponen para usar el programa ENGINE en su solución. Todo implica el diseño de uno o más motores multicilíndricos y difieren principalmente en los datos específicos para cada motor. El enunciado general del problema es:

Diseñe un motor multicilíndrico para un ciclo de carrera y desplazamiento específicos. Optimice la relación biela/manivela y la relación diámetro/carrera para minimizar las fuerzas de sacudimiento, el par de torsión de sacudimiento, y fuerzas del pasador, considerando también el tamaño total del motor. Diseñe las formas de eslabón y calcule parámetros dinámicos reales (masa, localización CG, momento de inercia) para esos eslabones mediante los métodos descritos en los capítulos 10 al 13. Modele dinámicamente los eslabones como los descritos en aquellos capítulos. Equilibre o sobreequilibre el eslabonamiento tanto como sea necesario para lograr esos resultados. Elija ángulos de fase del cigüeñal para optimizar el equilibrio de inercia del motor. Elija un orden de encendido y determine los ángulos de carrera de potencia para optimizar el encendido uniforme. Pondere transaccionalmente el equilibrio inercial si fuera necesario para lograr un encendido uniforme. Elija un ángulo en V óptimo si fuese apropiado para este problema en particular. Se desea una uniformidad completa del par de torsión total. Diseñe y dimensione un volante de peso mínimo por el método del capítulo 11 para suavizar el par de torsión total. Escriba un reporte de ingeniería sobre su diseño y análisis.

† Estos problemas son adecuados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

* Se puede encontrar mayor información sobre este diseño en el programa ENGINE donde éste es uno de los ejemplos.

P14-1 Ciclo de dos tiempos, cilindros gemelos en línea con un desplazamiento de un litro.

P14-2 Ciclo de cuatro tiempos, cilindros gemelos en línea con un desplazamiento de un litro.

P14-3 Ciclo de dos tiempos, cilindros gemelos en V con un desplazamiento de un litro.

P14-4 Ciclo de cuatro tiempos, cilindros gemelos en V con un desplazamiento de un litro.

P14-5 Ciclo de dos tiempos, cilindros gemelos opuestos con un desplazamiento de un litro.

P14-6 Ciclo de cuatro tiempos, cilindros gemelos opuestos con un desplazamiento de un litro.

P14-7 Ciclo de dos tiempos, V-4 con un desplazamiento de dos litros.

P14-8 Ciclo de cuatro tiempos, V-4 con un desplazamiento de dos litros.

P14-9 Ciclo de dos tiempos, cuatro cilindros opuestos con un desplazamiento de dos litros.

P14-10 Ciclo de cuatro tiempos, cuatro cilindros opuestos con un desplazamiento de dos litros.

P14-11 Ciclo de dos tiempos, cinco cilindros en línea, con un desplazamiento de 2.5 litros.

P14-12 Ciclo de cuatro tiempos, cinco cilindros en línea con un desplazamiento de 2.5 litros.

P14-13 Ciclo de dos tiempos, V-6 con un desplazamiento de tres litros.

P14-14 Ciclo de cuatro tiempos, V-6 con un desplazamiento de tres litros.

P14-15 Ciclo de dos tiempos, seis cilindros opuestos, con un desplazamiento de tres litros.

P14-16 Ciclo de cuatro tiempos, seis cilindros opuestos, con un desplazamiento de tres litros.

P14-17 Ciclo de dos tiempos, siete cilindros en línea, con un desplazamiento de 3.5 litros.

P14-18 Ciclo de cuatro tiempos, siete cilindros en línea, con un desplazamiento de 3.5 litros.

P14-19 Ciclo de dos tiempos, ocho cilindros en línea con un desplazamiento de cuatro litros.

P14-20 Ciclo de cuatro tiempos, ocho cilindros en línea con un desplazamiento de cuatro litros.

P14-21 Ciclo de dos tiempos, V-10, con un desplazamiento de cinco litros. P14-

22 Ciclo de cuatro tiempos, V-10, con un desplazamiento de cinco litros.

P14-23 Ciclo de cuatro tiempos, W-6, con un desplazamiento de cinco litros. (Un motor W tiene tres bancos de cilindros en una manivela común.)

P14-24 Ciclo de cuatro tiempos, W-9 con un desplazamiento de cinco litros. (Un motor W tiene tres bancos de cilindros en una manivela común.)

P14-25 Ciclo de cuatro tiempos, W-12, con un desplazamiento de cinco litros. (Un motor W tiene tres bancos de cilindros en una manivela común.)

P14-26 Diseñe una familia de motores en V para ser ensamblados en la misma línea. Todos deben tener el mismo ángulo *V* y utilizar los mismos pistones, bielas y carreras. El cigüeñal de cada uno puede ser diferente. Se necesitan cuatro configuraciones: V-4, V-6, V-8 y V-10. Todos tendrán el mismo desplazamiento de 0.5 litros por cilindro. Optimice la configuración de un solo cilindro a partir de la cual los motores multicilíndricos se construirán para la relación diámetro/carrera y biela/manivela. Después

ensamble este diseño del cilindro en las configuraciones anteriores. Encuentre la mejor disposición del ángulo V para proporcionar una buena combinación de equilibrio y encendido uniforme en todos los motores.

P14-27 Repita el proyecto P14-26 para una familia de motores W: W-3, W-6, W-9 y W-12. Los ángulos entre los bancos deben ser los mismos para todos los modelos. Para más información sobre esta inusual configuración W, véase el ejemplo incorporado de un motor W-12 en el programa ENGINE.

P14-28 En años recientes algunos fabricantes de automóviles han construido configuraciones inusuales de motores en V como el VW-Audi VR15 que es un V-6 de 15°. Obtenga información detallada sobre este diseño y después analícelo en el programa ENGINE. Escriba un reporte que explique por qué eligieron los fabricantes esta disposición inusual y justifique sus conclusiones con un análisis de ingeniería detallado.

P14-29 Diseñe dos motores en línea de seis y cinco cilindros respectivamente con el mismo desplazamiento, por ejemplo de 2.5 litros. Analice su dinámica con el programa ENGINE. Escriba un reporte de ingeniería para explicar por qué algunos fabricantes como Audi, Volvo y Acura han elegido uno de cinco cilindros en línea sobre uno de seis cilindros de par de torsión y potencia de salida comparables.

P14-30 Ferrari ha producido motores V-12 de 60° en V y con configuraciones horizontales opuestas. Diseñe una versión de tres litros para cada uno y compare su dinámica. Escriba un reporte que explique por qué los fabricantes eligieron esta disposición y justifique sus conclusiones con un análisis de ingeniería detallado.

P14-31 Diseñe y compare un motor V-6 a 90°, un V-6 a 60°, uno de seis en línea, y uno de seis cilindros opuestos a 180° de tres litros, cuyos diseños están todos en el volumen de producción. Explique sus ventajas y desventajas, justifique sus conclusiones con un análisis de ingeniería detallado.



Capítulo 15

DINÁMICA DE LEVAS

El universo está lleno de cosas mágicas
que esperan pacientemente nuestra apreciación
para crecer nítidamente.
EDEN PHILLPOTS

15.0 INTRODUCCIÓN

En el capítulo 8 se presentó la cinemática de levas y seguidores y los métodos para su diseño. Ahora se ampliará el estudio de los sistemas de leva y seguidor para incluir consideraciones de las fuerzas dinámicas y los pares de torsión desarrollados. Aunque en este capítulo el análisis se limita a ejemplos de levas y seguidores, los principios y enfoques presentados son aplicables a la mayoría de los sistemas dinámicos. El sistema de leva-seguidor puede considerarse como un ejemplo útil y conveniente para la presentación de temas como la creación de modelos dinámicos de parámetros concentrados y la definición de sistemas equivalentes, como se describieron en el capítulo 10. Estas técnicas, así como la descripción de frecuencias naturales, efectos del amortiguamiento y analogías entre sistemas físicos, serán útiles en el análisis de todos los sistemas dinámicos, independientemente de su tipo.

En el capítulo 10 se analizaron los dos enfoques para el análisis dinámico, comúnmente denominados problemas dinámicos directo e inverso. El problema directo supone que se conocen todas las fuerzas que actúan sobre el sistema y busca determinar los desplazamientos, velocidades y aceleraciones resultantes. El problema inverso es, como su nombre lo dice, lo contrario del otro. Se conocen los desplazamientos, velocidades y aceleraciones, y se resuelve para las fuerzas dinámicas que resulten. En este capítulo se investigará la aplicación de ambos métodos a la dinámica de leva-seguidor. En la sección 15.1 se explora la solución directa. En la sección 15.3 se presentará la solución inversa. Ambas son instructivas en esta aplicación de un sistema de leva-seguidor con cierre de fuerza (cargado por resorte) y cada una de ellas se analizará en este capítulo.

TABLA 15-1 Notación usada en este capítulo

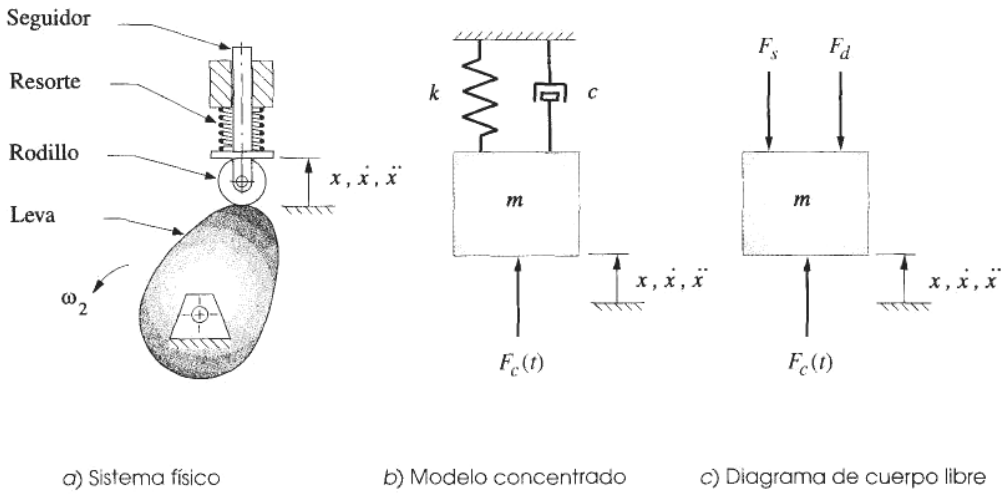
c	= coeficiente de amortiguamiento
c_c	= coeficiente de amortiguamiento crítico
k	= constante de resorte
F_c	= fuerza de la leva sobre el seguidor
F_s	= fuerza del resorte sobre el seguidor
F_d	= fuerza del amortiguador sobre el seguidor
m	= masa de los elementos en movimiento
t	= tiempo en segundos
T_c	= par de torsión sobre el árbol de levas
q	= ángulo del árbol de levas, en grados o radianes
ω	= velocidad angular del árbol de levas, rad/s
ω_d	= frecuencia natural circular amortiguada, rad/s
ω_f	= frecuencia forzada, rad/s
ω_n	= frecuencia natural circular no amortiguada, rad/s
x	= desplazamiento del seguidor, unidades de longitud
$\dot{x}$	= velocidad del seguidor, longitud/s
$\ddot{x}$	= aceleración del seguidor, longitud/s^2
ζ	= relación de amortiguamiento

15.1 ANÁLISIS DINÁMICO DE FUERZA DEL MECANISMO DE LEVA Y SEGUIDOR CON CIERRE DE FUERZA

En la figura 15-1a) se muestra una leva de disco o de placa simple que impulsa a un seguidor de rodillo cargado por resorte. Éste es un sistema con cierre de fuerza que depende de la acción del resorte para mantener la leva y el seguidor en contacto permanente. En la figura 15-1b) se muestra un modelo de parámetros concentrados de este sistema, en el cual toda la **masa** que se mueve con el tren del seguidor, está concentrada como *m*, toda la elasticidad o efecto del resorte en el sistema está concentrada en la **constante de resorte** *k*, y todo el **amortiguamiento** o resistencia al movimiento está concentrado en un amortiguador con coeficiente *c*. Las fuentes de masa que contribuyen a *m* son bastante obvias. La masa del vástago del seguidor, el rodillo y su pasador de pivote, y de cualquier otro elemento fijado al conjunto en movimiento, se suman para constituir *m*. En la figura 15-le) se muestra el diagrama de cuerpo libre del sistema en el que actúan la fuerza de la leva F_c, la fuerza del resorte F_s y la fuerza de amortiguamiento F_d. Por supuesto, también estarán los efectos de la masa multiplicada por la aceleración sobre el sistema.

Respuesta no amortiguada

En la figura 15-2 se muestra un modelo de parámetros concentrados aún más simple, del mismo sistema de la figura 15-1, pero en el que se omite por completo el amortiguamiento. A esto se le llama *modelo conservador*, ya que conserva la energía sin pérdidas. No es una hipótesis real o segura en este caso, pero servirá para el propósito de encontrar un camino hacia un modelo mejor que incluya el amortiguamiento. El diagrama de cuerpo



a) Sistema físico b) Modelo concentrado c) Diagrama de cuerpo libre

FIGURA 15-1

Modelo parametrizado concentrado con un *GDL* para un sistema de leva-seguidor con amortiguamiento

libre para este modelo de masa-resorte se muestra en la figura 15-2c). Puede escribirse la ecuación de Newton para este sistema de un *GDL:*

$$\sum F = ma = m\ddot{x}$$

$$F_c(t) - F_s = m\ddot{x}$$

De la ecuación 10.14:

$$F_s = kx$$

Entonces:

$$m\ddot{x} + kx = F_c(t) \qquad (15.1a)$$

Ésta es una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de segundo orden con coeficientes constantes. La solución completa consistirá en la suma de dos partes, la transitoria (homogénea) y la de estado estable (particular). La EDO homogénea es:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \qquad (15.1b)$$

que tiene la solución bien conocida:

$$x = A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t \qquad (15.1c)$$

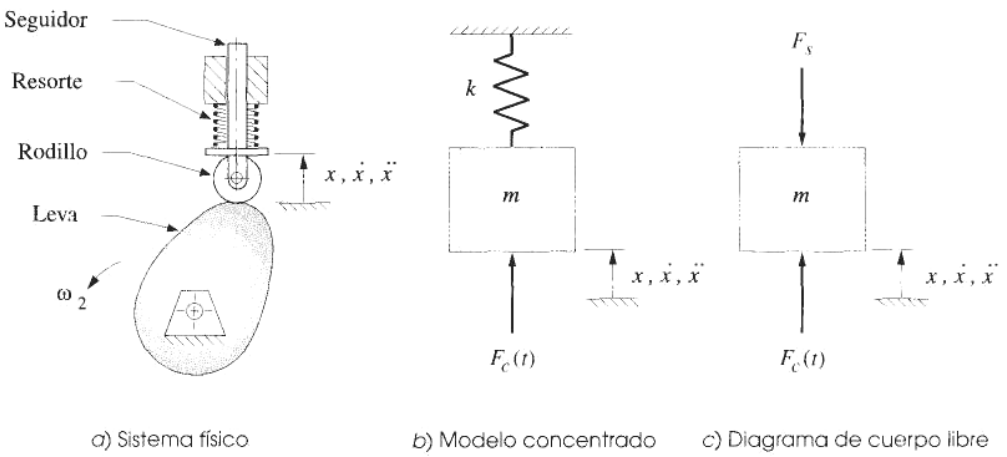


FIGURA 15-2
Modelo parametrizado concentrado con un *GDL* para un sistema de leva-seguidor sin amortiguamiento

donde *A y B* son las constantes de integración que se determinarán por las condiciones iniciales. Para comprobar la solución derívela dos veces, suponga ω constante y sustituya en la EDO homogénea:

$$-\omega^2(A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t) = -\frac{k}{m}(A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t)$$

Ésta es una solución siempre que:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{15.1d}$$

La cantidad ω_n **(rad/s)** se *llama frecuencia circular natural* del sistema y es la frecuencia a la que vibraría el sistema si se le dejara a sus propias posibilidades. Esto representa *la frecuencia natural no amortiguada,* ya que no considera al amortiguamiento. La *frecuencia natural amortiguada* será ligeramente menor que este valor. Observe que ω_n sólo es función de los parámetros físicos del sistema, *m y k;* por tanto, está completamente determinada y no cambia con el tiempo una vez que se construye el sistema. Al crear un modelo del sistema con un *GDL,* se ha autolimitado a una frecuencia natural "promedio" que es normalmente cercana a la frecuencia natural más baja o fundamental.

Cualquier sistema físico real tendrá también frecuencias naturales más altas, que en general no serán múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Con el fin de hallar éstas se necesita crear un modelo del sistema con varios grados de libertad. El tono fundamental en el que suena una campana cuando es golpeada, es su frecuencia natural definida por esta expresión. La campana también tiene sobretonos, que son sus otras frecuencias naturales y más altas. La frecuencia fundamental tiende a dominar la respuesta transitoria del sistema.[111]

La frecuencia natural circular ω_n (rad/s) puede convertirse a ciclos por segundo (hertz) si se observa que hay 2π radianes por revolución y una revolución por ciclo:

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\omega_n \quad \text{hertz} \tag{15.1e}$$

Las constantes de integración, A y *B* en la ecuación 15.1c, dependen de las condiciones iniciales. Un caso general puede expresarse como:

Cuando $t = 0$; sea $x = x_0$ y $v = v_0$, donde x_0 y v_0 son constantes

Lo cual da una solución general para la (EDO) homogénea 15.1b de:

$$x = x_0 \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t \tag{15.1f}$$

La ecuación 15.lf puede expresarse en la forma polar, si se calculan la magnitud y el ángulo de fase:

$$X_0 = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \qquad \phi = \arctan\left(\frac{v_0}{x_0 \omega_n}\right)$$

entonces:

$$x = X_0 \cos(\omega_n t - \phi) \tag{15.1g}$$

Observe que ésta es una función armónica pura cuya amplitud X_0 y ángulo de fase ϕ son función de las condiciones iniciales y de la frecuencia natural del sistema. Éste oscilará de manera permanente en respuesta a una sola entrada transitoria si no hay realmente amortiguamiento.

Respuesta amortiguada

Si ahora se reintroduce el amortiguamiento del modelo en la figura \5-*b)* y se traza el diagrama de cuerpo libre como se muestra en la figura 15-lc), la suma de fuerzas será:

$$F_e(t) - F_d - F_s = m\ddot{x} \tag{15.2a}$$

Sustituyendo en las ecuaciones 10.14 y 10.15c:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_e(t) \tag{15.2b}$$

SOLUCIÓN HOMOGÉNEA Se separa de nuevo esta ecuación diferencial en sus componentes homogénea y particular. La parte homogénea es:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{15.2c}$$

La solución a esta EDO es de la forma:

$$\ddot{x} = Re^{st} \tag{15.2d}$$

donde R y s son constantes. Derivando con respecto al tiempo:

$$\dot{x} = Rse^{st}$$

$$\ddot{x} = Rs^2e^{st}$$

y sustituyendo en la ecuación 15.2c:

$$Rs^2e^{st} + \frac{c}{m}Rse^{st} + \frac{k}{m}Re^{st} = 0$$

$$\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}\right)Re^{st} = 0 \qquad (15.2e)$$

Para que esta solución sea válida, R o la expresión entre paréntesis debe ser cero, ya que e^{st} nunca es igual a cero. Si R fuese cero, entonces la solución supuesta en la ecuación 15.2d también sería cero y, por tanto, no es una solución. Por consiguiente, la ecuación cuadrática entre paréntesis debe ser cero.

$$\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}\right) = 0 \qquad (15.2f)$$

A ésta se le llama ecuación característica de la EDO y su solución es:

$$s = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2}$$

que tiene las dos raíces:

$$s_1 = -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$s_2 = -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \qquad (15.2g)$$

Estas dos raíces de la ecuación característica proporcionan dos términos independientes de la solución homogénea:

$$x = R_1e^{s_1t} + R_2e^{s_2t} \qquad \text{para} \quad s_1 \neq s_2 \qquad (15.2h)$$

Si $s_1 = s_2$ entonces es necesaria otra forma de solución. La cantidad s_1 será igual a s_2 cuando:

$$\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = 0 \qquad \text{o:} \qquad \frac{c}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

y:

$$c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n = c_c \qquad (15.2i)$$

Este valor particular de c se llama amortiguamiento crítico y se indica como c_c. El sistema se comportará de modo único cuando esté amortiguado críticamente y la solución debe ser de la siguiente forma:

$$x = R_1 e^{s_1 t} + R_2 t e^{s_2 t} \qquad \text{para} \quad s_1 = s_2 = -\frac{c}{2m} \tag{15.2j}$$

Será útil definir una magnitud adimensional llamada relación de amortiguamiento, ζ que es la amortiguación real dividida entre la amortiguación crítica:

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \tag{15.3a}$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$$

y así:

$$\zeta\omega_n = \frac{c}{2m} \tag{15.3b}$$

La frecuencia natural de amortiguado ω_d es ligeramente menor que la frecuencia natural sin amortiguado ω_n y es:

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} \tag{15.3c}$$

Se pueden sustituir las ecuaciones 15. 1d y 15.3b en las ecuaciones 15.2g para obtener una expresión para la ecuación característica en términos de relaciones adimensionales:

$$s_{1,2} = -\omega_n\zeta \pm \sqrt{(\omega_n\zeta)^2 - \omega_n^2} \tag{15.4a}$$

$$s_{1,2} = \omega_n\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

Esto muestra que la respuesta del sistema está determinada por la relación de amortiguamiento ζ que determina el valor de la discriminante. Hay tres casos posibles:

CASO 1:	$\zeta > 1$	Raíces reales y desiguales	(15.4b)
CASO 2:	$\zeta = 1$	Raíces reales e iguales	
CASO 3:	$\zeta < 1$	Raíces complejas conjugadas	

Considere separadamente la respuesta de cada uno de estos casos.

CASO 1: $\zeta > 1$ *sobreamortiguado*

La solución es de la forma de la ecuación 15.2h y es:

$$x = R_1 e^{\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t} + R_2 e^{\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t} \tag{15.5a}$$

Observe que ya que $\zeta > 1$, ambos exponentes serán negativos, haciendo de x la suma de los dos exponentes decadentes como se muestra en la figura 15.3. Esta es la respuesta tansitoria del sistema ante una perturbación y decae después de un tiempo. No hay oscilación en el movimiento de salida. Un ejemplo de sistema sobreamortiguado que probablemente ya ha encontrado es el brazo de la tornamesa de un tocadiscos de buena calidad, con una característica de "apuntamiento". El brazo puede ser levantado y luego soltado, y "flotará" descendiendo lentamente sobre el disco. Esto se logra al aplicar una gran cantidad de amortiguamiento en el sistema, en el pivote del brazo. El movimiento del brazo sigue una curva de decaimiento exponencial, tal como el de la figura 15.3.

CASO 2: $\zeta = 1$ *críticamente amortiguado*

La solución es de la forma de la ecuación 15.2j y es:

$$x = R_1 e^{-\omega_n t} + R_2 t e^{-\omega_n t} = (R_1 + R_2 t) e^{-\omega_n t} \tag{15.5b}$$

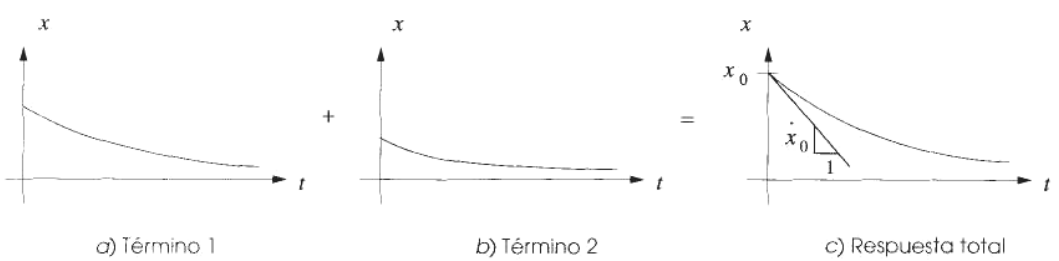
Éste es el producto de una función lineal de tiempo y una función exponencial decadente; puede tomar varias formas según los valores de las constantes de integración, R_1 y R_2, que a su vez dependen de condiciones iniciales. Una respuesta transitoria común se podría parecer a la de la figura 15-4. Esta es una respuesta transitoria del sistema ante una perturbación, la cual terminaría después de un tiempo. Hay una respuesta rápida pero no hay oscilación en el movimiento de salida. Un ejemplo de un sistema críticamente amortiguado es el del sistema de suspensión de un nuevo automóvil deportivo, en el que el amortiguamiento generalmente se hace cercano al crítico con el fin de proporcionar una respuesta de manejo vigoroso sin oscilación, o con lentitud para responder. Un sistema críticamente amortiguado, al ser perturbado regresará a su posición original en un salto. Es posible que se pase pero no oscilará y no será lento.

CASO 3: $\zeta < 1$ *subamortiguado*

La solución es de la forma de la ecuación 15.2h, y s_1, s_2 son conjugados complejos. La ecuación 15.4a se puede expresar en forma más conveniente como:

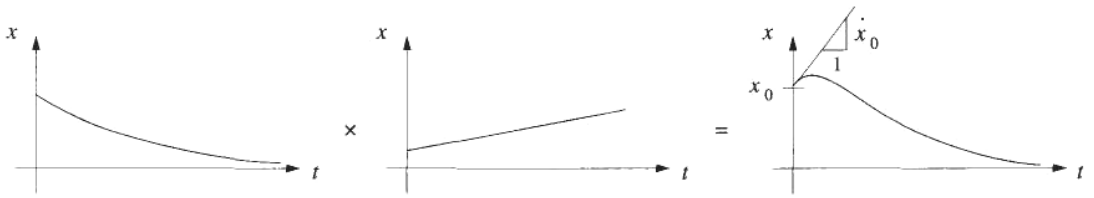
$$s_{1,2} = \omega_n \left(-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\right); \qquad j = \sqrt{-1} \tag{15.5c}$$

Sustituyendo en la ecuación 15.2h:



a) Término 1 b) Término 2 c) Respuesta total

15 FIGURA 15-3
Respuesta transitoria de un sistema sobreamortiguado



a) Término 1 b) Término 2 c) Respuesta total

FIGURA 15-4

Respuesta transitoria de un sistema críticamente amortiguado

$$x = R_1 e^{\left(-\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n t} + R_2 e^{\left(-\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n t}$$

Y observe que: $y^{a+b} = y^a y^b$

$$x = R_1\left[e^{-\zeta\omega_n t} e^{\left(j\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n t}\right] + R_2\left[e^{-\zeta\omega_n t} e^{\left(-j\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n t}\right]$$

Factorice:

$$x = e^{-\zeta\omega_n t}\left[R_1 e^{\left(j\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n t} + R_2 e^{\left(-j\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n t}\right] \qquad (15.5d)$$

Sustituya la identidad de Euler de la ecuación 4.4a:

$$x = e^{-\zeta\omega_n t}\left\{\begin{array}{l} R_1\left[\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right) + j\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right)\right] \\ \quad + R_2\left[\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right) - j\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right)\right] \end{array}\right\}$$

y simplifique: (15.5e)

$$x = e^{-\zeta\omega_n t}\left\{\left(R_1 + R_2\right)\left[\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right) + \left(R_1 - R_2\right) j\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right)\right]\right\}$$

Observe que R_1 y R_2 son justamente constantes aún por determinar a partir de las condiciones iniciales, asi que su suma y diferencia pueden designarse como algunas otras constantes:

$$x = e^{-\zeta\omega_n t}\left\{A\left[\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right) + B\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right)\right]\right\}$$

Esto se puede expresar en forma polar definiendo la magnitud y el ángulo fase como:

$$X_0 = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad \phi = \arctan\frac{B}{A}$$

entonces: (15.5g)

$$x = X_0 e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left[\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right) - \phi\right]$$

Éste es el producto de una función armónica de tiempo y una función exponencial que decae, donde X_0 y f son las constantes de integración determinadas por las condiciones iniciales.

En la figura 15-5 se muestra la respuesta transitoria para este caso de subamortiguamiento. La respuesta se pasa y oscila antes de establecerse finalmente en su posición final. Observe que si la relación de amortiguamiento £ vale cero, la ecuación 15.5g se reduce a la ecuación 15. lg que es puramente armónica.

Un ejemplo de **sistema subamortiguado** es un trampolín, ya que continúa oscilando después de que el clavadista ha saltado al agua, y poco a poco retorna a su posición inicial cero. *Muchos sistemas reales en maquinaria están subamortiguados, incluso el sistema de leva-seguidor común.* Esto suele conducir a **problemas de vibración.** En general no es una buena solución simplemente agregar amortiguamiento al sistema, ya que éste genera calor y es muy poco eficiente en energía. Es mejor diseñar el sistema para evitar los problemas de vibración.

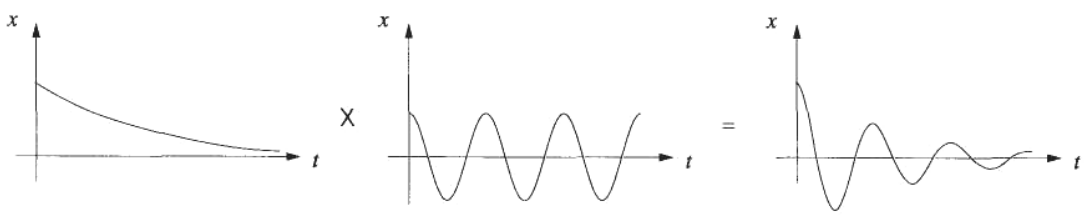
SOLUCIÓN PARTICULAR a diferencia de la solución homogénea que es siempre la misma independientemente de la entrada, la solución particular a la ecuación 15.2b dependerá de la función forzada $F_c(t)$ que se aplica al mecanismo de leva y seguidor a partir de la leva. En general, el desplazamiento de salida *x* del seguidor será una función de forma similar a la de entrada, pero se retrasará con respecto a esta función de entrada en un ángulo de fase. Es bastante razonable usar una función senoidal como un ejemplo, ya que cualquier función periódica se puede representar como una serie de Fourier con términos seno y coseno de diferentes frecuencias (véase la ecuación 13.2, ecuación 13.3 y la nota al pie de la página).

Suponga que la función forzada es:

$$F_c(t) = F_0 \operatorname{sen} \omega_f t \tag{15.6a}$$

donde F_0 es la amplitud de la fuerza y ω_f es su frecuencia circular. Observe que ω_f no está relacionada con ω_n o con ω_d y puede ser de cualquier valor. La ecuación del sistema entonces se convierte en:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \operatorname{sen} \omega_f t \tag{15.6b}$$



a) Término 1 b) Término 2 c) Respuesta total

FIGURA 15-5
Respuesta transitoria de un sistema subamortiguado

La solución debe ser de forma armónica para acoplarse a esta función forzada, y se puede ensayar la misma forma de resolución que se empleó para la solución homogénea:

$$x_f(t) = X_f \operatorname{sen}(\omega_f t - \psi) \tag{15.6c}$$

donde:

X_f = amplitud

ψ = ángulo de fase entre la fuerza aplicada y el desplazamiento

ω_f = velocidad angular de la función forzada

Aquí los factores X_f y ψ no son constantes de integración, sino constantes determinadas por las características físicas del sistema, y la frecuencia y magnitud de la función forzada. No tienen ninguna relación con las condiciones iniciales. Para obtener sus valores se deriva dos veces la solución supuesta, luego se sustituye en la EDO y se obtiene:

$$X_f = \frac{F_0}{\sqrt{\left(K - m\omega_f^2\right)^2 + \left(c\omega_f\right)^2}}$$
$$\psi = \arctan\left[\frac{c\omega_f}{\left(k - m\omega_f^2\right)^2}\right] \tag{15.6d}$$

Al sustituir las ecuaciones 15.Id, 15.2i y 15.3a, y al expresarlas en forma adimensional:

$$\frac{X_f}{\left(\frac{F_0}{k}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left(2\zeta\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2}}$$
$$\psi = \arctan\left[\frac{2\zeta\frac{\omega_f}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega_f}{\omega_n}\right)^2}\right] \tag{15.6e}$$

Al cociente ω_f/ω_n se le llama **relación de frecuencia.** Al dividir X_f entre la deflexión estática F_0/k se obtiene la **relación de amplitud,** que define el desplazamiento dinámico comparado con el estático.

RESPUESTA COMPLETA La solución completa de la ecuación diferencial del sistema para una función forzada senoidal es la suma de las soluciones homogénea y particular:

$$x = X_0 e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left[\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t\right) - \phi\right] + X_f \operatorname{sen}(\omega_f t - \psi) \tag{15.7}$$

El término homogéneo representa la respuesta transitoria del sistema, la cual decae con el tiempo, pero reaparece en cualquier momento en que el sistema es perturbado nuevamente. El término particular representa la respuesta forzada o la respuesta de estado

estable para una función forzada senoidal, la cual continuará mientras la función mencionada esté presente.

Observe que la solución a esta ecuación, mostrada en las ecuaciones 15.5 y 15.6, depende sólo de dos relaciones, la relación de amortiguamiento ζ que relaciona el amortiguamiento real con el amortiguamiento crítico, y la *relación de frecuencia* ω_f/ω_n que relaciona la frecuencia forzada con la frecuencia natural del sistema. Koster[1] encontró que un valor común para la relación de amortiguamiento en los sistemas de leva-seguidor es $\zeta = 0.06$, de modo que están subamortiguados y pueden resonar si operan con relaciones de frecuencias cercanas a 1.

Las condiciones iniciales para el problema específico se aplican a la ecuación 15.7 para determinar los valores de X_0 y ϕ. Observe que estas constantes de integración están contenidas en la parte homogénea de la solución.

15.2 RESONANCIA

La frecuencia natural (y sus sóbretenos) son de gran interés para el diseñador, ya que definen las frecuencias a las que **resonará** el sistema. Los sistemas de parámetros agrupados con un solo *GDL* que se muestran en las figuras 15-1 y 15-2 son los más sencillos posibles para describir un sistema dinámico, y, sin embargo, contienen todos los elementos dinámicos básicos. Las masas y los resortes son elementos almacenadores de energía. La masa almacena energía cinética y un resorte almacena energía potencial. El amortiguador es un elemento disipador. Usa energía y la convierte en calor. Así, todas las pérdidas en el modelo de la figura 15-1 ocurren a través del amortiguador.

Éstos son elementos idealizados "puros" que poseen sus propias características. Esto es, el resorte no tiene amortiguamiento, y el amortiguador no tiene elasticidad, etc. Cualquier sistema que contenga más de un dispositivo almacenador de energía, tal como una masa y un resorte, poseerá por lo menos una frecuencia natural. Si se estimula el sistema a su frecuencia natural, se originará la condición llamada resonancia, en la que la energía almacenada en los elementos del sistema oscilará de un elemento a otro a esa frecuencia. El resultado puede ser la aparición de oscilaciones violentas en los desplazamientos de elementos móviles en el sistema, cuando la energía pasa de la forma potencial a la forma cinética y viceversa.

En la figura 15-6 se muestra un diagrama de la amplitud y el ángulo de fase de la respuesta X del desplazamiento del sistema ante una función forzada senoidal de entrada a diversas frecuencias ω_f. En este caso la frecuencia forzada es la velocidad angular a la cual está girando la leva. La gráfica normaliza la frecuencia forzada como la relación de frecuencia ω_f/ω_n. La amplitud de respuesta X se normaliza al dividir la deflexión dinámica x entre la deflexión estática F_0/k que tiene la misma amplitud de fuerza originada en el sistema. Por tanto, a una frecuencia cero, la salida es igual a 1, es decir, igual a la deflexión estática del resorte a la amplitud de fuerza de la entrada. A medida que la frecuencia forzada aumenta hacia la frecuencia natural ω_n, la amplitud del movimiento de salida, para amortiguamiento cero, crece con rapidez y se vuelve teóricamente infinita cuando $\omega_f = \omega_n$. Más allá de este punto, la amplitud disminuye rápida y asintóticamente hacia cero a altas relaciones de frecuencia. Es obvio que se debe evitar impulsar este sistema a su frecuencia natural o cerca de ella. Agregar amortiguamiento reduce la amplitud de vibración a la frecuencia natural, pero se necesitan relaciones de amortiguamiento muy grandes (> 0.6) para conservar la amplitud de salida menor o igual que la amplitud

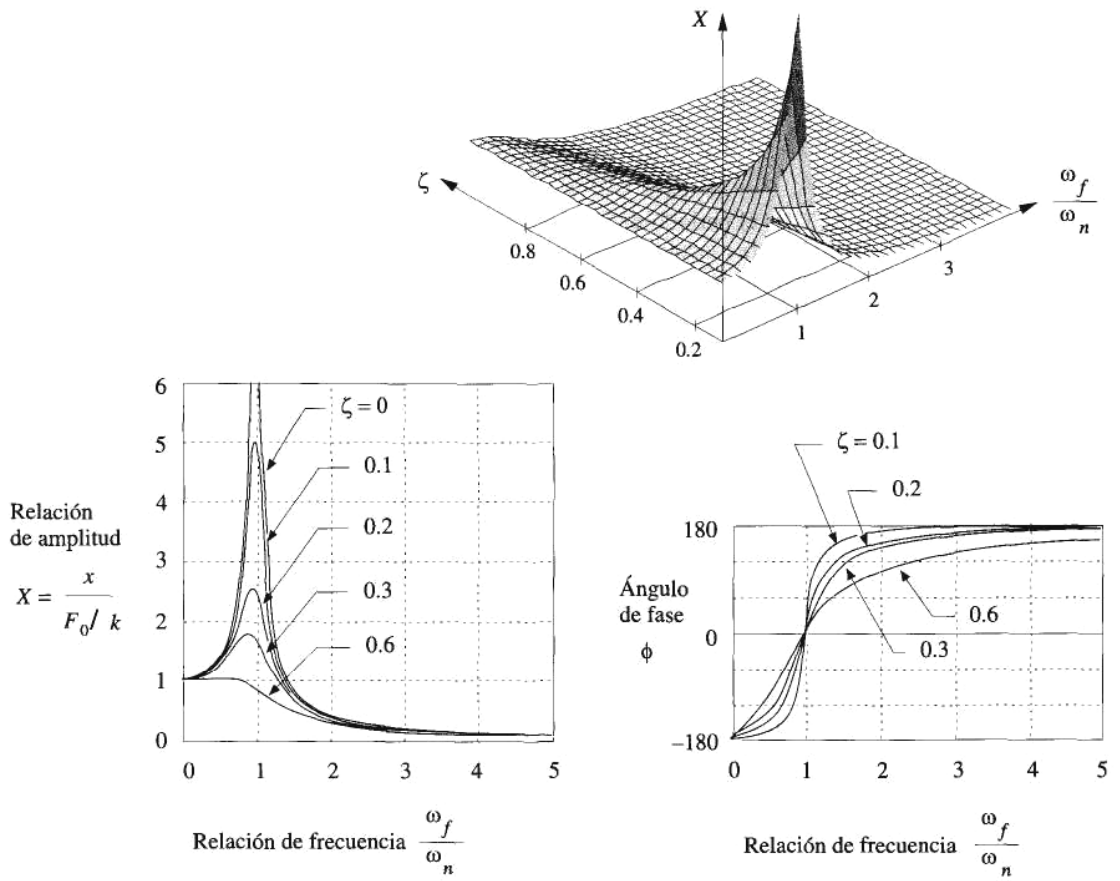


FIGURA 15-6

Relación de amplitud y ángulo de fase de la respuesta de un sistema

de entrada. Esto es un amortiguamiento mucho mayor que el que se encuentra en los sistemas de leva-seguidor, y en la mayor parte de la maquinaria. Un resultado de la operación de un sistema de leva y seguidor subamortiguado cercano a ω_n puede ser el **salto de seguidor.** El sistema de seguidor de masa y resorte puede oscilar de manera violenta a su frecuencia natural y perder el contacto con la leva. Cuando se restablece el contacto pueden ocurrir fuertes cargas de impacto capaces de hacer fallar rápidamente los materiales.

El diseñador tiene un cierto control sobre la resonancia, ya que puede hacer que la masa *m* y la rigidez *k* del sistema se muevan a la frecuencia natural, a partir de cualquiera de las frecuencias de operación requeridas. Una regla común es diseñar el sistema para que tenga una frecuencia natural fundamental ω_n de por lo menos diez veces la frecuencia forzada más alta esperada en el servicio, y así mantener toda la operación muy por debajo del punto de resonancia. Esto suele ser difícil de lograr en sistemas mecánicos. Se trata no obstante, de alcanzar el valor más grande posible de ω_n/ω_f aun si es menor de 10.

En el caso de levas con rapidez de aceleración finita que tienen un detenimiento después de la subida, del mismo orden de duración que dicha subida, Koster [11] las define como una relación adimensional,

$$\tau = \frac{T_n}{t_r} \qquad T_n = \frac{1}{\omega_n} \tag{15.8}$$

donde T_{tt} es el periodo de la frecuencia natural del sistema de seguidor, y t_r es el tiempo necesario para efectuar la porción de subida del movimiento del seguidor. Para minimizar los efectos de las vibraciones transitorias sobre un sistema, esta relación debe ser tan pequeña como sea posible y siempre menor que 1. Un valor pequeño de τ equivale a un valor grande de la relación ω_n/ω_r. El error en la aceleración del seguidor debido a vibraciones durante el periodo de detenimiento será proporcional a la primera potencia de τ, y el error en la posición del seguidor será proporcional a la tercera potencia de τ para valores de $\tau < 0.5$. Si la duración del detenimiento es aproximadamente igual o mayor que la de la subida, estas vibraciones transitorias tenderán a desaparecer al final del detenimiento. La siguiente bajada o subida proporcionará de nuevo una entrada al sistema, y originará una nueva respuesta transitoria.

Así, la respuesta de un sistema de leva y seguidor de este tipo estará dominada por las respuestas transitorias recurrentes y no por la respuesta forzada, o de estado estable. Es muy importante apegarse a la ley fundamental del diseño de levas y usar programas de levas con rapidez de aceleración finita para minimizar esas vibraciones residuales en el sistema de seguidor. Koster [1] reporta que los programas cicloidal y polinomial 3-4-5 originan vibraciones residuales bajas en la leva con doble detenimiento. El programa de aceleración senoidal modificado también dará buenos resultados. Todos éstos tienen rapidez de aceleración finita. (Véase la sección 8.8 y la tabla 8-4.)

Alguna consideración y observación de la ecuación 15.Id mostrará la conveniencia de que los elementos de este sistema sean ligeros (valor bajo de *m)* y rígidos (valor alto de *k)* para obtener valores elevados de ω_n y, por tanto, valores bajos para τ. Desafortunadamente, los materiales más ligeros rara vez son los más rígidos. El aluminio tiene una tercera parte del peso del acero, pero también es casi una tercera parte de rígido. El titanio tiene aproximadamente la mitad del peso del acero pero también cerca de la mitad de su rigidez. Algunos de los materiales exóticos compuestos, tales como la fibra de carbono epoxi ofrecen mejores relaciones de dureza-peso, pero su costo es elevado y su procesamiento difícil. ¡Otro trabajo para el material *Unobtainium* 208!

Observe en la figura 15-6 que la amplitud de vibración se aproxima a cero para grandes relaciones de frecuencia. Así, si el sistema se puede llevar a la velocidad a través del punto de resonancia sin daño alguno, y luego mantenerse operando a una gran relación de frecuencia, la vibración será mínima. Un ejemplo de sistema diseñado para funcionar de este modo son los grandes dispositivos que deben operar a alta velocidad, como es el caso de un generador de energía eléctrica. Su enorme masa crea una frecuencia natural inferior a la que corresponde a sus velocidades de operación requeridas. Se le hace "pasar" en aceleración lo más rápidamente posible por la región de resonancia para evitar daños debidos a las vibraciones, y luego en desaceleración también pasa rápidamente a través de la resonancia cuando se va a detener. Tienen la gran ventaja de tener ciclos prolongados de operación a velocidad constante en la región segura de frecuencia entre inicios y paros aislados o poco frecuentes.

15.3 ANÁLISIS DE FUERZA CINETOSTATICA DE UNA LEVA Y SEGUIDOR CON CIERRE DE FUERZA

El análisis de las secciones anteriores ha sido del tipo "análisis dinámico directo", según se definió en la sección 10.1. Es decir, la fuerza aplicada $[F_c(t)$ en la ecuación 15.2b] se supone conocida, y la ecuación se resuelve para evaluar el desplazamiento resultante *x* a partir del cual también se pueden determinar sus derivadas. Los problemas de análisis de fuerzas en sistemas de leva-seguidor, así como los de análisis de eslabonamientos, permiten convenientemente la solución por el enfoque dinámico inverso, o cinetostático. Aquí el desplazamiento y sus derivadas están definidos a partir del diseño cinemático de la leva con base en una velocidad angular supuesta ω de la leva, y se desea evaluar la fuerza $F_c(t)$. La ecuación 15.2b se resuelve directamente para obtener el valor de la fuerza en un sistema de leva y seguidor cargado por resorte, suponiendo que se conocen los valores para la masa m, la constante del resorte *k*, la precarga F_{pl} y el factor de amortiguamiento c, además de las funciones de desplazamiento, velocidad y aceleración.

El diseñador tiene un elevado grado de control sobre la constante de resorte del sistema k_{eff}, ya que tiende a ser dominada por la k_s de resorte de retorno físico. Las elasticidades de las partes del seguidor también contribuyen a la k_{eff} global del sistema, pero generalmente son mucho más rígidas que el resorte físico. Si la rigidez del seguidor está en serie con el resorte de retorno, como ocurre con frecuencia, la ecuación 10.17c muestra que el resorte menos rígido en serie dominará la constante de resorte efectiva. Así, dicho resorte determinará virtualmente la *k* global a menos que algunas partes del tren de seguidor tengan, de manera similar, baja rigidez.

El diseñador elegirá el resorte de retorno y, por lo tanto, puede especificar tanto *k* como la cantidad de precarga que se introducirá en el ensamble. La precarga de un resorte ocurre cuando es comprimido (o estirado, si se trata de un resorte de extensión) a partir de su *longitud libre* hasta su longitud ensamblada inicial. Ésta es una situación necesaria y conveniente cuando se desea alguna fuerza residual en el seguidor, aun cuando la leva esté en su desplazamiento más bajo. Lo anterior ayudará a mantener un buen contacto entre la leva y el seguidor en todo tiempo. Esta precarga de resorte F_{pl} agrega un término constante a la ecuación 15.2b que será:

$$F_c(t) = m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + F_{pl} \tag{15.9}$$

El valor de *m* se determina a partir de la masa efectiva del sistema, concentrada en el modelo de un *GDL* de la figura 15-1. El valor de c para la mayor parte de los sistemas de leva-seguidor puede estimarse como una primera aproximación que es de 0.05 a 0.15 de la c_c de amortiguamiento crítico, como se definió en la ecuación 15.2i. Koster[1,1] encontró que un valor común para la relación de amortiguamiento en sistemas de leva-seguidor es $\zeta = 0.06$.

Calcular la amortiguación *c* con base en un valor supuesto de ζ requiere especificar un valor para la *k* global del sistema y para el valor de la precarga. La elección de *k* afectará tanto la frecuencia natural del sistema para una masa dada, como la fuerza disponible para mantener cerrada la junta. Probablemente será necesaria alguna iteración para llegar a un buen arreglo. En el apéndice D se presenta una selección de datos para resortes helicoidales disponibles comercialmente. Observe en la ecuación 15.9 que los términos que implican aceleración y velocidad pueden ser positivos o negativos. Los

términos en los que intervienen los parámetros del resorte k y F_{pi} son los únicos que siempre son positivos. Así, para conservar la función global siempre positiva, se requiere que los términos de fuerza de resorte sean lo bastante grandes para contrarrestar cualquier valor negativo en los otros términos. Por lo general, la aceleración es numéricamente mayor que la velocidad, así que la aceleración negativa es normalmente la causa principal de un valor negativo en la fuerza F_c.

El principal interés en este análisis es conservar la fuerza de leva siempre con signo positivo, ya que su dirección está definida en la figura 15-1. La fuerza de la leva se indica como positiva en esa figura. En un sistema con cierre de fuerza la leva sólo puede empujar sobre el seguidor, y no puede ejercer tracción. El resorte del seguidor proporciona la fuerza necesaria para mantener el contacto estrecho con la leva durante los lapsos de aceleración negativa del movimiento del seguidor. La fuerza de amortiguamiento también puede contribuir, pero el resorte debe proporcionar la mayor parte de la fuerza para mantener el contacto entre la leva y el seguidor. Si la fuerza F_c es negativa en cualquier momento del ciclo, el seguidor y la leva se separarán, a esta condición se le llama **salto de seguidor.** Cuando se toquen de nuevo será con fuerzas de impacto muy intensas y potencialmente destructivas. El salto del seguidor, si lo hay, ocurrirá cerca del punto de máxima aceleración negativa. Por lo tanto, se debe seleccionar la constante de resorte y la precarga para garantizar una fuerza positiva en todos los puntos del ciclo. En el caso de las levas para las válvulas de un motor de automóvil, el salto de seguidor se llama también *flotación de válvula,* debido a que esta pieza (el seguidor) "flota" por encima de la leva, y choca periódicamente contra la superficie de su leva; esto ocurrirá si la velocidad angular en rpm de la leva aumenta hasta el punto en que la mayor aceleración negativa hace también negativa la fuerza del seguidor. El valor crítico de la velocidad de rotación máxima del motor, con frecuencia indicada en su tacómetro con "línea roja", señala la inminente flotación de válvulas cuando se rebase dicha velocidad, lo que dañará la leva y el seguidor.

El programa DYNACAM permite que la iteración de la ecuación 15.9 se realice rápida y fácilmente para cualquier leva cuya cinemática se haya definido en ese programa. La selección del menú principal *Dynamics* resolverá la ecuación 15.9 para todos los valores del ángulo del árbol de levas, mediante las funciones de desplazamiento, velocidad y aceleración previamente calculadas en el programa para ese diseño de leva. El programa requiere los valores deseados para la masa efectiva del sistema *m,* constante efectiva de resorte *k,* precarga F_{pi} y el valor supuesto de la relación de amortiguamiento ζ. El diseñador debe determinar estos valores para el modelo mediante los métodos descritos en las secciones 10.9 y 10.10. La fuerza calculada en la interfaz de leva y seguidor se puede entonces calcular y granear, o imprimir sus valores en forma tabular. La frecuencia natural del sistema también se indica cuando se imprimen los datos de fuerza tabulares.

EJEMPLO 15-1

Análisis de fuerza cinetostática de un sistema de leva-seguidor con cierre de fuerza (resorte cargado).

Datos: Un seguidor de rodillo con traslación, como el mostrado en la figura 15-1, es

impulsado por una leva de disco radial con cierre de fuerza que tiene el siguiente programa:

Segmento 1: Subida de 1 pulg en 50° con aceleración senoidal modificada
Segmento 2: Paro en 40°
Segmento 3: Bajada de 1 pulg en 50° con desplazamiento cicloidal
Segmento 4: Paro en 40°
Segmento 5: Subida de 1 pulg en 50° con desplazamiento polinomial 3-4-5
Segmento 6: Paro en 40°
Segmento 7: Bajada de 1 pulg en 50° con desplazamiento polinomial 4-5-6-7
Segmento 8: Paro en 40°
Velocidad angular del árbol de levas, 18.85 rad/s.
Masa efectiva del seguidor, 0.0738 pulg-lb-s² (blobs).
El amortiguamiento crítico es de 15% ($\zeta = 0.15$).

Problema: Calcule la constante de resorte y la precarga del resorte necesarias para mantener el contacto entre la leva y el seguidor, y calcule la función de fuerza dinámica para la leva. Determine la frecuencia natural del sistema con el resorte seleccionado. Mantenga el ángulo de presión menor de 30°.

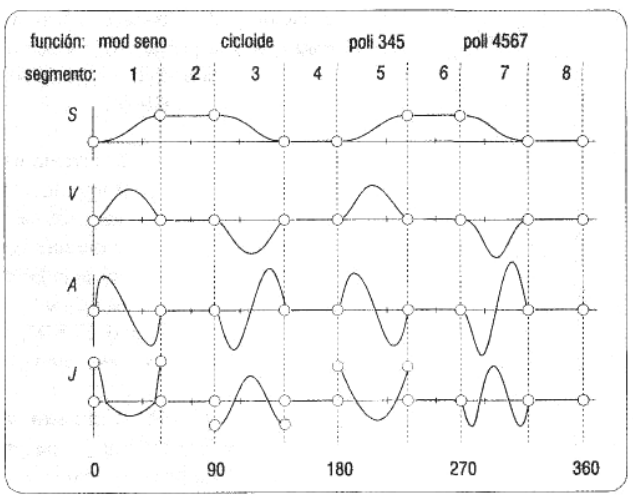
Solución:

1 Calcule los datos cinemáticos (desplazamiento del seguidor, velocidad, aceleración y rapidez de aceleración) para las funciones de leva especificadas. La aceleración para esta leva se muestra en la figura 15-7, y tiene un valor máximo de 3 504 pulg/s^2. Véase el capítulo 8 para un repaso de este procedimiento.

2 Calcule el ángulo de presión y el radio de curvatura para valores de prueba del radio del círculo principal, y ajuste la leva para controlar esos valores. En la figura 15-8 se muestra la

Número de segmento	Función usada	Ángulo de inicio	Ángulo de terminación	Ángulo Delta
1	Subida en Modseno	0	50	50
2	Paro	50	90	40
3	Bajada cicloidal	90	140	50
4	Paro	140	180	40
5	Subida en el poli 345	180	230	50
6	Paro	230	270	40
7	Bajada en el poli 4567	270	320	50
8	Paro	320	360	40

a) Especificaciones para el programa de levas



b) Trazos de los diagramas *S V A J* del sistema de leva-seguidor

FIGURA 15-7
Diagramas *SV A J* para los ejemplos 15-1 y 15-2

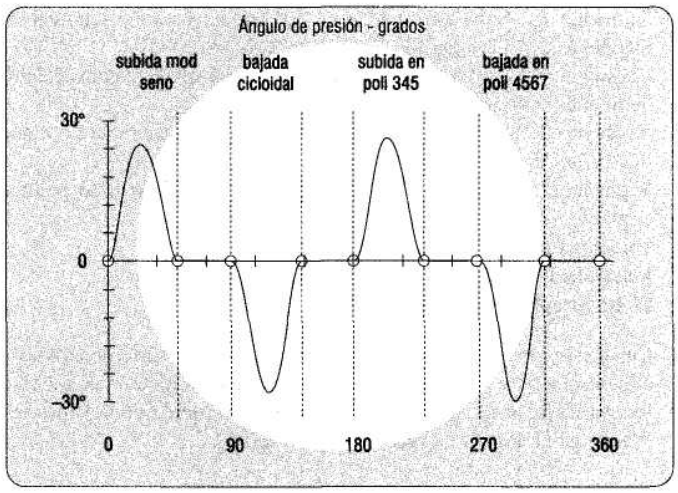


FIGURA 15-8
Trazo del ángulo de presión para los ejemplos 15-1 y 15-2

función de ángulo de presión, y en la figura 15-9 los radios de curvatura para esta leva, con un radio de círculo principal de 4, y excentricidad cero. El ángulo de presión máximo es de 29.2° y el radio mínimo de curvatura es de 1.7 pulg. En la figura 8-47 se muestra el perfil de la leva terminado. Véase el capítulo 8 para un repaso de estos cálculos.

3 Con la cinemática de la leva ya definida se puede considerar su dinámica. Para resolver la ecuación 15.9 y evaluar la fuerza en la leva, deben suponerse valores para la constante del resorte k y la precarga F_{pl}. Los valores de c pueden calcularse a partir de la ecuación 15.3a usando la masa dada m, el factor de amortiguamiento ζ y la k supuesta. Se conocen los parámetros cinemáticos.

4 El programa DYNACAM efectúa estos cálculos por usted. La fuerza dinámica que resulta de una k supuesta de 150 lb/pulg y una precarga de 75 lb se muestra en la figura 15-10a). El coeficiente de amortiguamiento es de c = 0.998. Observe que la fuerza se sumerge debajo del eje cero en dos lugares durante la aceleración negativa. Éstos son las localizaciones de salto del seguidor. El seguidor deja la leva durante la bajada debido a que el resorte no dispone de la fuerza suficiente para mantener al seguidor en contacto con una leva que desciende rápida mente. Abra el archivo E15-01.cam del programa DYNACAM y proporcione la k y la F_{pl} especificadas para ver este ejemplo. Es necesaria otra iteración para mejorar el diseño.

5 En la figura 15-10b) se muestra la fuerza dinámica para la misma leva con una constante de resorte k = 200 lb/pulg y una precarga de 150 Ib. El coeficiente de amortiguamiento es c - 1.153. Esta fuerza adicional ha levantado la función lo suficiente para mantener la positiva en cualquier parte. En este caso no hay salto de seguidor. La fuerza máxima durante el ciclo es de 400.4 Ib. Se ha proporcionado un margen de seguridad al mantener la fuerza mínima cómodamente por arriba de la línea cero en 36.9 Ib. Corra el ejemplo núm. 5 en el programa y proporcione los valores especificados de la constante de resorte y de la precarga para ver este ejemplo.

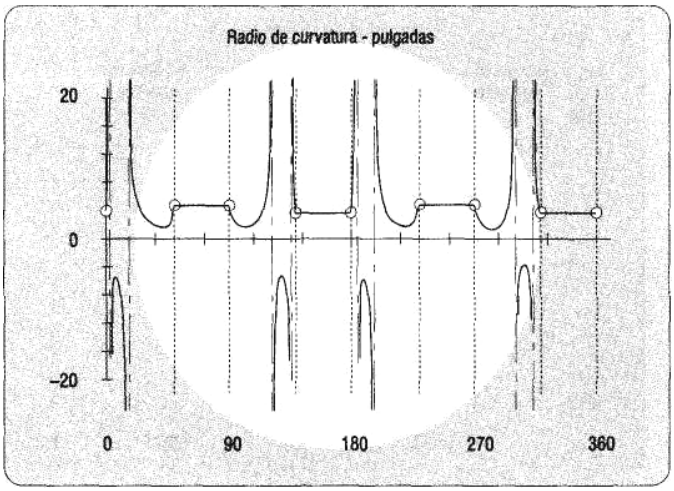


FIGURA 15-9

Radio de curvatura de una leva con cuatro detenimientos para los ejemplos 15-1 y 15-2

6 La frecuencia natural fundamental, tanto subamortiguada como amortiguada, se calcula para el sistema a partir de las ecuaciones 15.Id y 15.3c y son:

$$\omega_n = 52.06 \text{ rad/s}; \qquad \omega_d = 51.98 \text{ rad/s}$$

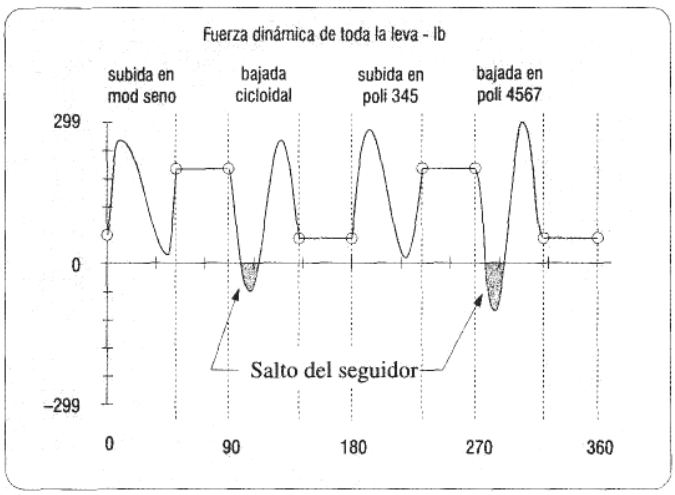
15.4 ANÁLISIS DE FUERZA CINETOSTATICA DE LA FORMA CERRADA DE UNA LEVA-SEGUIDOR CON CIERRE DE FORMA

En la sección 8.1 se describieron dos tipos de cierre de junta empleados en sistemas de leva-seguidor, **cierre de fuerza y cierre de forma.** El cierre de fuerza usa una junta abierta y requiere un resorte o alguna otra fuente de fuerza para mantener el contacto entre los elementos del mecanismo. El cierre de forma proporciona una restricción geométrica en la junta, tal como la ranura de leva que se muestra en la figura 15-l1a) o las levas conjugadas de la figura 15-11*b).* No es necesario ningún resorte para mantener el seguidor en contacto con estas levas. El seguidor correrá de un lado a otro de la ranura o par conjugado como sea necesario para proporcionar fuerzas positivas y negativas. Ya que no hay resorte alguno en el sistema, su ecuación 15.9 de fuerza dinámica se simplifica a:

$$F_c(t) = m\ddot{x} + c\dot{x} \tag{15.10}$$

Observe que ahora sólo hay un elemento almacenador de energía en el sistema (la masa), así, teóricamente no es posible la resonancia. Tampoco hay frecuencia natural para que eso ocurra. Ésta es la ventaja principal de un sistema con cierre de forma sobre uno con cierre de fuerza. No ocurrirá el salto de seguidor, ni tampoco la falla completa de las partes, no importa qué tan rápido esté operando el sistema. Este mecanismo se utiliza

a) La fuerza insuficiente en el resorte permite un salto del seguidor



b) La fuerza suficiente en el resorte mantiene positiva la fuerza dinámica

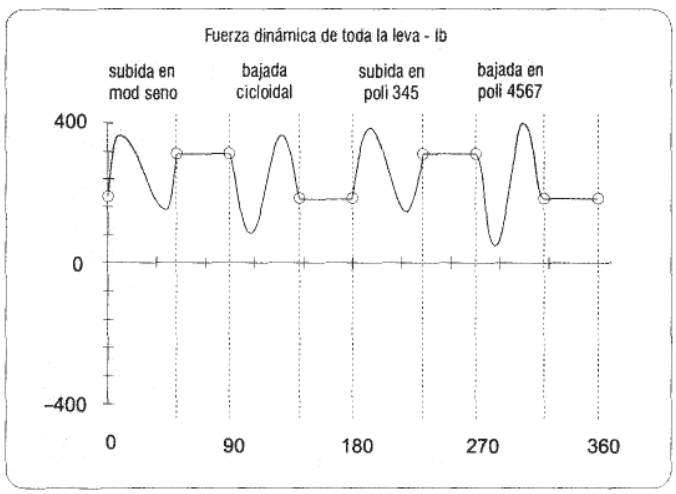
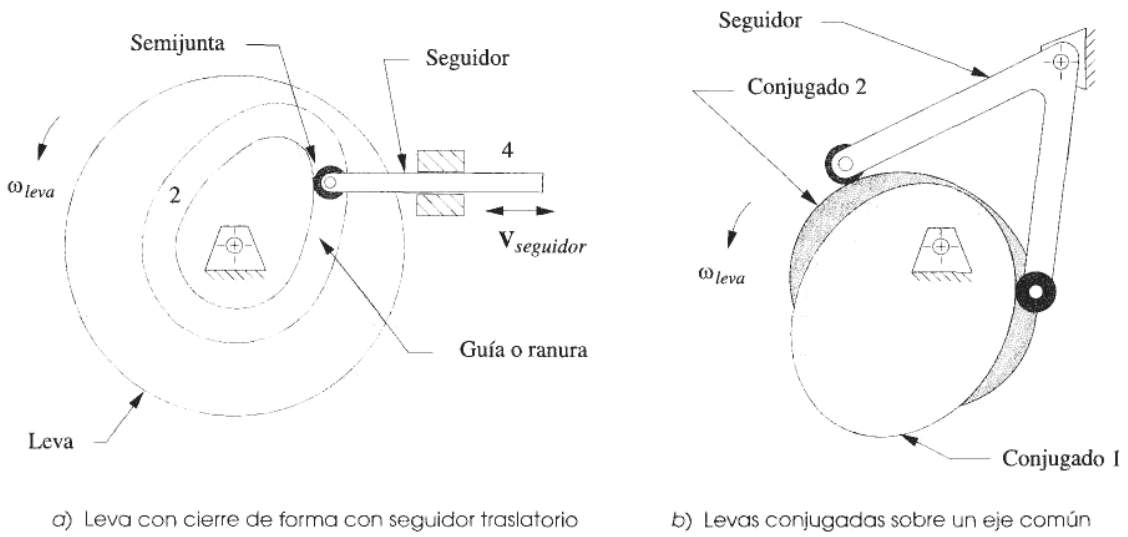


FIGURA 15-10

Fuerzas dinámicas en un sistema de leva-seguidor con cierre de fuerza

algunas veces en trenes de válvulas para motores de autos de carreras o de alto rendimiento para permitir mayores velocidades críticas del motor sin que ocurra flotación de válvulas. En los trenes de válvulas de motor el mecanismo de leva-seguidor con cierre de forma se denomina sistema *desmodrómico.*

Como sucede con cualquier diseño, hay transacciones. En tanto que el sistema con cierre de forma comúnmente permite velocidades de operación más altas que un sistema con cierre de fuerza comparable, no está libre de todos los problemas de vibración. Aunque en el sistema no hay un resorte físico de retorno, el tren de seguidor, el árbol de levas y todas las otras partes tienen aún sus propias constantes de resorte, las cuales se combinan para constituir una constante efectiva global de resorte para el sistema como



a) Leva con cierre de forma con seguidor traslatorio

b) Levas conjugadas sobre un eje común

FIGURA 15-11
Sistemas de leva-seguidor con cierre de forma

se muestra en la sección 15.2. Lo positivo es que tal constante de resorte comúnmente será de muy alto valor (rigidez), ya que partes del seguidor apropiadamente diseñadas han de ser rígidas. Entonces la frecuencia natural efectiva será alta (véase la ecuación 15.1d) y posiblemente muy superior a la frecuencia forzada que se desea.

Otro problema de las levas con cierre de forma, especialmente del tipo de ranura o de pista que se ilustra en la figura 15-11a), es el fenómeno de **choque transversal.** Cada vez que la aceleración del seguidor cambia de signo, también lo hace la fuerza inercial. Esto provoca que el seguidor se desplace bruscamente desde un lado de la ranura de la leva al otro. No puede haber holgura o espacio libre cero entre el seguidor de rodillo y la ranura ya que el sistema no funcionaría. Aun si dicho espacio es muy pequeño todavía habrá oportunidad para que el seguidor desarrolle cierta velocidad en su movimiento a través de la ranura y pueden ocurrir impactos contra los lados. Las levas de pista del tipo que se ilustran en la figura 15-11a) generalmente fallan en los puntos donde la aceleración cambia de signo, debido a los numerosos ciclos de impacto transversal. Observe también que el seguidor de rodillo tiene que invertir su dirección cada vez que cruza de un lado a otro de la ranura. Esto causa un deslizamiento significativo y gran desgaste en el seguidor, en comparación con una leva abierta con cierre de fuerza donde el seguidor tendrá menos de 1% de deslizamiento.

Ya que hay dos superficies de leva para maquinar y debido a que la pista, o ranura de la leva, debe ser cortada y rectificada con gran precisión para controlar la holgura, la producción de levas con cierre de forma tiende a ser más costosa que la de las levas con cierre de fuerza. Las levas de pista por lo común deben ser rectificadas después del tratamiento térmico para corregir la distorsión de la ranura resultante de las altas temperaturas. El rectificado con esmeril aumenta el costo significativamente. Muchas levas con cierre de fuerza no son rectificadas después del citado tratamiento y se usan sin él.

Aunque el dispositivo de las levas conjugadas evita la tolerancia de la ranura y los problemas de distorsión por tratamiento térmico hay aún dos superficies de leva que se deben acoplar por leva. Por tanto, las ventajas dinámicas de la leva desmodrómica tienen un precio muy alto.

Ahora se repetirá el ejemplo del diseño de leva del ejemplo 15-1, modificado para operación desmodrónica. Esto se puede realizar fácilmente con el programa DYNACAM. Simplemente se especificará que la constante del resorte y la precarga son iguales a cero, lo cual hace suponer que el tren del seguidor es un cuerpo rígido. Se puede obtener un resultado más preciso al calcular y usar la constante de resorte efectiva de la combinación de partes en el tren del seguidor, una vez que se han definido sus materiales y geometrías. Las fuerzas dinámicas ahora serán negativas así como positivas, pero una leva con cierre de forma puede tanto empujar como jalar.

EJEMPLO 15-2

Análisis de fuerza dinámica de un sistema de leva-seguidor con cierre de forma (desmodrómico).

Datos: Un seguidor de rodillo traslatorio como se muestra en la figura 15-1 la) es impulsado por una leva de disco radial con cierre de forma que tienen el siguiente programa:

Segmento 1: Subida de 1 pulg en 50° con aceleración senoidal modificada
Segmento 2: Paro en 40°
Segmento 3: Bajada de 1 pulg en 50° con desplazamiento cicloidal
Segmento 4: Paro en 40°
Segmento 5: Subida de 1 pulg en 50° con desplazamiento polinomial 3-4-5
Segmento 6: Paro en 40°
Segmento 7: Bajada de 1 pulg en 50° con desplazamiento polinomial 4-5-6-7
Segmento 8: Paro en 40°
Velocidad angular del eje de levas 18.85 rad/s.
La masa efectiva del seguidor es 0.0738 pulg-lb-s^2 (blobs).
El amortiguamiento crítico es de 15% (£ = **0.15).**

Problema: Calcule la función de fuerza dinámica para la leva. Mantenga el ángulo de presión menor que 30°.

Solución:

1 Calcule los datos cinemáticos (desplazamiento del seguidor, velocidad, aceleración y rapidez de aceleración) para las funciones de leva especificadas. La aceleración para esta leva se muestra en la figura 15-7 y tiene un valor máximo de 3 504 pulg/s^2. Véase el capítulo 8 para repasar este procedimiento.

2 Calcule el radio de curvatura y el ángulo de presión para valores de prueba del radio del círculo principal, y ajuste la leva para controlar estos valores. En la figura 15-8 se muestra la función ángulo de presión y en la figura 15-9 se muestran los radios de curvatura para esta leva con un radio del círculo principal de cuatro pulg y excentricidad cero. El ángulo de

presión máximo es de 29.2° y el radio de curvatura mínimo de 1.7 pulg. En la figura 8-47 se muestra el perfil de la leva terminada. Véase el capítulo 8 para repasar estos cálculos.

3 Con la cinemática de la leva definida se puede considerar su dinámica. En la resolución de la ecuación 15.10a para evaluar la fuerza de la leva, se suponen valores de cero para la constante de resorte *k* y la precarga F_{pl}. Se supone que el valor de *c* es el mismo que el del ejemplo anterior, 1.153. Se conocen los parámetros cinemáticos.

4 El programa DYNACAM realiza el cálculo. En la figura 15-12 se muestra la fuerza dinámica resultante. Observe que la fuerza es ahora casi simétrica con respecto al eje y su valor pico absoluto es 289 Ib. Se presentará choque transversal cada vez que la fuerza sobre el seguidor cambie de signo. Abra el archivo E15-02.cam en el programa DYNACAM para ver este ejemplo.

Compare las gráficas de fuerza dinámica para el sistema con cierre de fuerza (figura 15-10¿>)) y el sistema con cierre de forma (figura 15-12). La magnitud pico absoluta de la fuerza de la guía en la leva con cierre de forma es menor que la de un resorte cargado. Esto muestra el efecto del resorte sobre el sistema para mantener cerrada la junta. Por lo tanto, en cualquier lado de la ranura de la leva se experimentarán menores esfuerzos que con una leva abierta, excepto para las áreas de choque transversal antes mencionadas.

15.5 PAR DE TORSIÓN DEL ÁRBOL DE LEVAS

El análisis cinetostático supone que el árbol de levas funcionará a cierta velocidad constante ω. Como se observó en el caso del eslabonamiento de cuatro barras, del capítulo 11, y en el mecanismo de manivela-corredera del capítulo 13, el par de torsión de entrada

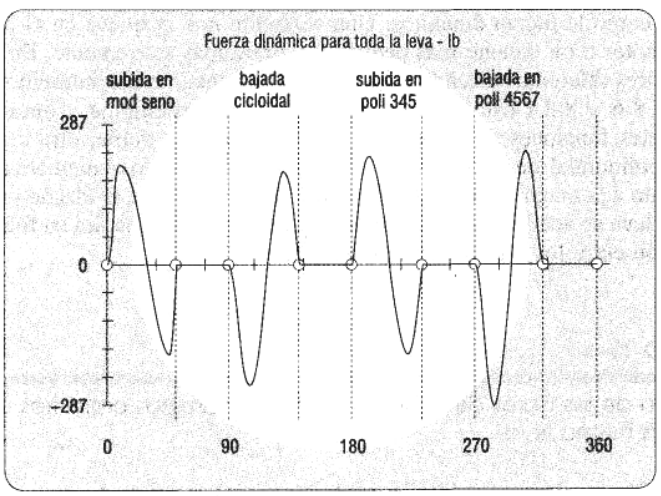


FIGURA 15-12
Fuerza dinámica en un sistema de leva-seguidor con cierre de forma

debe variar en el ciclo si la velocidad del eje permanece constante. El par de torsión se puede calcular fácilmente a partir de la relación de potencia, sin tomar en cuenta las pérdidas.

$$\text{Potencia de entrada} = \text{Potencia de salida}$$

$$T_c\omega = F_c v \tag{15.11}$$

$$T_c = \frac{F_c v}{\omega}$$

Una vez que se ha calculado la fuerza sobre la leva, a partir de la ecuación 15.9 o 15.10, el par de torsión del árbol de levas T_c se determina fácilmente, ya que se conocen la velocidad en el seguidor v y en el árbol de levas ω. En la figura 15-13a) se muestra el par de torsión de entrada requerido por el árbol de levas para impulsar la leva con cierre de fuerza que se diseñó en el ejemplo 15-1. En la figura 15-13b) se muestra el par de torsión de entrada del árbol de levas necesario para impulsar la leva con cierre de forma diseñada en el ejemplo 15-2. Observe que el par de torsión que se requiere para impulsar el sistema con cierre de fuerza (resorte cargado) es significativamente mayor que el requerido para impulsar la leva con cierre de forma (guía). La fuerza sobre el resorte también tiene un efecto, ya que la energía se debe almacenar en el resorte durante las partes de elevación que tenderán a desacelerar el árbol de levas. Esta energía almacenada es entonces regresada al árbol de levas durante las partes de bajada, que tienden a acelerarlo. La carga sobre el resorte causa grandes oscilaciones en el par de torsión.

Para suavizar esas variaciones en el par de torsión, se puede dimensionar y ajustar un volante al árbol de levas, justo como se hizo para el eslabonamiento de cuatro barras en la sección 11.11. Véase esa sección para el procedimiento de diseño. El programa DYNACAM integra, pulso por pulso, la función del par de torsión del árbol de levas, y muestra esas áreas en la pantalla. Esos datos de energía se pueden usar para calcular el tamaño del volante requerido para cualquier coeficiente de fluctuación seleccionado.

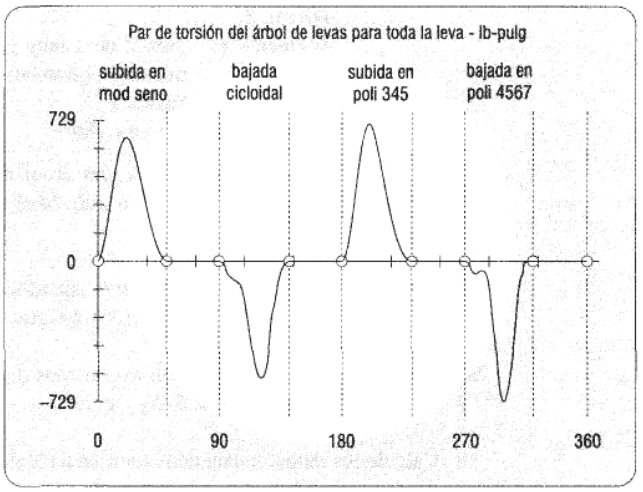
Una forma útil de comparar diseños alternos de levas es observar la función del par de torsión así como la fuerza dinámica. Una variación más pequeña en el par de torsión requerirá un motor o un volante más pequeño y girará más suavemente. En el capítulo 8 se exploraron tres diferentes diseños para una leva con un solo detenimiento. (Véanse los ejemplos 8-5, 8-6 y 8-8.) Estos ejemplos tenían el mismo empuje y duración, pero se usaron diferentes funciones de levas; una era una armónica doble, otra cicloidal y una más era una polinomial de sexto grado. Con base en resultados cinemáticos, principalmente en cuanto a la magnitud de la aceleración, se encontró que el diseño polinomial era superior. Esta leva se analizará otra vez como ejemplo y se comparará su fuerza dinámica y par de torsión entre los mismos tres programas.

EJEMPLO 15-3

Comparación de los pares de torsión y fuerzas dinámicas entre tres diseños alternos de la misma leva.

Datos: Un seguidor de rodillo en traslación, como el mostrado en la figura 15-1, se impulsa mediante una leva de disco radial con cierre de fuerza que tiene el siguiente programa:

a) Leva-seguidor con cierre de fuerza (resorte cargado)



(b) Leva-seguidor con cierre de forma (desmodrómico)

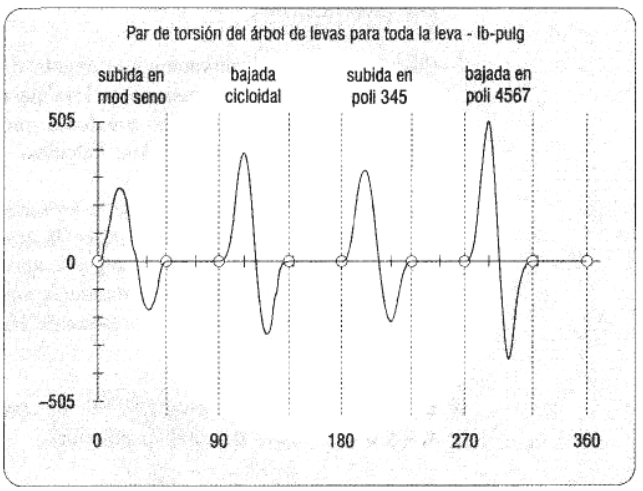


FIGURA 15-13

Par de torsión de entrada en sistemas de leva-seguidor con cierre de fuerza y de forma

Diseño 1

Segmento 1: Subida de 1 pulg en 90° con desplazamiento armónico doble
Segmento 2: Bajada de 1 pulg en 90° con desplazamiento armónico doble
Segmento 3: Paro en 180°

Diseño 2

Segmento 1: Subida de 1 pulg en 90° con desplazamiento cicloidal
Segmento 2: Bajada de 1 pulg en 90° con desplazamiento cicloidal
Segmento 3: Paro en 180°

Diseño 3

Segmento 1: Subida de 1 pulg en 90° y bajada de 1 pulg en 90° con desplazamiento polinomial. (Un solo polinomial puede crear la subida y la bajada.)

Segmento 2: Paro en 180°

La velocidad angular del árbol de levas es de 15 rad/s. La masa efectiva del seguidor es de 0.0738 pulg-lb-s^2 (blobs). El amortiguamiento crítico es de 15% **($\zeta = 0.15$).**

Hallar: Las funciones de fuerza dinámica y par de torsión para la leva. Compare sus magnitudes pico para los mismos radios de círculo principales:

Solución: Note que éstos son los mismos diseños cinemáticos de levas que se mostraron en la figura 8-24, 8-23 y 8-29.

1 Calcule los datos cinemáticos (desplazamiento del seguidor, velocidad, aceleración y rapidez de la aceleración) para cada diseño de leva especificado. Véase el capítulo 8 para un repaso de este procedimiento.

2 Calcule el radio de curvatura y el ángulo de presión para valores de ensayo del radio del círculo principal y dimensione la leva para controlar esos valores. Un radio de 3 pulg del círculo principal resulta en ángulos de presión y radios de curvatura aceptables. Véase el capítulo 8 para un repaso de estos cálculos.

3 Una vez definida la cinemática de la leva, ahora se puede realizar su parte dinámica. Para el cálculo de la fuerza sobre la leva, en la ecuación 15.1a, se supondrá que la constante del resorte k tiene un valor de 50 lb/pulg y se ajustará la precarga F_{pi} para cada uno de los diseños con el fin de obtener una fuerza dinámica mínima de alrededor de 10 libras. Para el diseño 1 esto requiere una precarga en el resorte de 28 Ib; para el diseño 2 de 15 Ib y para el diseño 3 de 10 Ib.

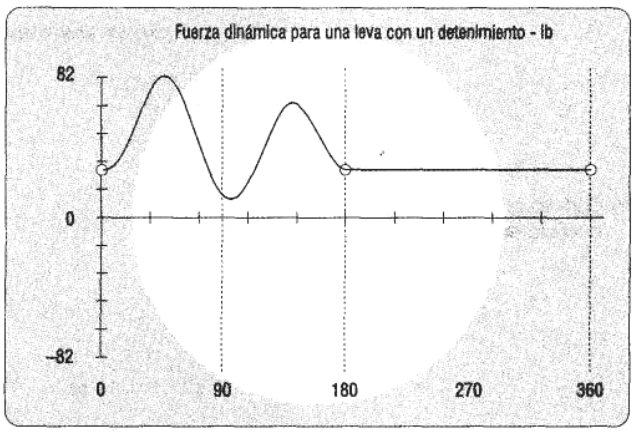
4 El valor de amortiguamiento c se calcula con la ecuación 15.2i. Los parámetros cinemáticos x, v y a se conocen del análisis anterior.

5 Esos cálculos se realizan con el programa DYNACAM. Las fuerzas dinámicas resultantes de cada diseño se muestran en la figura 15-14 y los pares de torsión en la figura 15-15. Observe que la máxima fuerza se presenta en el diseño 1, 82 libras pico, y la mínima en el diseño 3 (53 libras pico). Los mismos niveles se cumplen para los pares de torsión que van de 96 lb-pulg para el diseño 1, a 52 lb-pulg para el diseño 3. Éstos representan reducciones de 35 y 46% en la carga dinámica debido a un cambio en el diseño cinemático. No es sorprendente que el diseño polinomial de sexto grado, que presenta la más baja aceleración, tenga también las fuerzas y pares de torsión más bajos y es por tanto la mejor opción. Introduzca los archivos E08-05.cam, E08-06.cam y E08-08.cam en el programa DYNACAM para ver estos resultados.

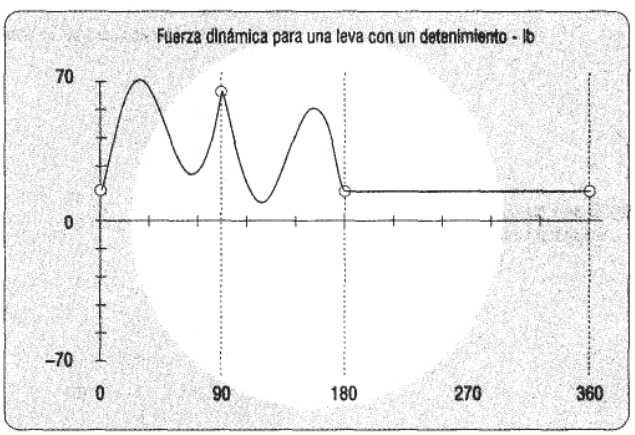
15.6 MEDICIÓN DE FUERZAS DINÁMICAS Y ACELERACIONES

Como se describió en secciones anteriores, los sistemas de leva-seguidor tienden a ser subamortiguados. Esto permite que se presenten oscilaciones y vibraciones importantes

a) Subida armónica doble - bajada armónica doble



b) Subida cicloidal - bajada cicloidal



c) Polinominal de sexto grado

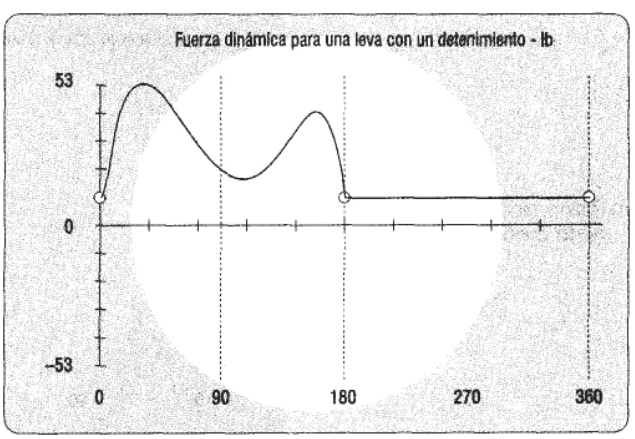
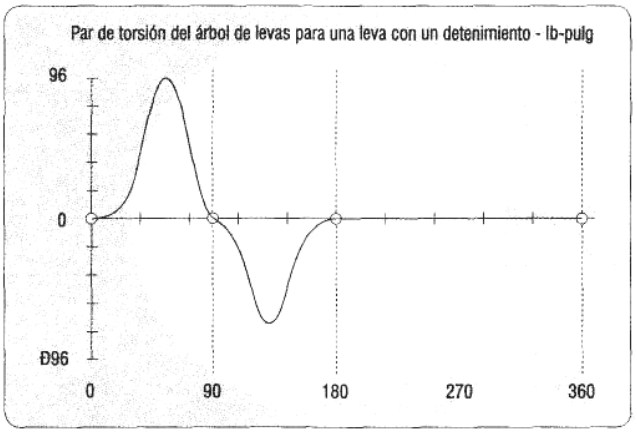


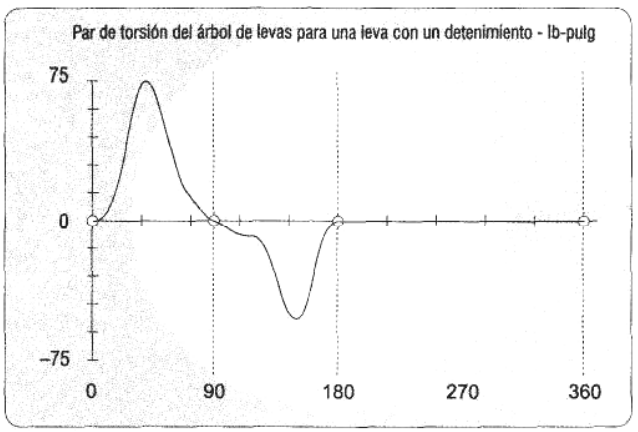
FIGURA 15-14

Fuerzas dinámicas en tres diseños diferentes de una leva con un detenimiento

(a) Subida armónica doble - bajada armónica doble



b) Bajada cicloidal - bajada cicloidal



c) Polinominal de sexto grado

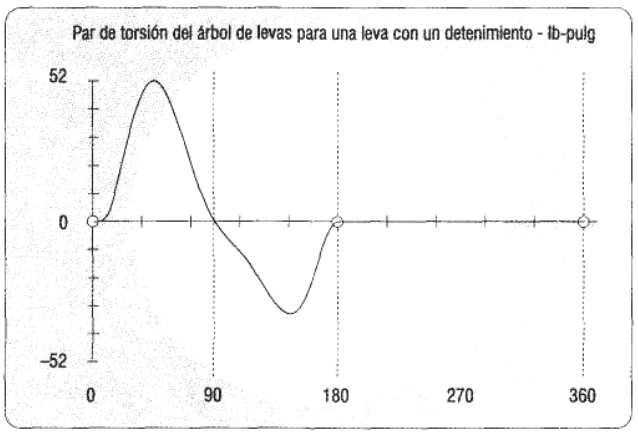


FIGURA 15-15

Par de torsión dinámico de entrada en tres diseños diferentes de una leva con un detenimiento

en el tren seguidor. En la sección 8.8 se analizaron los efectos de los errores de fabricación sobre aceleraciones reales de sistemas leva-seguidor y se mostraron las mediciones dinámicas de aceleración. Las fuerzas dinámicas y las aceleraciones se pueden medir fácilmente en maquinaria en operación. Se dispone de transductores compactos, piezoeléctricos de fuerza y aceleración, que tienen rangos de respuesta a la frecuencia de miles de hertz. Los medidores de deformación unitaria proporcionan mediciones de deformación unitaria que son proporcionales a la fuerza y tienen anchos de banda de un kilohertz o mejores.

En la figura 15-16 se muestran curvas de aceleración y fuerza, medidas en el tren seguidor de un árbol de levas sencillo superior (ALSS) para un tren de válvulas de un motor con cuatro cilindros en línea, de 1.8 litros.[121] El motor sin encender fue impulsado por un motor eléctrico sobre un dinamómetro. El árbol de levas gira a 500, 2 000 y 3 000 rpm (1 000, 4 000 y 6 000 rpm del cigüeñal), respectivamente, sus gráficas se muestran en las figuras 15-6*a*), *b)* y *c).* La aceleración se midió con un acelerómetro piezoeléctrico unido al cabezal de una válvula de entrada, y la fuerza se calculó de la señal de los medidores de deformación unitaria colocados en el brazo del balancín de la válvula de entrada. La curva de aceleración teórica del seguidor (como se diseñó) está sobrepuesta a la curva de aceleración medida. Todas las mediciones de aceleración se convierten a unidades de mm/grados^2 (es decir, normalizadas a la velocidad del árbol de levas) para poder compararlas entre sí y con la curva de aceleración teórica.

Cuando el árbol de levas registra 500 rpm, la aceleración medida concuerda muy de cerca con la curva de aceleración teórica, con pequeñas oscilaciones debido a la vibración del resorte. Cuando el árbol de levas gira a 2 000 rpm, aparecen oscilaciones importantes en la aceleración medida durante la primera fase positiva y en la fase de aceleración negativa. Esto se debe a que el resorte de la válvula vibra en su frecuencia natural en respuesta a la estimulación provocada por la leva. Esto se denomina "agitación de resorte" y es un factor importante en la falla por fatiga en el resorte de una válvula. A 3 000 rpm del árbol de levas, la oscilación del resorte todavía está presente pero es menos marcada que el porcentaje total de la aceleración. El contenido de la frecuencia de la función forzada de la leva pasa a través de la primera frecuencia natural del resorte de la válvula a casi 2 000 rpm del árbol de levas, provocando que resuene el resorte. Los mismos efectos pueden verse en la fuerza del brazo de balancín. Todo en una máquina tiende a vibrar favorablemente en su propia frecuencia natural cuando se estimula por cualquier función forzada de entrada. Los transductores sensitivos como los acelerómetros recogerán estas vibraciones conforme se transmiten a través de la estructura.

15.7 CONSIDERACIONES PRACTICAS

Koster[1,1] propone algunas reglas generales para el diseño de sistemas de leva-seguidor para una operación a alta velocidad con base en sus modelos y experimentación amplios y dinámicos.

Para minimizar el error posicional y la aceleración residual:

1 Mantenga el levantamiento total del seguidor a un mínimo.

2 Si es posible ordene el resorte del seguidor para precargar todos los pivotes en una dirección consistente para controlar el juego en las juntas.

3 Mantenga la duración de las subidas y bajadas lo más que pueda para minimizar τ.

a) 500 rpm

b) 2 000 rpm

c) 3 000 rpm

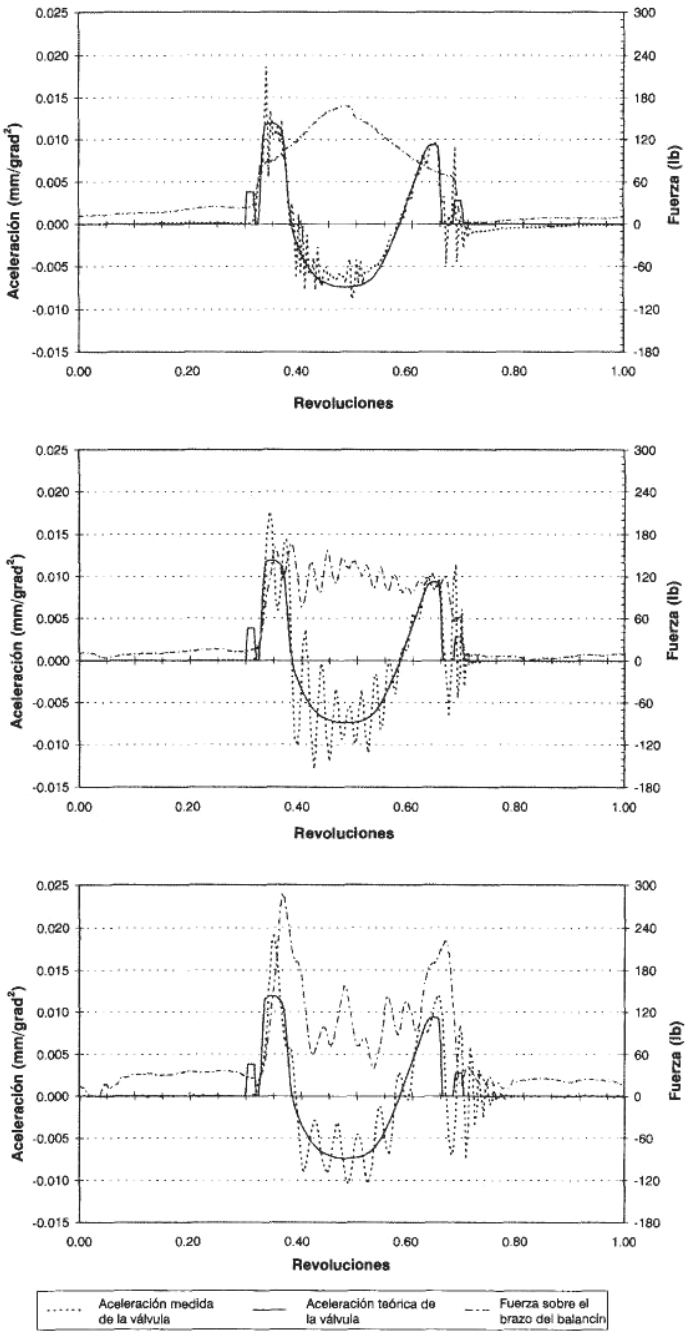


FIGURA 15-16

Aceleración de la válvula y fuerza en el brazo del balancín en un tren de válvulas de levas con un solo árbol

4 Mantenga baja la masa del tren seguidor y la rigidez del tren seguidor alta para incrementar la frecuencia natural.

5 Cualesquiera relaciones de palanca presentes cambiarán la rigidez efectiva del sistema por el cuadrado de la relación. Trate de mantener cercanas a 1 las relaciones de palanca.

6 Haga el árbol de levas lo más rígido posible **en torsión y en flexión.** Éste es probablemente el factor más importante en el control de la vibración del seguidor.

7 Reduzca el ángulo de presión incrementando el diámetro del círculo de paso de la leva.

8 Utilice engranes de juego bajo o de antijuego en el tren impulsor del árbol de levas.

15.8 REFERENCIAS

1 **Koster, M. P.** (1974), *Vibrations of Cam Mechanisms,* Phillips Technical Library Series, Macmillan Press Ltd., Londres.

2 **Norton, R. L. *et al.*** (1998), "Analyzing Vibrations in an IC Engine Valve Train", SAE Paper: 980570.

15.9 BIBLIOGRAFÍA

Barkan, P. y R. V. McGarrity (1965), "A Spring Actuated, Cam-Follower System: Design Theory and Experimental Results", *ASME J. Engineering for Industry* (agosto), pp. 279-286.

Chen, F. Y. (1975), "A Survey of the State of the Art of Cam System Dynamics", *Mechanism and Machine Theory,* 12, pp. 210-224.

Chen, F. Y. (1982), *Mechanics and Design of Cam Mechanisms,* Pergamon Press, Nueva York, p. 520.

Freudenstein, F. (1959), "On the Dynamics of High-Speed Cam Profiles", *Int. J. Mech. Sci.,* 1, pp. 342-349.

Freudenstein, F. *et al.* (1969), "Dynamic Response of Mechanical Systems", IBM, New York Scientific Center, reporte número 320-2967.

Hrones, J. A. (1948), "An Analysis of the Dynamic Forces in a Cam System", *Trans ASME,* 70, pp. 473-482.

Johnson, A. R. (1965), "Motion Control for a Series System of N Degrees of Freedom Using Numerically Derived and Evaluated Equations", *ASME J. Eng. Industry,* pp. 191-204.

Knight, B. A. y H. L. Johnson (1966), "Motion Analysis of Flexible Cam-Follower Systems", ASME Paper: 66-Mech-3.

Matthew, G. K. y D. Tesar (1975), "Cam System Design: The Dynamic Synthesis and Analysis of the One Degree of Freedom Model", *Mechanisms and Machine Theory,* 11, pp. 247-257.

Matthew, G. K. y D. Tesar (1975), "The Design of Modeled Cam Systems Part I: Dynamic Synthesis and Design Chart for the Two-Degree-of-Freedom Model", *Journal of Engineering for Industry* (noviembre), pp. 1175-1180.

Midha, A. y D. A. 1\iric (1980), "On the Periodic Response of Caín Mechanisms with Flexible Follower and Camshaft", *J. Dyn. Sys. Meas. Control*, **102** (diciembre), pp. 225-264.

Rothbart, H. A. (1956), *Cams: Design, Dynamics, and Accuracy*, John Wiley & Sons, Nueva York, p. 350.

15.10 PROBLEMAS

El programa DYNACAM se puede usar para resolver estos problemas donde así se requiera. Trabaje con cualquier sistema de unidades consistente, cuando éstas no hayan sido especificadas. El apéndice D contiene algunas páginas de un catálogo comercial de resortes helicoidales disponibles, como ayuda en el diseño de soluciones reales para estos problemas.

*‡15-1 Diseñe una leva con doble detenimiento para mover un rodillo seguidor de 2 pulg de diámetro y masa = 2.2 bl de 0 a 2.5 pulgadas en 60° con aceleración senoidal modificada, paro a 120°, bajada de 2.5 pulgadas en 30° con movimiento cicloidal y paro en el movimiento restante. El ciclo total se debe realizar en cuatro segundos. Dimensione un resorte de retorno y especifique su precarga para mantener contacto entre la leva y el seguidor. Calcule y trace la fuerza y par de torsión dinámicos. Suponga amortiguamiento crítico de 0.2 veces. Repita el cálculo para una leva con cierre de forma. Compare la fuerza dinámica, par de torsión y frecuencia natural para el diseño con cierre de forma y con cierre de fuerza.

*‡15-2 Diseñe una leva con doble detenimiento para mover un rodillo seguidor de 2 pulg de diámetro y masa = 1.4 bl de 0 a 1.5 pulgadas en 45° con movimiento polinomial 3-4-5, paro a 150°, bajada de 1.5 pulgadas en 90° con movimiento polinomial 4-5-6-7 y paro en el movimiento restante. El ciclo total se debe realizar en seis segundos. Dimensione un resorte de retorno y especifique su precarga para mantener contacto entre la leva y el seguidor. Calcule y trace la fuerza y par de torsión dinámicos. Suponga amortiguamiento crítico de 0.1 veces. Repita el cálculo para una leva con cierre de forma. Compare la fuerza dinámica, par de torsión y frecuencia natural para el diseño con cierre de forma y con cierre de fuerza.

*‡15-3 Diseñe una leva con un solo detenimiento para mover un rodillo seguidor de 2 pulg de diámetro y masa = 3.2 bl de 0 a 2 pulgadas en 60°, bajada de 2 pulgadas en 90° y paro en el movimiento restante. El ciclo total se debe realizar en 5 segundos. Use un polinomio de séptimo grado. Dimensione un resorte de retorno y especifique su precarga para mantener contacto entre la leva y el seguidor. Calcule y trace la fuerza dinámica y par de torsión. Suponga amortiguamiento de 0.15 veces el crítico. Repita el cálculo para una leva con cierre de forma. Compare la fuerza dinámica, par de torsión y frecuencia natural para el diseño con cierre de forma y con cierre de fuerza.

*‡15-4 Diseñe una leva de triple detenimiento para mover un rodillo seguidor de 2 pulg de diámetro y masa = 0.4 bl de 0 a 2.5 pulgadas en 40°, paro a 100°, bajada de 1.5 pulgadas en 90°, paro a 20°, bajada de una pulgada en 30° y paro en el movimiento restante. El ciclo total se debe realizar en 10 segundos. Elija programas adecuados para la subida y bajada para minimizar fuerzas dinámicas y pares de torsión. Dimensione un resorte de retorno y especifique su precarga para mantener contacto entre la leva y el seguidor. Calcule y trace la fuerza dinámica y el par de torsión. Suponga amortiguamiento de 0.12 veces el crítico. Repita el cálculo para una leva con cierre de

* Respuestas en el apéndice F.

‡ Estos problemas son adecuados para resolverse usando el programa DYNACAM que se incluye en el CD-ROM.

forma. Compare la fuerza dinámica, par de torsión y frecuencia natural para el diseño con cierre de forma y con cierre de fuerza.

*‡15-5 Diseñe una leva con cuatro detenimientos para mover un rodillo seguidor de 2 pulg de diámetro y masa = 1.25 bl de 0 a 2.5 pulgadas en 40°, paro a 100°, bajada de 1.5 pulgadas en 90°, paro a 20°, bajada de 0.5 en 30°, paro a 40°, bajada de 0.5 pulgadas en 30° y paro en el movimiento restante. El ciclo total se debe realizar en 15 segundos. Elija programas adecuados para la subida y bajada con el fin de minimizar fuerzas dinámicas y pares de torsión. Dimensione un resorte de retorno y especifique su precarga para mantener contacto entre la leva y el seguidor. Calcule y trace la fuerza dinámica y el par de torsión. Suponga amortiguamiento de 0.18 veces el crítico. Repita el cálculo para una leva con cierre de forma. Compare la fuerza dinámica, par de torsión y frecuencia natural para el diseño con cierre de forma y con cierre de fuerza cerrada.

*†15-6 Un sistema amortiguador de masa-resorte, como el mostrado en la figura 15-1¿>) tiene los valores indicados en la tabla P15-1. Encuentre las frecuencias naturales amortiguadas y no amortiguadas y el valor de amortiguamiento crítico para los sistemas asignados.

†15-7 En la figura P15-1 se muestra un sistema de leva-seguidor. También se indican las dimensiones del brazo de aluminio sólido y rectangular con sección transversal de 2 X 2.5 pulg. En el corte de la sección A-A se muestra el rodillo seguidor de acero de 2 pulgadas de diámetro, 1.5 pulgadas de ancho y 3 pulgadas de longitud. Encuentre la masa del brazo, la ubicación del centro de gravedad y el momento de inercia con respecto a su *CG* y al pivote del brazo. Realice un modelo del sistema dinámico; lineal, de masa concentrada con un *GDL*, respecto a la leva-seguidor y calcule la fuerza sobre la leva-seguidor para una revolución. La leva tiene una excentricidad pura de 0.5 pulg y gira a 500 rpm. El resorte tiene una rigidez de 123 lb/pulg y una precarga de 173 libras. Ignore el amortiguamiento.

†‡15-8 Repita el problema 15-7 para una leva con doble detenimiento para mover el rodillo seguidor de 0 a 2.5 pulgadas en 60° con aceleración senoidal modificada, paro a 120°,

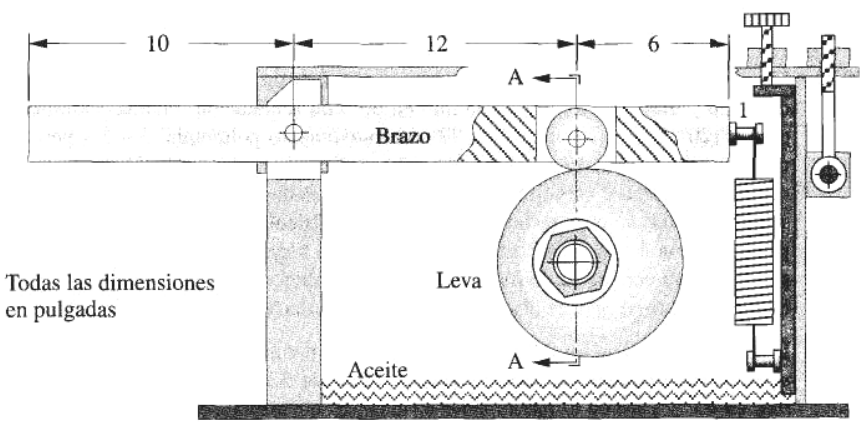
TABLA P15-1
Problema 15-6

	m	*k*	*c*
a.	1.2	14	1.1
b.	2.1	46	2.4
c.	30.0	2	0.9
d.	4.5	25	3.0
e.	2.8	75	7.0
f.	12.0	50	14.0

* Respuestas en el apéndice F.

† Estos problemas son adecuados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad, Matlab* o *TKSolver.*

‡ Estos problemas son adecuados para resolverse usando el programa DYNACAM que se incluye en el CD-ROM.



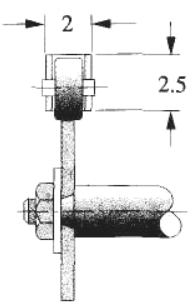


FIGURA P15-1
Problemas 15-7 a 15-11

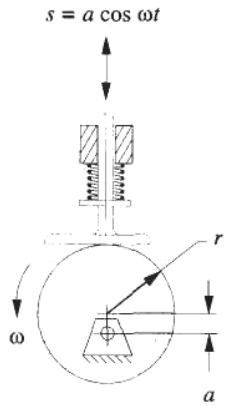


FIGURA P15-2
Problemas 15-12 a 15-14

bajada de 2.5 pulgadas en 30° con movimiento cicloidal y paro en el movimiento restante. La velocidad de la leva es de 100 rpm. Escoja una rigidez y precarga del resorte apropiada para mantener contacto con el seguidor. Seleccione un resorte del apéndice D. Suponga una relación de amortiguamiento de 0.10.

†‡15-9 Repita el problema 15-7 para una leva con doble detenimiento que mueva el seguidor de 0 a 1.5 pulgadas en 45° con movimiento polinomial 3-4-5, paro a 150°, bajada de 1.5 pulgadas en 90° con movimiento polinomial 4-5-6-7 y paro en el movimiento restante. La velocidad de la leva es de 250 rpm. Escoja una rigidez y precarga del resorte apropiada para mantener contacto con el seguidor. Seleccione un resorte del apéndice D. Suponga una relación de amortiguamiento de 0.15.

†‡15-10 Repita el problema 15-7 para una leva con un solo detenimiento para mover el seguidor de 0 a 2 pulgadas en 60°, bajada de 2 pulgadas en 90° y paro en el movimiento restante. Use un polinomio de séptimo grado. La velocidad de la leva es 250 rpm. Escoja una rigidez y precarga del resorte apropiada para mantener contacto con el seguidor. Seleccione un resorte del apéndice D. Suponga una relación de amortiguamiento de 0.15.

†‡15-11 Repita el problema 15-7 para una leva con doble detenimiento para mover el rodillo seguidor de 0 a 2 pulgadas en 45° con movimiento cicloidal, paro a 150°, bajada de 2 pulgadas en 90° con movimiento senoidal modificado y paro en el movimiento restante. La velocidad de la leva es de 200 rpm. Elija una rigidez y precarga del resorte apropiada para mantener contacto con el seguidor. Seleccione un resorte del apéndice D. Suponga una relación de amortiguamiento de 0.15.

†‡15-12 La leva que se muestra en la figura P15-2 es excéntrica pura con excentricidad = 20 mm y gira a 200 rpm. La masa del seguidor es de 1 kg. La rigidez del resorte de 10 N/m y su precarga es de 0.2 N. Encuentre la fuerza sobre el seguidor para una revolución. Suponga una relación de amortiguamiento de 0.10. Si hay un salto en el seguidor, vuelva a especificar la rigidez y precarga del resorte para eliminarlo.

†‡15-13 Repita el problema 15-12 para una leva simétrica de 20 mm con subida y bajada doble armónica (180° subida-180° bajada). Véase el capítulo 8 para fórmulas de levas.

‡15-14 Repita el problema 15-12 para una leva de 20 mm con subida y bajada polinomial 3-4-5-6 (180° subida-180° bajada). Véase el capítulo 8 para fórmulas de levas.

‡15-15 Diseñe una leva con doble detenimiento para mover un rodillo seguidor de 50 mm de diámetro y masa = 2 kg de 0 a 45 mm en 60° con aceleración senoidal modificada, paro a 120°, bajada de 45 mm en 90° con movimiento polinomial 3-4-5 y paro en el movimiento restante. El ciclo total se debe realizar en un segundo. Dimensione un resorte de retorno y especifique su precarga para mantener contacto entre la leva y el seguidor. Seleccione un resorte del apéndice D. Calcule y trace la fuerza dinámica y el par de torsión. Suponga amortiguamiento de 0.25 veces el crítico. Repita el cálculo para una leva con cierre de forma. Compare la fuerza dinámica, par de torsión y frecuencia natural para el diseño con cierre de forma y con cierre de fuerza.

‡15-16 Diseñe una leva con un detenimiento usando polinomiales para mover un rodillo seguidor de 50 mm de diámetro y masa = 10 kg de 0 a 25 mm en 60°, bajada de 25 mm en 90° y paro en el movimiento restante. El ciclo total se debe realizar en dos segundos. Dimensione un resorte de retorno y especifique su precarga para mantener contacto entre la leva y el seguidor. Seleccione un resorte del apéndice D. Calcule y trace la fuerza dinámica y el par de torsión. Suponga amortiguamiento de 0.15 veces

† Estos problemas son adecuados para resolverse usando los programas resolvedores de ecuaciones *Mathcad, Matlab o TKSolver.*

‡ Estos problemas son adecuados para resolverse usando el programa DYNACAM que se incluye en el CD-ROM.

el crítico. Repita el cálculo para una leva con cierre de forma. Compare la fuerza dinámica, par de torsión y frecuencia natural para el diseño con cierre de forma y cierre de fuerza.

‡**15-17** Diseñe una leva con cuatro detenimientos para mover un rodillo seguidor de 50 mm de diámetro y masa = 3 kg de 0 a 40 mm en 40°, paro a 100°, bajada de 20 mm en 90°, paro a 20°, bajada de 10 mm en 30°, paro a 40°, bajada de 10 mm en 30° y paro para el movimiento restante. El ciclo total se debe realizar en 10 segundos. Elija programas adecuados para la subida y bajada a fin de minimizar las fuerzas dinámicas y pares de torsión. Dimensione un resorte de retorno y especifique su precarga para mantener contacto entre la leva y el seguidor. Calcule y trace la fuerza dinámica y el par de torsión. Suponga amortiguamiento de 0.25 veces el crítico. Repita el cálculo para una leva con cierre de forma. Compare la fuerza dinámica, par de torsión y frecuencia natural para el diseño de forma y con cierre de fuerza.

‡**15-18** Diseñe una leva para impulsar un tren de válvulas de un automóvil cuya masa específica es de 0.2 kg. £ = 0.3. La carrera de la válvula es de 12 mm. El rodillo seguidor tiene un diámetro de 10 mm. El evento abierto-cerrado ocupa 160° de la revolución del árbol de levas; paro en el resto del movimiento. Use uno o dos polinomiales para el evento subida-bajada. Seleccione una constante y precarga del resorte para evitar un salto a 3 500 rpm. Se desea una apertura y cierre rápido, así como una apertura máxima.

‡ Estos problemas son adecuados para resolverse usando el programa DYNACAM que se incluye en el CD-ROM.



Capítulo 16

DISEÑO DE INGENIERÍA

Es bueno saber cuándo detenerse.
PROVERBIO ITALIANO

16.0 INTRODUCCIÓN

De todas las innumerables actividades en las que un ingeniero practicante se empeña, la más estimulante y potencialmente la más satisfactoria es el diseño. La realización de cálculos para analizar un problema claramente definido y estructurado sin importar qué tan complejo sea puede ser difícil, pero el ejercicio de crear algo desde un borrador con la finalidad de resolver un problema mal definido es *muy* difícil. El placer y el deleite total en la concepción de una solución viable para dicho problema de diseño representa para cualquiera, ingeniero o no, una de las grandes satisfacciones de la vida. En los capítulos anteriores se trató de presentar el tema particular de una manera y en un contexto que no sólo ayudarán al estudiante a comprender los conceptos fundamentales, sino que fortalecerán y fomentarán sus esfuerzos creativos hacia la solución de los problemas de diseño.

En el capítulo 1 de este libro se comenzó un análisis del proceso de diseño en y como conclusión quizá sea apropiado presentar algún "caso de estudio" de dicho proceso para terminarlo. Hace algunos años George A. Wood Jr., ingeniero muy creativo conocido del autor, asistió a una presentación de Keivan Towfigh, otro ingeniero creativo también conocido del autor, de uno de sus diseños. Años después, Wood escribió un pequeño artículo sobre el diseño de ingeniería creativa en el que reconstruyó el supuesto proceso creativo de Towfigh durante el diseño de la invención original. Los señores Wood y Towfigh han acordado presentar aquí la reproducción de dicho artículo que, en opinión de este autor, funciona como un excelente ejemplo y modelo a considerar por el estudiante de diseño de ingeniería cuando ejerza su propia carrera de diseño.

16.1 UN CASO DE ESTUDIO DE DISEÑO

Educación para la creatividad en ingeniería[1]

de GEORGE A. WOOD JR.

Una faceta de la ingeniería, como se practica en la industria, es el proceso creativo. Definamos la creatividad igual que Rollo May en su libro The Courage to Créate[121] como el proceso de crear algo nuevo. Mucha de la ingeniería tiene poco que hacer con la creatividad en su sentido total. Muchos ingenieros optan por no participar en la empresa creativa, sino que prefieren las esferas del análisis, la examinación y el perfeccionamiento de productos o procesos. Muchos otros encuentran su satisfacción en funciones administrativas o comerciales y, por lo tanto, se apartan de la creatividad de ingeniería, como se analizará aquí.

Desde el principio deseo señalar que los intentos menos creativos son más importantes o satisfactorios para muchos ingenieros que la experiencia creativa para los que tenemos la voluntad de crear. Sería una meta falsa de todas las escuelas de ingeniería suponer que su propósito consiste en que todos los futuros ingenieros sean creativos y que su éxito debe medirse por el "cociente creativo " de sus graduados.

Por otra parte, al estudiante de naturaleza creativa le espera una vida de muchas aventuras si se encuentra en un ambiente académico que reconozca sus necesidades, refuerce sus habilidades y lo prepare para un lugar en la industria donde desarrollar su potencial.

En esta plática analizaré el proceso creativo como lo he conocido personalmente y presenciado en otros. Después trataré de indicar tales aspectos de mi formación que parecen haberme preparado para una función creativa, y cómo el conocimiento y las actitudes para una carrera de ingeniería pueden reforzarse en las escuelas y facultades actuales.

Durante casi treinta años como diseñador de máquinas he visto y sido parte de un gran número de momentos creativos. Éstos permanecen como los puntos altos de mi vida laboral. Cuando he sido el creador, he sentido un gran júbilo y una inmensa satisfacción. Cuando he estado con otros en esos momentos creativos me he sentido alentado por su encanto. Para mí, el momento creativo es la recompensa más grande que da la profesión de ingeniería.

Les contaré una experiencia de hace ocho años, cuando recibí un artículo de un hombre creativo acerca de un momento inmensamente creativo. En la First Applied Mechanisms Conference en Tulsa, Oklahoma, se presentó un artículo titulado The Four-Bar Linkage as an Adjustment Mechanism,[131] entre otros dos artículos académicos de "cómo hacerlo" con gráficas y ecuaciones interesantes para el análisis de problemas de mecanismos. Este artículo incluía sólo una ecuación muy fundamental y cinco figuras ilustrativas sencillas; no obstante, ahora lo recuerdo más claramente que cualquier otro que haya escuchado en conferencias de mecanismos. El autor era Keivan Towfigh y describió la aplicación de las características geométricas del centro instantáneo del acoplador de un mecanismo de cuatro barras.

Planteaba el problema de realizar un simple ajuste rotacional al espejo oscilatorio de un galvanómetro óptico. Para realizar esto se le pidió que girara el ensamble total del galvanómetro con respecto a un eje a través del centro del espejo y perpendicular al eje del pivote del espejo. La alta rigidez del sistema después del ajuste resultó fundamental con un espacio disponible muy limitado y un bajo costo requerido, ya que se debían utilizar más de dieciséis de estas unidades galvanométricas en el instrumento completo.

Su solución consistió en montar los elementos del galvanómetro sobre el eslabón acoplador de un mecanismo de cuatro barras de plástico, de una sola pieza y con articulación de flexión, diseñado de tal manera que el centro del espejo estaba en el centro instantáneo del eslabonamiento en el punto medio de su ajuste. (Véase la figura 4.) Alrededor de este punto geométrico particular (véase la figura 1) ocurre la rotación pura y con la selección apropiada de dimensiones de eslabonamiento, esta condición de rotación sin traslación podría realizarse para mantener a los ángulos de ajuste requeridos de manera suficientemente exacta.

Por desgracia este artículo no recibió el premio de honor de los jueces del congreso. No obstante, constituyó indirectamente la descripción de un momento creativo sobresaliente en la vida de un hombre creativo.

Observemos este artículo y construyamos los pasos por los que probablemente el autor avanzó hacia la realización de su meta. Después de esa ocasión no he vuelto a ver a Towfigh; por tanto, describiré un proceso creativo generalizado que puede ser incorrecto en ciertos detalles pero, estoy seguro, en modo sorprendente resulta similar a la historia real que él contaría.

El problema del galvanómetro lo presentó la junta directiva a Towfigh, sin duda de esta manera: "En nuestro nuevo modelo debemos mejorar la estabilidad del ajuste del equipo, pero mantener el costo bajo. El espacio y el peso bajo tienen gran importancia. Debe aprovecharse del diseño total, ya que a los consumidores les gusta el equipo de estilo fino y moderno, pero perderemos las ventas si no nos mantenemos adelante de la competencia en todos los aspectos. Nuestro diseñador industrial ha elaborado este dibujo que a todos los que estamos en ventas nos gusta y debe usted ser capaz de ajustar el mecanismo a él."

Después seguía una lista de especificaciones del mecanismo, el plazo en que el modelo nuevo debe estar en producción y, desde luego, la demanda de alguna característica nueva que repercutiría en un amplio margen competitivo dentro del mercado.

Me gustaría señalar que el ajuste del galvanómetro fue probablemente sólo una esperanza para el mejoramiento entre muchas otras. El presupuesto y el tiempo permitidos eran poco más que lo suficientemente requerido para el rediseño convencional, ya que este costo lo deben cubrir las ventas esperadas del instrumento resultante. Por cada mil dólares gastados en ingeniería un aumento equivalente en las ventas o la reducción en el costo de fabricación debe realizarse a un nivel mayor que el que se alcanzaría si se invirtiera el dinero en otro lugar.

(investigación)

En la realización de este proyecto, Towfigh debió conocer por completo el equipo que estaba diseñando. Tuvo que operar por sí mismo los primeros modelos y ajustar los espejos de las máquinas existentes muchas veces. Fue capaz de imaginar la función de cada elemento del equipo en su forma básica.

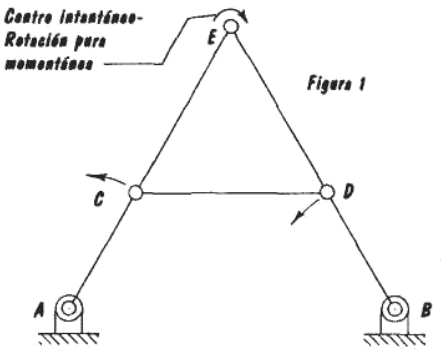


Figura 1

La teoría

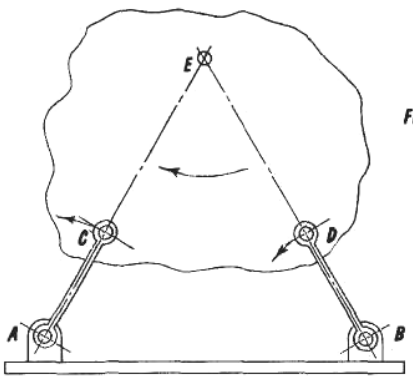


Figura 2

El desarrollo

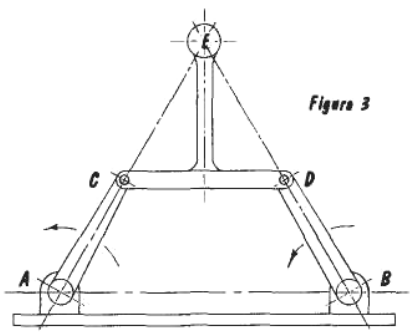


Figura 3

El mecanismo

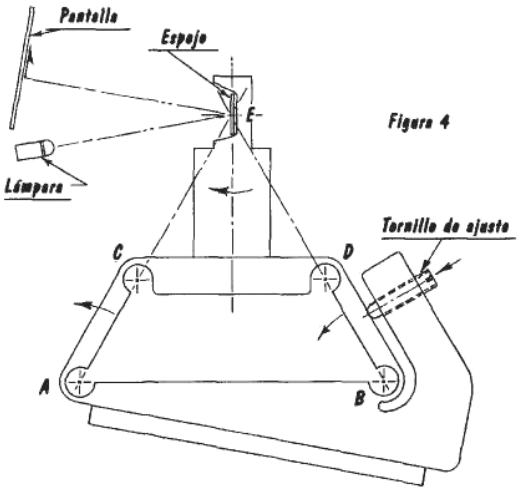


Figura 4

El producto final de Koivan Toufigh

En segundo lugar debió preguntarse (como si fuera el consumidor) qué requisitos de operación y de mantenimiento lo frustrarían más. Y determinó cuáles podrían mejorarse dentro del tiempo de diseño disponible. En este caso se concentró en el ajuste del espejo. Consideró el requisito de rotación sin traslación. Determinó los ángulos máximos necesarios y la traslación permisible que no afectarían la exactitud práctica del equipo. Reconoció la conveniencia del ajuste de un tornillo. Pasó algunas horas pensando todas las maneras en que había visto girar un ensamble alrededor de un punto arbitrario. Siguió rechazando cada solución que venía a su mente, pero en cada caso pensaba que había una manera mejor. Sus ideas tenían muchas partes, implicaban correderas y pivotes, demasiados tornillos y presentaban mucha vibración sensible o demasiado elevada.

(ideación)

(frustración)

(incubación)

Pensó acerca del problema aquella tarde y otras veces mientras progresaba en el diseño de otros elementos de la máquina. Regresó al problema reiteradamente durante los días siguientes. Su tiempo de diseño se estaba acabando. Él era un especialista en mecanismos e imaginó una multitud de manivelas y barras que movían los espejos. Entonces un día, quizá después de un tiempo en que centró su atención en otra parte, al volver a pensar en el dispositivo de ajuste le vino a la mente una imagen del sistema con base en una de las características fundamentales de un mecanismo de cuatro barras.

(¡Eureka!)

Estoy seguro de que era una imagen visual, tan clara como un dibujo sobre el papel. Probablemente no estaba completa, pero implicaba dos ideas. La primera consistía en las características del centro instantáneo. (Véase las figuras 1, 2, 3.) La segunda, en el uso de juntas articuladas de flexión que apuntaban hacia el moldeo de una pieza en plástico. (Véase la figura 4.) En este momento tuvo el presentimiento de que su solución era la correcta. Lo sabía con certeza, todos sus conocimientos en ingeniería se lo decían. Estaba alegre y lleno de gusto. Su placer no se debía a que sus superiores se impresionarían y lo ascenderían en la compañía. Se trataba del júbilo de la victoria personal, la conciencia de lo que había conquistado.

Este proceso creativo ha sido documentado antes por muchos otros más calificados que yo para analizar el trabajo de la mente humana. Sin embargo, me gustaría analizar durante los minutos restantes cómo la educación puede reforzar este proceso y ayudar a que más ingenieros, diseñadores y dibujantes aumenten su potencial creativo.

Los elementos de creatividad de gran relevancia para la calidad que resulta del esfuerzo creativo son la imaginación y el conocimiento básico que refuerza la sensación de que se ha llegado a la solución correcta. No tengo duda de que los principios mecánicos fundamentales que se aplican en el área en que se efectúa el proceso creativo deben ser vividos en la mente del creador. Los conceptos que se le dieron en la escuela deben describir los elementos reales que tienen para los sentidos. F = ma debe traer a su mente una imagen suficientemente vivida para tocarse.

Si una persona decide ser diseñador, su proceso de enseñanza-aprendizaje debe provocarle una curiosidad continua acerca de cómo funciona cada máquina que ve. Debe notar sus elementos y observar mentalmente su funcionamiento conjunto, aun cuando no estén en movimiento. Me parece que este tipo de conocimiento básico y sólido se acopla con la experiencia física para la creación de niveles aún más complejos en los cuales uno acepta como "correcta" la solución tentativa.

(análisis)

Debe advertirse que para todos nosotros ocasionalmente la solución imaginada "correcta" ha demostrado ser incorrecta a la larga. Que esto suceda no vuelve menos efectivo el proceso, pero indica que la creatividad se basa en el aprendizaje y que las fallas construyen una base más firme de juicio a medida que el ingeniero madura. Estos periodos de fallas son negativos en el crecimiento de un ingeniero joven únicamente cuando tienen por resultado el miedo de aceptar un nuevo reto y la generación de un cuidado excesivo que suprima la repetición del proceso creativo.

¿Cuáles parecerían ser los factores más importantes de un plan de estudios de ingeniería que ayudarían a que el estudiante potencialmente creativo se convierta en un verdadero ingeniero creativo?

El primero es un conocimiento básico y sólido en física, matemáticas, química y en las materias relacionadas con su área de interés. Estos fundamentos deben tener un equivalente físico para el estudiante y una fuerza que permita al novato inexperto explicar sus pensamientos. Con demasiada frecuencia se utilizan palabras técnicas que abarcan conceptos vagos. Éstas alimentan el ego del usuario en lugar de la educación del oyente.

El segundo es el crecimiento de la habilidad del estudiante para imaginar. El diseñador creativo debe tener la capacidad de desarrollar una imagen mental de lo que está inventando. El editor del libro Seeing with the Mind's Eye,[4] *de Samuels y Samuels, dice en el prefacio:*

> *... la visualizarían es la manera en que pensamos. Antes de las palabras, había imágenes. La visualizarían es el corazón de la biocomputadora. El cerebro humano programa y se autoprograma mediante sus imágenes. Manejar una bicicleta, conducir un auto, aprender a leer, hornear un pastel, jugar golf, todas las habilidades se adquieren por el proceso de la creación de imágenes. La visualizarían es la herramienta fundamental del conocimiento.*

Obviamente, el creador de las máquinas o productos nuevos debe sobresalir en esta área.

Para mí, un curso en geometría descriptiva constituye una parte de la enseñanza de un ingeniero que mejora la habilidad de visualizar los conceptos teóricos y reproducir en forma gráfica el resultado. Esta habilidad resulta esencial cuando uno se propone diseñar una pieza de un equipo nuevo. En primer lugar, se imagina una serie de máquinas completas con espacios donde se encuentra el problema o las áreas desconocidas. Durante este tiempo se empieza a formar un número de direcciones que el desarrollo podría tomar. Lo mejor de estas imágenes es que se trazan sobre papel y después se analizan con aquellas relacionadas, hasta que finalmente se deduce un concepto básico.

El tercer elemento es la construcción del conocimiento del estudiante acerca de lo que pueden hacer o han hecho otros con un conocimiento especializado diferente del que él posee. Ésta es el área en la que se acumulará experiencia a lo largo de su carrera, siempre que mantenga una curiosidad entusiasta. La ingeniería creativa representa un proceso de construcción. Nadie puede desarrollar un concepto nuevo que implique fundamentos sobre los que no tiene ningún conocimiento. El ingeniero creativo examina los problemas a la luz de lo que ha visto, aprendido y experimentado y observa formas nuevas de combinar todo esto para satisfacer una nueva necesidad.

El cuarto consiste en el desarrollo de la habilidad del estudiante para transmitir su conocimiento a otros. Esta comunicación no sólo implica las habilidades con las técnicas empleadas por los técnicos, sino que también incluye la habilidad de compartir conceptos de ingeniería con empleados sin preparación, gente de negocios y público en general. Rara vez el ingeniero tendrá la oportunidad de desarrollar un concepto si no puede expresar los que rodean su entusiasmo y confianza en una idea. Frecuentemente, las ideas verdaderamente ingeniosas se pierden debido a que el creador no puede transmitir su imagen vivida a quienes la financian o comercializan.

El quinto es el desarrollo del conocimiento del estudiante del resultado físico de la ingeniería. Cuanto más máquinas reales trabajando observe, más creativo puede ser como diseñador. Al estudiante de ingeniería se le pedirá operar herramientas, fabricar productos, ajustar maquinaria y visitar fábricas. Es con estas experiencias que su juicio crece y logra fabricar una máquina adecuada cuando la aproximación baste y donde la optimización se detenga.

Es muy común que se diga que durante las décadas pasadas ha habido tanto desarrollo teórico en la ingeniería, que las facultades y universidades no tienen tiempo para enseñar los fundamentos antes señalados. A la industria se le sugiere que cubra las áreas prácticas que las facultades no tienen tiempo de cubrir, a modo de mostrar al estudiante lo más reciente en tecnología. Hasta cierto punto comprendo y estoy de acuerdo con este enfoque, pero siento que hay un lado negativo que debe reconocerse. Si un ingeniero potencialmente creativo sale de la facultad sin los medios para alcanzar un éxito creativo cuando ingresa a su primer trabajo, se frustra su entusiasmo por un esfuerzo creativo y su interés se acaba mucho antes de que la compañía más prestigiada pueda cumplir con los fundamentos. Por lo tanto, a menudo se elimina un resultado del enfoque de "los fundamentos para más tarde ", que el estudiante de ingeniería talentoso tiene para expresarse visual y físicamente. En consecuencia, las tareas de diseño de máquinas se convierten en el dominio de los graduados de universidades técnicas y laborales y se pierde la contribución creativa de la mayoría de los estudiantes universitarios destacados en productos que pueden hacer más ricas nuestras vidas.

Como dije en el inicio, no todos los estudiantes de ingeniería tienen el deseo, el vigor y el entusiasmo esenciales para el esfuerzo creativo. Sin embargo, siento gran necesidad de reforzar el potencial de aquellos que sí lo tienen. Es cierto que dicha tecnología extensiva ayuda a tomar decisiones difíciles al estudiante y el profesor. El primer plano del pensamiento académico tiene una atracción irresistible tanto para el maestro como para el estudiante. No obstante, considero que el desarrollo del conocimiento básico fuerte, las habilidades para visualizar, comunicar, respetar lo que se ha hecho, para observar y sentir la maquinaria real, no necesitan excluirse o ser excluidas por el entusiasmo de lo nuevo. Creo que se puede lograr un equilibrio en los planes de estudio, lo que aumentará la creatividad latente en todos los estudiantes de ingeniería y ciencias. Esto puede proporcionar una base firme para aquellos que se dirigen hacia una carrera de invenciones mecánicas y, además, incluye el entusiasmo por la nueva tecnología.

Espero que este análisis pueda ayudar a generar pensamientos y proporcionar algunas sugerencias constructivas que lleven a más estudiantes de ingeniería a encontrar la inmensa satisfacción del momento creativo en el medio industrial. Al escribir este artículo pasé bastante tiempo pensando en mis años en la ingeniería y concluiría con el siguiente pensamiento. Para quienes hemos conocido tales momentos durante nuestras carreras, las culminaciones exitosas de los esfuerzos creativos permanecen entre nuestras horas más felices.

16.2 CONCLUSIÓN

La descripción del señor Wood de sus experiencias creativas en el diseño de ingeniería y los factores educativos influyeron en forma paralela en esta experiencia del autor. Se

aconseja al estudiante seguir su prescripción para obtener una base sólida de los principios de la ingeniería y las habilidades de la comunicación. El resultado puede ser la carrera más satisfactoria en el diseño de maquinaria.

16.3 REFERENCIAS

1. **Wood, G. A. Jr.** (1977), "Educating for Creativity in Engineering", presentado en la 85th Anual Conf. ASEE, Universidad de Dakota del Norte.
2. **May,** R. (1976), *The Courage to Créate,* Bantam Books, Nueva York.
3. **Towfigh, K.** (1969), "The Four-Bar Linkage as an Adjustment Mechanism", 1st Applied Mechanism Conf., Universidad del Estado de Oklahoma, Tulsa, Oklahoma, pp. 27-1-27-4.
4. **Samuels and Samuels** (1975), *Seeing with the Mind's Eye: the History, Techniques and Uses of Visualization,* Random House, Nueva York.


FIN



Apéndice A

PROGRAMAS DE COMPUTADORA

Realmente odio esta maldita máquina,
Deseo que la pudieran vender.
Nunca hace lo que yo quiero
Sino solamente lo que le digo.
DE LA BASE DE DATOS FORTUNE, BERKELEY UNIX

A.0 INTRODUCCIÓN

Además de la versión para estudiantes del programa de simulación comercial *Working Model*, se proporcionan en el CD-ROM de este texto siete programas de computadora: FOURBAR, FIVEBAR, SIXBAR, SLIDER, MATRIX, DYNACAM y ENGINE. Éstas son ediciones de los programas para estudiantes. Las versiones profesionales con capacidades extendidas también están disponibles. Comuniquése con el autor a través de su correo electrónico rlnorton@wpi.edu o visite su página web http://www.wpi.edu/ para más información. Los programas FOURBAR, FIVEBAR, SIXBAR y SLIDER se basan en las matemáticas deducidas en los capítulos 4 a 7 y 10y 11, y usan a las ecuaciones ahí presentadas para determinar la posición, velocidad y aceleración en el eslabonamiento de la variedad descrita con el nombre del programa en particular. El programa DYNACAM es un programa de diseño de levas basado en las matemáticas deducidas en los capítulos 8 y 15. El programa ENGINE está basado en las matemáticas obtenidas en los capítulos 13 y 14. El programa MATRIX es un resolvedor general de ecuaciones lineales simultáneas. Todos tienen elecciones similares para desplegar o presentar los resultados en forma de tablas o gráficas. Todos los programas están diseñados para ser amigables al usuario y razonablemente "a prueba de errores". El autor anima a los usuarios a que le informen a través de su correo electrónico rlnorton@wpi.edu cualquier "deficiencia" o problema que encuentren al usarlos.

Medios de aprendizaje

Todos los programas proporcionados con este libro han sido diseñados como medios de aprendizaje para ayudar a comprender los aspectos relevantes de la materia, y *no tienen el propósito específico de que se usen para fines comerciales en el diseño de equipo y* **no se deben usar para esto.** Es muy posible obtener resultados inapropiados (aunque matemáticamente correctos) en un problema resuelto con estos programas, debido a la introducción incorrecta o inapropiada de los datos. En otras palabras, se supone que el usuario entiende la teoría de la cinemática y dinámica subyacentes a la estructura del programa así como los fundamentos matemáticos que sustentan los algoritmos. La información acerca de la teoría y la matemática empleada se deduce y describe en los capítulos señalados del libro. La mayoría de las ecuaciones usadas en los programas se presentan o se deducen en el texto.

Advertencia

Los programas comerciales para uso en diseño o análisis necesitan tener opciones integradas contra la posibilidad de que el usuario proporcione valores incorrectos, inapropiados, o ridículos para las variables de entrada, con el fin de evitar resultados erróneos debidos a la ignorancia o inexperiencia del usuario. **Las ediciones para estudiantes de los programas proporcionados con este texto no son programas comerciales y deliberadamente no contienen tales salvaguardas contra datos de entrada impropios,** sobre la premisa de que de hacerlo así se hubiera "cortocircuitado" el proceso de aprendizaje del estudiante. Aprendemos más de nuestros errores. Estos programas proporcionan un entorno libre de consecuencias para explorar la falla de sus diseños "en el papel" y en el proceso llegar a un conocimiento más completo y amplio de la materia. **El autor y la editorial de este libro no son responsables de cualquier daño que pudiera resultar del buen o mal uso de estos programas.**

Fuerza bruta e ignorancia

La elevada velocidad de cálculo de estos programas permite al estudiante explorar un número mucho más grande y diverso de soluciones potenciales a problemas más reales y extensos que lo que se podría lograr usando sólo soluciones obtenidas con calculadora para estos complicados sistemas de ecuaciones. Esto es una ventaja y un peligro. La ventaja es que el estudiante puede usar los programas como un "simulador de vuelo" para "volar" sus soluciones de diseño potenciales sin las consecuencias de la "caída a tierra" de un diseño no construido. Si el estudiante intenta interpretar diligentemente los resultados de un programa y relacionarlos con la teoría apropiada, obtendrá una comprensión más completa de la cinemática y de la dinámica. Por otro lado, existe una gran tentación de usar estos programas con "fuerza bruta e ignorancia" (FBI) y aplicarlos a soluciones de tanteo aleatorias sin considerar lo que dice la teoría y las ecuaciones y esperar que de algún modo aparezca "de pronto" una solución útil. El estudiante que sucumba a esta tentación no obtendrá mucho beneficio del ejercicio y probablemente tendrá como resultado un diseño pobre. Esta situación probablemente se resume mejor en el siguiente comentario hecho por un estudiante que sufrió en el curso de cinemática con el uso de estos programas, para obtener soluciones de diseño a tres problemas de proyecto como los listados al final del capítulo 3.

> ... La computadora, con sus inmensos beneficios para el ingeniero, también puede ser un estorbo si no se tiene primero una comprensión total de la teoría en la que se basa un programa en particular. Una sobreconfianza en la computadora puede hacer que uno sea "inteligente en computación" y "torpe en ingeniería". El enfoque FBI se vuelve cada vez más tentador cuando puede emplearse con esta facilidad... *BRIAN KIMBALL*

¡Estudiante inteligente! Use los programas de computadora sabiamente. ¡Evite la fuerza bruta e ignorancia! **Diseñe** sus soluciones y entienda la teoría en que se basan.

A.1 INFORMACIÓN GENERAL

Requisitos de hardware

Estos programas trabajan en cualquier computadora que corra Windows 3.1, Windows 95 o Windows NT. Se proporcionan diferentes versiones de los programas para cada sistema operativo. Se necesita un lector de CD-ROM, así como un disco duro. Si su computadora no tiene un lector de CD-ROM, probablemente en la computadora de su escuela pueda convertir éste en un formato útil para su máquina.

Requisitos para el sistema operativo

Estos programas están escritos en Microsoft Visual Basic y están compilados en dos versiones: *Pgmnamel6.exe* para el sistema operativo Windows 3.1 (16 bit) y *Pgmname32.exe* para los sistemas operativos Windows 95 y NT (32 bit). Asegúrese de usar la versión adecuada para el hardware y software de su computadora.

Instalación del software

El CD-ROM contiene los archivos de programa ejecutables más todas las Dynamic Link Library (DLL) y otros archivos auxiliares necesarios para ejecutar los programas. Corra el archivo SETUP de las carpetas de programas individuales del CD-ROM para descomprimir automáticamente e instalar todos los archivos en su disco duro. Se creará una carpeta y un icono con el nombre del programa. El programa podrá correr entonces al hacer un doble clic en el icono o en el archivo Pgmnamel6.exe o en Pgmname32.exe. En Windows 95 o NT el nombre del programa aparecerá en la lista debajo del botón *Start* del menú *program* y podrá ejecutarse desde ahí.

Cómo usar este manual

Este manual está hecho para usarlo a la vez que se ejecutan los programas. Para ver una pantalla de referencia vaya a ella dentro del programa para continuar con su análisis.

A.2 OPERACIÓN GENERAL DE LOS PROGRAMAS

Los siete programas del conjunto tienen características similares y operan de manera consistente. Por ejemplo, todas las funciones de impresión y graneado se seleccionan de

pantallas idénticas comunes en todos los programas. Abrir y guardar archivos se hace idénticamente en todos los programas. Estas operaciones comunes se analizarán en esta sección independientemente del programa en particular. Las secciones posteriores se dedicarán a las características únicas y a la operación de cada programa.

Observe que las *ediciones de estudiante* de estos programas se proporcionan con este libro sin ningún cargo y tienen una licencia limitada, restringida al uso de estos programas durante el curso de dos semestres (9 meses). Si usted continúa usando el programa después de este tiempo, se espera que lo registre y pague la cuota por su uso que se señala en la pantalla *Registration.* Si desea usar el programa con el fin de beneficiar a una compañía o para cualquier propósito comercial, debe obtener la edición profesional del mismo programa, ya que por lo común ésta tiene más características que la edición del estudiante, que no debe usar con fines de lucro.

Corriendo los programas (todos los programas)

Al inicio del programa aparece una pantalla que identifica la versión del programa, el número y fecha de revisión. Oprima el botón *Start* o presione la tecla *Enter* para correr el programa. Aparece una pantalla de *advertencia,* la cual indica el nombre del propietario registrado y permite la impresión de una forma de registro si el software no está aún registrado. Desde esta pantalla se puede accesar a una forma de registro e imprimir.

La siguiente pantalla, la pantalla *Title,* permite la introducción de cualquier identificación del usuario o identificación del proyecto deseado. La información debe ser proporcionada para proceder y se usa para identificar todas las gráficas e impresiones de esta sesión del programa. El segundo cuadro de la pantalla *Title* permite cualquier nombre de archivo deseado para almacenar datos en el disco. Este nombre es por default **Modell** y puede ser cambiado en esta pantalla o cuando se escriban más adelante los datos en el disco. El tercer cuadro permite la escritura de un número de diseño de inicio para el primer diseño. El número de diseño es 1 por default y se incrementa automáticamente cada vez que cambie el diseño básico durante la sesión en el programa. Este número se usa sólo para identificar gráficas, archivos de datos e impresiones que permitan agruparlos, en una fecha posterior, si es necesario. Cuando se oprime el botón *Done* en la pantalla *Title* aparece la pantalla *Home.*

Pantalla *Home* (todos los programas)

Todas las acciones del programa desde el inicio hasta el final están en la pantalla *Home,* la cual tiene varios menús desplegables y botones, algunos de cuyos comandos *(File, New, Open, Save, Save As, Units, About, Plot, Print, Quit)* son comunes en todos los programas. Éstos se describen a continuación.

Acciones posibles del usuario en general dentro de un programa (todos los programas)

Los programas están hechos para permitir la operación desde el teclado, con el ratón o con cualquier combinación de ambos dispositivos de entrada. Las selecciones se pueden hacer con el ratón o, si una selección está marcada (mostrando un cuadro punteado dentro del botón), la tecla *Enter* activará el botón como si lo hubiera oprimido con el ratón. Los cuadros de texto se proporcionan donde necesite escribir los datos. Éstos tienen un fondo

amarillo. En general, lo que escriba en cualquier cuadro de texto no será aceptado hasta que oprima la tecla *Enter* o se mueva fuera del cuadro con la tecla *Tab* o con el ratón. Esto le permite reescribir o borrar sin efecto hasta salir del cuadro de texto. Puede moverse entre los campos de entrada disponibles con la tecla *Tab* (y regresar con *Shift-Tab)* en la mayoría de las pantallas. Si tiene dudas acerca del orden de introducción de los datos en cualquier pantalla intente usar la tecla *Tab,* cuando necesite que cada campo de entrada tenga un cierto orden. Entonces podrá teclear u oprimir el ratón para introducir los datos deseados en ese campo. Recuerde que un fondo amarillo significa que se espera que teclee los datos de entrada. Los cuadros con un fondo cian (azul) contienen información anterior en la que usted no puede escribir.

Otra información que usted debe dar se selecciona de los menús o listas. Éstos tienen un fondo blanco. Algunas listas le permiten teclear un valor diferente de los proporcionados en la lista disponible de selecciones. Si usted teclea una respuesta impropia, ésta será ignorada y el programa escogerá el valor más cercano al que usted tecleó. Escribiendo las primeras letras de una selección listada algunas veces se ocasionará que se seleccione. Oprimir el botón dos veces en una selección de una lista proporcionará a menudo un camino corto.

Units (todos los programas)

El menú *Units* define varios sistemas de unidades para elegir. *Observe que todos los programas trabajan por completo sólo con números sin considerar las unidades.* Es su responsabilidad asegurarse de que los datos están introducidos en algún sistema de unidades consistente. **Dentro de los programas no se hace conversión de unidades.** La selección que usted haga del menú *Units* tiene un solo efecto: cambiar las etiquetas desplegadas en varios parámetros de entrada y de salida dentro del programa. Mezcle los sistemas de unidades bajo su propio riesgo.

Examples (la mayoría de los programas)

La mayoría de los programas tiene un menú desplegable *Examples* en la pantalla *Home,* que proporciona varios mecanismos de ejemplo que mostrarán las capacidades de los programas. Al seleccionar un ejemplo, este menú calculará el mecanismo y abrirá una pantalla que permitirá ver los resultados. En algunos casos necesitará oprimir un botón marcado en la pantalla como *Calcúlate, Run* o *Anímate* para ver los resultados. Algunos programas también proporcionan acceso a ejemplos desde varias pantallas.

Crear un nuevo archivo, guardar y abrir archivos *(File:* todos los programas)

Todas las funciones usuales de *Windows* para la creación de archivos nuevos, guardar su trabajo en disco y abrir un archivo previamente guardado son accesibles desde un menú llamado *File* en cada una de las pantallas *Home* de los programas. Al seleccionar *New* desde este menú, se convertirá en cero cualquier dato que usted haya creado dentro del programa, pero antes de hacerlo le advertirá e invitará a guardar esos datos en el disco.

Las selecciones *Save* y *Save As* del menú *File* le pedirán que proporcione el nombre del archivo y la localización del disco para que guarde su modelo de datos actual en el disco. Los datos se guardan en un formato usual y con una extensión de tres caracteres

única para cada programa en particular. Usted debe usar la extensión recomendada en estos archivos, así el programa permitirá verlos en el disco cuando usted quiera abrirlos después. Si usted se olvida de agregar la extensión al guardar el archivo aún puede recuperar el archivo.

Al seleccionar *Open* del menú *File* le pedirá que proporcione el nombre de un archivo de los que están disponibles en el directorio del disco que usted elija. Si no ve ningún archivo con la extensión del programa, use el menú desplegable dentro del cuadro de diálogo *Open File* para elegir *Show All Files* y podrá ver todos los archivos. Éstos se leerán apropiadamente dentro del programa con o sin la extensión en su nombre igual que los que se guardaron dentro del mismo programa. Si usted usa alguna de las versiones para DOS de estos programas, al guardar el archivo de una versión antigua de un programa dado, también puede abrirlo en esta versión de *Windows,* aunque no tendrá tanta información como la que se necesita en los nuevos programas.

Copia de pantallas al portapapeles o impresora *(Copy:* todos los programas)

Cualquier pantalla puede ser copiada como un gráfico al portapapeles usando la combinación de teclas usuales de *Windows Alt-PrintScrn.* Entonces estará disponible para pegarla dentro de cualquier programa compatible con *Windows* tales como *Word* o *Powerpoint,* que normalmente funcionan en *Windows.* La mayoría de las pantallas también tienen un botón con la imagen en pantalla de una impresora láser. Sin embargo, la calidad de esa imagen impresa puede ser menor de la que se podría obtener copiando y pegando la imagen en un programa como *Word* o *Powerpoint* e imprimiendo después a partir de esos programas. Parece ser que *Visual Basic* no imprime gráficas tan bien como las otras aplicaciones de *Windows.* NOTA: *En algunos casos las funciones graficadoras podrían no imprimir adecuadamente. Si es así, copie la pantalla al portapapeles, pegúela en Word e imprima desde Word.*

Impresión desde la pantalla, impresión y exportación de archivos de disco (botón *Print)*

Al seleccionar el botón *Print* desde la pantalla *Home* se abrirá la pantalla *Print Select* (véase la figura A-l) la cual contiene la lista de variables que se pueden imprimir. Los botones de la izquierda de esta pantalla se pueden imprimir directamente para dirigir los resultados hacia una *Screen, Printer,* o *Disk.* La elección es por default *screen,* por tanto, se debe oprimir cada vez que se abre la pantalla para obtener algunas de las otras opciones. El resultado es diferente en cada una de estas selecciones.

El seleccionar *Screen* dará como resultado una ventana de pantalla desplegable llena con los datos solicitados. El despliegue le permitirá ver todos los datos solicitados en serie. Esta pantalla de datos se puede copiar al portapapeles o enviar a una impresora como antes se describió, pero esto normalmente mostrará sólo una parte de los datos disponibles, es decir, una pantalla completa.

Al seleccionar *Printer* como el dispositivo de salida el resultado será que la selección completa de datos se imprima en la impresora disponible. Sólo una parte de la información que se muestra en la pantalla desplegada se incluirá en esta impresión.

El seleccionar *Disk* como dispositivo de salida dará como resultado que sus selecciones sean enviadas al archivo de su elección en un formato de texto en ASCII (limitado por

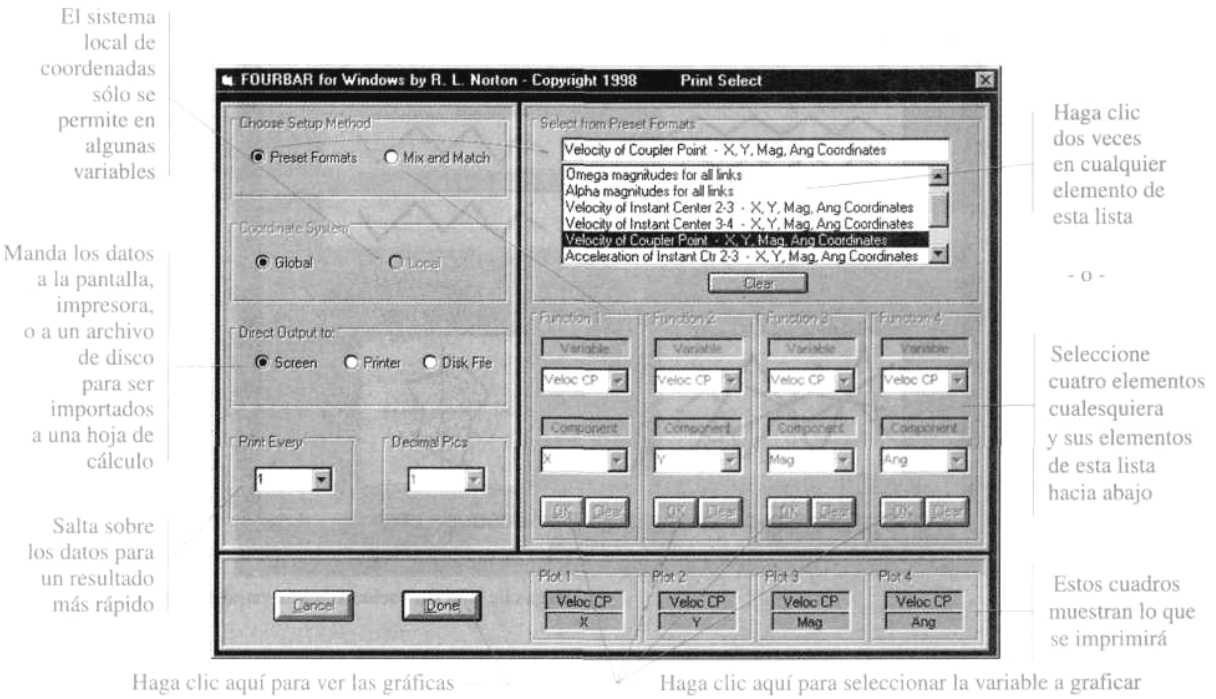


FIGURA A-I

La pantalla de *Print Select* es común a todos los programas (no todos los programas permiten selección de componentes)

tabulaciones) que se puede abrir en un programa de una hoja de cálculo tal como *Lotus 123* o *Excel.* Dentro del programa de hoja de cálculo puede hacer cálculos adicionales o graficar los datos.

La pantalla *Print Select* tiene dos modos para la selección de datos, *Preset Formats* y *Mix and Match.* El primer modo preselecciona conjuntos de cuatro variables para impresión. Al seleccionar *Mix and Match* permite llevar cualquiera de las cuatro variables disponibles a impresión. Usted debe imprimir cuatro variables a un mismo tiempo en cualquiera de los dos modos. Dependiendo del programa, usted podrá seleccionar los otros parámetros auxiliares como el número de lugares decimales o la frecuencia de datos que se imprimirán.

Gráficas de datos (botón *Plof)*

El botón *Plot* de la pantalla *Home* lleva a la pantalla *PlotType* (véase la figura A-2) que es la misma en todos los programas. Las variables en estos programas pueden ser graneadas en uno de varios formatos, tres cartesianos y uno polar (véase la figura A-2). Esta pantalla permite la selección de uno de estos cuatro tipos de gráficas como se muestra en los

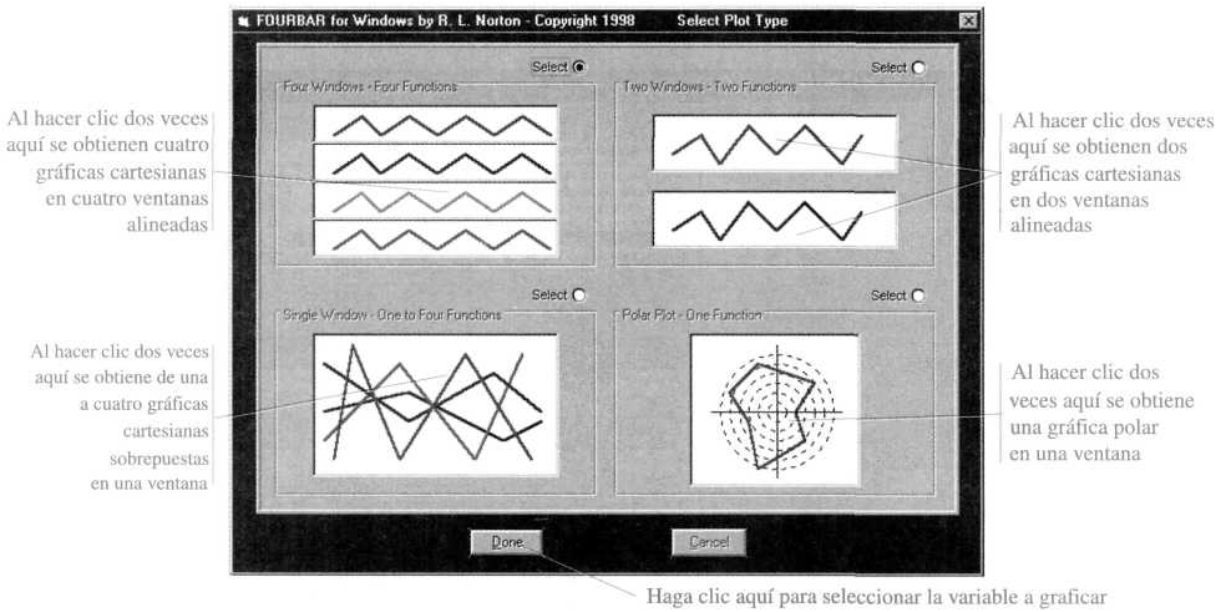


FIGURA A-2

La pantalla *Ploffype* es común en todos los programas que permiten graficación

iconos de estilo de graneado. El primer icono (izquierda superior) proporciona cuatro funciones graneadas en los ejes cartesianos en cuatro ventanas separadas. El segundo icono (derecha superior) gráfica dos funciones en los ejes cartesianos en ventanas separadas. El tercer icono (izquierda inferior) permite graficar de una a cuatro funciones en ejes cartesianos comunes en una sola ventana. Ésta permite elegir que se muestre una sola función en pantalla completa o mostrar varias funciones. (Sin embargo, se advierte que esas funciones múltiples se escalarán a la función más grande del grupo; de modo que, si hay grandes diferencias en magnitud entre los miembros del conjunto, puede ser difícil de ver e interpretar la más pequeña.) El cuarto icono (derecha inferior) proporciona una gráfica polar de una función seleccionada. Usted puede seleccionar cualquiera de estos cuatro estilos de graneado sobre el icono o sobre el botón *Select* anterior a éste y después oprimir *Done.* Al oprimir dos veces sobre el icono de graficado lo llevará a la siguiente pantalla inmediatamente.

CARTESIAN PLOTS (GRÁFICAS CARTESIANAS) Permite trazar una variable dependiente contra una variable independiente en los ejes cartesianos *(x,y).* En estos programas la variable independiente mostrada sobre el eje *x* puede ser el tiempo o el ángulo, dependiendo del cálculo hecho en el programa en particular. La variable para el eje *y* se selecciona del menú Plot. Las velocidades angulares y pares de torsión son vectores pero están dirigidos a lo largo del eje *z* en un sistema de dos dimensiones. Así que sus magnitudes se pueden graficar en ejes cartesianos y se pueden comparar, ya que sus direcciones son constantes, conocidas e iguales.

POLAR PLOTS (GRÁFICAS POLARES) Las gráficas de velocidades lineales, aceleraciones lineales y de las fuerzas requieren un tratamiento diferente que el de las gráficas cartesianas usadas para los parámetros de los vectores angulares. Sus direcciones no son las mismas y varían con el tiempo o con el ángulo de entrada. Una manera de representar estos vectores lineales es hacer dos gráficas cartesianas, una para la magnitud y una para el ángulo del vector en cada tiempo o ángulo de paso. Alternativamente, las componentes x y y del vector en cada tiempo o ángulo de paso se pueden presentar como un par de gráficas cartesianas. Cualquiera de estos dos enfoques requiere dos gráficas por vector y tiene la desventaja de ser difícil de interpretar. Un mejor método para vectores que actúan sobre un punto en movimiento (tal como una fuerza sobre un pasador en movimiento) es hacer una gráfica polar con respecto a un sistema coordenado local, de ejes no rotatorios (SCLN) fijado al punto móvil. Este sistema local no rotatorio de ejes *x,y* se traslada con el punto conforme éste se mueve, pero permanece siempre paralelo al sistema de ejes global *X,Y.* Al granear el vector sobre este sistema de ejes en movimiento se puede ver su magnitud y dirección en cada tiempo o ángulo de paso, ya que se están fijando los orígenes de todos los vectores al punto móvil sobre el cual actúan.

En algunos de los programas las gráficas polares pueden hacer una pausa entre las gráficas de cada vector. Sin hacer una pausa, la gráfica puede aparecer tan rápidamente que el ojo no detectaría el orden en el que se dibujó. Se requiere oprimir al ratón una vez entre los dibujos de cada vector, para ver fácilmente el orden. Con cada pausa se despliega el valor actual de la variable independiente (tiempo o ángulo) así como la magnitud y el ángulo del vector.

Los programas también permiten presentaciones alternas de las gráficas polares, en las que se muestran solamente los vectores, o solamente la envolvente de la trayectoria de las puntas de flecha de los vectores, o ambas. Una gráfica que conecta las puntas de flecha de los vectores con una línea (su envolvente) es llamada algunas veces hodográfica.

SELECCIÓN DE LAS VARIABLES DE LA GRÁFICA Al elegir cualquiera de los cuatro tipos de graneado de la pantalla *Plot Type* le lleva a la pantalla *Plot Select,* la cual es la misma en todos los programas. (Véase la figura A-3.) Como con la pantalla *Print Select,* se proporcionan dos disposiciones para la selección de las funciones a granearse: *Preset Formáis* y *Mix and Match.* La primera proporciona conjuntos de funciones preseleccionadas y la última le permite seleccionar hasta cuatro funciones de las disponibles en los menús desplegables. En algunos casos usted también tendrá que seleccionar la componente de la función deseada, es decir, *x, y, mag* o *angle.*

ALINEACIÓN DE LA GRÁFICA Algunas de las pantallas *Plot Select* ofrecen una elección de dos variantes más de estilo de graneado llamadas *Aligned* y *Annotated.* El estilo aligned coloca múltiples gráficas en una relación exacta de fase, una sobre la otra. El estilo annotated no alinea las gráficas pero permite más variedad tanto en su despliegue como en su colocación y cuadrícula. Los datos desplegados son los mismos en cada caso.

SISTEMAS COORDENADOS Para las variables particulares en algunos programas se proporciona una elección del sistema coordenado para desplegar la información de los vectores en la gráfica. El tablero *Coordínate System* en la pantalla *Plot Select* se activará cuando se seleccione una de estas variables. Entonces se puede oprimir ya sea el botón *Global* o el botón *Local.* (Por default es el *Global.)*

COORDENADAS GLOBALES La selección *Global* en el tablero *Coordínate System* se refiere a todos los ángulos de los ejes *XY* de la figura A-6. Para las gráficas polares el

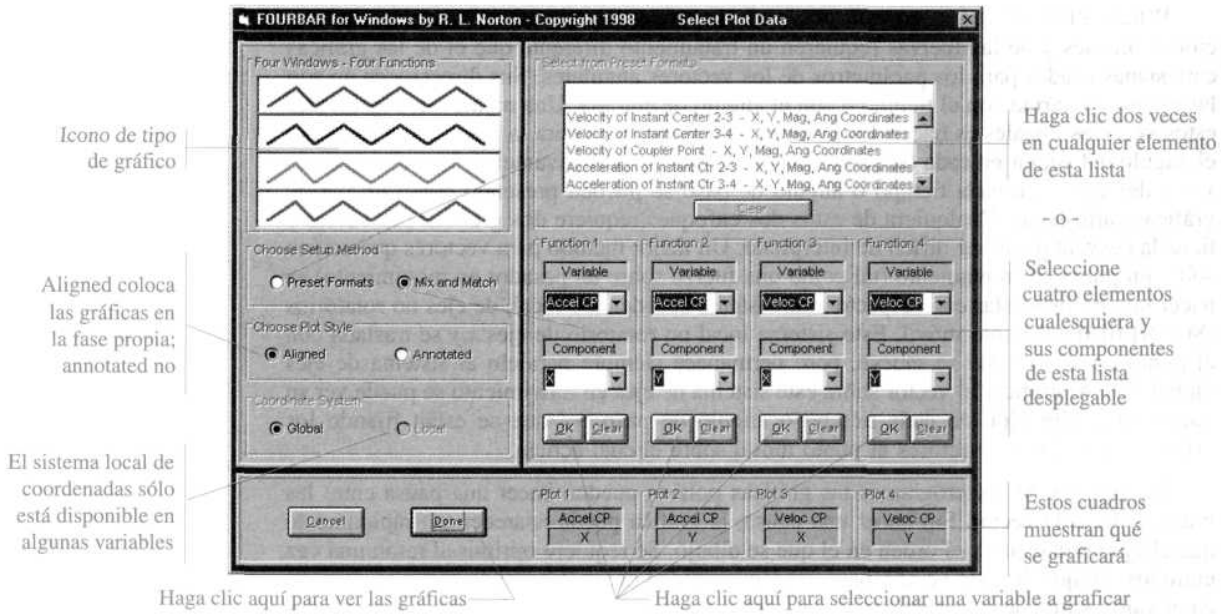


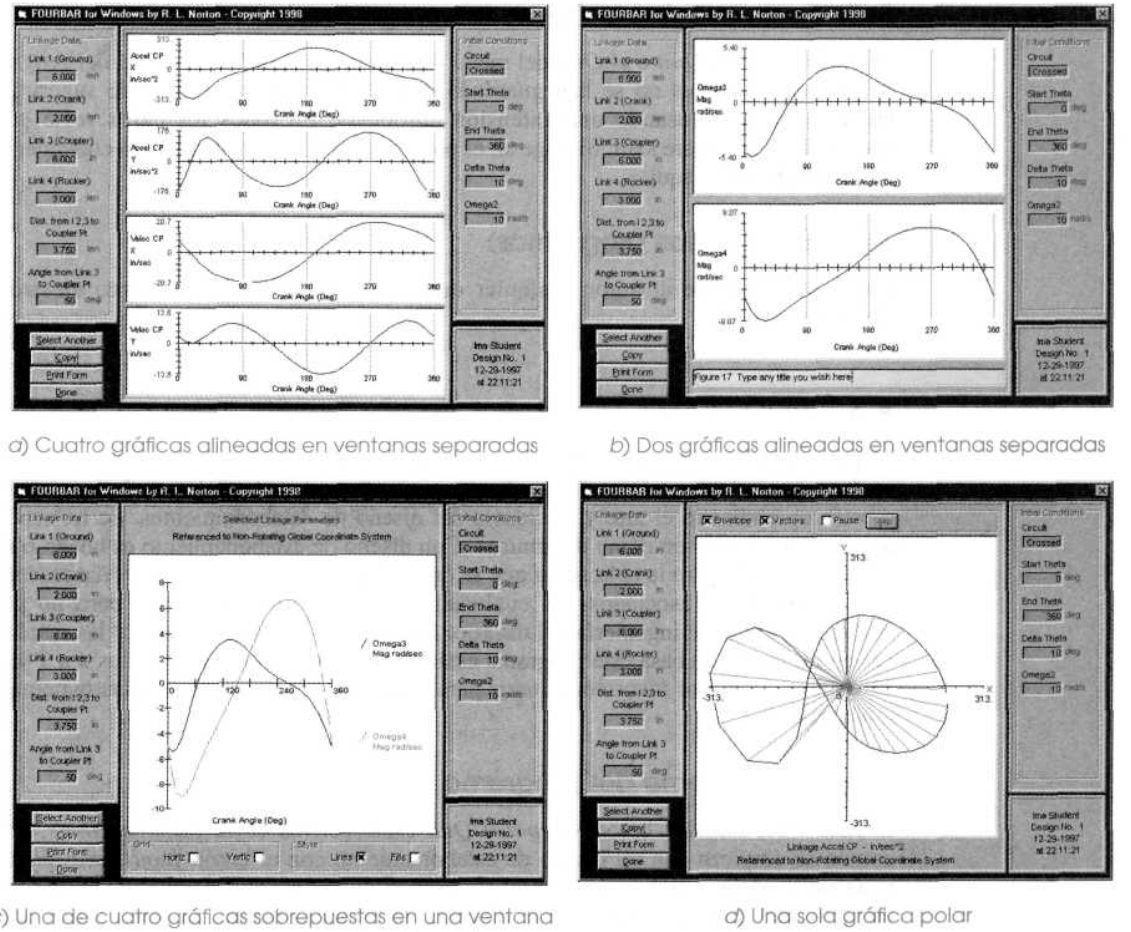
FIGURA A-3

Las pantallas de *PlotSelect* son comunes en todos ¡os programas. Esta muestra uno de fos cuatro estilos de pantallas de *PiotSelect*

vector que se muestra con la selección *Global* está dibujado realmente en un sistema coordenado local, no rotatorio (SCLN) que permanece paralelo al sistema global como JCJ, y_i en el punto *A* y x_2, y_2 en el punto *B* de la figura A-1. En el SCLN x_2, y_2 se comportan en el punto *B* de la misma manera que x_i, y_i en el punto *A* en el SCLN, esto es, éste viaja con el punto *B* pero permanece paralelo al mundo del sistema coordenado *X,Y* todo el tiempo.

COORDENADAS LOCALES El sistema coordenado *x',y* también viaja con el punto *B* como su origen, pero está insertado en el eslabón 4 girando con el eslabón, cambiando continuamente su orientación con respecto al sistema coordenado global *X, Y* haciendo de éste un SCLR. Cada eslabón tiene un SCLR pero no todos se muestran en la figura. La selección *Local* en el tablero *Coordínate System* usa al SCLR en cada eslabón para permitir el graficado e impresión de las componentes tangencial y radial de la aceleración o fuerza sobre un eslabón. Éste es de valor si, por ejemplo, se quiere un análisis de esfuerzos de flexión del eslabón. Las componentes de la fuerza dinámica perpendiculares al eslabón debidas al producto de la masa del eslabón y de la aceleración tangencial crearán un momento de flexión en el eslabón. La componente radial creará tensión o compresión.

GRAFICANDO Una vez que haya hecho una de sus selecciones y se muestren en los cuadros cian, en la parte derecha inferior de la pantalla *Plot Select,* estará disponible el botón *Done.* Al oprimir éste se llega a las gráficas que ha seleccionado. En la figura A-4



a) Cuatro gráficas alineadas en ventanas separadas

b) Dos gráficas alineadas en ventanas separadas

c) Una de cuatro gráficas sobrepuestas en una ventana

d) Una sola gráfica polar

FIGURA A-4

Los cuatro estilos de gráficas permitidos en todos **los** programas. La información de ías barras laterales es diferente en cada programa

se muestran ejemplos de los cuatro tipos de gráficas disponibles. Desde esta pantalla *Plot* puede copiarla en el portapapeles y pegarla en otra aplicación o pasarla a una impresora. El botón *Select Another* le regresa a la pantalla anterior *Plot Select. Done* le regresa a la pantalla *Home.*

Menú *About* (todos los programas)

El menú *About* de la pantalla *Home* desplegará una pantalla que contiene información de la edición y revisión de su copia del programa. Las formas *Disclaimer* y *Registration* también pueden ser accesadas desde este menú.

Salir de un programa (todos los programas)

Al elegir el botón *Quit* o el *Quit* del menú *File* de la pantalla *Home* saldrá del programa. Si los datos actuales no se han guardado desde su último cambio, se le sugerirá que guarde el modelo usando una extensión apropiada. En todos los casos se le pedirá que confirme si quiere salir. Si elige sí, el programa se cerrará y se perderá cualquier dato no guardado hasta aquí.

Apoyo (todos los programas)

Por favor notifique al autor cualquier deficiencia a través de su correo electrónico rlnorton @ wpi .edu.

A.3 PROGRAMA FOURBAR

El programa FOURBAR *para Windows* es un programa de diseño de eslabonamiento y análisis diseñado para el uso de estudiantes, ingenieros y otros profesionales que conocen o están aprendiendo el arte y la ciencia del diseño de eslabonamientos. Se ha supuesto que los usuarios saben cómo determinar si un diseño de eslabonamiento es bueno o malo y si es adecuado para la aplicación que se desea. El programa calculará los datos cinemáticos y dinámicos asociados con cualquier diseño de eslabonamiento, pero no puede sustituir el juicio de ingeniería del usuario. La teoría de eslabonamientos y las matemáticas en las cuales se basa este programa están documentadas en los capítulos 4 a 7 y 10 y 11 de este texto. Por favor consúltelos para explicaciones de la teoría y las matemáticas relacionadas.

La pantalla *Home* del programa FOURBAR

Inicialmente, sólo los botones *Input y Quit* están activos en la pantalla *Home.* Por lo común se empieza con un diseño de eslabonamiento con el botón *Input,* pero para una vista rápida de un eslabonamiento tal como lo dibuja el programa, seleccione uno de los ejemplos del menú *Example* y éste dibujará un eslabonamiento. Si usted activa uno de estos ejemplos, cuando regrese de la pantalla *Anímate* encontrará que todos los otros botones de la pantalla *Home* estarán activados. Cada uno de estos botones se describirá posteriormente.

Datos de entrada (pantalla *Input* del programa FOURBAR)

En la figura A-5 se definen los parámetros de entrada, numeración de eslabones y el sistema de ejes usado en el programa FOURBAR. Las longitudes de eslabones necesarias son: eslabón de fijación 1, eslabón de entrada 2, eslabón acoplador 3 y eslabón de salida 4, definidas por sus distancias entre pasador y pasador, llamadas *a, b, c, d* en la figura. Los ejes *X* están limitados a estar a lo largo del eslabón 1, definidos por los centros instantáneos I_{12} e /, $_4$ que también son señalados, respectivamente O_2 y O_4 en la figura. El centro instantáneo /, $_2$, el pivote impulsor de manivela es el origen del sistema coordenado global.

Podría parecer demasiado restrictivo forzar al eje *X* a estar sobre el eslabón 1 en este "sistema alineado". Varios eslabonamientos tendrán su eslabón de fijación en algún ángulo diferente de cero. Sin embargo, reorientando el eslabonamiento después de diseñarlo y

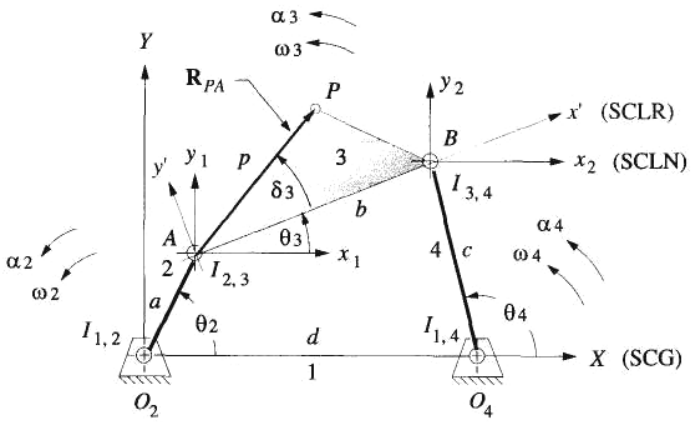


FIGURA A-5

Datos del eslabonamiento para el programa FOURBAR. (Abra el archivo F_A-05.5br en el programa FOURBAR para ver este eslabonamiento)

analizándolo simplemente, implicaría girar la pieza de papel en la que éste está dibujado para obtener el ángulo final deseado del eslabón de fijación. Más formalmente, esto significa una rotación del sistema coordenado a través del negativo del ángulo del eslabón de fijación. En efecto, el ángulo final real del eslabón de fijación se debe restar de todos los ángulos de los eslabones y de los vectores calculados en el sistema de ejes alineados.

Además de las longitudes de los eslabones se debe proporcionar la localización de un punto de acoplamiento sobre el eslabón 3 para encontrar esas posiciones de la curva de acoplamiento del punto, velocidades y aceleraciones. Este punto está localizado por un vector de posición con origen en $I_{2,3}$ (punto *A) y* dirigido hacia el punto de acoplamiento *P* de interés, el cual puede estar en cualquier lugar del eslabón 3. El programa requiere que usted introduzca las coordenadas polares de este vector, el cual está indicado con *p* y δ_3 en la figura A-5. El programa pregunta por la distancia desde $I_{2,3}$ al punto de acoplamiento, que es *p, y* al ángulo que forma en el punto de acoplamiento, con el eslabón 3 que es δ_3. Observe que el ángulo δ_3 no está relacionado con el sistema coordenado global (SCG) *X,Yo* el sistema coordenado local no rotatorio (SCLN) *x,y* en el punto A. Más bien éste está relacionado con la línea *AB* que está en el extremo de pasador a pasador del eslabón 3 (SCLR). El ángulo δ_3 es una propiedad del eslabón 3 y está insertado en éste. El ángulo que localiza al vector R_{CA} en el sistema coordenado *x,y* es la suma del ángulo δ_3 y del ángulo θ_3. Esta suma está hecha en el programa, después de calcular θ_3 para cada posición de la manivela de entrada. Véase también la sección 4.5. El sistema coordenado, dimensiones, ángulos y nomenclatura en la figura A-5 son consistentes con los de la figura 4-6, que se usaron en la deducción de las ecuaciones usadas en el programa FOURBAR.

Cálculos (pantallas *Input* de los programas FOURBAR, FIVEBAR, SIXBAR y SLIDER)

En la pantalla *Input* se definen los datos básicos para un diseño de eslabonamiento que se muestra en la figura A-6, la cual se activa al seleccionar el botón *Input* de la pantalla

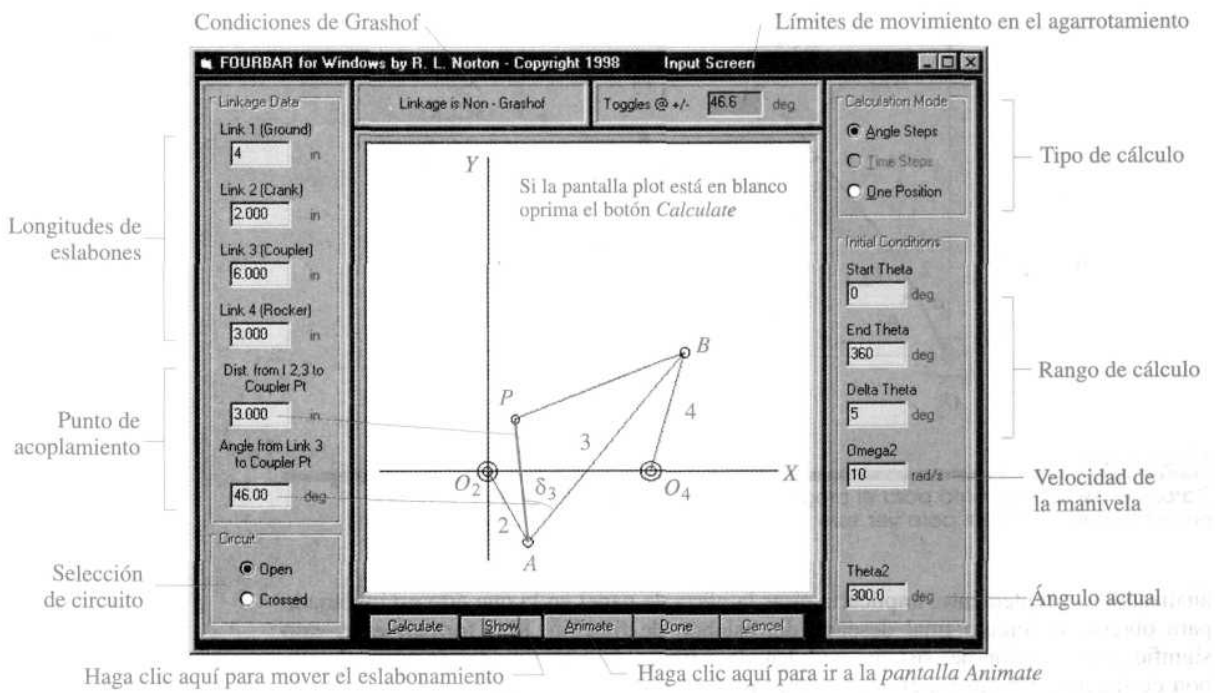


FIGURA A-6

La pantalla *Input Data* para el programa FOURBAR. Las pantallas correspondientes en FIVEBAR, SIXBAR y SLIDER son similares

Home. Cuando usted abra esta pantalla por primera vez tendrá datos por default para todos los parámetros. La geometría del eslabonamiento está definida en el tablero *Linkage Data* del lado izquierdo de la pantalla. Usted puede cambiar éstos al escribir sobre los datos en los cuadros de texto amarillos.

El circuito abierto o cruzado del eslabonamiento se selecciona en un tablero en la parte izquierda inferior de la pantalla de la figura A-6. Seleccione el tipo de cálculo deseado, uno de los *Angle Steps*, *Time Steps* u *One Position* del *Calculation Mode* en el tablero derecho superior. La información del inicio, final y del paso delta es diferente en cada uno de estos métodos de cálculo, y el cuadro de texto de entrada indicado en el tablero I*nitial Conditions* cambiará con base en su selección. Escriba las condiciones inicial, delta y final como desee.

ONE POSITION Calculará la posición, velocidad y aceleración para cualquier posición inicial especificada θ_2, velocidad angular de entrada ω_2 y aceleración angular α_2.

ANCLE STEPS Supone que la aceleración angular α_2 del eslabón de entrada 2 es cero, haciendo a ω_2 constante. Se requieren los valores inicial y final del ángulo de manivela θ_2, y del ángulo de paso $\Delta\theta_2$, y la velocidad de entrada constante de la manivela ω_2. El programa calculará todos los parámetros de eslabonamiento para cada ángulo de paso. Éste es un análisis de estado estable y es apropiado para eslabonamientos de Grashof o de no Grashof dado que el viaje del eslabonamiento se limita como en el último caso.

TIME STEPS Se requiere la introducción de un tiempo inicial, tiempo final y paso de tiempo, todos en segundos. También se debe proporcionar el valor de α_2 (que debe ser una constante o cero), la posición inicial θ_2 y la velocidad inicial ω_2 del eslabón 2 al tiempo cero. El programa calculará entonces todos los parámetros de eslabonamiento para cada paso de tiempo al aplicar la aceleración especificada, la cual, por supuesto, cambiará la velocidad angular del eslabón impulsor con el tiempo. Éste es un análisis transitorio. El eslabonamiento hará tantas revoluciones de la manivela impulsora como sea necesario para correr durante el tiempo especificado. Esta elección es más apropiada para eslabonamientos de Grashof, a menos que se especifique un tiempo muy corto de duración, como en un eslabonamiento de no Grashof, que alcanzará rápidamente sus posiciones de agarrotamiento.

Observe que se puede usar una combinación de análisis sucesivos de Time Step, Crank Angle y Time Step para simular el inicio, el estado estable y las fases de desaceleración, respectivamente, de un sistema para un análisis completo.

CALCÚLATE El botón *Calcúlate* calculará todos los datos para su eslabonamiento y mostrará a éste en una posición arbitraria en la ventana de eslabonamiento sobre la pantalla *Input.* Si en cualquier momento la ventana blanca de eslabonamiento queda vacía, con el botón *Calcúlate* traerá la imagen de regreso. El botón *Show* moverá el eslabonamiento a través de su rango a "pasos agigantados".

Después de calcular el eslabonamiento, los botones *Anímate* y *Done* de la pantalla *Input* estarán disponibles. El botón *Anímate* lo lleva a la pantalla *Anímate,* donde usted puede correr el eslabonamiento a través de cualquier rango de movimiento en el que quiera observar su comportamiento. También puede cambiar cualquiera de los parámetros del eslabonamiento en la pantalla *Anímate* y después recalcular los resultados con el botón *Recale.* El botón *Done,* ya sea en la pantalla *Input* o en la *Anímate,* le regresa a la pantalla *Home.* Los botones *Plot* y *Print* estarán ahora disponibles así como el botón *Anímate,* el cual lo llevará a la pantalla *Anímate.*

ERRORES DE CÁLCULO Si se encuentra una posición que no puede ser alcanzada por los eslabones (ya sea en los cálculos de ángulo de paso o paso de tiempo); el resultado matemático será intentar tomar la raíz cuadrada de un número negativo. El programa mostrará entonces un cuadro de diálogo con el mensaje *Links do not connect for Theta2=xx* y presentará tres elecciones: Abort, Retry o Ignore. Abort terminará el cálculo en este paso y lo regresará a la pantalla *Input.* Retry fijará en cero los parámetros calculados en la posición actual e intentará continuar el cálculo con el siguiente paso, reportando los problemas sucesivos a medida que ocurran. Ignore continuará el cálculo para el proceso completo, haciendo los parámetros calculados iguales a cero en cualquier posición subsecuente, con problemas pero no presentará más mensajes de error. Si un eslabonamiento es de no Grashof y usted requiere el cálculo para ángulos que no se pueden encontrar, entonces viajará a esta secuencia de errores. Al elegir Ignore forzará a terminar el cálculo, y entonces podrá observar los movimientos posibles en el eslabonamiento en la ventana de eslabonamiento de la pantalla *Input* con el botón *Show.*

CONDICIÓN DE GRASHOF Una vez realizado el cálculo se despliega la condición de eslabonamiento de Grashof en un tablero, en la parte superior izquierda de la pantalla. Si el eslabonamiento es de no Grashof, los ángulos en los que alcanza las posiciones de agarrotamiento son desplegados en un segundo tablero en la parte superior derecha. Esta información puede ser usada en el reajuste de las condiciones iniciales para evitar el mensaje de error "links cannot connect".

Animation (FOURBAR)

El botón *Anímate* de la pantalla *Home* lleva a la pantalla *Anímate* como se muestra en la figura A-7. El botón *Run* activa el eslabonamiento y corre a través del rango de movimiento definido en su más reciente cálculo. La condición de Grashof está reportada en la esquina superior derecha de la pantalla. El número de ciclos para la animación puede ser escrito en el cuadro *Cycles,* a la derecha inferior de la pantalla.

Un retardo de tiempo (por default es 0) puede ser colocado en un menú abajo del cuadro *Cycles.* Cualquier número de *ciclos* que no esté en esta lista puede ser escrito en el cuadro. Esta característica de retardo de tiempo se proporciona para regular las variaciones de velocidad en las computadoras. Si su computadora es muy rápida, la animación puede ocurrir muy rápidamente para ser vista. Si es así, seleccionar un número positivo grande para el retardo del tiempo hará más lenta la animación. Para computadoras lentas los números negativos proporcionarán velocidad a la animación en cierto grado, pero pueden hacer que ésta se mueva con aceleramiento. El botón *Step* mueve al eslabonamiento un incremento de la variable independiente a la vez.

Los cuadros de texto en el tablero *Línkage Data* permiten cambiar la geometría del eslabonamiento sin regresar a la pantalla *Input.* Las condiciones iniciales pueden ser redefinidas en el tablero de la izquierda de esta pantalla. La selección *Open-Crossed* se puede cambiar, pero el *Calculation Type* sólo puede ser cambiado en la pantalla *Input.* Después de este cambio, se debe recalcular el eslabonamiento con el botón *Recale y* después se corre nuevamente.

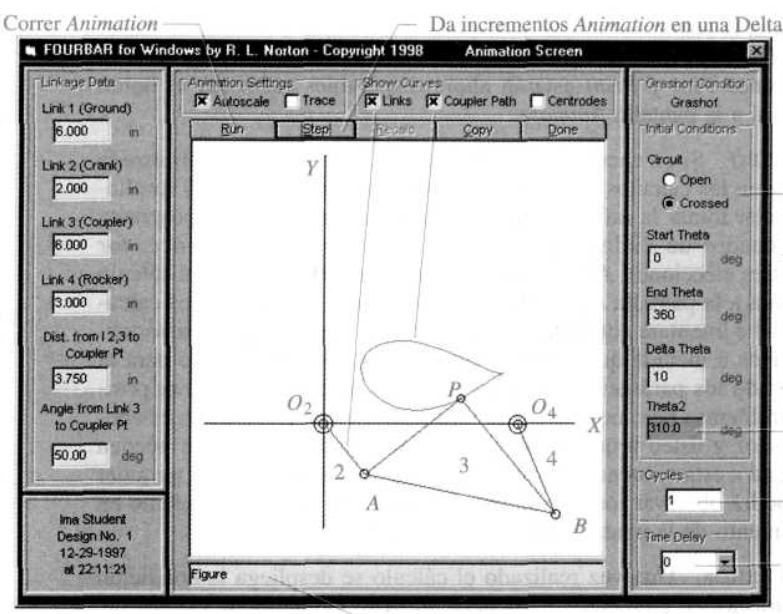


FIGURA A-7

Pantalla Animate del programa FOURBAR. Los programas FIVEBAR, SIXBAR y SLIDER tienen pantallas de animación similares

En la parte superior central de la pantalla *Anímate* hay dos tableros que proporcionan interruptores para cambiar el despliegue de la animación. En el tablero *Show Curves,* el despliegue de *Links, Coupler Path* y *Centrodes* se pueden encender o apagar en animaciones subsecuentes.

CÉNTRODOS Solamente el programa FOURBAR calcula y traza los céntrodos fijos y móviles (la posición de los centros instantáneos se definió en la sección 6.5 y se muestran en la figura 6-15a)). Para distinguir a los céntrodos fijos de los móviles se usan diferentes colores. Los céntrodos son dibujados con su punto tangencial común localizado en la primera posición calculada. Esto es, los puede orientar en cualquier lugar de su elección del ángulo de inicio para el cálculo.

AlJTOSCALE Puede ser encendido o apagado en el tablero *Animation Settings.* La animación de la gráfica de eslabonamiento es normalmente autoescalada para ajustar la pantalla con base en el tamaño del eslabonamiento y sus curvas de acoplamiento (pero no de los céntrodos, ya que éstos pueden ir al infinito). Puede apagar el autoescalado cuando desee imprimir dos gráficas de diferentes eslabonamientos a la misma escala para la superposición manual posterior. Al apagar el autoescalado se retendrá el factor de escala que se usó más recientemente. Cuando lo encienda, éste reescalará cada gráfica para ajustarse a la pantalla.

TRACE Al activar *Trace* guarda todas las posiciones del eslabonamiento visibles en la pantalla, de tal manera que pueda ser visto el patrón de movimiento. Al desactivar *Trace* se borran todas las posiciones anteriores, mostrando sólo la posición actual en los ciclos del eslabonamiento a través de todas las posiciones, lo que da una vista dinámica del comportamiento del eslabonamiento.

Dinámica (FOURBAR, FIVEBAR, SIXBAR Y SLIDER pantalla *Dynamics)*

El botón *Dynamics* de la pantalla *Home* lo lleva a una pantalla que le permite introducir los datos de las masas del eslabón, momentos de inercia, localizaciones del *CG* y cualquier fuerza externa o par de torsión que actúa sobre los eslabones. La localización del *CG* de cada eslabón móvil está definida de la misma manera que el punto de acoplamiento, por un vector de posición cuyo origen está numerado en la parte inferior del centro instantáneo de cada eslabón. Esto es, para el eslabón 2 éste es $I_{1,2}$, para el eslabón 3, $I_{2,3}$; y para el eslabón **4**, $I_{1,4}$. Estos vectores para un eslabonamiento de cuatro barras se muestran en la figura *A-2a)* llamados R_{CGi}, donde *i* es el número del eslabón. Observe que el ángulo de cada vector *CG* se mide con respecto a un *sistema coordenado local rotatorio* (SCLR) cuyo origen está en el centro instantáneo mencionado y cuyo eje *x* está a lo largo de la línea de centros del eslabón. Por ejemplo, en la figura A-8a), el vector *CG* del eslabón 2 está a 3 pulg y a 30°, el del eslabón 3 está a 9 pulg y a 45°, y el eslabón 4 está a 5 pulg y a 0^o. El programa creará automáticamente los vectores de posición R_{12}, R_{32}, R_{23}, R_{43}, R_{34} y R_{14}, necesarios para las ecuaciones de fuerza dinámicas como se muestra en los diagramas de cuerpo libre de la figura *A.&b).* Estos vectores de posición son, por supuesto, recalculados en los *sistemas de coordenadas locales no rotatorio* (SCLN) en los *CG* de los eslabones para cada nueva posición del eslabonamiento conforme cambian los ángulos del eslabonamiento.

Las masas y los momentos de inercia con respecto a los *CG* de los eslabones móviles también son necesarios. Cualquier fuerza externa o par de torsión que se aplique a los eslabones 3 o 4 se escribe en los cuadros apropiados de la pantalla *Dynamics,* como se muestra en la figura A-9. El ángulo de dirección de cualquier fuerza externa debe ser

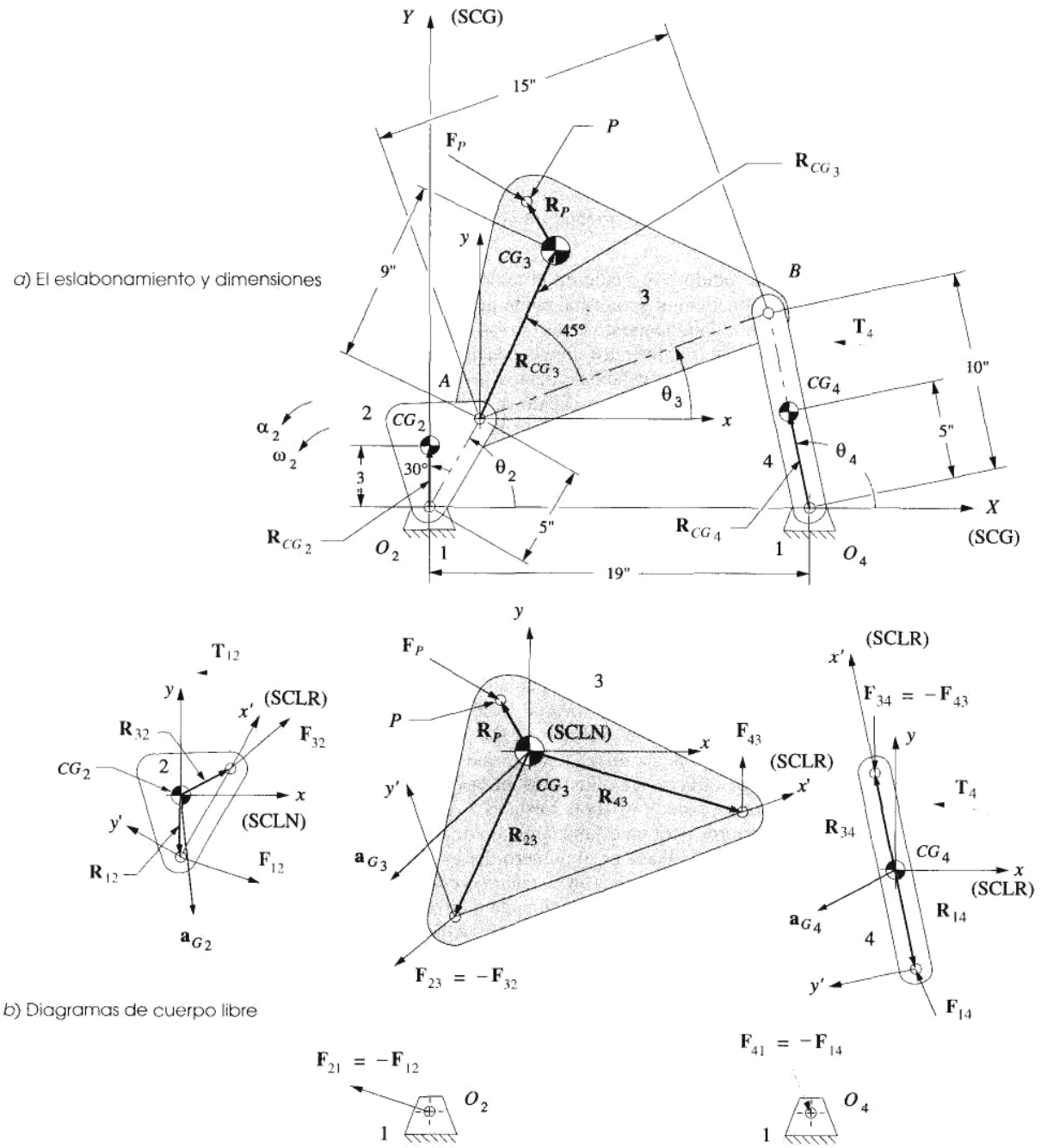


FIGURA A-8

Definición de los datos necesarios para los cálculos dinámicos en el programa FOURBAR

medido con respecto al *sistema coordenado global* (SCG). El programa supondrá que este ángulo permanece constante para todas las posiciones de los eslabonamientos analizados. Usted también debe proporcionar la magnitud y dirección del vector de posición R_p, el cual localiza cualquier punto del vector fuerza F_p. Este vector R_p se mide en el *sistema coordenado local rotatorio* (SCLR) incrustado en el eslabón, como lo están los *CG* de los eslabones. R_p *no* se mide en sistema global. El programa toma en cuenta la resolución de los vectores R_p, para cada posición del eslabonamiento en las coordenadas del sistema coordenado local no rotatorio en el *CG*. Observe que si desea considerar la fuerza gravitacional de un eslabón pesado, puede aplicar el peso como una fuerza externa actuando a través del *CG* a 270° en el sistema global($\mathbf{R}_p = 0$).

Para otros eslabonamientos tales como los de cinco barras, seis barras y cuatro barras de manivela-corredera, la introducción de los datos dinámicos es similar. La única diferencia es el número de eslabones para los cuales se deben proporcionar los datos de propiedades de masa, fuerzas externas posibles y pares de torsión.

Después de resolver (oprimiendo el botón *Solve)* oprima el botón *Show Matriz,* que desplegará la matriz dinámica para el eslabonamiento. Los resultados de los cálculos dinámicos son almacenados automáticamente para su graneado e impresión posteriores. Los menús de las pantallas *Plot y Print* se expandirán a fin de incluir fuerzas y pares de torsión para todos los eslabones.

Equilibramiento (sólo en el programa FOURBAR)*

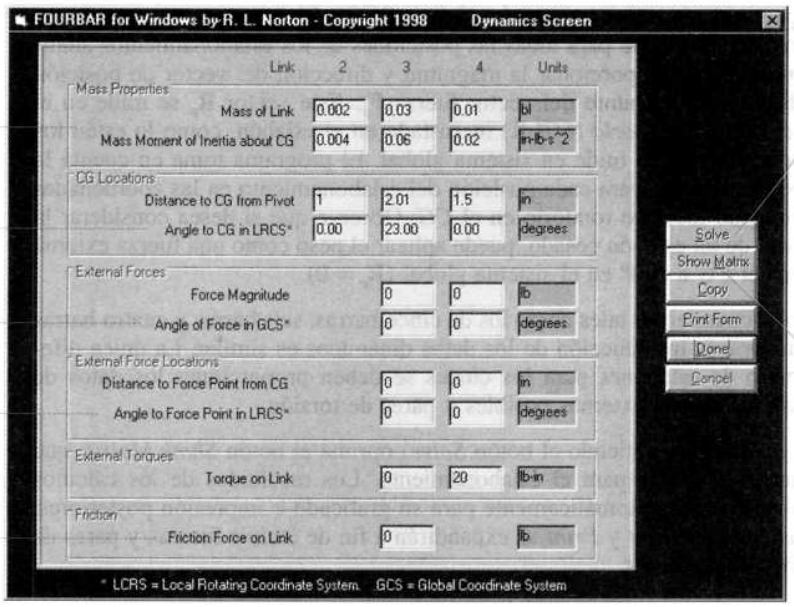
El botón *Balance* en la pantalla *Home* del programa FOURBAR le lleva a la pantalla *Balance* que se muestra en la figura A-10, que inmediatamente despliega los productos masa-radio necesarios para los eslabones 2 y 4 con el fin de equilibrar la fuerza y reducir la fuerza de sacudimiento a cero. Si coloca la cantidad total de los productos calculados de masa-radio en los eslabones rotatorios, la fuerza de sacudimiento será cero y el par de torsión de sacudimiento aumentará. Una condición de equilibrio parcial puede ser especificada al reducir el equilibrio de masas y aceptar algunas fuerzas de sacudimiento distintas de cero en respuesta de un pequeño aumento en el par de torsión.

La pantalla *Balance* del programa FOURBAR en la figura A-10 despliega dos minigráficas pequeñas que superponen las fuerzas de sacudimiento y los pares de torsión de sacudimiento antes y después del equilibrio. Los efectos sobre la fuerza de sacudimiento y del par de torsión, a partir de los cambios en la cantidad de equilibrio del producto masa-radio colocados en cada eslabón, pueden ser vistos inmediatamente en estas gráficas. La energía en cada pulso de la curva par de torsión-tiempo también es desplegada en el lado derecho de esta pantalla para usarla en el cálculo del dimensionamiento de un volante. Véase la sección 11.11 para un análisis del significado y uso de los datos. El programa calcula una función del par de torsión suavizado al multiplicar el par de torsión por el coeficiente de fluctuación especificado en el cuadro en la parte inferior izquierda.

Cognados (sólo en el programa FOURBAR)

El menú *Cognates* permite cambiar entre los tres cognados que crean la misma curva del acoplador. Al cambiar entre ellos requiere volver a calcular todos los parámetros cinemáticos y dinámicos a través de los botones *Input, Dynamics* y *Balance.* La propiedad de masa usada previamente se retiene pero puede cambiar fácilmente seleccionando el botón *Dynamics.* El menú *Cayley Diagram* debajo de *Cognates* despliega el diagrama de los

* El programa ENGINE también permite equilibrar pero su pantalla *Balance* es completamente diferente a la del programa FOURBAR, por lo que se analizará en forma separada en la sección del programa ENGINE.



Aquí sea cauteloso con sus unidades

Observe el sistema coordenado local de rotación

Observe el sistema coordenado global

Observe el sistema coordenado local de rotación

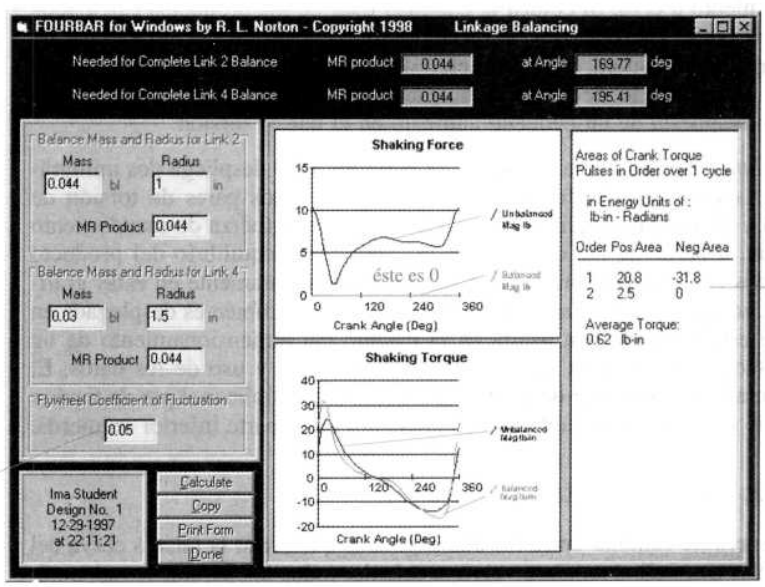
Éste actúa en un punto de acoplamiento

Calcula todas las fuerzas y pares de torsión

Despliega la matriz de parámetros dinámicos (ec. 11.9)

FIGURA A-9

Pantalla *Dynamic Data Input* del programa FOURBAR. Las pantallas para los programas FIVEBAR, SIXBAR y SLIDER son similares



Calculada con la ecuación 12.8

Introduce un valor deseado, por default no se escribe cuando es mayor que los valores de los productos MR

Introduce un valor entre 0 y 1; se usa para generar una curva del par de torsión del volante

Éstos son de una integración por partes de una curva equilibrada del par de torsión en la parte izquierda inferior; véase la sección 11.11

FIGURA A-10

Pantalla de *Linkage Balancing* sólo en el programa FOURBAR. Otros programas permiten cálculos de volante

otros tres cognados. Véase el capítulo 3. Siempre que los datos del eslabonamiento estén cambiados y recalculados en la pantalla *Input,* el programa calculará automáticamente las dimensiones de los eslabonamientos de los dos cognados. Éstos pueden ser activados, calculados e investigados en cualquier tiempo.

Synthesis (sólo en el programa FOURBAR)

Este menú permite la selección de dos o tres síntesis de posición de un eslabonamiento, cada una con una elección por dos métodos. Véase el capítulo 5 para un análisis de estos métodos y deducciones de las ecuaciones usadas. Cuando el eslabonamiento es sintetizado, la geometría del eslabón es puesta automáticamente en la hoja y se requiere el recálculo.

Otros

Véase la sección A.2, Operación general de los programas para información sobre las funciones *New, Open, Save, Save As, Plot, Print, Units y Quit.*

A.4 PROGRAMA FIVEBAR

FIVEBAR *para Windows* es un programa de diseño y análisis de eslabonamientos hecho para estudiantes, ingenieros y otros profesionales que conocen o están aprendiendo el arte y la ciencia del diseño de eslabonamientos. Se supone que el usuario sabe cómo determinar si un diseño de eslabonamiento es bueno o malo si es apropiado para la aplicación que se desea. El programa calculará los datos cinemáticos y dinámicos asociados con cualquier diseño de eslabonamiento de cinco barras engranado, pero no puede sustituir el juicio de ingeniería del usuario. La teoría y las matemáticas del eslabonamiento en las que se basa este programa están documentadas en los capítulos 4 a 7 y 11 de este libro. Por favor consúltelas para explicaciones de la teoría y las matemáticas relacionadas.

La pantalla *Home* del programa FIVEBAR

Inicialmente, sólo se activan los botones *Input* y *Quit* en la pantalla *Home.* Por lo común usted iniciará un diseño de eslabonamiento con el botón *Input,* pero para una vista rápida de un eslabonamiento como lo dibuja el programa se puede seleccionar uno de los ejemplos del menú *Example* y se dibujará un eslabonamiento. Si usted activa uno de estos ejemplos, cuando regrese de la pantalla *Anímate* encontrará que se han activado todos los otros botones de la pantalla *Home.* Cada uno de estos botones se describirán posteriormente.

Introducción de datos (pantalla *Inpuf)*

Debido a que este programa trata con mecanismos de cinco barras engranados (MCBE), requiere más datos de entrada que el mecanismo de cuatro barras. Se deben proporcionar las longitudes de los cinco eslabones como se muestra en la figura A-11: manivela impulsora (eslabón 2), primer acoplador (eslabón 3), segundo acoplador (eslabón 4), manivela impulsada (eslabón 5) y de fijación (eslabón 1). Los otros parámetros de eslabonamiento deben estar definidos como entradas, a saber, la relación de engrane (λ) y el ángulo de fase (ϕ). El ángulo de fase está definido como el ángulo del eslabón 5 cuando el eslabón

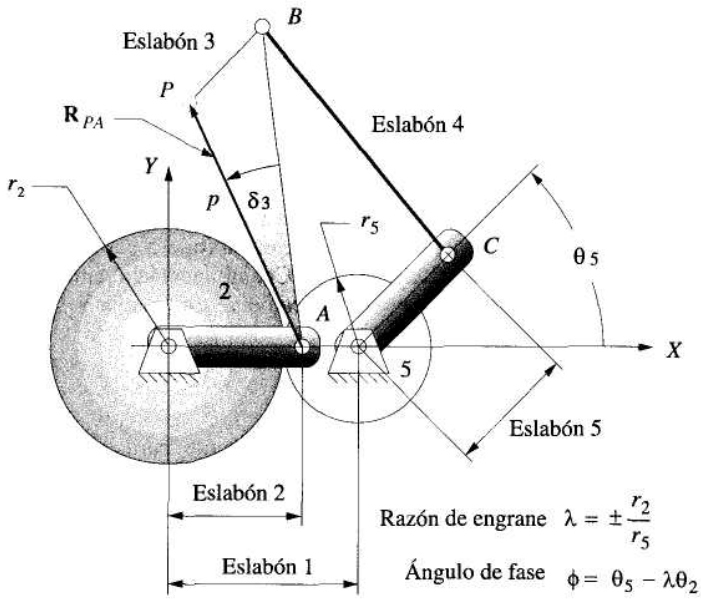


FIGURA A-11

Datos de entrada para el programa FIVEBAR. (Abra el archivo de disco F_A-11.5br en el programa FIVEBAR para ver estos eslabonamientos.)

2 está a 0° como se muestra en la figura A-l 1. Observe que la relación de engrane, como se muestra en la figura, es una *razón negativa,* ya que los engranes externos se mueven en direcciones opuestas. Al agregar un engrane loco creará una relación de engrane positiva. También vale la pena observar que las relaciones de engranes definidas en el *ZNH Atlas of Geared Fivebar Linkages* (apéndice E) son las recíprocas de las relaciones de engrane del programa FIVEBAR. Así, cuando se transfieren datos desde este atlas al programa, la relación de engrane debe ser recíproca con el fin de obtener el mismo eslabonamiento que se muestra en el atlas. Por otra parte la curva del acoplador será una imagen de espejo de las del atlas.

El punto del acoplador *P* se define de la misma manera que en el eslabonamiento de cuatro barras. Un punto del acoplador sólo puede ser colocado en el eslabón 3 en este programa. Si usted quiere un punto del acoplador en el eslabón 4, haga una imagen de espejo del eslabonamiento y renumere los eslabones para poner el punto del acoplador sobre el eslabón 3.

Los datos básicos para el eslabonamiento de cinco barras se definen en la pantalla *Input* que es similar a aquella de FOURBAR mostrada en la figura A-6. La pantalla *Input* se activa al seleccionar el botón *Input* en la pantalla *Home.* Cuando usted abre esta pantalla por primera vez, tendrá datos por default para todos los parámetros del eslabón. Usted puede cambiar cualquiera de éstos escribiendo sobre los datos en los cuadros de texto amarillos.

Seleccione el tipo de cálculo deseado en la esquina superior derecha de la pantalla, en *Angle Steps, Time Steps,* o *One Position.* El botón *Calculate* calculará todos los datos

para su eslabonamiento y mostrará a éste en una posición arbitraria en la pantalla. Si la ventana en blanco del eslabonamiento está vacía, el botón *Calcúlate* le regresará la imagen. Véase el análisis de los cálculos para el programa FOURBAR en la sección A.3. Son similares en el programa FIVEBAR.

Después de calcular el eslabonamiento, los botones *Anímate y Done* de la pantalla *Input* estarán disponibles. *Anímate* lo lleva a la pantalla *Anímate* donde usted puede correr el eslabonamiento a través de cualquier rango de movimiento para observar su comportamiento. También puede cambiar cualquiera de los parámetros del eslabonamiento en la pantalla *Anímate* y después recalcular los resultados con el botón *Recale.* El botón *Done* en la pantalla *Input* o en la *Anímate* le regresará a la pantalla *Home.* Los botones *Plot* y *Print* estarán ahora disponibles así como el botón *Anímate,* el cual lo regresa a la pantalla *Anímate.*

Animation (programa FIVEBAR)

En el programa FIVEBAR, la pantalla *Animation* y sus características son esencialmente similares a las del programa FOURBAR. La única excepción es la falta de la selección del céntrodo en el programa FIVEBAR. Véase el análisis *Animation* para el programa FOURBAR en la sección A-3 para más información.

Dynamics (pantalla *Dynamics* del programa FIVEBAR)

Los datos de entrada para el cálculo dinámico en el programa FIVEBAR son similares a los del programa FOURBAR con un eslabón agregado. Sin embargo, el equilibrio del eslabonamiento no está disponible en el programa FIVEBAR. Véase el análisis de los cálculos dinámicos para el programa FOURBAR en la sección A-3 para más información.

Otros

Véase la sección A.2, Operación general de los programas para información sobre las funciones *New, Open, Save, Save As, Plot, Print, Units y Quit.*

A.5 PROGRAMA SIXBAR

SIXBAR *para Windows* es un programa de diseño y análisis de eslabonamientos pensado para el uso de estudiantes, ingenieros y otros profesionales que conocen o están aprendiendo el arte y ciencia del diseño de eslabonamientos. Se supone que el usuario sabe cómo determinar si un diseño de eslabonamiento es bueno o malo y si es adecuado para la aplicación que desea. El programa calculará los datos cinemáticos y dinámicos asociados con cualquier diseño de eslabonamiento pero no puede sustituir el juicio de ingeniería del usuario. La teoría y matemáticas del eslabonamiento en las que se basa este programa están documentadas en los capítulos 4 a l 0 y l l d e este texto. Por favor consúltelos para explicaciones de la teoría y matemáticas relacionadas.

El programa SIXBAR en general es similar al programa FOURBAR. Éste analizará los eslabonamientos isómeros de **Watt II y** de **Stephenson III** como se definen en la figura 2-14. Éstos son dos de los cinco isómeros de seis barras distintos. El mecanismo de **Watt II** se muestra en la figura A-12 con los parámetros de entrada al programa definidos. El mecanismo de **Stephenson III** se muestra en la figura A-5 con sus parámetros de entrada definidos. Observe que el programa divide las seis barras en dos etapas de eslabonamien-

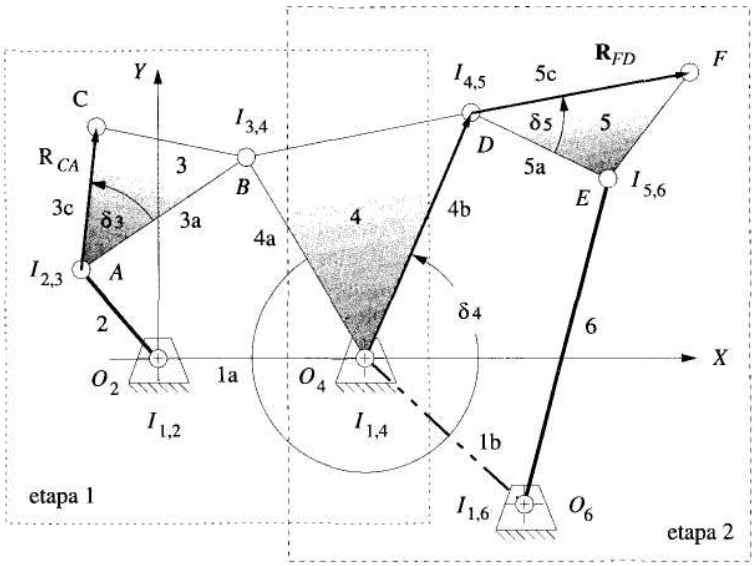


FIGURA A-12
Datos de entrada del programa SIXBAR. Eslabonamiento de Watt II

tos de cuatro barras. La etapa 1 está a la mitad del mecanismo como se muestra en las figuras A-12 y A-5. La etapa 2 está en la mitad derecha. El eje *X* del sistema coordenado global se define por los centros instantáneos /, $_2$ e /, $_4$ con su origen en /, $_2$. El tercer pivote fijo /, $_6$ puede estar en cualquier lugar en el plano. Sus coordenadas deben ser dadas como entrada.

Pantalla *Home* del programa SIXBAR

Inicialmente, sólo están activados los botones *Input* y *Quit* en la pantalla *Home.* Por lo común usted iniciará un diseño de eslabonamiento con el botón *Input,* pero para una vista rápida de un eslabonamiento como se dibuja en el programa, puede seleccionar uno de los ejemplos del menú *Example* y se dibujará un eslabonamiento. Si usted activa uno de estos ejemplos, cuando regrese de la pantalla *Anímate* encontrará activados todos los otros botones de la pantalla *Home.* Cada uno de estos botones se describirán a su debido tiempo posteriormente.

El menú *Examples* de la pantalla *Home* incluye las etapas de los eslabonamientos de cuatro barras en línea recta de Watt y Robert impulsados por díadas (haciéndolos de seis barras), un eslabonamiento de seis barras con un solo detenimiento, similar al del ejemplo 3-13 y de la figura 3-31, y un eslabonamiento de seis barras con doble detenimiento que usa un enfoque alternativo al del ejemplo 3-14 y de la figura 3-32.

Datos de entrada (pantalla *Input* del programa SIXBAR)

Muchos de los datos básicos para el diseño de eslabonamientos están definidos en la pantalla *Input* que se activa al seleccionar el botón *Input* de la pantalla *Home.* Cuando

usted abre la pantalla por primera vez, ésta tendrá datos por default para todos los parámetros del eslabón. Usted puede cambiar cualquiera de estos parámetros escribiendo sobre los datos en los cuadros de texto amarillos. Debe hacerse una elección del eslabonamiento de Watt o de Stephenson en la pantalla *Input*. La información del eslabón difiere para los eslabonamientos de Watt y de Stephenson.

ESLABONAMIENTO DE WATT II Para el eslabonamiento de Watt (figura A-12) los datos de la etapa 1 son: manivela, primer acoplador, primer balancín y el segmento del eslabón de fijación para centros instantáneos $I_{1,2}$ a $I_{1,4}$. Éstos corresponden a los eslabones 2, 3a, 4a y la, respectivamente, como se indican en la figura A-12. Los datos de la etapa 2 son: segunda manivela, segundo acoplador, segundo balancín, correspondientes respectivamente a los eslabones 4b, 5a y 6 en la figura A-12. El ángulo δ_4 que hace la segunda manivela (4b) con el primer balancín (4a) es también necesario. Observe que este ángulo obedece la regla de la mano derecha como lo hacen todos los ángulos en estos programas.

En este eslabonamiento se permite definir dos puntos de acoplador, uno en el eslabón 3 y uno en el eslabón 5. El método de localización es mediante coordenadas polares de un vector de posición insertado en el eslabón como se hizo para los eslabonamientos de cuatro y cinco barras. El primer punto de acoplador *C* está en el eslabón 3 y está definido de la misma manera que en el programa FOURBAR. El programa SlXBAR requiere la longitud (3c) de su vector de posición R_{CA} y el ángulo δ_3 que forma el vector con la línea 3a en la figura A-12. El segundo punto de acoplador *F* está en el eslabón 5 y está definido con un vector de posición $\mathbf{R}_{FD}$ originado en el centro instantáneo $I_{4,5}$. El programa requiere la longitud (5c) de este vector de posición $\mathbf{R}_{FD}$ y del ángulo 8_5 que hace el vector con la línea 5a. Las componentes *X* y y de la localización de los tres pivotes fijos $I_{1,6}$ también son necesarias. Éstas están con respecto al sistema de ejes global *X,Y* cuyo origen está en $I_{1,2}$.

ESLABONAMIENTO DE STEPHENSON III Los datos de la etapa 1 para el eslabonamiento de Stephenson son similares a los del eslabonamiento de Watt. La primera etapa de la manivela, del primer acoplador, del primer balancín y del segmento del eslabón de fijación de los centros instantáneos $I_{1,2}$ al $I_{1,4}$ corresponden a los eslabones 2, 3a, 4 y la, respectivamente, en la figura A-13. Las longitudes de los eslabones en la etapa 2 del eslabonamiento son: la del segundo acoplador y la del segundo balancín que corresponden, respectivamente, a los eslabones 5a y 6 en la figura A-13.

Observe que, al contrario del eslabonamiento de Watt no hay una "segunda manivela" en el eslabonamiento de Stephenson, ya que la segunda etapa está impulsada por el acoplador (eslabón 3) de la primera etapa. En este programa el eslabón 5 está restringido a estar conectado al eslabón 3 en el punto de acoplamiento definido por *C* del eslabón 3 que estará en el centro instantáneo $I_{3,5}$. Los datos para este eslabonamiento se piden en un formato similar al eslabonamiento de Watt, a saber, la longitud del vector de posición $\mathbf{R}_{CA}$ (línea 3c) y su ángulo δ_3. La localización del segundo punto de acoplamiento en el eslabón 5 se define, como antes, por el vector de posición K_{FC} con la longitud 5c y ángulo δ_5.

Se necesitan las componentes *X y Y* de la localización del tercer pivote fijo $I_{1,6}$. Éstas son con respecto al sistema global de ejes *X* y *Y*.

Seleccione el tipo de cálculo deseado en la esquina superior derecha de la pantalla, de una de las selecciones, *Angle Steps, Time Steps* o *One Position.* El botón *Calcúlate* calculará todos los datos para su eslabonamiento y mostrará a éste en una posición arbitraria en la pantalla. Si en cualquier tiempo la ventana de eslabonamiento que se desplie-

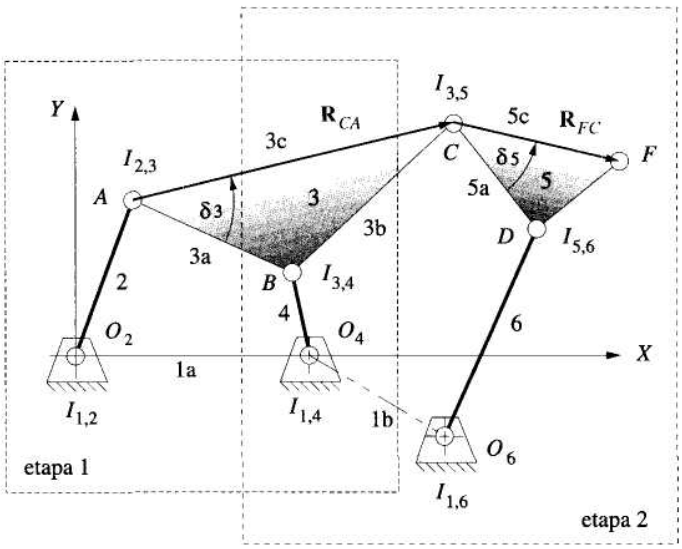


FIGURA A-13

Datos de entrada del programa SIXBAR. Eslabonamiento de Stephenson III

ga está vacía, el botón *Calcúlate* traerá de regreso la imagen. Véase la descripción de los cálculos para el programa FOURBAR en la sección A.3. Esto es similar en el programa SIXBAR.

Después de que haya calculado el eslabonamiento, los botones *Anímate* y *Done* de la pantalla *Input* estarán disponibles. *Anímate* lo lleva a la pantalla *Anímate,* donde usted puede correr el eslabonamiento a través de cualquier rango de movimiento para observar su comportamiento. También puede cambiar cualquiera de los parámetros de eslabonamiento en la pantalla *Anímate* y después recalcular los resultados con el botón *Recale.* El botón *Done,* ya sea en la pantalla *Input* o en la *Anímate* lo regresa a la pantalla *Home.* Los botones *Plot* y *Print* estarán disponibles también con el botón *Anímate* el cual lo regresa a la pantalla *Anímate.*

Animation (programa SIXBAR)

La pantalla *Animation* y sus características en el programa SIXBAR son esencialmente similares a las del programa FOURBAR. La única excepción es la falta de una selección para *Centrode* en el programa SIXBAR. Véase el análisis de Animation para el programa FOURBAR en la sección A.3 para más información.

Dinámica (pantalla *Dynamics* del programa SIXBAR)

Los datos introducidos para el cálculo dinámico en el programa SIXBAR son similares a los del programa FOURBAR pero con dos eslabones más. Véase el análisis de los cálculos dinámicos para el programa FOURBAR en la sección A.3 para más información.

Otros

Véase la sección A.2, Operación general de los programas, donde se proporciona información sobre las funciones *New, Open, Save, Save As, Plot, Print, Units* y *Quit.*

A.6 PROGRAMA SLIDER

SLIDER *para Windows* es un programa de diseño y análisis de eslabonamientos diseñado para estudiantes, ingenieros y otros profesionales que conocen o están aprendiendo el arte y la ciencia del diseño de eslabonamientos. Se supone que el usuario sabe cómo determinar si un diseño de eslabonamiento es bueno o malo y si es adecuado para la aplicación que desea. El programa calculará los datos cinemáticos y dinámicos asociados con cualquier diseño de eslabonamiento, pero no puede sustituir el juicio de ingeniería del usuario. La teoría y matemáticas del eslabonamiento en las que se basa este programa están documentadas en los capítulos 4 a 10 y 11 de este texto. Por favor consúltelos para explicaciones de la teoría y las matemáticas relacionadas.

La pantalla *Home* del programa SLIDER

Inicialmente, sólo están activados los botones *Input* y *Quit* en la pantalla *Home.* Por lo común usted iniciará un diseño de eslabonamiento con el botón *Input,* pero para una vista rápida de un eslabonamiento como lo dibuja el programa, seleccione uno de los ejemplos del menú *Example* y se dibujará un eslabonamiento. Si usted activa uno de estos ejemplos, cuando regrese de la pantalla *Anímate* encontrará activados todos los otros botones de la pantalla *Home.* Cada uno de estos botones se describirá posteriormente.

Entrada de datos (pantalla *input* del programa SLIDER)

Los datos básicos para el eslabonamiento de seis barras están definidos en la pantalla *Input,* que se activa al seleccionar el botón *Input* en la pantalla *Home.* Cuando usted abre esta pantalla por primera vez, tendrá datos por default para todos los parámetros del eslabón. Usted puede cambiar cualquiera de éstos escribiendo sobre los datos en los cuadros de texto amarillos.

En la figura A-14 se definen los parámetros para los eslabonamientos de cuatro barras de manivela corredera. Es necesario introducir las longitudes del eslabón 2 y del eslabón acoplador 3, definidas por sus distancias de pasador a pasador y señalados con *a* y *b* en la figura. El eje *X* está a lo largo de la línea *d,* a través del centro instantáneo $I_{1,2}$ (punto O_2) y paralelo a la dirección de movimiento del deslizador 4. El centro instantáneo $I_{1,2}$ el pivote de la manivela impulsora, es el origen del sistema coordenado global. El corrimiento de la corredera *c* es la distancia perpendicular desde el eje *X* al eje de la corredera. La posición de la corredera *d* será calculada para todas las posiciones del eslabonamiento.

Además de las longitudes de los eslabones se debe proporcionar la localización de un punto de acoplador del eslabón 3 para encontrar las curvas de posición de los puntos de acoplador, velocidades y aceleraciones. Este punto está localizado por un vector de posición con origen en $I_{2,3}$ (punto A) y dirigido hacia el punto de acoplador *P* de interés, que puede ser cualquiera sobre el eslabón 3. El programa necesita que se le introduzcan las

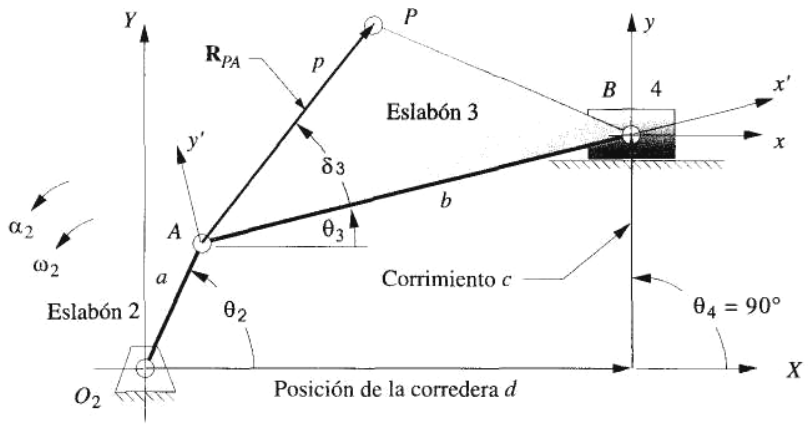


FIGURA A-14
Datos de entrada del programa SLIDER

coordenadas polares señaladas como p y δ_3 en la figura A-14. El programa necesita la distancia desde $I_{2,3}$ al punto de acoplador p y el ángulo δ_3 que forma el punto de acoplador con el eslabón 3. Observe que el ángulo δ_3 no está relacionado con el sistema coordenado global *X,Y* o el sistema coordenado local no rotatorio *x,y* en el punto *A*. Más bien, éste está relacionado con la línea *AB* que es la longitud entre pasador y pasador del eslabón 3. El ángulo δ_3 es una propiedad del eslabón 3 y está incrustado en él. El ángulo en el que se localiza el vector $\mathbf{R}_{CA}$ en el sistema coordenado *x,y*, es la suma del ángulo δ_3 y el ángulo θ_3. Esta suma se realiza en el programa y después se calcula θ_3 para cada posición de la manivela de entrada.

La definición de 9_3 es diferente en el programa SLIDER que en la figura 4-9 y en las deducciones de la sección 4.6. Esto fue hecho para conservar la consistencia de los datos de entrada entre todos los programas de eslabonamiento de este paquete. Realmente, en el programa SLIDER, el ángulo mostrado en la figura A-14, que usted introdujo como 0_3, se convierte usando la ley de los cosenos a como se muestra en la figura 4-9 antes de hacer los cálculos con las ecuaciones de la sección 4.6.

Cálculo (pantalla *Input* del programa SLIDER)

Véase la descripción de los cálculos para el programa FOURBAR en la sección A. 3 para más información. Éstos son similares en el programa SLIDER. Seleccione el tipo de cálculo deseado en la esquina superior derecha de la pantalla, de una de las selecciones, *Angle Steps, Time Steps* o *One Position.* El botón *Calcúlate* calculará todos los datos para su eslabonamiento y mostrará a éste en una posición arbitraria sobre la pantalla. Si en cualquier tiempo la ventana blanca del eslabonamiento está vacía, el botón *Calcúlate* traerá de regreso la imagen.

Después de que haya calculado el eslabonamiento, los botones *Animate* y *Done* de la pantalla *Input* estarán disponibles. *Animate* lo lleva a la pantalla *Animate,* donde usted puede correr el eslabonamiento a través de cualquier rango de movimiento para observar su comportamiento. También puede cambiar cualquiera de los parámetros del eslabona-

miento en la pantalla *Anímate* y después recalcular los resultados con el botón *Recale.* El botón *Done* en la pantalla *Input* o *Anímate* lo regresa a la pantalla *Home.* Ahora los botones *Plot* y *Print* estarán disponibles, así como el botón *Anímate,* el cual lo regresará a la pantalla *Anímate.*

Animación (pantalla *Animation* del programa SLIDER)

La pantalla *Animation* y sus características en el programa SLIDER son esencialmente similares a las del programa FOURBAR. Una excepción es la falta de la selección *Centrode* en el programa SLIDER. Véase el análisis de la pantalla *Animation* para el programa FOURBAR en la sección A.3 para más información.

Dinámica (pantalla *Dynamics* del programa SLIDER)

Los datos de entrada para el cálculo dinámico en el programa SLIDER son similares a los del programa FOURBAR. Véase el análisis de los cálculos dinámicos para el programa FOURBAR en la sección A.3 para más información.

Otros

Véase la sección A.2, Operación general de los programas para información sobre las funciones *New, Open, Save, Save As, Plot, Print, Units* y *Quit.*

A.7 PROGRAMA DYNACAM

DYNACAM *para Windows* es un programa de diseño y análisis de levas diseñado para estudiantes, ingenieros y otros profesionales que conocen el arte y ciencia del diseño de levas. Se supone que el usuario sabe cómo determinar si un diseño de levas es bueno o malo y si éste es adecuado para la aplicación que desea. El programa calculará los datos cinemáticos y dinámicos asociados con cualquier diseño de levas pero no puede sustituir el juicio de ingeniería del usuario. La teoría y matemáticas de las levas en las que se basa este programa se muestran en los capítulos 8 y 15 de este texto. Por favor consúltelos para explicaciones completas de la teoría y matemáticas relacionadas.

La pantalla *Home* del programa DYNACAM

Inicialmente, sólo los botones *SVAJ y Quit* están activados en la pantalla *Home.* Por lo común usted iniciará un diseño de levas con el botón *SVAJ,* pero para una vista rápida de cómo dibuja una leva el programa seleccione uno de los ejemplos del menú *Example* y éste dibujará el perfil de una leva. Si activa uno de estos ejemplos, cuando regrese de la pantalla *Cam profile* encontrará que todos los otros botones de la pantalla *Home* están activos. Cada uno de estos botones se describirán posteriormente.

Entrada de datos (pantalla *Input* del programa DYNACAM)

Muchos de los datos básicos para el diseño de levas están definidos en la pantalla *Input* que se muestra en la figura A-15, que se activa al seleccionar el botón *SVAJ* de la pantalla *Home.* Cuando usted abre esta pantalla por primera vez estará casi vacía, con sólo un segmento de renglón visible. (Observe que los ejemplos preconstruidos también pueden

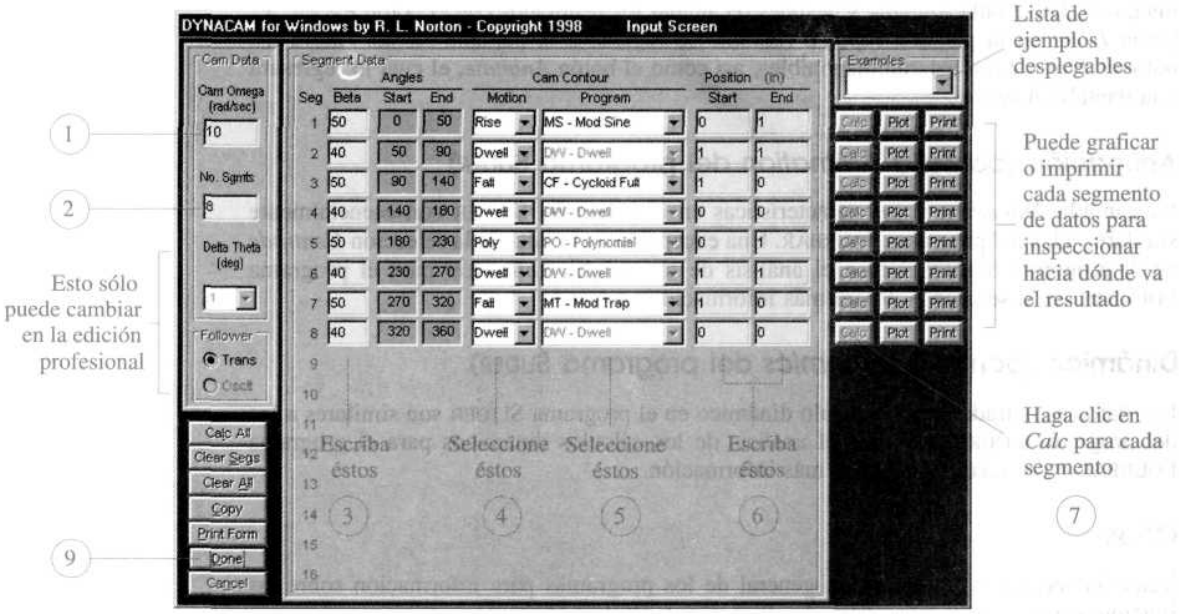


FIGURA A-15

Pantalla *Input S V A J* para el programa DYNACAM

ser accesados de esta forma desde la esquina superior derecha.) Si usted selecciona un ejemplo de leva desde el menú de la pantalla *Home,* haciendo que la pantalla *Input* no esté vacía, por favor seleccione ahora el botón *Clear All* de la pantalla *Input,* esto hará cero todos los datos y vaciará la pantalla, con el fin de una mejor presentación posterior. Procederemos con la explicación de cómo introducir los datos en la pantalla *Input,* inicialmente en blanco.

Si usa el botón *Tab,* éste lo llevará a través de los pasos necesarios para introducir todos los datos. En una pantalla *Input* vacía, oprima el primer *Tab* en el cuadro *Cam Omega* en la esquina superior izquierda y escriba la velocidad del árbol de levas. Oprima nuevamente *Tab* (u oprima el ratón si lo prefiere) en el cuadro *Number of Segments* y escriba cualquier número deseado entre 1 y 16. El número de renglones será inmediatamente visible en la pantalla *Input.* Observe que algunas de las elecciones de esta pantalla tal como *Osclt* (oscilación del seguidor del brazo) y *Delta Theta* están desactivadas en la edición del programa para estudiantes.

Otro *Tab* pondrá al cursor en el cuadro para la *Beta* (duración del segmento de ángulo) del segmento 1. Escriba cualquier ángulo deseado (en grados). Los *Tabs* sucesivos lo llevarán a cada cuadro *Beta* para escribir los ángulos deseados. Todos los *Beta* deben, por supuesto, sumar 360 grados. Si no es así aparecerá una advertencia. w»i««_

Conforme usted continúe presionando *Tab* (o si prefiere, oprimiendo con el ratón en el cuadro apropiado), llegará a los cuadros para la selección *Motion.* Estos cuadros ofrecen la selección de *Rise, Fall, Poly* y *Dwell.* Usted puede seleccionar de los menús con el ratón, o puede escribir la primera letra de cada palabra para seleccionarlo. Rise, fall y

dwell tienen significados obvios. La selección Poly indica que usted desea crear una función polinomial usual para ese segmento, y esto ocasionará posteriormente que aparezca una nueva pantalla en la que usted definirá las nuevas condiciones de frontera de su función polinomial deseada.

El siguiente conjunto de elecciones a los que usted llegará con *Tab* u oprimiendo el ratón son los menús program. Éstos proporcionan un menú de funciones usuales de levas tales como *Modified Trapezoid, Modified Sine y Cycloid.* También se incluyen partes de funciones tales como la primera y segunda mitades de *cicloides* y armónicas simples que se pueden usar para ensamblar funciones continuas parte por parte para situaciones especiales. Véase el capítulo 8 para información adicional.

Después de seleccionar las funciones deseadas de *Program* para cada segmento, con *Tab* u *oprima con el ratón* los cuadros *Position Start y End. Start* en este contexto se refiere a la posición del desplazamiento inicial para el seguidor en el segmento en particular y *End* para su posición final. Usted puede empezar en la "parte superior" o "parte inferior" de la "montaña" del desplazamiento que desee, pero esté consciente de que los valores de posición del rango del seguidor deben ser desde un valor igual a cero a un valor positivo por encima de la leva completa. En otras palabras, usted no puede incluir cualquier base anticipada o radio del círculo principal en esta posición de datos. Los números de esta posición representan el viaje del así llamado diagrama *S* (desplazamiento) de la leva y no puede incluir cualquier información del círculo principal (la cual se introducirá posteriormente).

Conforme se completa cada renglón (segmento) de entrada de datos, el botón *Cale* para ese renglón quedará desactivado. Al oprimir sobre este botón los datos del segmento *S, V, A y J* serán calculados y almacenados. Después se oprime el botón *Cale* para cualquier renglón, los botones *Plot y Print* para ese segmento estarán disponibles. Oprimiendo estos botones lo llevarán a una gráfica o a una tabla impresa de datos para *S, V, A, J,* sólo para ese segmento. Posteriormente se pueden obtener gráficas más detalladas e impresiones de la pantalla *Home.*

Funciones polinomiales

Si cualquiera de sus segmentos especifican un movimiento *Poly,* oprimiendo el botón *Calc* lo llevará a la pantalla *Boundary Condition* que se muestra en la figura A-16. El cursor estará en el cuadro *Number of Conditions Requested.* Escriba el número de condiciones de frontera (CF) deseado, que deben estar entre 2 y 20 inclusive.

Cuando presione *Enter* o *Tab,* u oprima el ratón fuera de este cuadro, se activará el resto de la pantalla, permitiéndole escribir los valores deseados de las CF. Observe que los valores iniciales y finales de la posición que escribió en la pantalla *Input* ya están introducidas en sus respectivos cuadros de condiciones de frontera *S* en el inicio y final de cada segmento. Escriba sus condiciones adicionales extremas de cada intervalo sobre *V, A y J* como usted desee. Si necesita también algunas CF dentro del intervalo, oprima o vaya con la tecla tab a uno de los cuadros en el renglón *Local Theta,* en la parte superior de la pantalla, y escriba en él el valor del ángulo al cual desea proporcionar una CF. Esa columna se activará y podrá escribir cualquiera de las CF adicionales que necesite.

El cuadro *Number of Conditions Selected* toma en consideración las CF, y al acoplarse con el *Number of Conditions Request* estará disponible el botón *Done.* Observe que si trata de escribir en cualquier cuadro de texto (amarillo) no podrá hacerlo hasta que

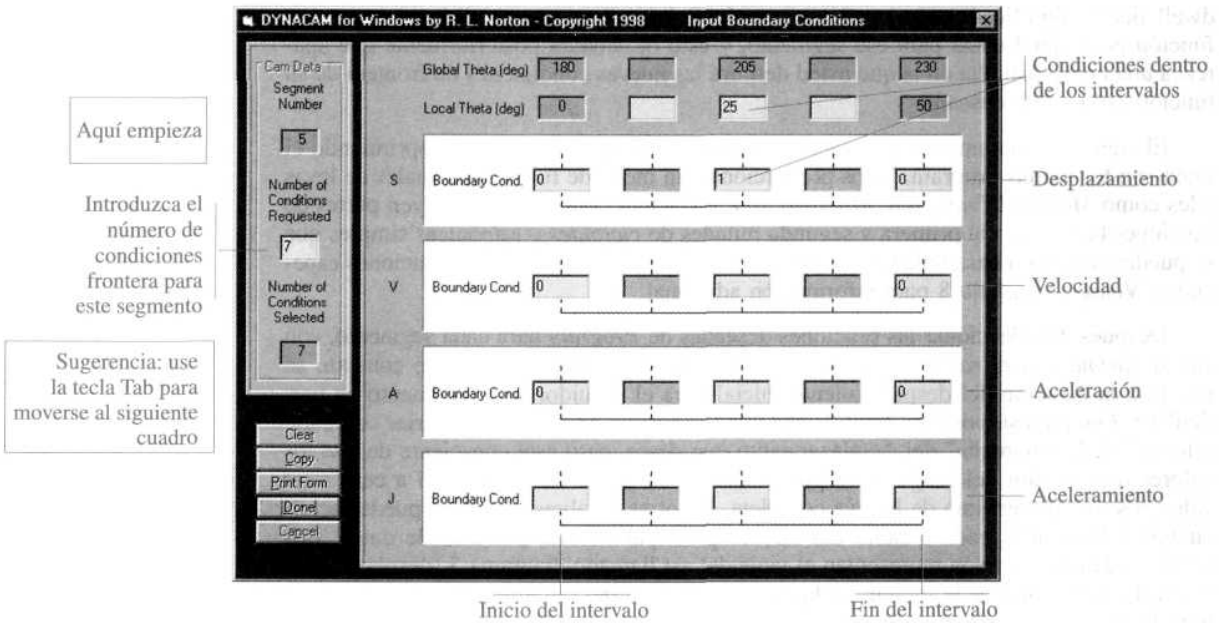


FIGURA A-16

Pantalla *Boundary Condition Input* para funciones polinomlales en el programa DYNACAM 3-4-5-6 se muestra una función de un solo detenimiento

oprima la tecla *Enter* o se mueva fuera del cuadro con la tecla *Tab* o con el ratón, permitiéndole reescribir o borrar sin ningún efecto hasta que salga del cuadro de texto. (Esto es generalmente válido a lo largo de todo el programa.)

Al seleccionar el botón *Done* de la pantalla *Boundary Condition* se calculan los coeficientes del polinomio por un método de reducción de Gauss-Jordan con pivoteo parcial. Todos los cálculos son hechos con doble precisión para exactitud. Si se pone un conjunto inconsistente de condiciones en el resolvedor, aparecerá un mensaje de error. Si se encuentra la solución, ésta calcula *s v a j* para el segmento. Cuando termina, lo lleva a una pantalla resumen que muestra las CF que usted ha seleccionado y también los coeficientes de la ecuación polinomial que resultó. En este punto puede usted imprimir esta pantalla en la impresora o copiar y pegar esto en otro documento para sus registros. Usted sólo será capaz de reconstruir esto posteriormente al definir nuevamente a las CF y recalcular al polinomio.

Regreso a la pantalla *Input*

Al terminar la función polinomial regrese a la pantalla *Input.* Cuando se han calculado todos los segmentos, seleccione el botón *Done* de la pantalla *Input* (quizá después de copiar esto en el portapapeles o de imprimirlo en la impresora con los botones apropia dos). Esto lo llevará a la pantalla *Continuity Check.*

Pantalla *Continuity Check*

Esta pantalla proporciona una comprobación visual de la continuidad del diseño de levas en el segmento de interfaces. Los valores de cada función al inicio y final de cada segmento están agrupados juntos para verlos fácilmente. La ley fundamental del diseño de levas requiere que las funciones *S, V* y *A* sean continuas (véase el capítulo 8). Esto será cierto si los valores de frontera para esas funciones se muestran agrupados en pares iguales. Si esto no es cierto, entonces aparecerá un cuadro de diálogo de advertencia al oprimir el botón *Done.* Esto no le evita proceder pero le sugerirá al regresar a la pantalla *Input Data* para corregir el problema. Después lo regresará a la pantalla *Home.*

Dimensionamiento de la leva

Una vez que se han definido las funciones *S VA J* a su satisfacción, el programa conserva el tamaño de la leva y determina sus ángulos de presión y radios de curvatura. Esto se hace desde la pantalla *Size Cam* que se muestra en la figura A-17, que es accesible con el botón de ese mismo nombre en la pantalla *Home.* La pantalla *Size Cam* permite establecer la dirección de la rotación de la leva y seguidor (plano o de rodillo). El tipo de leva (radial o de barrilete) y el movimiento del seguidor (traslatorio u oscilatorio) sólo están

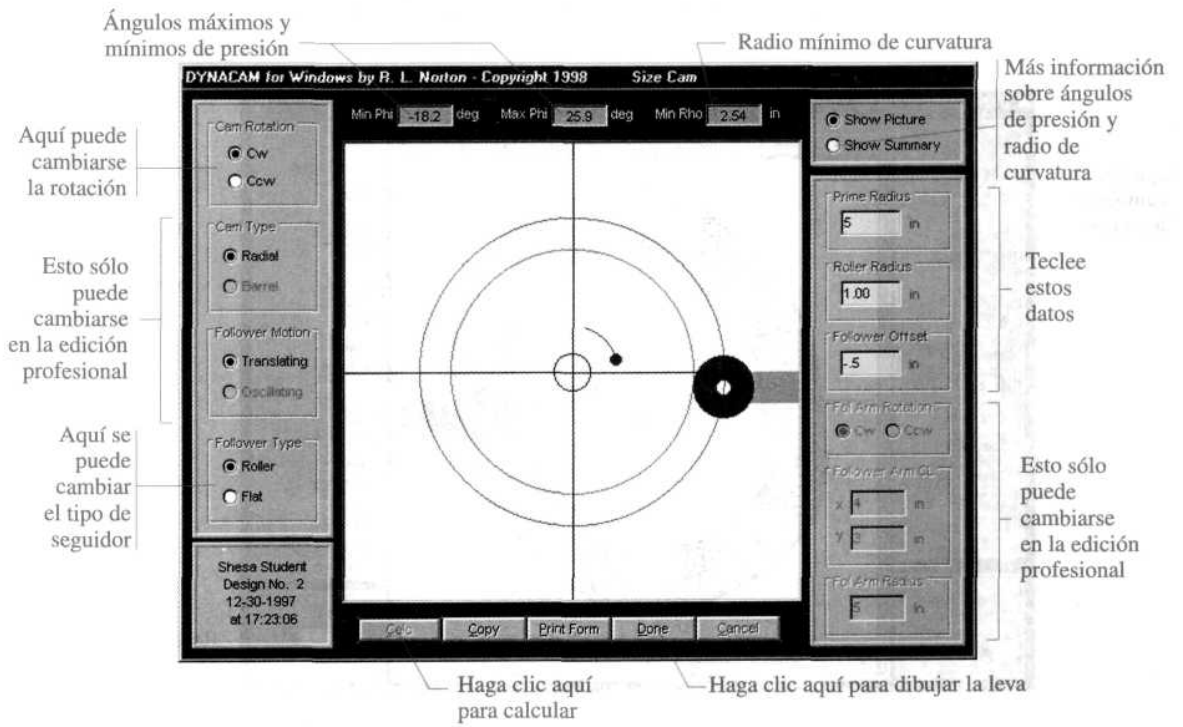


FIGURA A-17

Pantalla *Size Cam* del programa DYNACAM

disponibles en la versión profesional. El radio del círculo principal y corrimiento del seguidor para una traslación del seguidor se puede escribir en sus cuadros. Cuando se hace un cambio en cualquiera de estos parámetros se actualiza la imagen esquemática de la leva y seguidor.

Seleccione el botón *Calc* para calcular el tamaño de los parámetros de la leva. Los ángulos de presión máx y mín aparecerán en los cuadros en la parte superior de la pantalla. Para más información seleccione el botón *Show Summary* en la parte superior derecha. Esto cambiará la imagen esquemática a un resumen informativo del ángulo de presión y del radio de curvatura. Cuando oprima el botón *Done* se dibujará el perfil de la leva.

Dibujando la leva

El perfil de la leva que se muestra cuando se sale de la pantalla *Size Cam* puede ser accesado independientemente en cualquier tiempo desde la pantalla *Home* con el botón *Draw Cam.* La pantalla *Draw Cam* que se muestra en la figura A-18 permite cambiar las direcciones de rotación de la leva, el radio del círculo principal del rodillo, el radio y el corrimiento (si está disponible). Los datos del tamaño de la leva serán recalculados y se desplegará un nuevo perfil.

En el dibujo del perfil de la leva, una flecha curvada indica la dirección de la rotación de la leva. La posición inicial de un seguidor de rodillo a un ángulo de leva 9 = 0 se

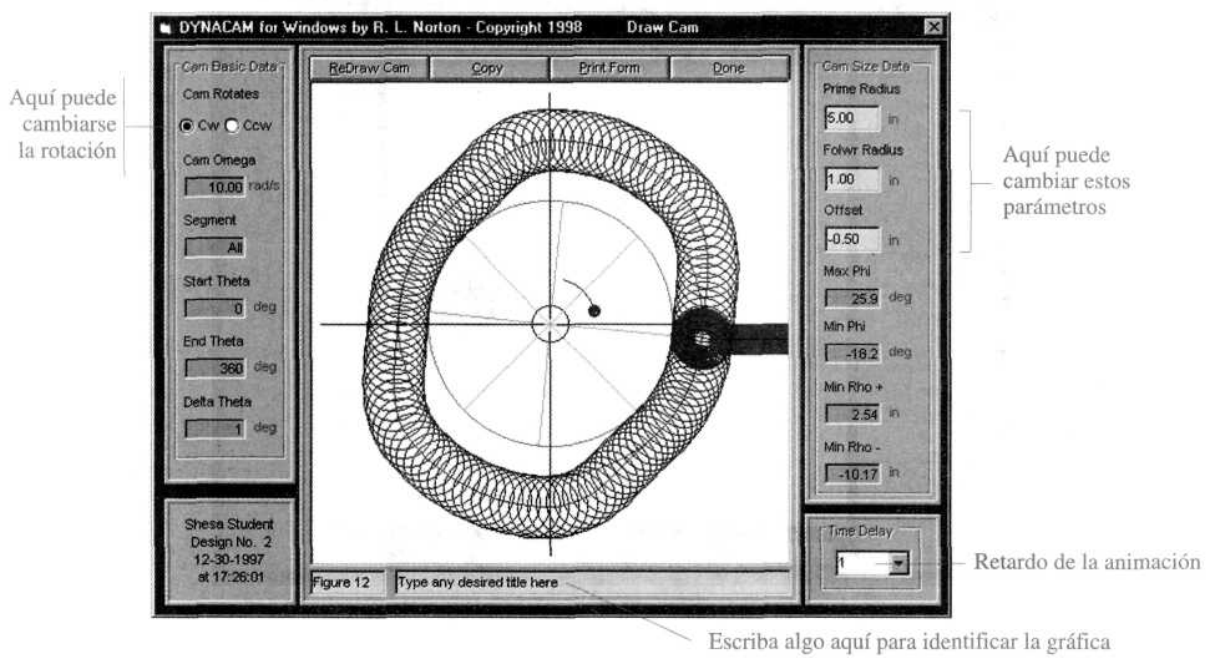


FIGURA A-18

Pantalla de *Cam Profile* en el programa DYNACAM

muestra como un círculo lleno con varilla rectangular, y de un seguidor de cara plana como un rectángulo lleno. Cualquier excentricidad se muestra como un corrimiento hacia arriba o hacia abajo del seguidor lleno con respecto al eje *X* a través del centro de la leva. El círculo lleno más pequeño en la línea central de la leva representa el árbol de levas. El círculo no lleno más pequeño es el círculo base. El círculo principal puede estar algo oscurecido por los repetidos dibujos del diámetro del seguidor, que barre fuera de la superficie de la leva. La curva de paso se dibuja a lo largo de la localización de los centros del seguidor de rodillo. Las líneas radiales que forman los pedazos del pastel dentro del círculo base representan los segmentos de la leva. Si la leva gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, las líneas radiales están numeradas en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de la circunferencia y viceversa.

Dinámica del seguidor (sólo en el programa DYNACAM)

Cuando se ha dimensionado la leva, el botón *Dynamics* de la pantalla *Home* estará disponible. Este botón lo lleva a la pantalla *Dynamics* que se muestra en la figura A-19. Los cuadros de texto se proporcionan para escribir los valores de la masa efectiva del sistema seguidor, la constante efectiva del resorte, la precarga del resorte y un factor de amortiguamiento. Por masa efectiva se entiende la masa del sistema seguidor completo como está reflejado atrás de la línea central del seguidor de rodillo de la leva o del punto de contacto de la leva. Cualquier relación de eslabones entre las masas de la leva-seguidor y

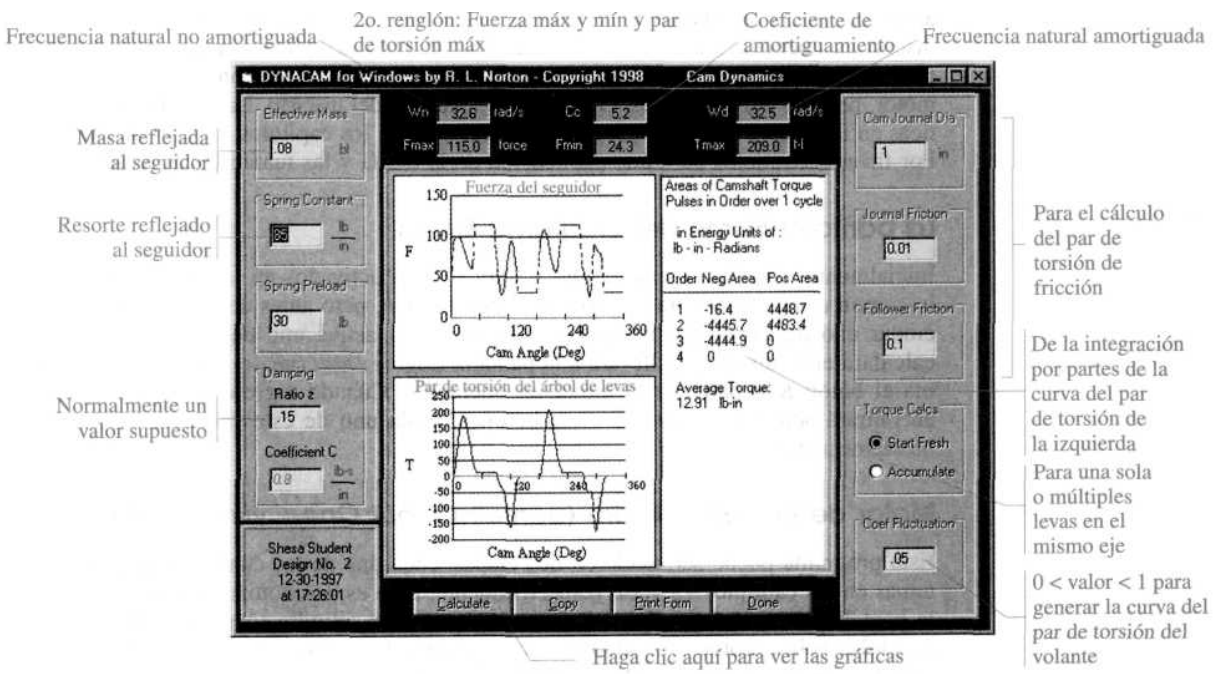


FIGURA A-19

Pantalla de *Cam Dynamics* del programa DYNACAM

cualquier masa física debe ser considerada en el cálculo de la masa efectiva. Igualmente el resorte efectivo en el sistema se debe reflejar en el seguidor. El amortiguamiento está definido por la relación de amortiguamiento zeta, como se definió para los sistemas con vibraciones de segundo orden. Véase el capítulo 10 para más información.

El diámetro del cojinete y los coeficientes de fricción se usan para calcular el par de torsión de fricción sobre el eje. El interruptor *Start New* o *Accumulate* le permite hacer un cálculo nuevo de pares de torsión o acumular los pares de torsión para varias levas que corren sobre un eje común. La información de energía en la ventana se puede usar para calcular un volante necesario para cualquier coeficiente de fluctuación que se elija como se describe en la sección 11.11. El programa calcula una función par de torsión suavizada al multiplicar al par de torsión del árbol de levas por el coeficiente de fluctuación especificado en el cuadro en la parte inferior derecha de la pantalla.

Otros

Véase la sección A.2, Operación general de los programas para información sobre las funciones *New, Open, Save, Save As, Plot, Print, Units* y *Quit.*

A.8 PROGRAMA ENGINE

ENGINE *para Windows* es un programa de diseño y análisis de motores de combustión interna (CI) y diseñado para estudiantes, ingenieros y otros profesionales que conocen el arte y la ciencia del diseño de ingeniería. Se supone que el usuario sabe determinar si un diseño es bueno o malo y si éste es adecuado para la aplicación que ésta desea. El programa calculará los datos cinemáticos y dinámicos asociados con cualquier diseño de motor, pero no puede sustituir el juicio de ingeniería del usuario. La teoría y las matemáticas en las que se basa este programa se muestran en los capítulos 13 y 14 de este texto. Por favor consúltelos para una explicación de la teoría y las matemáticas relacionadas.

La pantalla *Home* del programa ENGINE

Inicialmente, sólo los botones *Input* y *Quit* estarán activados en la pantalla *Home.* Por lo común usted iniciará un diseño con el botón *Input,* pero antes de hacerlo puede seleccionar uno de los ejemplos del menú *Example.* Si activa uno de estos ejemplos, éste calculará el resultado y lo llevará a la pantalla *Engine Data* (véase la figura A-22). Oprima el botón *Run* para ver el motor en operación. Cuando regrese a la pantalla *Home* encontrará activados todos los otros botones. Cada uno de estos botones se describirá posteriormente.

Motor de un solo cilindro (pantalla *Input One-Cylinder Data)*

Este programa puede ser usado en dos etapas, cada una de las cuales corresponde a los temas en los capítulos 13 y 14, respectivamente. Esto es, los botones *Input* y *Balance* en la pantalla *Home* tratan sobre los motores de un solo cilindro (capítulo 13), y el botón *Assemble* sobre motores multicilíndricos (capítulo 14). El botón *Flywheel* puede usarse con diseños de un solo cilindro o multicilíndricos.

EL BOTÓN INPUT Sobre la pantalla *Home* lo lleva a la pantalla *Input One-Cylinder Data* que se muestra en la figura A-20. En todos los cuadros de entrada están presentes

los datos por default. El tipo de dispositivo puede ser un motor de CI o compresor. La única diferencia entre estas dos elecciones es la magnitud de la presión del cilindro usado en los cálculos. La presión por default de cualquiera de los dos dispositivos puede ser cambiada en el cuadro de la parte inferior derecha. El ciclo de carrera se puede especificar como de 2 o 4 tiempos. Se deben especificar dos velocidades de operación, baja y alta. La velocidad a la mitad del rango es el promedio de las dos velocidades proporcionadas. Se debe seleccionar una de las tres velocidades calculadas de las opciones *Idle, Midrange* y *Redline.* Se puede especificar el número de cilindros con el cuadro *No. Cilinders* y *Engine Type* que se puede seleccionar del menú. En esta pantalla se está calculando sólo un cilindro del motor, por tanto, las elecciones de números de cilindros y tipo de motor no son usados sino hasta más tarde cuando se ensamble el motor. Las elecciones hechas en esta pantalla serán llevadas a la pantalla *Assemble* y también se pueden cambiar si se desea. Las localizaciones del *CG* de la manivela y biela expresadas como un porcentaje de la longitud están escritas en los cuadros de la izquierda. Se deben proporcionar las masas de la manivela, biela y del pistón (en las unidades apropiadas) en los cuadros de la derecha.

Los cuadros de texto en el *Engine Geometry Panel* de la izquierda permiten escribir el desplazamiento del cilindro, diámetro del cilindro, carrera o radio de la manivela y razón L/R. El desplazamiento del cilindro es la variable primaria en este programa. Cualquier desplazamiento volumétrico se puede lograr con una infinidad de combinaciones de

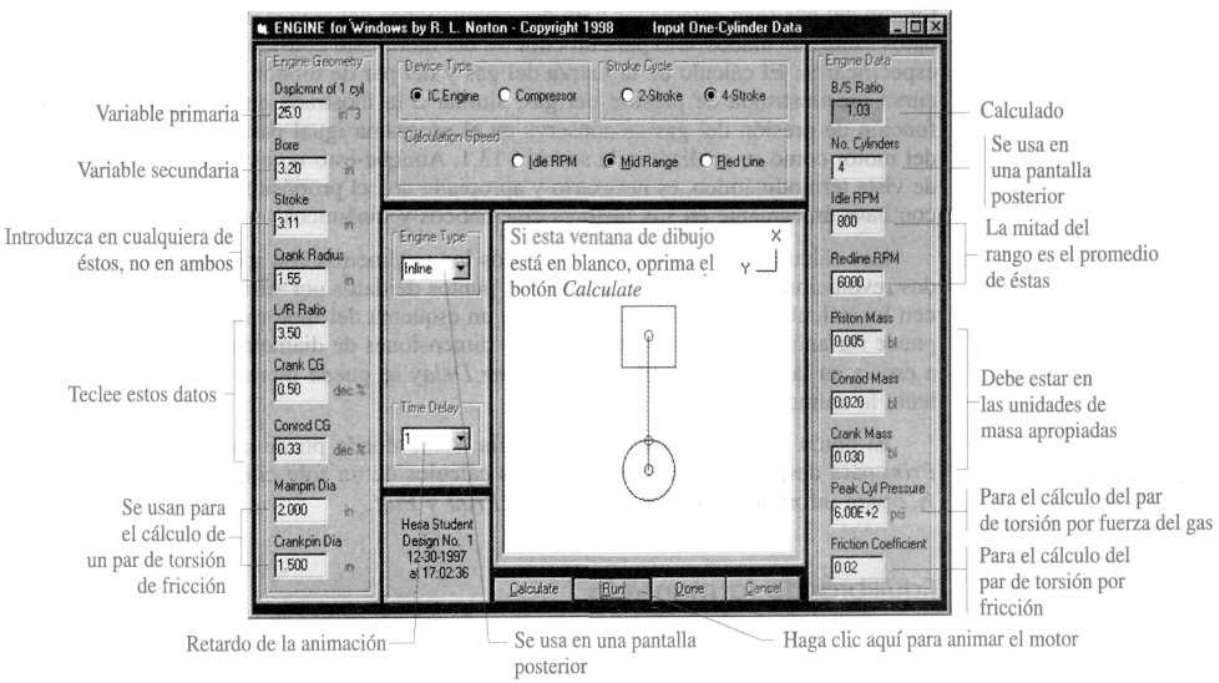


FIGURA A-20

Pantalla *Input* del programa ENGINE para datos de un motor de un cilindro

diámetro del cilindro y carrera. Para resolver esta indeterminación se le da precedencia al diámetro sobre la carrera cuando se cambie el desplazamiento. Esto es, un cambio de desplazamiento forzará a un cambio en la carrera, dejando al diámetro del cilindro sin cambios. Al cambiar el diámetro del cilindro se forzará a un cambio la carrera conservando el desplazamiento especificado. Ya sea el tiempo o el radio de la manivela pueden ser cambiados, pero se forzará a otro cambio en concordancia, ya que la carrera siempre es dos veces el radio de la manivela, así que se necesita introducir sólo uno. Se calcula la razón del diámetro del cilindro/tiempo y se despliega en la parte superior derecha.

Los diámetros de los pasadores principales y muñones de manivela se usan sólo para calcular un par de torsión de fricción estimada en combinación con un coeficiente estimado de fricción en el motor. Se calcula el par de fricción multiplicando el coeficiente de fricción especificado por el usuario por las fuerzas periódicas calculadas en la interfaz pistón-cilindro y ésta entre el pasador principal y el muñón de manivela. Estas últimas dos fuerzas de fricción se multiplican por los radios de los cojinetes proporcionados por el usuario para obtener el par de torsión de fricción. La fricción del pistón creará par de torsión de fricción a través de la geometría descrita en la ecuación 13.8 del par de torsión del gas. Los otros valores del par de torsión (par de torsión del gas, par de torsión de inercia y par de torsión total) no están reducidos en el programa por la cantidad del par de torsión de fricción, que es una mejor estimación bruta.

CÁLCULOS Una vez que se han proporcionado todos los datos, el oprimir una vez el botón *Calcúlate* causará que la posición del pistón, velocidad y aceleración, las fuerzas de inercia y pares de torsión, y las fuerzas del pasador más la fuerza del gas y el par de torsión del gas sean calculados para dos revoluciones del cigüeñal. En esta pantalla estos datos están calculados sólo para un cilindro del motor, sin considerar cuántos cilindros se especificaron. El cálculo de la fuerza del gas y del par de torsión del gas se basa en una curva preconstruida de presión del gas, similar a la mostrada en la figura 13-4e). Esta función de presión del gas se conserva en el programa igual para todas las velocidades del motor como se analizó en la sección 13.1. Aunque esto no es preciso desde el punto de vista termodinámico, es necesario y apropiado con el propósito de comparar el diseño con base únicamente en sus factores cinemáticos y dinámicos.

Los cálculos son realizados para todos los parámetros con incrementos de 3 ^{o} sobre dos revoluciones del cigüeñal, dando 241 puntos de datos por variable. Cuando se terminen los cálculos la ventana *Plot* mostrará un esquema del motor de un solo cilindro que puede ser animado con el botón *Run.* Las dimensiones de diámetro, carrera y biela están a escala en la animación. El valor de *Time Delay* se puede incrementar para hacer más lenta la animación.

El botón *Done* lo regresa a la pantalla *Home* donde puede usar los botones *Plot* y *Print* para desplegar los resultados de los cálculos de un solo cilindro. Véase la sección A.2 para información sobre las pantallas *Print* y *Plot.*

Equilibrando la manivela (pantalla *Balance* del programa ENGINE)

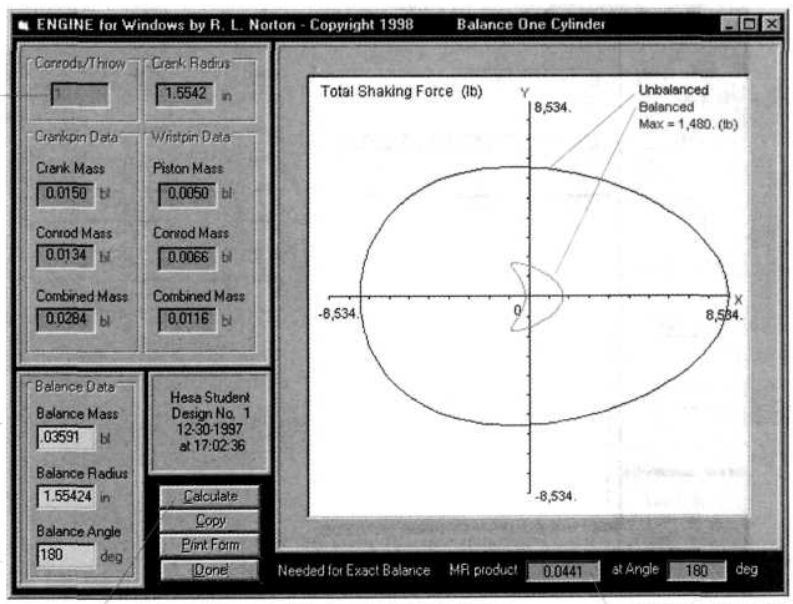
El botón *Balance* de la pantalla *Home* lo lleva a la pantalla *Balance* que se muestra en la figura A-21. El botón de esta pantalla despliega el producto masa-radio necesario en la manivela para cancelar la componente primaria del desequilibrio debido a la masa del muñón de manivela. La fuerza de sacudimiento no equilibrada se despliega como una

hodográfica en la ventana *Plot*. Información sobre las cantidades de masa estimadas para localizar al muñón de manivela y al pasador de émbolo están desplegadas en la barra lateral. Estos datos proporcionan bastante información para determinar los parámetros de contrapeso necesarios para un equilibrio exacto o un sobreequilibrio óptimo del motor de un solo cilindro. En la parte inferior izquierda de la pantalla hay tres cuadros de texto que permiten introducir las masas deseadas, radios y ángulo del contrapeso propuestos para ser situados en el cigüeñal.

Al oprimir el botón *Calculate* se recalcula la fuerza y el par de torsión de sacudimiento con la adición de contrapesos, y sobrepone una hodográfica de la nueva fuerza de sacudimiento equilibrada sobre la gráfica de la fuerza no equilibrada a la misma escala, de modo que puede verse la mejoría. Véase el capítulo 13 para un análisis del significado y uso de estos datos. Observe que si el diseño del motor tiene bastantes cilindros para permitir una disposición del cigüeñal que cancelará las fuerzas de inercia, entonces puede no haber ventaja en el sobrequilibrio de la manivela. Pero, para un motor de un solo cilindro y algunos motores de dos cilindros (gemelos), el sobrequilibrio de la manivela puede reducir significativamente la fuerza de sacudimiento.

Ensamblado de un motor multicilíndrico (pantalla *Engine Data)*

Una vez que la configuración de un solo cilindro se ha diseñado y equilibrado satisfactoriamente, el motor puede ser ensamblado. En la figura A-22 se muestra la pantalla *Engine Data* usada para ensamblar un motor multicilíndrico. Su botón *Help* le proporcionará la



Introduzca sólo para motores en V u opuestos

Calculado

Teclee estos datos

Haga clic para obtener un gráfico nuevo

Valor calculado para un equilibrio exacto

FIGURA A-21

Pantalla *Balance* para un solo cilindro del programa ENGINE

información mostrada en la figura A-23, la cual puntualiza que el diagrama de fase de manivela (llamado **Power Chart** en el programa ENGINE) como se definió en la sección 14.2, y se mostró en las figuras 14-8, 14-11, 14-13, 14-15, 14-17 y 14-23, se debe definir y dibujar a mano antes de proceder con el ensamble del motor. Las suposiciones y convenciones usadas en el programa para numerar los cilindros y bancos se establecen también en estas pantallas. Éstas son las mismas convenciones que se definieron en la sección 14-7. El límite superior establecido en el ítem 7 de la figura A-23 para el rango aceptable de los ángulos de carrera de potencia serán, ya sea de 360° para un motor de dos tiempos o 720° (como se muestra) para un motor de cuatro tiempos.

El orden de encendido, los ángulos de fase del cigüeñal, y los ángulos en los que encienden los cilindros (ángulos de encendido) —todos los ángulos en el orden de los cilindros— son escritos en los cuadros de la derecha de la pantalla *Engine Data* con base en las disposiciones acordes con las reglas de la figura A-23. Observe que **el programa no hace ninguna comprobación interna de compatibilidad de estos datos.** Se aceptará cualquier combinación de los ángulos de fase, órdenes de encendido y ángulos de carrera de potencia que usted proporcione. Así se asegurará que estos datos sean compatibles y reales.

El programa también necesita la distancia entre los cilindros, la cual es uno por default. Esta información se usa para definir el z_j en la ecuación 14.11. Si usted quiere

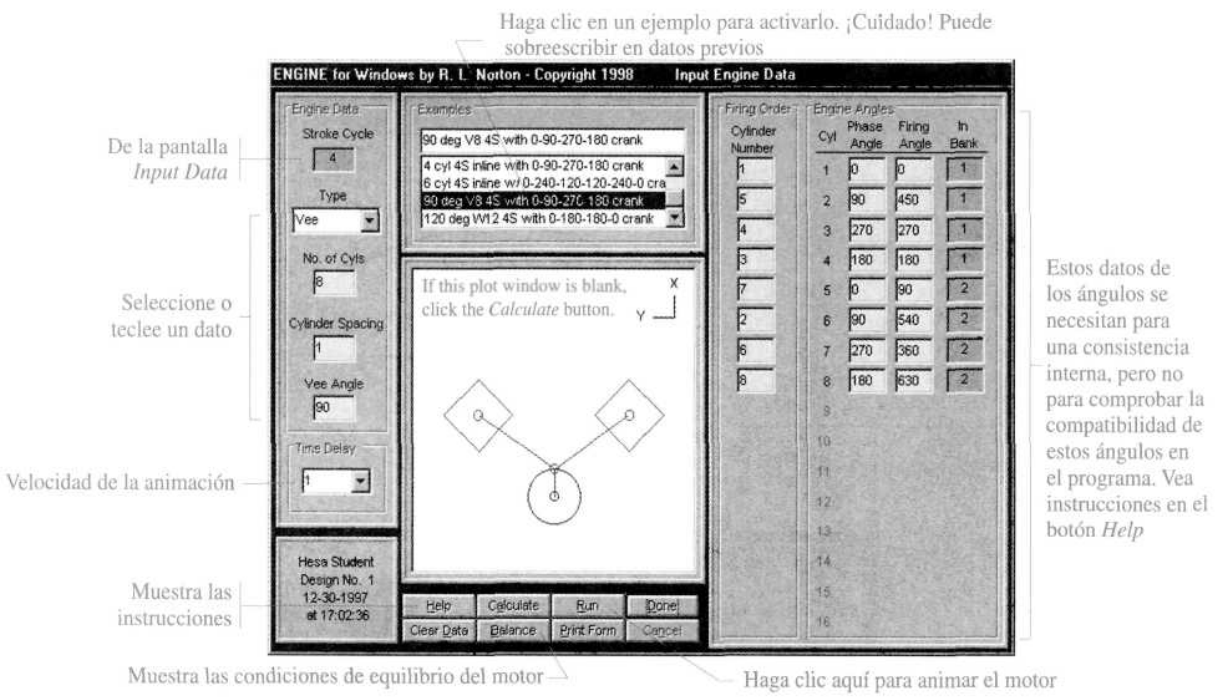


FIGURA A-22

Pantalla *Input Engine Data* en el programa ENGINE usado para ensamblar motores multicllíndrlcos

calcular la magnitud correcta del momento de sacudimiento, el espaciado real entre cilindros de su diseño necesita ser proporcionado en el cuadro de la izquierda de la pantalla en la figura A-22. Si sólo quiere comparar dos o más diseños de motor sobre las bases del momento de sacudimiento relativo, entonces el valor por default de uno será suficiente. El cálculo suma los momentos con respecto al primer cilindro, de modo que su brazo de momento siempre es cero. El corrimiento pequeño entre los bancos de un motor, debido a que tiene dos bielas por codo de cigüeñal, se ignora en el cálculo del momento.

Charts (menú desplegable)

En la figura A-24 se muestra el menú desplegable *Charts* en la pantalla *Home.* Ahí están disponibles varios resúmenes de información de ingeniería. Las selecciones del menú *Forcé Balance, Moment Balance* y *Torque Balance* despliegan los resultados de los cálculos de las condiciones de equilibrio de un motor, es decir, las ecuaciones 14.3a y 14.3b para el equilibrio de fuerzas; 14.7a y 14.7b para el equilibrio de momentos, y 14.5a, 14.5b y 14.5c para el equilibrio de pares de torsión. (Estas gráficas también están disponibles en la pantalla *Engine Data* a través del botón *Balance.)*

La selección **Power Chart** presenta las tres gráficas que se muestran en la figura A-25. La figura A-25a) es una gráfica de los ángulos de fase del cigüeñal sobre 360° para el motor V-8 a 90° diseñado en la sección 14.7. En la figura A-25b) se muestran los ángulos de carrera de potencia en el orden de los cilindros sobre 720° para este V-8. Éste es el

++++++++++++++++ Precaución ++++++++++++++++++

Antes de proceder necesita trabajar por fuera, en el papel, los ángulos de fase de manivela, el orden de encendido y la carrera de potencia (los ángulos de encendido de los cilindros).

Este programa usa ángulos de fase, ángulos y para calcular los resultados. El orden de encendido se usa como un apuntador. Orden de encendido, dará resultados incorrectos. ¡Es su responsabilidad asegurarse de que todos estos factores concuerden!

Este programa requiere que se sigan estas reglas cuando se diseñe y numere los ángulos de fase del cigüeñal y de encendido, y el ángulo en V:

1. El cilindro de enfrente del motor en el banco derecho es siempre el número 1
2. El cilindro número uno es el de referencia para todos los demás
3. El cilindro número uno siempre tendrá un ángulo fase de manivela de cero grados
4. El cilindro número uno se enciende siempre primero en el orden de encendido
5. Así, el ángulo de carrera de potencia para el número uno también es de cero grados
6. Los ángulos de fase de manivela siempre están entre 0 y 360 grados
7. Los ángulos de encendido están entre 0 y 720 grados, y en orden ascendente
8. Los ángulos de fase cambian a la derecha versus el cilindro 1 en el diagrama de fase de manivela
9. El ángulo en V cambia al segundo banco a la derecha en el diagrama de fase de la manivela
10. Los cilindros se numeran primero bajando en el banco derecho y después bajando en el banco izquierdo

Debe dibujar su diagrama de fases de manivela para decidir estos valores antes de proceder.

FIGURA A-23

Regla para el ensamblaje de un motor multicilíndrico en el programa FOURBAR

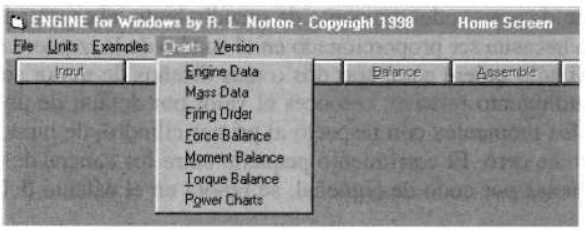


FIGURA A-24

Gráficas disponibles oprimiendo el ¡cono Charts en el programa ENGINE

mismo diagrama de fase de manivela que se muestra en la figura 14-23 e indica cuándo ocurrirán los pulsos de potencia en cada cilindro durante el ciclo. En la figura A-25c) se muestran los ángulos de carrera de potencia en orden de encendido sobre 720°. Esta tercera gráfica reacomoda el orden de los cilindros en el mapa de potencia para acoplarlo con el orden de encendido seleccionado. Si estos tres factores, *crankshaft phase angle* y *firing angles* han sido correctamente elegidos por compatibilidad, esta tercera gráfica de potencia aparecerá *como una escalera.* Los pulsos de potencia ocurrirán en pasos igualmente espaciados a través del ciclo aun cuando se haya logrado el encendido. Así, estas gráficas de potencia pueden servir como una comprobación de las elecciones correctas de estos factores. Observe que el programa sólo dibuja los cuadros en los diagramas de fase

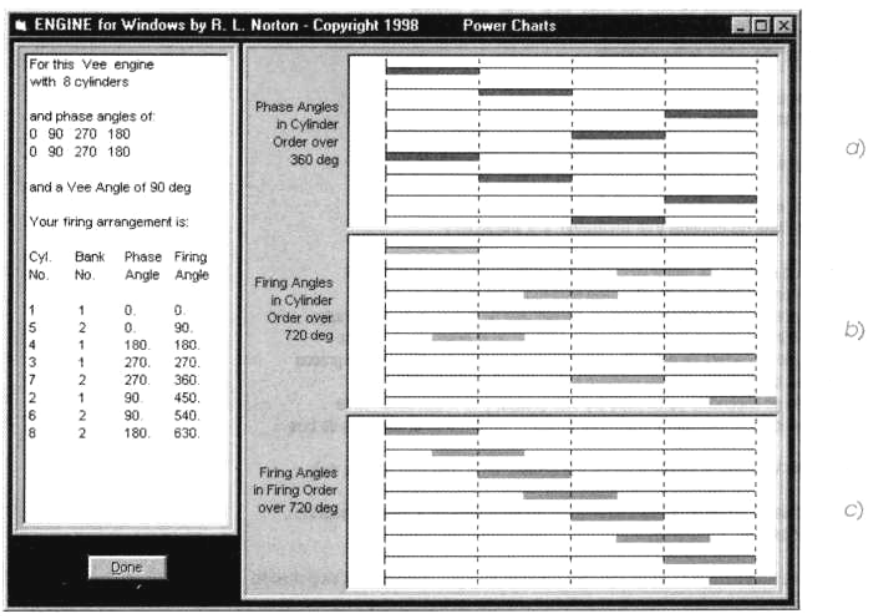


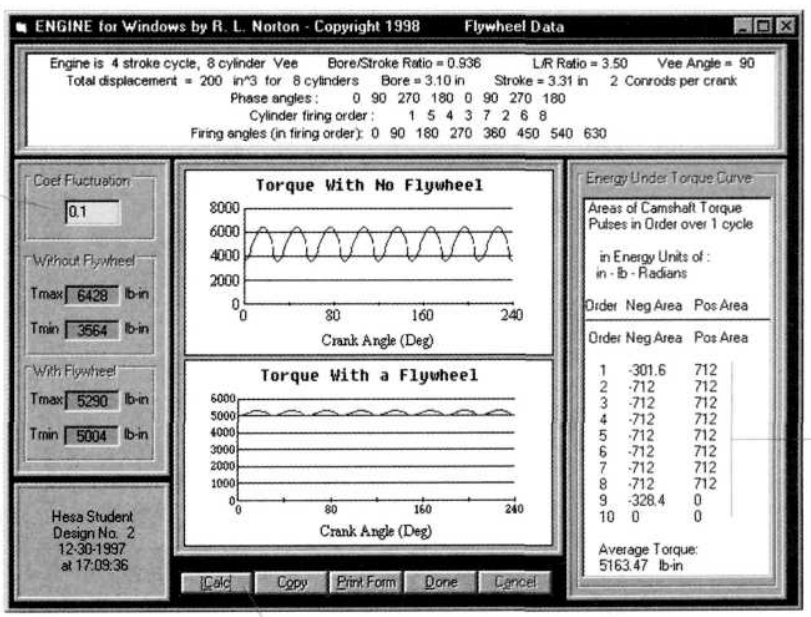
FIGURA A-25

Ángulos de fase y gráficas de potencia de un motor V-8 del programa ENGINE. Compárelo con la figura 14-23

de manivela y las gráficas de potencia que representan las carreras de fuerza de cada cilindro. Las otras carreras del pistón que se muestran en las figuras 14-8, 14-11, 14-13, 14-15, 14-17 y 14-23 no están dibujadas.

Cálculo de volante

En la figura A-26 se muestra la pantalla *Flywheel Data* del programa ENGINE. La única entrada de esta pantalla es el coeficiente de la fluctuación del volante, la cual debe estar entre 0 y 1. Cuando se oprime el botón *Cale*, éste hace la integración pulso por pulso de la curva de par de torsión total como se hace en el programa FOURBAR. Véase la sección 11.11 y la figura 11-16. Las áreas bajo los pulsos de la curva del par de torsión total son una medida de la variación de energía en el ciclo. El tamaño del volante está basado en estas variaciones de energía como se definió en la sección 11.11. La curva del par de torsión total para este ejemplo de motor V-8 se muestra en la parte superior de la gráfica de la figura A-26. La tabla de áreas bajo estos pulsos está mostrada en la tabla a la derecha de la pantalla. Observe que para un diseño apropiado de encendido de un motor multicilíndrico, los valores absolutos de las áreas bajo cada pulso serán iguales. En el caso del cálculo del valor de energía necesario para el volante es simplemente el área bajo un pulso. Estos datos se pueden usar en la ecuación 11.22 para calcular el momento de inercia del volante necesario con base en un coeficiente de fluctuación *k* seleccionado. El programa ENGINE calcula entonces una función suavizada de par de torsión total multi-



0 < valor < 1 para generar una curva del par de torsión del volante

Pares de torsión máximos y mínimos calculados antes y después del volante

De una integración por partes de la curva del par de torsión en la parte superior a la izquierda

Haga clic aquí para ver las gráficas

FIGURA A-26

Pantalla *Flywheel Data* en el programa ENGINE se usa para ensamblar motores multicilíndricos

plicando el par de torsión por el coeficiente especificado de fluctuación. En la parte baja de la gráfica en la figura A-26 se muestra el par de torsión suavizado del volante para el ejemplo del motor V-8 con $k = 0.1$. La función par de torsión con la adición del volante es de casi un valor constante, lo que es deseable. Los pulsos debidos a las explosiones de los cilindros individuales han sido encubiertas eficazmente por el volante. Se muestran los valores máximo y mínimo del par de torsión con y sin el volante en los cuadros a la izquierda de la pantalla. Los datos sobre el diseño del motor se despliegan en el tablero en la parte superior de la pantalla.

A.9 PROGRAMA MATRIX

El programa MATRIX *para Windows* resuelve una ecuación matricial de la forma A x B = C. A debe ser cuadrada y puede tener hasta 16 renglones y 16 columnas. C debe ser un vector con el mismo número de elementos que renglones tiene A. Cuando todos los datos han sido escritos y comprobados, oprima el botón *Solve* y éste calculará los términos del vector B. Los resultados se pueden imprimir en pantalla, en impresora, o un archivo de disco de la misma manera en que se describe en la sección A.2. Si la matriz es singular o la solución falla por otras razones, puede aparecer un mensaje de error. No se proporciona ninguna gráfica o animación en este programa.

Apéndice B

PROPIEDADES DE MATERIALES

Para materiales de ingeniería seleccionados están disponibles muchas otras aleaciones.

Las siguientes tablas contienen valores aproximados de resistencias y otras especificaciones de una variedad de materiales de ingeniería compilados de diversas fuentes. En algunos casos los datos son valores mínimos recomendados y en otros son datos de una sencilla muestra de pruebas. Es conveniente utilizar estos datos en los ejercicios contenidos en este texto pero no deben considerarse como representaciones estáticas válidas de especificaciones para cualquier aleación o material particular. El diseñador debe consultar a los fabricantes de los materiales para una información válida más precisa y reciente sobre los materiales utilizados en aplicaciones de ingeniería o en pruebas independientes del comportamiento de los materiales seleccionados para determinar su conveniencia máxima para cualquier aplicación.

Tabla núm.	Descripción
B-1	Propiedades físicas de algunos materiales de ingeniería
B-2	Propiedades mecánicas para algunas aleaciones de aluminio forjado
B-3	Propiedades mecánicas para algunos aceros al carbón
B-4	Propiedades mecánicas para algunas aleaciones de hierro fundido
B-5	Propiedades mecánicas para algunos plásticos de ingeniería

Tabla B-1 **Propiedades físicas de algunos materiales de ingeniería**

Datos de diversas fuentes.* Estas propiedades son esencialmente las mismas para todas las aleaciones del material particular

Material	Módulo de elasticidad E		Módulo de rigidez G		Razón de Poisson ν	Peso específico γ	Densidad ρ	Densidad relativa
	Mpsi	GPa	Mpsi	GPa		lb/pulg^3	Mg/m^3	
Aleaciones de aluminio	10.4	71.7	3.9	26.8	0.34	0.10	2.8	2.8
Cobre de berilio	18.5	127.6	7.2	49.4	0.29	0.30	8.3	8.3
Latón, bronce	16.0	110.3	6.0	41.5	0.33	0.31	8.6	8.6
Cobre	17.5	120.7	6.5	44.7	0.35	0.32	8.9	8.9
Hierro fundido gris	15.0	103.4	5.9	40.4	0.28	0.26	7.2	7.2
Hierro fundido dúctil	24.5	168.9	9.4	65.0	0.30	0.25	6.9	6.9
Hierro fundido maleable	25.0	172.4	9.6	66.3	0.30	0.26	7.3	7.3
Aleaciones de magnesio	6.5	44.8	2.4	16.8	0.33	0.07	1.8	1.8
Aleaciones de níquel	30.0	206.8	11.5	79.6	0.30	0.30	8.3	8.3
Acero al carbón	30.0	206.8	11.7	80.8	0.28	0.28	7.8	7.8
Aleaciones de acero	30.0	206.8	11.7	80.8	0.28	0.28	7.8	7.8
Acero inoxidable	27.5	189.6	10.7	74.1	0.28	0.28	7.8	7.8
Aleaciones de titanio	16.5	113.8	6.2	42.4	0.34	0.16	4.4	4.4
Aleaciones de zinc	12.0	82.7	4.5	31.1	0.33	0.24	6.6	6.6

**Properties of Some Metals and Alloys*, International Nickel Co., Inc., Nueva York; *Metals Handbook*, American Society for Metals, Materials Park, Ohio.

Tabla B-2 Propiedades mecánicas para algunas aleaciones de aluminio forjado
Datos de diversas fuentes.* Valores aproximados.
Consulte a los fabricantes para información más exacta

Aleación de aluminio forjado	Condición	Resistencia a la fluencia en tensión (2% de deformación)		Resistencia última a la tensión		Resistencia a la fatiga en 5E8 ciclos		Alargamiento sobre 2 pulgadas	Dureza de Brinell
		kpsi	MPa	kpsi	MPa	kpsi	MPa	%	–HB
1100	Recocido en planchas	5	34	13	90			35	23
	Laminado en frío	22	152	24	165			5	44
2024	Recocido en planchas	11	76	26	179			20	-
	Tratado térmicamente	42	290	64	441	20	138	19	-
3003	Recocido en planchas	6	41	16	110			30	28
	Laminado en frío	27	186	29	200			4	55
5052	Recocido en planchas	13	90	28	193			25	47
	Laminado en frío	37	255	42	290			7	77
6061	Recocido en planchas	8	55	18	124			25	30
	Tratado térmicamente	40	276	45	310	14	97	12	95
7075	Recocido en barras	15	103	33	228			16	60
	Tratado térmicamente	73	503	83	572	14	97	11	150

**Properties of Some Metals and Alloys*, International Nickel Co., Inc., Nueva York; *Metals Handbook*, American Society for Metals, Materials Park, Ohio.

Tabla B-3 **Propiedades mecánicas para algunos aceros al carbón**
Datos de diversas fuentes.* Valores aproximados.
Consulte a los fabricantes para información más exacta

Número SAE/AISI	Condición	Resistencia a la fluencia en tensión (2% de deformación)		Resistencia última a la tensión		Alargamiento sobre 2 pulgadas	Dureza de Brinell
		kpsi	MPa	kpsi	MPa	%	–HB
1010	Laminado en caliente	26	179	47	324	28	95
	Laminado en frío	44	303	53	365	20	105
1020	Laminado en caliente	30	207	55	379	25	111
	Laminado en frío	57	393	68	469	15	131
1030	Laminado en caliente	38	259	68	469	20	137
	Normalizado @ 1 650°F	50	345	75	517	32	149
	Laminado en frío	64	441	76	524	12	149
	Q&T @ 1 000°F	75	517	97	669	28	255
	Q&T @ 800°F	84	579	106	731	23	302
	Q&T @ 400°F	94	648	123	848	17	495
1035	Laminado en caliente	40	276	72	496	18	143
	Laminado en frío	67	462	80	552	12	163
1040	Laminado en caliente	42	290	76	524	18	149
	Normalizado @ 1 650°F	54	372	86	593	28	170
	Laminado en frío	71	490	85	586	12	170
	Q&T @ 1 200°F	63	434	92	634	29	192
	Q&T @ 800°F	80	552	110	758	21	241
	Q&T @ 400°F	86	593	113	779	19	262
1045	Laminado en caliente	45	310	82	565	16	163
	Laminado en frío	77	531	91	627	12	179
1050	Laminado en caliente	50	345	90	621	15	179
	Normalizado @ 1 650°F	62	427	108	745	20	217
	Laminado en frío	84	579	100	689	10	197
	Q&T @ 1 200°F	78	538	104	717	28	235
	Q&T @ 800°F	115	793	158	1 089	13	444
	Q&T @ 400°F	117	807	163	1 124	9	514
1060	Laminado en caliente	54	372	98	676	12	200
	Normalizado @ 1 650°F	61	421	112	772	18	229
	Q&T @ 1 200°F	76	524	116	800	23	229
	Q&T @ 1 000°F	97	669	140	965	17	277
	Q&T @ 800°F	111	765	156	1 076	14	311
1095	Laminado en caliente	66	455	120	827	10	248
	Normalizado @ 1 650°F	72	496	147	1 014	9	13
	Q&T @ 1 200°F	80	552	130	896	21	269
	Q&T @ 800°F	112	772	176	1 213	12	363
	Q&T @ 600°F	118	814	183	1 262	10	375

**SAE Handbook*, Society of Automotive Engineers, Warrendale PA; *Metals Handbook*, American Society for Metals, Materials Park, Ohio.

Tabla B-4 Propiedades mecánicas de algunas aleaciones de hierro fundido
Datos de diversas fuentes.* Valores aproximados.
Consulte a los fabricantes para información más exacta

Aleación de hierro fundido	Condición	Resistencia a la fluencia en tensión (2% de deformación)		Resistencia última a la tensión		Resistencia a la compresión		Dureza de Brinell
		kpsi	MPa	kpsi	MPa	kpsi	MPa	HB
Hierro fundido gris - Clase 20	Fundido	–	–	22	152	83	572	156
Hierro fundido gris - Clase 30	Fundido	–	–	32	221	109	752	210
Hierro fundido gris - Clase 40	Fundido	–	–	42	290	140	965	235
Hierro fundido gris - Clase 50	Fundido	–	–	52	359	164	1 131	262
Hierro fundido gris - Clase 60	Fundido	–	–	62	427	187	1 289	302
Hierro dúctil 60-40-18	Recocido	47	324	65	448	52	359	160
Hierro dúctil 65-45-12	Recocido	48	331	67	462	53	365	174
Hierro dúctil 80-55-06	Recocido	53	365	82	565	56	386	228
Hierro dúctil 120-90-02	Q & T	120	827	140	965	134	924	325

**Propesrties of Some Metals and Alloys*, International Nickel Co., Inc., Nueva York; *Metals Handbook*, American Society for Metals, Materials Park, Ohio.

Tabla B-5 Propiedades de algunos plásticos de ingeniería
Datos de diversas fuentes.* Valores aproximados.
Consulte a los fabricantes para información más exacta

Material	Módulo aproximado de elasticidad E †		Resistencia última a la tensión		Resistencia última a la compresión		Alargamiento sobre 2 pulg	Temperatura máxima	Densidad relativa
	Mpsi	GPa	kpsi	MPa	kpsi	MPa	%	°F	
ABS	0.3	2.1	6.0	41.4	10.0	68.9	5-25	160-200	1.05
20-40% lleno de vidrio	0.6	4.1	10.0	68.9	12.0	82.7	3	200-230	1.30
Acetal	0.5	3.4	8.8	60.7	18.0	124.1	60	220	1.41
20-30% lleno de vidrio	1.0	6.9	10.0	68.9	18.0	124.1	7	185-220	1.56
Acrílico	0.4	2.8	10.0	68.9	15.0	103.4	5	140-190	1.18
Fluoroplástico (PTFE)	0.2	1.4	5.0	34.5	6.0	41.4	100	350-330	2.10
Nilon 6/6	0.2	1.4	10.0	68.9	10.0	68.9	60	180-300	1.14
Nilon 11	0.2	1.3	8.0	55.2	8.0	55.2	300	180-300	1.04
20-30% lleno de vidrio	0.4	2.5	12.8	88.3	12.8	88.3	4	250-340	1.26
Policarbonato	0.4	2.4	9.0	62.1	12.0	82.7	100	250	1.20
10-40% lleno de vidrio	1.0	6.9	17.0	117.2	17.0	117.2	2	275	1.35
Polietileno HMW	0.1	0.7	2.5	17.2	–	–	525	–	0.94
Óxido de polipenileno	0.4	2.4	9.6	66.2	16.4	113.1	20	212	1.06
20-30% lleno de vidrio	1.1	7.8	15.5	106.9	17.5	120.7	5	260	1.23
Polipropileno	0.2	1.4	5.0	34.5	7.0	48.3	500	250-320	0.90
20-30% lleno de vidrio	0.7	4.8	7.5	51.7	6.2	42.7	2	300-320	1.10
Poliestireno de impacto	0.3	2.1	4.0	27.6	6.0	41.4	2-80	140-175	1.07
20-30% lleno de vidrio	0.1	0.7	12.0	82.7	16.0	110.3	1	180-200	1.25
Polisulfone	0.4	2.5	10.2	70.3	13.9	95.8	50	300-345	1.24

* *Modern Plastics Encyclopedia*, McGraw-Hill, Nueva York; *Machine Design Materials Reference Issue*, Penton Publishing, Cleveland, Ohio.

† La mayoría de los plásticos no obedecen la ley de Hooke. Estos módulos de elasticidad aparentes varían con el tiempo y la temperatura.

Apéndice C

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS

DIAGRAMAS Y FORMULAS PARA CALCULAR LOS SIGUIENTES PARÁMETROS PARA DIVERSOS SÓLIDOS GEOMÉTRICOS COMUNES

V = volumen

m = masa

C_g = localización del centro de masa

I_x = segundo momento de masa con respecto al eje $x = \int (y^2 + z^2) dm$

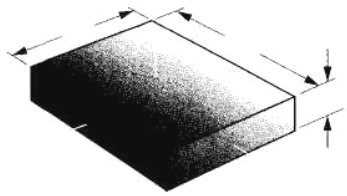
I_y = segundo momento de masa con respecto al eje $y = \int (x^2 + z^2) dm$

I_z = segundo momento de masa con respecto al eje $z = \int (x^2 + y^2) dm$

k_x = radio de giro con respecto al eje x

k_y = radio de giro con respecto al eje y

k_z = radio de giro con respecto al eje z



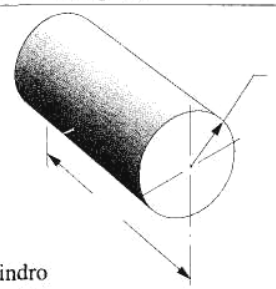
a) Prisma rectángular

$$V = abc \qquad m = V \cdot \text{densidad}$$

$$x_{Cg} @ \frac{c}{2} \qquad y_{Cg} @ \frac{b}{2} \qquad z_{Cg} @ \frac{a}{2}$$

$$I_x = \frac{m\left(a^2 + b^2\right)}{12} \qquad I_y = \frac{m\left(a^2 + c^2\right)}{12} \qquad I_z = \frac{m\left(b^2 + c^2\right)}{12}$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}} \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{m}} \qquad k_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}}$$



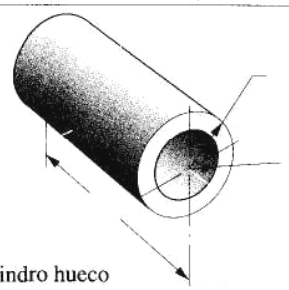
b) Cilindro

$$V = \pi r^2 l \qquad m = V \cdot \text{densidad}$$

$$x_{Cg} @ \frac{l}{2} \qquad y_{Cg} \text{ en el eje} \qquad z_{Cg} \text{ en el eje}$$

$$I_x = \frac{mr^2}{2} \qquad I_y = I_z = \frac{m\left(3r^2 + l^2\right)}{12}$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}} \qquad k_y = k_z = \sqrt{\frac{I_y}{m}}$$



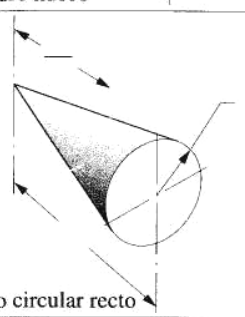
c) Cilindro hueco

$$V = \pi\left(b^2 - a^2\right)l \qquad m = V \cdot \text{densidad}$$

$$x_{Cg} @ \frac{l}{2} \qquad y_{Cg} \text{ en el eje} \qquad z_{Cg} \text{ en el eje}$$

$$I_x = \frac{m\left(a^2 + b^2\right)}{2} \qquad I_y = I_z = \frac{m\left(3a^2 + 3b^2 + l^2\right)}{12}$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}} \qquad k_y = k_z = \sqrt{\frac{I_y}{m}}$$



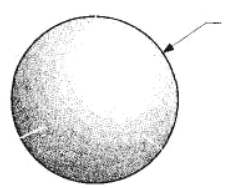
d) Cono circular recto

$$V = \pi\frac{r^2 h}{3} \qquad m = V \cdot \text{densidad}$$

$$x_{Cg} @ \frac{3h}{4} \qquad y_{Cg} \text{ en el eje} \qquad z_{Cg} \text{ en el eje}$$

$$I_x = \frac{3}{10}mr^2 \qquad I_y = I_z = \frac{m\left(12r^2 + 3h^2\right)}{80}$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}} \qquad k_y = k_z = \sqrt{\frac{I_y}{m}}$$



e) Esfera

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad m = V \cdot \text{densidad}$$

$$x_{Cg} \text{ en el centro} \qquad y_{Cg} \text{ en el centro} \qquad z_{Cg} \text{ en el centro}$$

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mr^2$$

$$k_x = k_y = k_z = \sqrt{\frac{I_y}{m}}$$

Apéndice D

DATOS DE RESORTES

Las siguientes son páginas de catálogo de los datos de resortes helicoidales de compresión y extensión, proporcionados por cortesía de *Hardware Products Co., Chelsea, Massachusetts.*

RESORTES DE COMPRESIÓN

LONGITUDES LIBRES

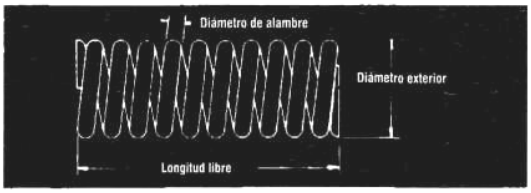
Entrará en agujero pulg		7/16			1/2				5/8				3/4				7/8			
Diámetro de alambre		.031	.047	.062	.047	.062	.078	.094	.047	.062	.078	.094	.062	.078	.094	.125	.062	.078	.094	.125
7/16	Catálogo núm.	247	248	249																
	Código de precio	HB	HB	HC																
	libras/pulg	12	55	180																
	Deformación máxima	.32	.23	.16																
1/2	Catálogo núm.	250	251	252	283	284	285	286												
	Código de precio	HB	HB	HC	HB	HB	HE	HE												
	libras/pulg	10	47	150	37	110	320	840												
	Deformación máxima	.37	.27	.19	.29	.22	.15	.10												
5/8	Catálogo núm.	253	254	255	287	288	289	290	331	332	333	334								
	Código de precio	HB	HB	HC	HB	HB	HE	HE	HB	HB	HD	HE								
	libras/pulg	7.9	36	175	29	85	240	610	20	54	140	320								
	Deformación máxima	.47	.35	.25	.38	.29	.20	.14	.43	.35	.27	.20								
3/4	Catálogo núm.	256	257	258	291	292	293	294	335	336	337	338	375	376	377	378				
	Código de precio	HB	HB	HC	HB	HB	HE	HE	HB	HB	HD	HE	HD	HD	HF	HG				
	libras/pulg	6.4	29	90	23	68	185	470	16	43	105	250	32	78	170	650				
	Deformación máxima	.58	.44	.32	.48	.37	.26	.18	.53	.44	.34	.26	.59	.40	.32	.19				
7/8	Catálogo núm.	259	260	261	295	296	297	298	339	340	341	342	379	380	381	382	419	420	421	422
	Código de precio	HB	HB	HC	HB	HB	HE	HE	HB	HB	HD	HE	HD	HD	HF	HG	HF	HF	HJ	HK
	libras/pulg	5.4	24	75	19	56	155	384	13	36	90	204	27	65	140	520	21	49	100	350
	Deformación máxima	.68	.52	.39	.57	.44	.32	.23	.64	.53	.42	.32	.58	.48	.39	.24	.62	.53	.44	.30
1	Catálogo núm.	262	263	264	299	300	301	302	343	344	345	346	383	384	385	386	423	424	425	426
	Código de precio	HB	HB	HC	HB	HC	HE	HE	HB	HC	HD	HE	HD	HD	HF	HG	HF	HF	HJ	HK
	libras/pulg	4.7	21	65	17	48	130	320	11	31	77	170	23	55	115	430	18	42	86	290
	Deformación máxima	.79	.60	.45	.66	.51	.37	.27	.74	.62	.49	.38	.68	.57	.46	.29	.73	.63	.53	.36
1¼	Catálogo núm.	265	266	267	303	304	305	306	347	348	349	350	387	388	389	390	427	428	429	430
	Código de precio	HB	HC	HC	HC	HC	HF	HF	HC	HC	HD	HE	HE	HE	HF	HG	HG	HG	HJ	HK
	libras/pulg	3.7	16	50	13	38	100	245	9.0	24	59	130	18	42	89	320	14	32	66	220
	Deformación máxima	1.0	.77	.58	.84	.66	.49	.35	.94	.80	.64	.49	.88	.74	.60	.39	.94	.81	.69	.47
1½	Catálogo núm.	268	269	270	307	308	309	310	351	352	353	354	391	392	393	394	431	432	433	434
	Código de precio	HB	HC	HC	HC	HC	HF	HF	HD	HD	HE	HF	HE	HE	HF	HG	HG	HG	HJ	HK
	libras/pulg	3.1	14	41	11	31	83	200	7.4	20	48	105	15	34	72	260	12	26	53	175
	Deformación máxima	1.2	.94	.70	1.0	.81	.60	.43	1.1	.98	.78	.61	1.1	.91	.74	.48	1.1	1.0	.85	.59
1¾	Catálogo núm.	271	272	273	311	312	313	314	355	356	357	358	395	396	397	398	435	436	437	438
	Código de precio	HC	HD	HE	HC	HD	HF	HF	HD	HD	HC	HF	HE	HE	HF	HG	HG	HG	HJ	HK
	libras/pulg	2.6	11	35	9.1	26	70	170	6.2	17	41	90	12.4	29	61	216	9.9	22	45	147
	Deformación máxima	1.4	1.1	.84	1.2	.96	.71	.52	1.3	1.1	.93	.73	1.3	1.1	.89	.58	1.35	1.2	1.0	.71
2	Catálogo núm.	274	275	276	315	316	317	318	359	360	361	362	399	400	401	402	439	440	441	442
	Código de precio	HD	HD	HE	HC	HD	HF	HF	HD	HD	HE	HF	HE	HE	HF	HG	HG	HG	HJ	HL
	libras/pulg	2.3	10	30	7.9	23	60	145	5.4	14	35	77	11	25	52	185	8.6	19	38	125
	Deformación máxima	1.6	1.3	.96	1.4	1.1	.82	.60	1.5	1.3	1.1	.85	1.4	1.2	1.0	.68	1.5	1.4	1.2	.83
3	Catálogo núm.	277	278	279	319	320	321	322	363	364	365	366	403	404	405	406	443	444	445	446
	Código de precio	HD	HE	HE	HF	HF	HG	HG	HD	HD	HF	HG	HF	HF	HG	HK	HJ	HJ	HK	HL
	libras/pulg	1.5	6.6	20	5.2	15	39	94	3.6	9.4	23	50	7	16	34	115	5.6	12	25	80
	Deformación máxima	2.4	1.9	1.4	2.1	1.7	1.2	.93	2.4	2.0	1.6	1.3	2.2	1.9	1.6	1.0	2.4	2.1	1.8	1.3
4	Catálogo núm.	280	281	282	323	324	325	326	367	368	369	370	407	408	409	410	447	448	449	450
	Código de precio	HE	HE	HE	HE	HF	HG	HG	HE	HE	HF	HG	HF	HF	HG	HL	HJ	HJ	HL	HM
	libras/pulg	1.1	4.9	15	3.9	11	29	69	2.6	6.9	17	37	5.2	12	25	86	4.2	9.2	18	59
	Deformación máxima	3.3	2.6	2.0	2.8	2.3	1.7	1.2	3.2	2.7	2.2	1.8	3.0	2.6	2.1	1.4	3.2	2.8	2.5	1.8
6	Catálogo núm.				327	328	329	330	371	372	373	374	411	412	413	414	451	452	453	454
	Código de precio				HF	HF	HG	HG	HF	HF	HG	HG	HG	HG	HJ	HN	HK	HK	HL	HO
	libras/pulg				2.5	7.0	17	45	1.8	4.6	11	24	3.4	7.9	16	56	2.7	6.0	17	38
	Deformación máxima				4.4	3.5	2.5	2	4.8	4.2	3.4	2.7	4.6	3.9	3.3	2.2	4.9	4.3	3.8	2.7
8	Catálogo núm.												415	416	417	418	455	456	457	458
	Código de precio												HJ	HJ	HK	HO	HL	HL	HM	HP
	libras/pulg												2.6	6	11	40	2.0	4.5	8.9	28
	Deformación máxima												6.1	5.2	4.5	3.0	6.5	5.8	5.1	3.7
Carga máxima		3.7	12.7	29	11	25	45	88	8.3	19	38	66	15.8	31.2	54	125	13.4	26.3	45	105
Trabajará libre sobre		.347	.315	.285	.375	.345	.313	.281	.505	.475	.443	.411	.585	.554	.522	.460	.700	.670	.638	.576
Paso		.195	.141	.128	.173	.151	.141	.141	.259	.214	.188	.177	.284	.240	.217	.204	.371	.306	.268	.239
Esfuerzo sólido (se omiten 000)		125	118	113	118	113	109	105	118	113	109	105	113	109	105	99	113	109	105	99

La cantidad en libras por pulgada es una contante para cada resorte y representa el número de libras requeridas para comprimir el resorte 1 pulg. Para comprimir el resorte ½ o ¼ de pulg se requiere ½ o ¼ de pulg de este valor.

La deformación máxima es la cantidad que se deforma el resorte para proporcionar la carga máxima. Este valor restado de la longitud libre proporciona la longitud sólida o comprimida.

Nota: Los resortes en existencia pueden ordenarse en acero inoxidable o recubierto. Los precios se cotizan sobre pedido.

A



LONGITUDES LIBRES

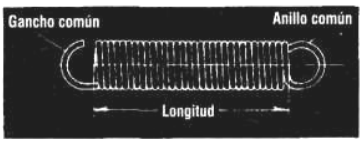
Entrará en agujero pulg		1				1 1/4			1 1/2			2			3			4			6	
Diámetro de alambre pulg		.078	.094	.125	.187	.094	.125	.187	.125	.187	.250	.187	.250	.375	.250	.375	.500	.375	.500	.750	.750	1.000
1	Catálogo núm.	459	460	461	462																	
	Código de precio	HK	HL	HL	HR																	
	libras/pulg	34	67	210	1500																	
	Deformación máxima	.67	.58	.41	.19																	
1¼	Catálogo núm.	463	464	465	466	499	500	501														
	Código de precio	HL	HM	HM	HS	HN	HN	HM														
	libras/pulg	26	52	160	1100	35	100	600														
	Deformación máxima	.87	.76	.55	.26	.85	.67	.37														
1½	Catálogo núm.	467	468	469	470	502	503	504	526	527	528											
	Código de precio	HL	HM	HN	HS	HN	HO	HT	HR	HX	HAC											
	libras/pulg	21	42	130	870	29	82	460	60	300	1200											
	Deformación máxima	1.0	.93	.69	.34	1.1	.84	.48	.95	.60	.35											
1¾	Catálogo núm.	471	472	473	474	505	506	507	529	530	531											
	Código de precio	HL	HM	HN	HS	HN	HO	HT	HR	HX	HAC											
	libras/pulg	18	35	108	712	24	68	379	50	244	960											
	Deformación máxima	1.3	1.1	.83	.41	1.3	1.0	.59	1.1	.74	.44											
2	Catálogo núm.	475	476	477	478	508	509	510	532	533	534	553	554	555								
	Código de precio	HM	HN	HO	HT	HO	HP	HU	HS	HZ	HAE	HAA	HAG	HZZ								
	libras/pulg	16	30	93	600	21	59	320	43	200	800	115	390	3000								
	Deformación máxima	1.4	1.3	.97	.49	1.4	1.2	.70	1.3	.87	.53	1.1	.77	.34								
3	Catálogo núm.	479	480	481	482	511	512	513	535	536	537	556	557	558	577	578	579					
	Código de precio	HN	HO	HP	HZ	HP	HR	HAA	HT	HAD	HAL	HAE	HAN	HZZ	HAR	HZZ	HZZ					
	libras/pulg	10	19	59	370	13	37	200	27	130	480	73	230	1650	105	560	2300					
	Deformación máxima	2.2	2.0	1.5	.79	2.2	1.8	1.1	2.1	1.4	.89	1.8	1.3	.61	1.8	1.1	.64					
4	Catálogo núm.	483	484	485	486	514	515	516	538	539	540	559	560	561	580	581	582	598	599	610		
	Código de precio	HP	HR	HS	HAC	HS	HT	HAD	HW	HAG	HAO	HAJ	HAR	HZZ	HAT	HZZ	HZZ	HZZ	HZZ	HZZ		
	libras/pulg	7.4	14	43	270	9.9	27	144	20	93	340	53	170	1150	76	390	1500	210	720	4600		
	Deformación máxima	3.0	2.7	2.1	1.1	3.0	2.5	1.5	2.8	1.9	1.2	2.5	1.8	.88	2.5	1.6	.96	2.1	1.4	.8		
6	Catálogo núm.	487	488	489	490	517	518	519	541	542	543	562	563	564	583	584	585	600	601	611	616	621
	Código de precio	HR	HT	HU	HAD	HU	HW	HAE	HX	HAJ	HAT	HAM	HAW	HZZ	HAZ	HZZ	HZZ	HZZ	HZZ	HZZ	HZZ	HZZ
	libras/pulg	4.9	9.4	28	175	6.5	18	93	13	60	220	34	105	710	49	240	920	130	430	2840	850	3500
	Deformación máxima	4.6	4.1	3.2	1.7	4.7	3.9	2.4	4.3	3.0	1.9	3.8	2.8	1.4	4.0	2.6	1.6	3.4	2.4	1.3	1.9	1.4
8	Catálogo núm.	491	492	493	494	520	521	522	544	545	546	565	566	567	586	587	588	602	603	612	617	622
	Código de precio	HS	HU	HW	HAL	HW	HX	HAM	HAA	HAP	HAW	HAR	HAZ	HZZ	HBD	HZZ	HZZ	HZZ	HZZ	HZZ	HZZ	HZZ
	libras/pulg	3.6	7.0	21	125	4.8	13	68	9.6	44	160	25	79	510	36	175	660	95	310	2050	630	2500
	Deformación máxima	6.2	5.6	4.3	2.3	6.3	5.2	3.2	5.9	4.1	2.7	5.2	3.9	1.9	5.4	3.6	2.2	4.5	3.4	1.8	2.7	2.0
12	Catálogo núm.	495	496	497	498	523	524	525	547	548	549	568	569	570	589	590	591	604	605	613	618	623
	Código de precio	HT	HW	HZ	HAP	HX	HAA	HAR	HAC	HAU	HBA	HAZ	HBE	HZZ	HBK	HZZ	HZZ	HZZ	HZZ	HZZ	HZZ	HZZ
	libras/pulg	2.4	4.6	14	84	3.2	8.7	45	6.3	29	105	16	52	330	23	110	420	61	195	1325	400	1580
	Deformación máxima	9.4	8.4	6.5	3.5	9.5	7.9	5.0	8.9	6.2	4.1	8.0	5.9	3.0	8.3	5.5	3.5	7.3	5.3	2.6	4.3	3.1
16	Catálogo núm.	Nota: los resortes en existencia pueden ordenarse en acero inoxidable o recubierto. Los precios se cotizan sobre pedido							550	551	552	571	572	573	592	593	594	606	607	614	619	624
	Código de precio								HAE	HAW	HBD	HAZ	HBG	HZZ	HBL	HZZ	HZZ	HZZ	HZZ	HZZ	HZZ	HZZ
	libras/pulg								4.7	21	74	12	38	240	17	83	310	45	145	975	300	1170
	Deformación máxima								11.9	8.5	5.6	10.7	8.0	4.1	11.3	7.5	4.0	10	7.3	3.8	6.1	4.3
24	Catálogo núm.											574	575	576	595	596	597	608	609	615	620	625
	Código de precio											HBA	HBL	HZZ	HBP	HZZ	HZZ	HZZ	HZZ	HZZ	HZZ	HZZ
	libras/pulg											7.8	23.4	150	11.4	54	200	29	94	640	175	760
	Deformación máxima											16.3	12.1	7.0	17.1	11.5	7.3	15.2	11.1	5.8	9.4	6.5
Carga máxima		23	39	90	295	30	69	224	57	180	428	131	307	1000	195	624	1470	449	1040	3700	2000	4800
Trabajará libre sobre		784	752	690	565	1.00	940	815	1.19	1.06	940	1.52	1.39	1.14	2.33	2.08	1.83	3.08	2.83	2.25	4.25	3.75
Paso		.382	.328	.279	.268	.481	.384	.327	.516	.403	.388	.596	.518	.514	.917	.741	.736	1.08	.969	1.00	1.3	1.4
Esfuerzo sólido (se omiten los 000)		109	105	99	90	105	99	90	99	90	85	90	85	77	85	77	73	77	73	70	70	65

La cantidad en libras por pulgada es una contante para cada resorte y representa el número de libras requeridas para comprimir el resorte 1 pulg. Para comprimir el resorte ½ o ¼ de pulg se requiere ½ o ¼ de pulg de este valor.

La deformación máxima es la cantidad que se deforma el resorte para proporcionar la carga máxima. Este valor restado de la longitud libre proporciona la longitud sólida o comprimida.

Hardware Products Company, Inc.

RESORTES DE EXTENSIÓN



ORDEN POR:
LONGITUD x DIÁMETRO EXTERIOR
x DIÁMETRO DE ALAMBRE

ESPECIFIQUE LOS GANCHOS O ANILLAS

Los números dados para "Alargamiento máximo" y "Libras por pulgada" son para un resorte de 1 pulg de largo. Para otras longitudes multiplique el " Alargamiento máximo" y divida las "libras por pulgadas" entre la longitud en pulgadas.La "Carga máxima" y la "Tensión inicial" permanecen constantes para cualquier longitud.

Ejemplo: Un resorte de ½ pulg de diámetro, .062 pulg de alambre y 4 pulg de largo tendrá un alargamiento máximo seguro de 3.2 pulg y requerirá de 4 libras para deformarse 1 pulgada. El resorte soportará aproximadamente 3.3 libras, antes de que comience a alargarse, y soportará un máximo de 16.1libras sin estiramiento permanente. Si se cuelgan 8.5 libras en el resorte se deforma 1.3 pulg 8.54 libras menos 3.3 libras divididas entre 4 libras por pulgada es igual a 1.3 pulg.

PARA ENTREGAS RÁPIDA
Llame al 617-884-9410

Nota: Los resortes en existencia pueden ordenarse en acero inoxidable o recubierto. Los precios se cotizan sobre pedido.

Diámetro exterior	Diámetro de alambre	Catálogo núm.	Código de precio	Carga máxima de seguridad en libras	Alargamiento máximo de seguridad en pulg	Tensión inicial aproximada en libras	Alargamiento libras por pulgada	Esfuerzo en carga máxima (se omiten los 000)	Peso por pie (libras)
1/8	.012	01	EHE	.6	1.9	.07	.27	100	.012
	.016	02	EHD	1.3	.9	.2	1.2	93	.015
	.023	03	EHD	4.2	.35	.9	9.0	90	.02
5/32	.012	04	EHE	.47	3.5	.01	.12	100	.015
	.016	05	EHD	1.1	1.7	.15	.55	93	.019
	.023	06	EHD	3.2	.7	.5	3.9	90	.027
3/16	.016	07	EHD	.87	2.5	.1	.3	93	.024
	.023	08	EHD	2.6	1.0	.4	2.2	90	.032
	.031	09	EHD	6.5	.45	1.5	10.7	88	.04
7/32	.016	10	EHD	.75	4.0	.01	.18	93	.028
	.023	11	EHD	2.3	1.6	.32	1.2	90	.039
	.031	12	EHD	5.5	.7	1.0	6.5	88	.048
1/4	.023	13	EHD	1.8	1.9	.26	.8	90	.044
	.031	14	EHD	4.7	1.0	.75	3.8	88	.055
	.047	15	EHE	16.0	.3	3.5	40.0	83	.082
5/16	.023	16	EHE	1.5	3.5	.16	.38	90	.058
	.031	17	EHE	3.6	1.6	.55	1.9	88	.072
	.047	18	EHE	12.5	.9	2.2	10.8	83	.108
3/8	.031	19	EHE	2.9	2.5	.37	1.0	88	.084
	.047	20	EHE	10.5	.9	1.7	9.5	83	.13
	.062	21	EHF	23.0	.39	5.3	45.0	79	.16
7/16	.031	22	EHF	2.5	3.5	.26	.63	88	.105
	.047	23	EHF	8.5	1.2	1.4	5.7	83	.163
	.062	24	EHF	20.0	.6	4.3	26.0	79	.2
1/2	.047	25	EHF	7.3	1.6	1.1	3.7	83	.18
	.062	26	EHF	17.0	.8	3.3	16.0	79	.23
	.078	27	EHG	34.0	.45	8.0	57.0	77	.28
	.094	28	EHJ	57.0	.25	16.0	160.0	74	.32
5/8	.047	29	EHG	6.0	3.0	.7	1.7	83	.24
	.062	30	EHG	13.3	1.4	2.1	7.6	79	.3
	.078	31	EHG	27.0	.9	5.2	23.0	77	.37
	.094	32	EHJ	45.0	.4	11.0	73.0	74	.44
3/4	.062	33	EHG	10.5	2.2	1.5	4.1	79	.36
	.078	34	EHJ	22.0	1.3	3.5	14.0	77	.46
	.094	35	EHJ	36.0	.7	8.0	38.0	74	.51
	.125	36	EHK	85.0	.3	22.0	180.0	69	.64
7/8	.062	37	EHK	9.2	3.3	1.1	2.4	79	.4
	.078	38	EHK	18.0	1.7	2.6	8.7	77	.59
	.094	39	EHL	31.0	1.0	6.0	25.0	74	.64
	.125	40	EHM	72.0	.5	17.0	107.0	69	.8
1	.078	41	EHL	16.0	2.5	2.0	5.5	77	.67
	.094	42	EHL	26.0	1.5	4.5	13.7	74	.70
	.125	43	EHN	65.0	.75	14.0	68.0	69	.90
	.187	44	EHW	200.0	.23	60.0	600.0	63	1.4
1¼	.094	45	EHM	21.0	2.6	2.8	6.8	74	.94
	.125	46	EHO	47.0	1.2	9.0	31.0	69	1.3
	.187	47	EHZ	148.0	.3	40.0	290.0	63	1.8
1½	.125	48	EHS	39.0	1.9	6.0	17.0	69	1.4
	.187	49	EHAA	122.0	.6	33.0	150.0	63	2.2
	.250	50	EHAC	290.0	.27	90.0	720.0	60	2.6
2	.187	51	EHAD	90.0	1.3	20.0	54.0	63	3.1
	.250	52	EHAG	210.0	.6	55.0	260.0	60	3.7

Surtidos en longitudes de 3 pies - cortados a la longitud y anillados según pedido.

Hardware Products Company, Inc.
191 WILLIAMS STREET • CHELSEA, MA 02150

A

Apéndice E

ATLAS DE CURVAS DEL ACOPLADOR DE ESLABONAMIENTOS DE CINCO BARRAS CON ENGRANAJE

C. Zhang, R. L. Norton, T. Hammond

Las siguientes páginas de datos de curvas de acoplador se extrajeron de la obra completa. Véase las secciones 3.6, 4.8, 6.8 y 7.4 para mayor información sobre el eslabonamiento de cinco barras con engranaje. Utilice el programa FlVEBAR para investigar otras geometrías de eslabonamiento.

Alpha = Eslabón acoplador 3/Eslabón 2

Beta - Eslabón de fijación 1/Eslabón 2

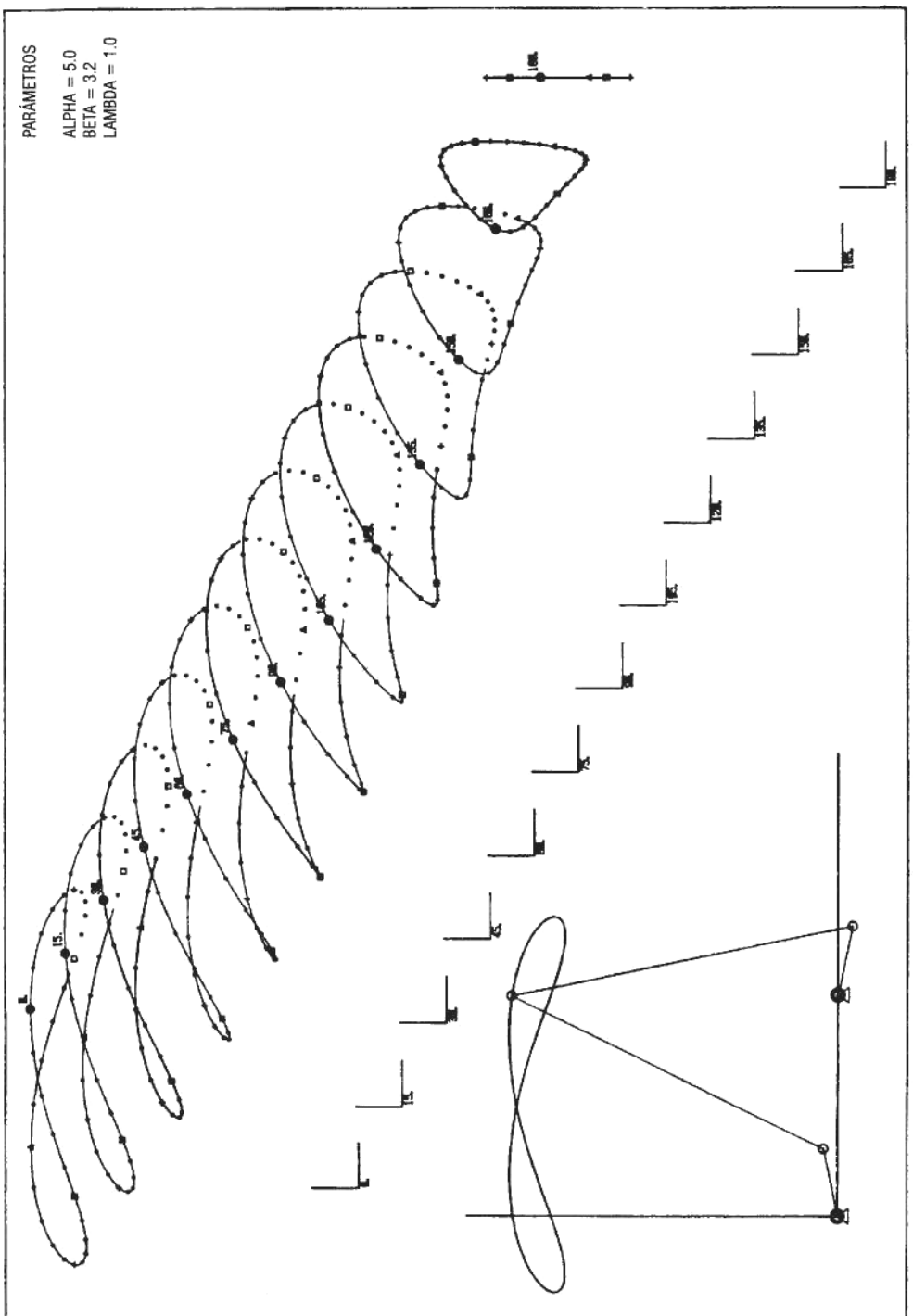
Lambda = Relación de engranes = Engrane 5/Engrane *2**

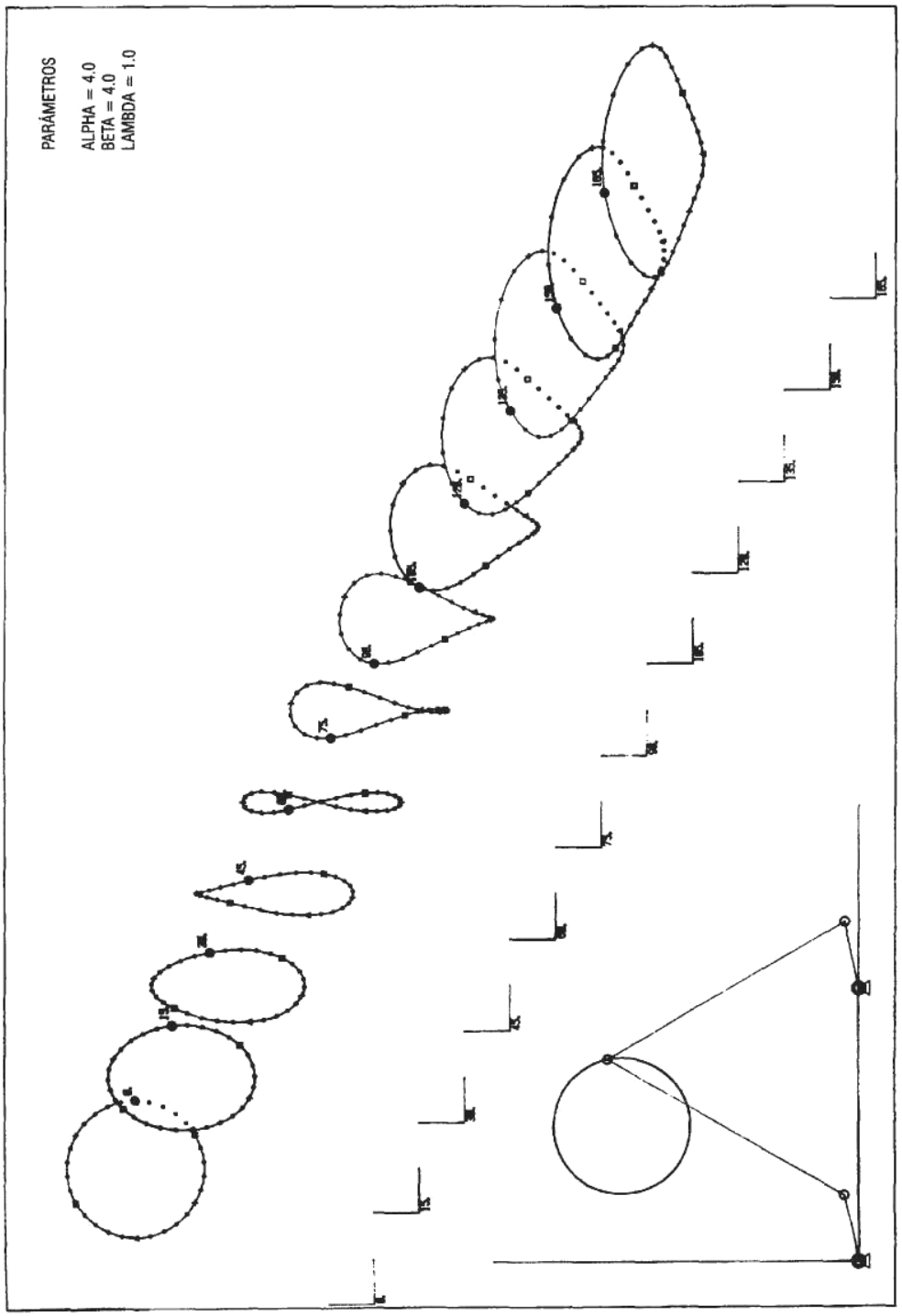
Ángulo de fase se indica en cada gráfica de curva de acoplador.

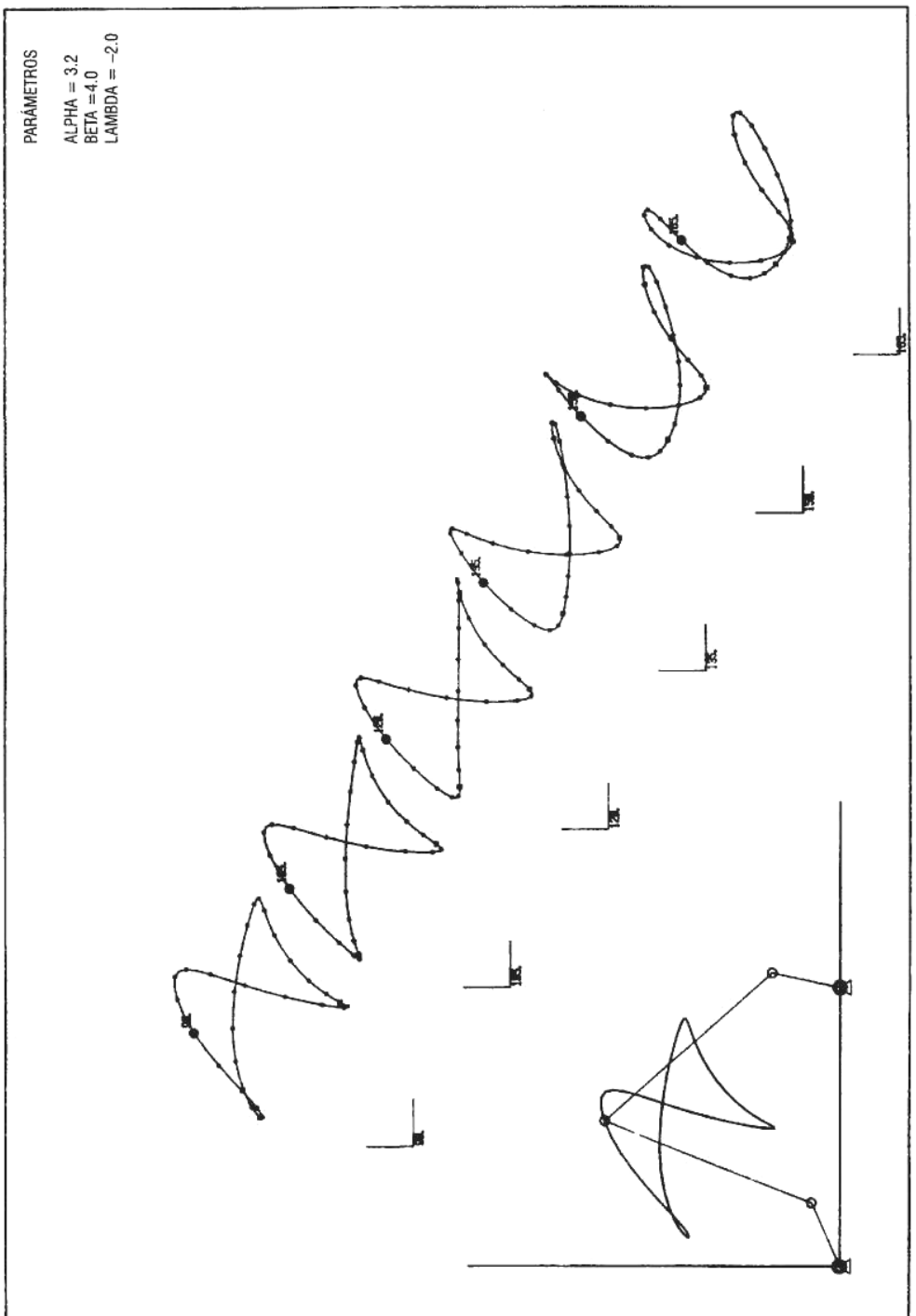
Los puntos a lo largo de las curvas están a cada 10 grados de la rotación del Eslabón 2.

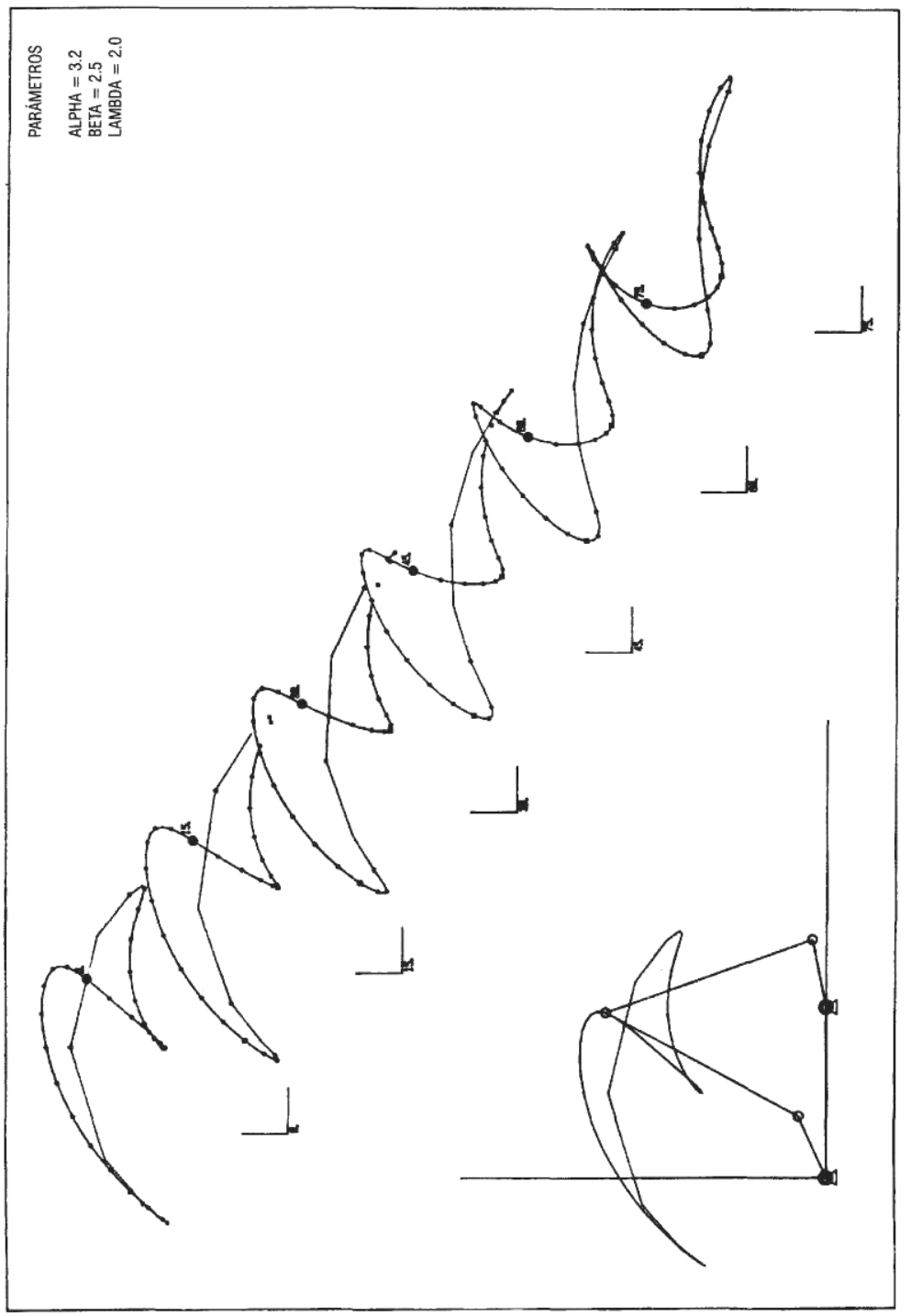
El eslabonamiento es simétrico: Eslabón 2 = Eslabón 5 y Eslabón 3 = Eslabón 4

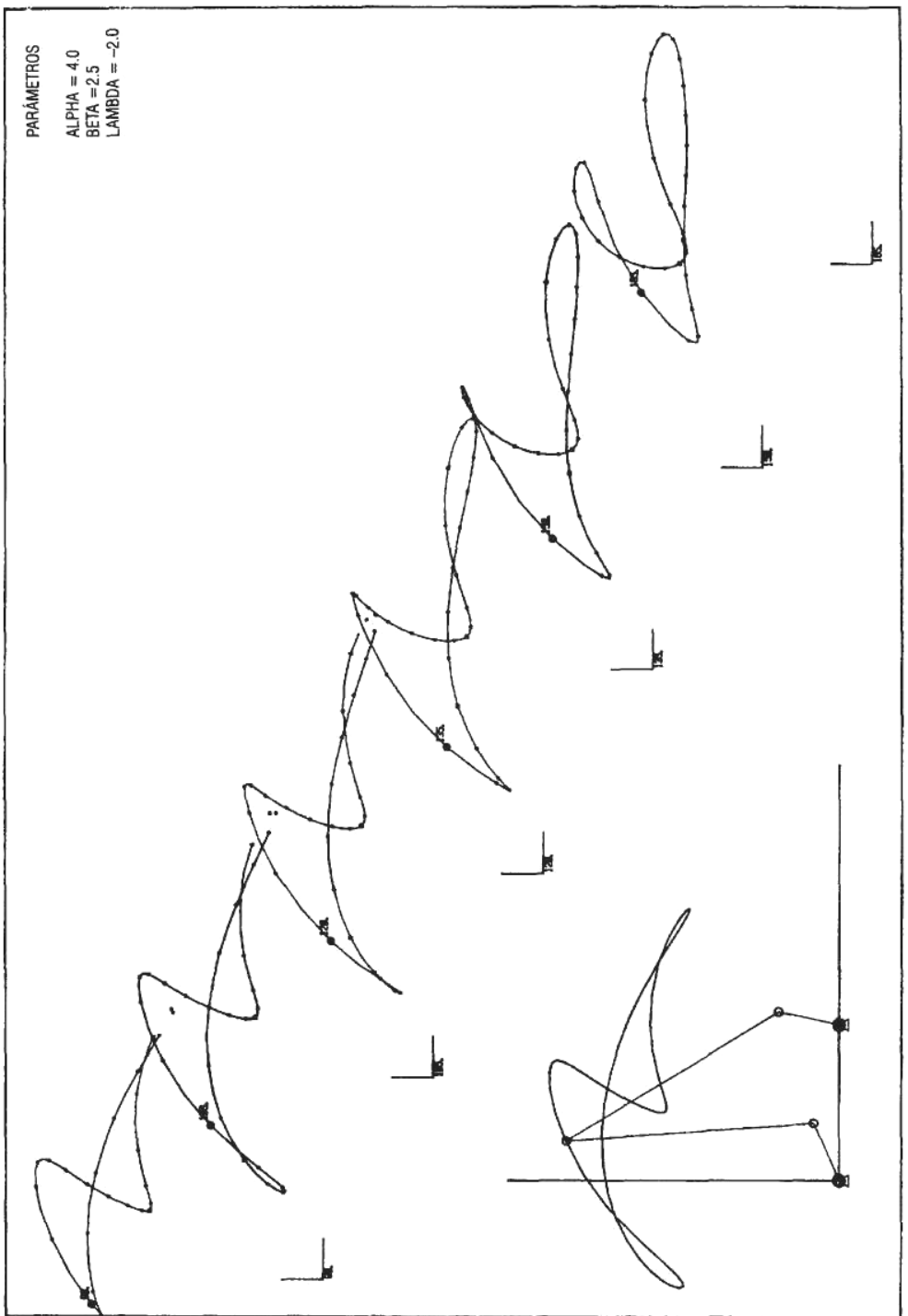
* Observe que esta lambda es la **inversa** de la λ que se definió en las secciones 4.8, 6.8 y 7.4. Véase también las figuras P4-4, P6-4 y P7-4. Por ejemplo, en este atlas una relación de engranes λ de 2 corresponde a una λ de 0.5 en el texto y en el programa FIVEBAR. (La diferencia corresponde simplemente a un reflejo del eslabonamiento de izquierda a derecha.)


PARÁMETROS
ALPHA = 5.0
BETA = 3.2
LAMBDA = 1.0


PARÁMETROS
ALPHA = 4.0
BETA = 4.0
LAMBDA = 1.0


PARÁMETROS
ALPHA = 3.2
BETA =4.0
LAMBDA = –2.0


PARÁMETROS
ALPHA = 3.2
BETA = 2.5
LAMBDA = 2.0


PARÁMETROS
ALPHA = 4.0
BETA = 2.5
LAMBDA = −2.0

Apéndice F

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS SELECCIONADOS

CAPÍTULO 2 FUNDAMENTOS DE CINEMÁTICA

2-1

a. 1 b. 1 c. 2 d. 1 e. 7 f. 1 g. 4
h. 4 i. 4 j. 2 k. 1 1.1 m. 2 n. 2
0. 4 p. tantas como secciones tenga menos una q. 3

2-3 a. 1 b. 3 c. 3 d. 3 e. 2

2-4 a. 6 b. 6 c. 5

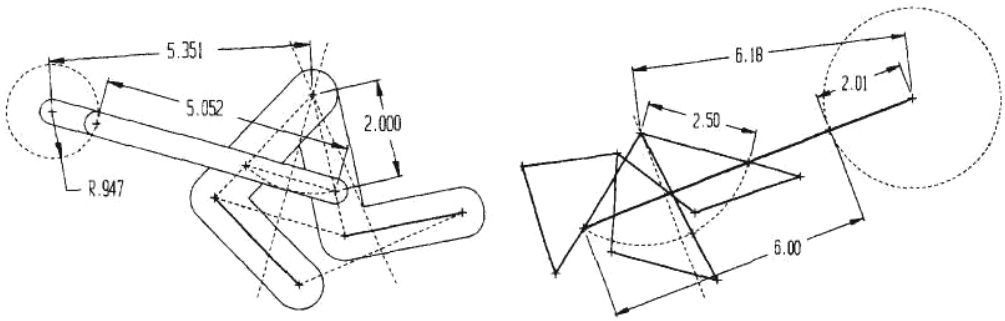
d. 4, pero 2 están dinámicamente acopladas e. 10 f. 3

2-5 cierre de fuerza

2-6

a. rotación pura
b. movimiento planar complejo
c. traslación pura
d. traslación pura
e. rotación pura
f. movimiento planar complejo
g. traslación pura
h. traslación pura
1. movimiento planar complejo

2-7 a. 0 b. 1 el d. 3

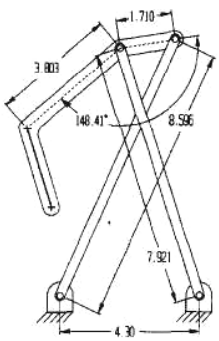


a) Una solución posible al problema 3-3 *b*) Una solución posible al problema 3-5

FIGURA S3-1
Soluciones a los problemas 3-3 y 3-5

2-8

a. estructura - $GDL = 0$
b. mecanismo - $GDL = 1$
c. mecanismo - $GDL = 1$
d. mecanismo - $GDL = 3$



2-15 a. Grashof b. de no Grashof c. caso especial de Grashof

2-21

a. $M = 1$ b. $M = 1$ c. $M = 1$ d. $M = 1$
e. $M = -1$ (una paradoja) f. $M = 1$ g. $M = 1$
h. $M = 0$ (una paradoja)

2-24 a. $M = 1$ b. $M = 1$

2-26 $M=1$

CAPÍTULO 3 SÍNTESIS GRÁFICA DE ESLABONAMIENTOS

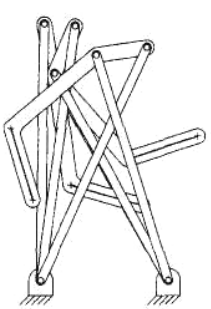


FIGURA S3-2
Solución única al problema 3-6

3-1

a. Generación de trayectoria
b. Generación de movimiento
c. Generación de función
d. Generación de trayectoria
e. Generación de trayectoria

Observe que los problemas de síntesis tienen muchas soluciones válidas. No se puede proporcionar una "respuesta correcta " para todos estos problemas de diseño. Compruebe su solución con un modelo en cartulina introduciéndolo en uno de los programas proporcionados con ese texto.

3-3 Véase la figura S3-1.

3-5 Véase la figura S3-1.

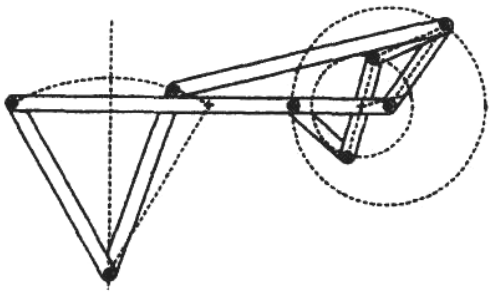


FIGURA S3-3

Una solución posible al problema 3-8

3-6 Véase la figura S3-2.

3-8 Véase la figura S3.3.

3-10 La solución usada en la figura 3-17 se muestra en la figura S3-4. (Utilice el programa FOURBAR para comprobar su solución.)

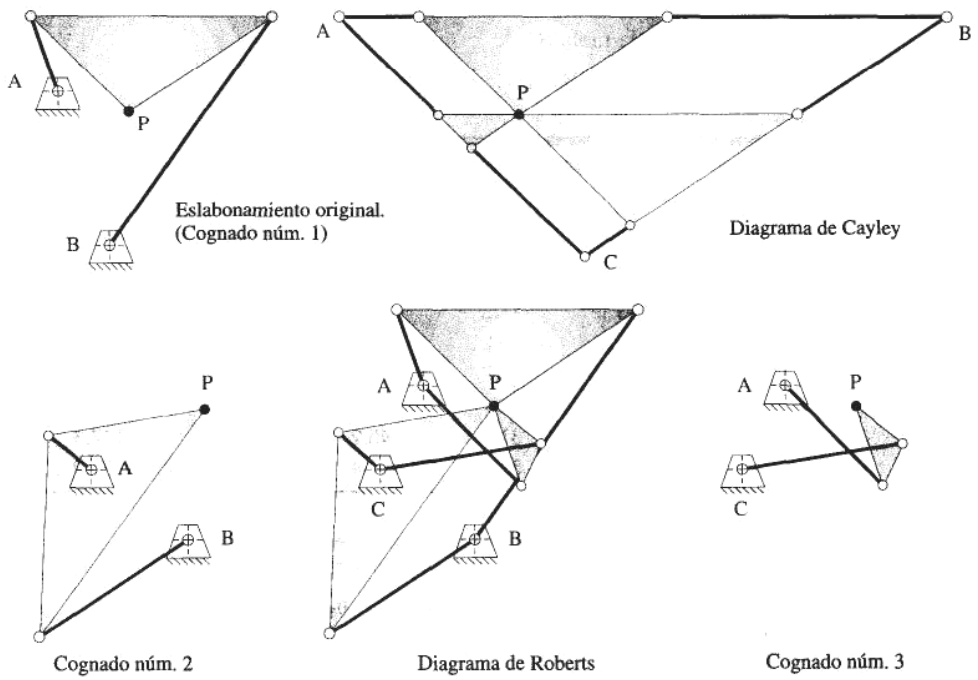


FIGURA S3-4

Solución ai problema 3-10. La localización de los cognados del eslabonamiento de cuatro barras se muestra en la figura 3-17

3-22 El ángulo de transmisión varía de 31.5° a 89.9°

3-23 Manivela-balacín de Grashof. El ángulo de transmisión varía de 58.1°a 89.8°.

3-36 Doble balancín de Grashof. Trabaja de 56° a 158° y de 202° a 310°. El ángulo de transmisión varía de 0° a 90°.

3-42 Triple balancín de no Grashof. Agarrotamiento a + 55.4°. El ángulo de transmisión varía de 0° a 88.8°

CAPÍTULO 4 ANÁLISIS DE POSICIONES

4-6 y **4-7** Véase la tabla S4-1 y el archivo P07-04*row*.4br.

4-9 y **4-10** Véase la tabla S4-2.

4-11 y **4-12** Véase la tabla S4-3.

4-13 Véase la tabla S4-1.

4-14 Abra el archivo P07-04*row*.4br† en el programa FOURBAR para ver esta solución.*

4-15 Abra el archivo P07-04*row*.4br† en el programa FOURBAR para ver esta solución.*

4-16 Véase la tabla S4-4.

4-17 Véase la tabla S4-4.

TABLA S4-1 Soluciones para los problemas 4-6, 4-7 y 4-13

Renglón	θ_3 abierto	θ_4 abierto	Ángulo de transmisión	θ_3 cruzado	θ_4 cruzado	Ángulo de transmisión
a	88.8	117.3	28.4	–115.2	–143.6	28.4
c	–53.1	16.5	69.6	173.3	103.6	69.6
e	7.5	78.2	70.7	–79.0	–149.7	70.7
g	–16.3	7.2	23.5	155.7	132.2	23.5
i	–1.5	103.1	75.4	–113.5	141.8	75.4
k	–13.2	31.9	45.2	–102.1	–147.3	45.2
m	–3.5	35.9	39.4	–96.5	–135.9	39.4

TABLA S4-2 Soluciones para los problemas 4-9 y 4-10

Renglón	θ_3 abierto	*Corredera* abierta	θ_3 cruzado	*Corredera* cruzada
a	180.1	5.0	–0.14	–3.0
c	205.9	9.8	–25.90	–4.6
e	175.0	16.4	4.20	–23.5
g	212.7	27.1	–32.70	–14.9

† Estos archivos pueden encontrarse en la carpeta PROBLEM SOLUTIONS en el CD-ROM incluido con este texto.

TABLA S4-3 Soluciones para los problemas 4-11 y 4-12

Renglón	θ_3 abierto	θ_4 abierto	R_B abierto	θ_3 cruzado	θ_4 cruzado	R_B cruzado
a	232.7	142.7	1.79	–79.0	–169.0	–1.79
c	91.4	46.4	2.72	208.7	163.7	–11.20
e	158.2	128.2	6.17	–36.2	–66.2	–9.63

TABLA S4-4 Soluciones para los problemas 4-16 y 4-17

Renglón	θ_3 abierto	θ_4 abierto	θ_3 cruzado	θ_4 cruzado
a	173.6	–177.7	–115.2	–124.0
c	17.6	64.0	–133.7	180.0
e	–164.0	–94.4	111.2	41.6
g	44.2	124.4	–69.1	–149.3
i	37.1	120.2	–67.4	–150.5

4-21 Abra el archivo P04-21.4br en el programa FOURBAR para ver esta solución.*

4-23 Abra el archivo P04-23.4br en el programa FOURBAR para ver esta solución.*

4-25 Abra el archivo P04-25.4br en el programa FOURBAR para ver esta solución.*

4-26 Abra el archivo P04-26.4br en el programa FOURBAR para ver esta solución.*

4-29 Abra el archivo P04-29.4br en el programa FOURBAR para ver esta solución.*

4-30 Abra el archivo P04-30.4br en el programa FOURBAR para ver esta solución.*

CAPÍTULO 5 SÍNTESIS ANALÍTICA DE ESLABONAMIENTOS

5-8 Dados: $\alpha_2 = -62.5°$, $P_{21} = 2.47$, $\delta_2 = 120°$

Para la díada izquierda: Suponga: $z = 1.075$, $\phi = 204°$ $\beta_2 = -27°$

Calcule: $\mathbf{W} = 3.67 \angle -113.5°$

Para la díada derecha: Suponga: $s = 1.24$, $\psi = 74°$ $\gamma_2 = -40°$

Calcule: $\mathbf{U} = 5.46 \angle -125.6°$

5-11 Véase la figura S5-1 para la solución. Las longitudes de eslabón son:

Eslabón 1 = 4.35, Eslabón 2 = 3.39,
Eslabón 3 = 1.94, Eslabón 4 = 3.87

5-15 Véase la figura S5-2 para la solución. Las longitudes de eslabón son:

Eslabón 1 = 3.95, Eslabón 2 = 1.68,
Eslabón 3 = 3.05, Eslabón 4 = 0.89

* Estos archivos pueden encontrarse en la carpeta PROBLEM SOLUTIONS en el CD-ROM incluido con este texto.

5-19 Véase la figura S5-3 para la solución. Las longitudes de eslabón son:

Eslabón 1 = 2, Eslabón 2 = 2.5,
Eslabón 3 = 1, Eslabón 4 = 2.5

5-26 Dados:

$\alpha_2 = -45°$,	$P_{21} = 184.78$ mm,	$\delta_2 = -5.28°$
$\alpha_3 = -90°$,	$P_{31} = 277.35$ mm,	$\delta_3 = -40.47°$
$O_{2x} = 86$ mm	$O_{2y} = -132$ mm	
$O_{4x} = 104$ mm	$O_{4y} = -155$ mm	

Para la díada izquierda:

Calcular: $\beta_2 = -85.24°$	$\beta_3 = -164.47°$
Calcular: $W = 110.88$ mm	$\theta = 124.24°$
Calcular: $Z = 46.74$ mm	$\phi = 120.34°$

Para la díada derecha:

Calcular: $\gamma_2 = -75.25°$	$\gamma_3 = -159.53°$
Calcular: $U = 120.70$ mm	$\sigma = 104.35°$
Calcular: $S = 83.29$ mm	$\psi = 152.80°$

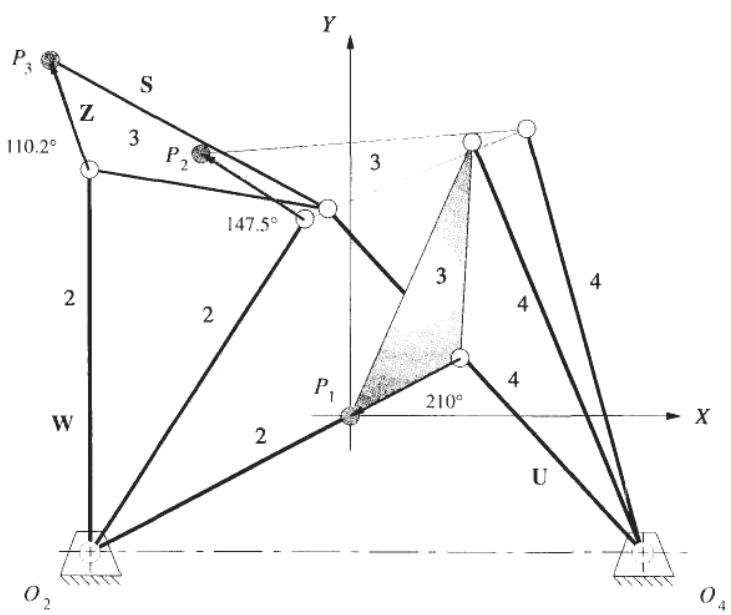


FIGURA S5-1

Solución al problema 5-11. Abra el archivo P05-11 en el programa FOURBAR para mayor Información

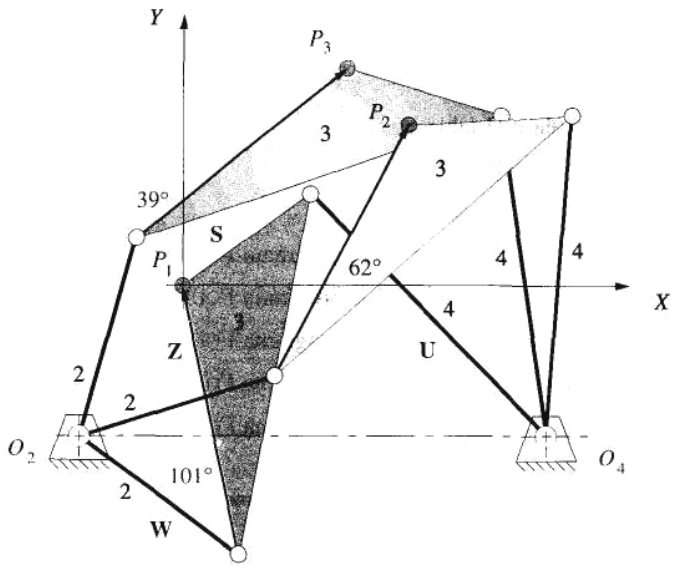


FIGURA S5-2

Solución al problema 5-15. Abra el archivo P05-15 en el programa FOURBAR para mayor información

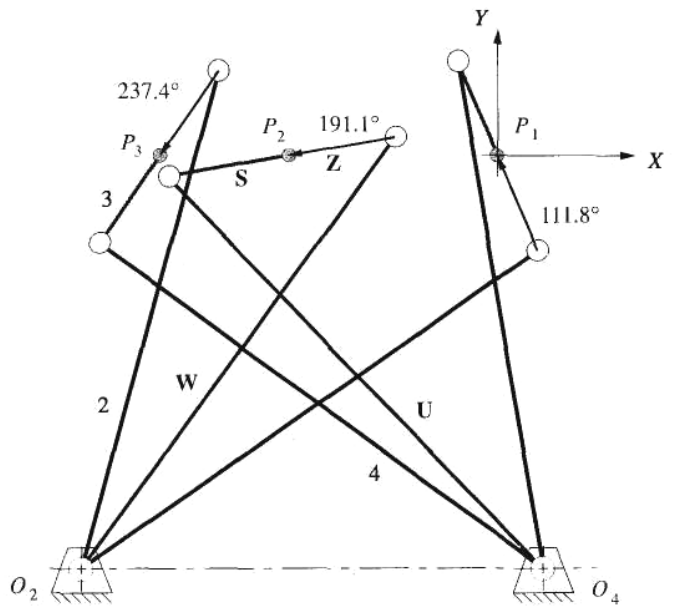


FIGURA S5-3

Solución al problema 5-19. Abra el archivo P05-19 en el programa FOURBAR para mayor información

CAPÍTULO 6 ANÁLISIS DE VELOCIDAD

6-4 y **6-5** Véase la tabla S6-1 y el archivo P07-04row.4br.

6-6 y **6-7** Véase la tabla S6-2.

6-8 y **6-9** Véase la tabla S6-3.

6-10 y **6-11** Véase la tabla S6-4.

6-47 Abra el archivo P06-47.4br en el programa FOURBAR para ver esta solución.*

6-48 Abra el archivo P06-48.4br en el programa FOURBAR para ver esta solución.*

6-49 Abra el archivo P06-49.4br en el programa FOURBAR para ver esta solución.*

6-51 Abra el archivo P06-51.4br en el programa FOURBAR para ver esta solución.*

6-62 Abra el archivo P06-62.4br en el programa FOURBAR para ver esta solución.*

TABLA S6-1 Soluciones para los problemas 6-4 y 6-5

Renglón	ω_3 abierto	ω_4 abierto	V_P mag	V_P ang	ω_3 cruzado	ω_4 cruzado	V_P mag	V_P ang
a	–6.0	–4.0	40.8	58.2	–0.66	–2.66	22.0	129.4
c	–12.7	–19.8	273.8	–53.3	–22.7	–15.7	119.1	199.9
e	1.85	–40.8	260.5	–12.1	–23.3	19.3	139.9	42.0
g	76.4	146.8	798.4	92.9	239.0	168.6	1 435.3	153.9
i	–25.3	25.6	103.1	–13.4	56.9	6.0	476.5	70.4
k	–56.2	–94.8	436.0	–77.4	–55.6	–16.9	362.7	79.3
m	18.3	83.0	680.8	149.2	7.73	–57.0	571.3	133.5

TABLA S6-2 Soluciones para los problemas 6-6 y 6-7

Renglón	V_A mag	V_A ang	ω_3 abierto	V_B mag abierto	ω_3 cruzado	V_B mag cruzado
a	14	135	–2.47	–9.9	2.47	–9.92
c	45	–120	5.42	–41.5	–5.42	–3.54
e	250	135	–8.86	–189.7	8.86	–163.80
g	700	60	–28.80	738.9	28.80	–38.90

TABLA S6-3 Soluciones para los problemas 6-8 y 6-9

Renglón	V_A mag	V_A ang	ω_3 abierto	V_{desi} abierto	V_B mag abierto	ω_3 cruzado	V_{des} cruzado	V_B mag cruzado
a	20.0	120.0	–10.3	33.5	41.2	3.6	–33.5	14.6
c	240.0	135.0	23.7	73.0	142.5	6.5	257.8	38.8
e	–180.0	165.0	–2.7	–176.0	5.4	–44.5	–17.1	89.0

* Estos archivos pueden encontrarse en la carpeta PROBLEM SOLUTIONS en el CD-ROM incluido con este texto.

TABLA S6-4 Soluciones para los problemas 6-10 y 6-11

Renglón	ω_3 abierto	ω_4 abierto	ω_3 cruzado	ω_4 cruzado
a	32.6	16.9	–75.2	–59.6
c	10.7	–2.6	–8.2	5.1
e	–158.3	–81.3	–116.8	–193.9
g	–8.9	–40.9	–48.5	–16.5
i	–40.1	47.9	59.6	–28.4

CAPÍTULO 7 ANÁLISIS DE ACELERACIÓN

7-3 y **7-4** Véase la tabla S7-1 y el archivo P07-04row.4br.

7-5 y 7-6 Véase la tabla S7-2.

7-7 y 7-8 Véase la tabla S7-3.

7-9 Véase la tabla S7-4.

7-39 Abra el archivo P07-39.4br en el programa FOURBAR para ver esta solución.*

7-40 Abra el archivo P07-40.4br en el programa FOURBAR para ver esta solución.*

7-41 Abra el archivo P07-41.4br en el programa FOURBAR para ver esta solución.*

TABLA S7-1 Soluciones para los problemas 7-3 y 7-4

Renglón	α_3 abierto	α_4 abierto	A_P mag	A_P ang	α_3 cruzado	α_4 cruzado	A_P mag	A_P ang
a	26.1	53.3	419	240.4	77.9	50.7	298	–11.3
c	–154.4	–71.6	4 400	238.9	–65.2	–148.0	3 554	100.6
e	331.9	275.6	10 260	264.8	1 287.7	1 344.1	19 340	–65.5
g	–23 510.	–19 783.	172 688	191.0	–43 709.	–47 436.	273 634	–63.0
i	–344.6	505.3	9 492	–81.1	121.9	–728.0	27 871	150.0
k	–2 693.	–4 054.	56 271	220.2	311.0	1 672.1	27 759	–39.1
m	680.8	149.2	35 149	261.5	9 266.1	10 303.	63 831	103.9

TABLA S7-2 Soluciones para los problemas 7-5 y 7-6

Renglón	A_A mag	A_A ang	α_3 abierto	A_B mag abierto	A_B ang abierto	α_3 cruzado	A_B mag cruzado	A_B ang cruzado
a	140	–135	25	124	180	–25	74	180
c	676	153	–29	709	180	29	490	180
e	12 500	45	–447	6 653	0	447	11 095	0
g	70 000	150	–1 136	62 688	180	1 136	58 429	180

* Estos archivos pueden encontrarse en la carpeta PROBLEM SOLUTIONS en el CD-ROM incluido con este texto.

TABLA S7-3 Soluciones para los problemas 7-7 y 7-8

Renglón	α_3 abierto	α_4 abierto	A_{desl} abierto	α_3 cruzado	α_4 cruzado	A_{desl} cruzado
a	130.5	130.5	–3 111.7	–9.9	–9.9	1 125.2
c	–212.9	–212.9	3 327.9	–217.8	–217.8	6 776.4
e	896.3	896.3	2 020.1	595.6	595.6	–1 044.4

TABLA S7-4 Soluciones para el problema 7-9

Renglón	α_3 abierto	α_4 abierto	α_3 cruzado	α_4 cruzado
a	3 191	2 492	–6 648	–5 949
c	314	228	87	147
e	2 171	–6 524	7 781	5 414
g	–22 064	–23 717	–5 529	–29 133
i	–5 697	–3 380	–2 593	–7 184

7-42 Abra el archivo P07-42.4br en el programa FOURBAR para ver esta solución.*

7-44 Abra el archivo P07-44.4br en el programa FOURBAR para ver esta solución.*

7-56 Se vuelca de 19.0 a 20.3 mph; la carga se desliza en 16.2 a 19.5 mph.

CAPÍTULO 8 DISEÑO DE LEVAS

La mayoría de los problemas de este capítulo sobre levas son problemas de diseño con más de una solución correcta. Utilice el programa DYNACAM para comprobar la solución que obtuvo con *Mathcad* o *TKSolver* y también explorar diversas soluciones y compararlas para encontrar la mejor para las restricciones dadas en cada problema.

8-1 Véase la figura S8-1

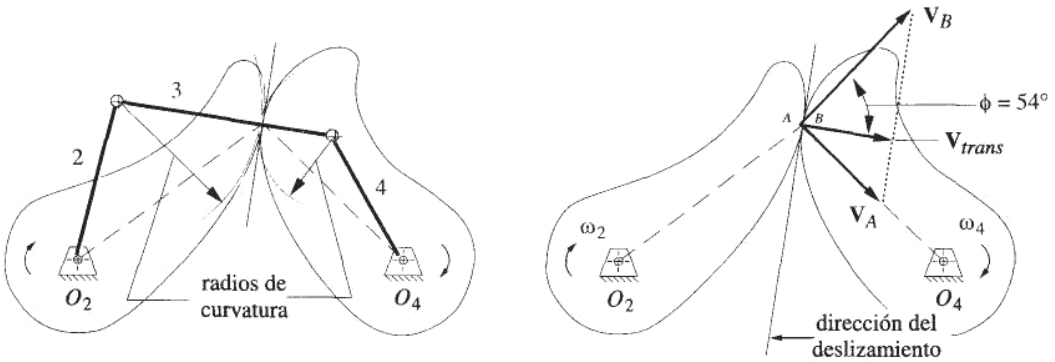
CAPÍTULO 9 TRENES DE ENGRANES

9-1 Diámetro de paso = 5.5, paso circular = 0.785, adendo = 0.25, dedendo = 0.313, espesor de diente = 0.393 y holgura = 0.063.

9-5 a. $p_d = 4$, b. $P_d = 2.67$

9-6 Suponga un número mínimo de dientes = 17, entonces: piñón = 17í y diámetro de paso de 2.124 pulg. Engrane = 153í y diámetro de paso de 19.125 pulg. Radio de contacto = 1.7.

* Estos archivos pueden encontrarse en la carpeta PROBLEM SOLUTIONS en el CD-ROM incluido con este texto.



a) Eslabonamiento efectivo para el problema 8-1 b) Ángulo de presión ϕ para el problema 8-2

FIGURA S8-1

Soluciones a los problemas 8-1 y 8-2

9-7 Suponga un número mínimo de dientes = 17, entonces: piñón = 17í y diámetro de paso de 2.83 pulg. Engrane = 136í y diámetro de paso de 22.67 pulg. Se necesita de un engrane loco de cualquier diámetro para obtener la relación positiva. Radio de contacto =1.7.

9-10 Tres etapas de 4.2:1, 4:1 y 4.167:1 dan -70:1. Etapa 1 = 20í *(d* = 2.0 pulg) a 84f *(d* = 8.4 pulg). Etapa 2 = 20í *(d* = 2.0 pulg) a 80í *(d* = 8.0 pulg). Etapa 3 = 18í *(d* = 1.8 pulg) a 70í *(d* = 7.5 pulg).

9-12 La raíz cuadrada de 150 es > 10 de manera que se necesitarán tres etapas. 5 x 5 x 6 = 150. Utilizando un número mínimo de dientes = 18 se obtiene 18:90, 18:90 y 18:108 dientes. Los diámetros de paso son 3.0, 15 y 18 pulg. Un engrane loco (18í) es necesario para hacer la relación completa positiva.

9-14 Los factores 5 x 6 = 30. Las relaciones 14:70 y 12:72 revierten a la misma distancia central de 4.2. Los diámetros de paso son 1.4, 1.2, 7 y 7.2.

9-16 Los factores 7.5 x 10 = 75. Las relaciones 22:165 y 17:170 revierten a la misma distancia central de 6.234. Los diámetros de paso son 1.833, 1.4167, 13.75 y 14.167.

9-19 Los factores 2 x 1.5 = 3. Las relaciones 15:30 y 18:27 revierten a la misma distancia central de 3.75. Los diámetros de paso son 2.5, 5, 3 y 4.5. El tren de reversa utiliza la misma primera etapa de 1:2 como el tren directo, de modo que se necesita una segunda etapa de 1:2.25 la cual se obtiene con un engranaje de 12:27. La distancia entre centros del tren de reversa de 12:27 es 3.25 la cual es menor que la de la etapa directa. Esto permite que los engranes de reversa se acoplen a través de un engrane loco de cualquier diámetro conveniente para invertir el sentido de salida.

9-21 Para la primera velocidad de 6:1, los factores 2.333 x 2.571 = 6. Las relaciones 15:35 y 14:36 revierten a la misma distancia entre centros de 3.125. Los diámetros de paso son 1.875, 4.375, 1.75 y 4.5. El tren de segunda velocidad utiliza la misma primera etapa de 1:2.333 como el tren de primera velocidad,

TABLA S9-1 Solución al problema 9-29
Posibles relaciones para un tren de engranes compuesto de dos etapas para obtener la relación 2.71828

Piñón 1	Engrane 1	Relación 1	Piñón 2	Engrane 2	Relación 2	Relación de tren	Error Abs
25	67	2.68	70	71	1.014	2.71828571	5.71E-06
29	57	1.966	47	65	1.383	2.71826853	1.15E-05
30	32	1.067	31	79	2.548	2.71827957	4.30E-07
30	64	2.133	62	79	1.274	2.71827957	4.30E-07
31	48	1.548	45	79	1.756	2.71827957	4.30E-07
31	64	2.065	60	79	1.317	2.71827957	4.30E-07
31	79	2.548	75	80	1.067	2.71827957	4.30E-07
35	67	1.914	50	71	1.420	2.71828571	5.71E-06

de modo que se necesita una segunda etapa de 1:1.5 que se obtiene con un engranaje de 20:30 que revierte a la misma distancia entre centros de 3.125. Los diámetros de paso adicionales son 2.5 y 3.75. El tren de reversa también utiliza la misma primera etapa 1:2.333 que las dos velocidades hacia adelante, por lo que se necesita una segunda etapa de 1:1.714 que se obtiene con un engranaje de 14:24. La distancia central de la etapa de reversa de 14:24 es de 2.375 la cual es menor que las otras etapas hacia adelante. Esto permite que los engranes de reversa se acoplen a través de un engrane loco de cualquier diámetro conveniente para invertir el sentido de salida.

9-25 a. $\omega_2 = 790$, c. $\omega_{brazo} = -4.544$, e. $\omega_6 = -61.98$

9-26 a. $\omega_2 = -59$, c. $\omega_{brazo} = 61.54$, e. $\omega_6 = -63.33$

9-27 a. 560.2 rpm y 3.57 a 1, b. $x = 560.2 \times 2 - 800 = 320.4$ rpm

9-29 Véase la tabla S9-1 para la solución. El tercer renglón tiene el error más pequeño y los engranes más pequeños.

CAPÍTULO 10 FUNDAMENTOS DE DINÁMICA

10-1 *CG* @ 8.36 pulg desde el extremo del mango, I_{zz} = 0.177 pulg-libras-s^2, k = 8.99 pulg.

10-2 *CG* @ 7.61 pulg desde el extremo del mango, I_{zz} = 0.096 pulg-libras-s^2, k = 8.39 pulg.

10-4

a. $x = 3.547$, $y = 4.8835$, $z = 1.4308$, $w = -1.3341$
b. $x = -62.029$, $y = 0.2353$, $z = 17.897$, $w = 24.397$

10-6

a. En serie: $k_{efectiva} = 3.09$, Domina el resorte más suave
b. En paralelo: $k_{efectiva} = 37.4$, Domina el resorte más rígido

10-9

a. En serie: $c_{efectiva} = 1.09$, Domina el amortiguador más suave
b. En paralelo: $c_{efectiva} = 13.7$, Domina el amortiguador más rígido

10-12 $k_{efectiva} = 4.667$, $m_{efectiva} = 0.278$

10-20 Masa efectiva en el primer engrane = 0.054 bl, segundo engrane = 0.096 bl, tercer engrane = 0.216 bl, cuarto engrane = 0.863 bl.

10-21 La constante efectiva del resorte en el seguidor = 308.35 lb/pulg.

CAPÍTULO 11 ANÁLISIS DE FUERZAS DINÁMICAS

11-3 Abra el archivo P11-03*row*.sld en el programa SLIDER para comprobar su solución.*

11-4 Abra el archivo P11-03*row*.sld en el programa SLIDER para comprobar su solución.*

11-5 Abra el archivo P11-05*row*.4br en el programa FOURBAR para comprobar su solución.*

11-6 Abra el archivo P11-05*row*.4br en el programa FOURBAR para comprobar su solución.*

11-7 Abra el archivo P11-07*row*.4br en el programa FOURBAR para comprobar su solución.*

11-12 $F_{12x} = -1\,246$ N, $F_{12y} = 940$ N; $F_{14x} = 735$ N, $F_{14y} = -2\,219$ N;
$F_{32x} = 306$ N, $F_{32y} = -183$ N; $F_{43x} = 45.1$ N, $F_{43y} = -782$ N; $T_{12} = 7.14$ N-m

11-13 Abra el archivo P11-13.4br en el programa FOURBAR para comprobar su solución.*

CAPÍTULO 12 EQUILIBRIO

12-1

a. $m_b r_b = 0.934, \theta_b = -75.5°$
c. $m_b r_b = 5.932, \theta_b = 152.3°$
e. $m_b r_b = 7.448, \theta_b = -80.76°$

12-5

a. $m_a r_a = 0.814, \theta_a = -175.2°$, $m_b r_b = 5.50$, $\theta_b = 152.1°$
c. $m_a r_a = 7.482, \theta_a = -154.4°$, $m_b r_b = 7.993$, $\theta_b = 176.3°$
e. $m_a r_a = 6.254, \theta_a = -84.5°$, $m_b r_b = 3.671$, $\theta_b = -73.9°$

12-6 $W_a = 3.56$ lb, $\theta_a = 44.44°$, $W_b = 2.13$ lb, $\theta_b = -129.4°$

12-7 $W_a = 4.2$ lb, $\theta_a = -61.8°$, $W_b = 3.11$ lb, $\theta_b = 135°$

* Estos archivos pueden encontrarse en la carpeta PROBLEM SOLUTIONS en el CD-ROM incluido con este texto.

12-8 Éstos son los mismos eslabonamientos que en el problema 11-5. Abra el archivo Pll-05roH\4br en el programa FOURBAR para comprobar su solución.* Después utilice el programa para calcular los datos del volante.

12-9 Abra el archivo P12-09.4br en el programa FOURBAR para comprobar su solución.*

CAPÍTULO 13 DINÁMICA DE MOTORES

13-1 Solución exacta = –42 679.272 pulg/s @ 299.156° y 200 rad/s

Aproximación por serie de Fourier = –42 703.631 pulg/s @ 299.156° y 200 rad/s

Error = –0.0571% (–0.000571)

13-3 Par de torsión del gas = 2 040 (aprox.), Fuerza del gas = 3 142

13-5 Par de torsión del gas = 2 040 (aprox.), Par de torsión del gas = 2 039.91 (exacto)

Error = 0.0186% (0.000 186)

13-7

a. $m_b = 0.00748$ en $l_b = 7.2$, $m_p = 0.01251$ en $l_p = 4.31$

b. $m_b = 0.00800$ en $l_b = 7.2$, $m_a = 0.01200$ en $l_a = 4.80$

c. $I_{modelo} = 0.6912$, Error = 11.48% (0.1148)

13-9 $m_{2a} = 0.018$ en $r_a = 3.5$ $I_{modelo} = 0.2205$, Error = –26.5% (–0.265)

13-11 Abra el archivo P13-ll.eng en el programa ENGINE para comprobar su solución.*

13-14 Abra el archivo P13-14.eng en el programa ENGINE para comprobar su solución.*

13-19 Abra el archivo P13-19.eng en el programa ENGINE para comprobar su solución.*

TABLA S15-1
Soluciones al problema 15-6

	ω_n	ω_d	c_c
a	3.42	3.38	8.2
b	4.68	4.65	19.7
c	0.26	0.26	15.5
d	2.36	2.33	21.2
e	5.18	5.02	29.0
f	2.04	1.96	49.0

CAPÍTULO 14 MOTORES MULTICILÍNDRICOS

Utilice el programa ENGINE para comprobar sus soluciones.*

CAPÍTULO 15 DINÁMICA DE LEVAS

15-1 a **15-15** Utilice el programa DYNACAM para resolver estos problemas. No hay ninguna *respuesta correcta* única a estos problemas de diseño.

15-6 Véase la tabla SI5-1

* Estos archivos pueden encontrarse en la carpeta PROBLEM SOLUTIONS en el CD-ROM incluido con este texto.

ÍNDICE

A

abierto a)
cadena cinemática 30
mecanismo 158, 227
acción cordal 488
aceleración 4, 158, 324
absoluta 326, 332,
análisis
analítico 333
gráfico 327, 328
angular 565, 575, 584
como vector libre 332
definición de 324
de manivela-corredera invertida 342
centrípeta 326, 332, 555
de Coriolis 338
de cualquier punto en un eslabón 345
de deslizamiento 343
de un engranaje de cinco barras 343
de un pistón 349
de un tren de válvulas 769
diferencia
definición de 327
ecuación de 326
en manivela-corredera 336
solución analítica 333, 333
solución gráfica 334
discontinuidades en 386
en una leva 379
factor multiplicador (levas) 452
lineal 565, 575
normal 332
relativa 327, 332
de pico 450
senoidal 389
senoidal modificada 395, 398
tangencial 325, 332
tolerancia de 348
tolerancia humana en la 347
trapezoidal modificada 391
acelerómetro 347
acoplador 30, 112, 114, 183, 650, 777
como un péndulo físico 635
curva de la ecuación del 246
curvas del 112, 113, 116, 119, 123, 139
atlas de las 114
degradadas 112
formas de las 113
grado de las 112
graficación de las 119
puntos dobles de las 113
simétricas 118
de salida 91, 93, 97, 99
definición de 30
punto del 114, 139, 797, 812
puntos de fijación de
alternador 99
actuador 30, 559
adendo 470, 474
circunferencia de 474
coeficientes de modificación 478
agarrotamiento 87, 88, 286, 799
ángulo de 188
eslabonamiento con 88
posiciones de 87, 99, 123, 206, 213
cálculo de la localización 186
en una trituradora de rocas 281
AGMA **474, 478**
aire
cilindro de 30, 85
motor de 70
algoritmos genéticos 244
amortiguadores 552, 752
combinación de 545
en paralelo 546
en serie 545
amortiguamiento 542, 543, 550, 741, 745, 755
coeficiente de 543
crítico 747, 748, 749
cuadrático 542
efectivo 546, 550
interno 553
no lineal 542
relación de 747, 751, 756
seudoviscoso 544
viscoso 542
Ampére, André Marie 6

análisis 11, 12, 84, 564, 780
definición 8
de mecanismos 3, 24
analogías 11, 741
análogos 545
ancho de cara (engranes) 474
ancho del espacio (en engranes) 473, 474
ángulo
de aproximación 471
de retroceso 471
de un vector
definición 170
ángulo de construcción 107
ángulo de fase
convención de signos 698
en cigüeñal 693, 825
en engranaje con cinco barras 119, 179, 805
óptimo 693
ángulo de hélice 27, 483
ángulo de presión
de engranajes 477
en leva-seguidor 427
análisis de fuerzas 764
de cara plana 472
de rodillo 427, 428
ángulo de transmisión 278, 279, 281, 544, 600
de aplicación limitada 185
deficiente 213
definición de 89, 184
diferencias en cognados 122
en un eslabonamiento de retroceso rápido 109
mínimo 89
óptimo 111
valores extremos 185
animación (en programas) 807
antiparalelogramo 52
eslabonamiento 286
aparejo 6
aplicaciones
cámara cinematográfica 114
de cilindros de potencia fluídica 71
de cinemática 6
de motores hidráulicos 71
de motores neumáticos 71
de solenoides 72
ensamblaje de máquinas 414
eslabonamiento manivela de una cepilladora 112
eslabonamientos con posición límite 88
impulsión de mesa indexadora 399
locomotoras de vapor 52
mecanismo para ajuste óptico 284
motor de un automóvil 372
suspensión de un automóvil 116, 282
transmisión de un automóvil 469
válvulas en el motor 403
aproximado(a)
arco circular 137, 140
detenimiento 142
línea recta 112, 130, 140
árbol de levas 760
par de torsión 764
arco de acción 471
armadura 43
armónicas 660, 701, 745
armónico 404
número 729
articulación de flexión 778
Artobolevsky 6
asistido(a) por computadora
dibujo 84, 114, 602
ingeniería 84, 85
manufactura 444
asperezas 27
atlas de curvas del acoplador
de cuatro barras 113, 114
de un engranaje de cinco barras 119, 805-806
automóvil
embrague 600
equilibrador de ruedas 638
suspensión 116, 130, 282

B

babbitt 687
balancín
brazo de 550, 552
de salida 91
definición de 30
infinitamente largo 45
balancín de
Lanchester 734
Nakamura 734
balancín de plataforma 288
banco
ángulo del 715
de cilindros 650
motor del 696
banda 6, 26, 466
en V 467, 487
plana 487
sincrónica 487
sincronización 487
bandas dentadas 487
baño de aceite 456
Barker 54
barra sin masa 538, 618
Berkof-Lowen, método de 627
biela 656, 665, 668
dos por codo de cigüeñal 723
binario 36
eslabón 26
binomio
desarrollo del 659
teorema del 657, 664
bisectriz 139
blobs 18, 19
bloque corredera 45, 583
bloques formativos 30
bola
junta de 26
y casquillo 29
bomba de pozo 49
brazo (epicíclico) 499
buje 64
de bolas 133
Burmester, curvas de 238

C

cadena 26
silenciosa 487
transmisión de 466, 488
cadena de dos barras 91, 108
caja de engranaje 466, 491
cámara cinematográfica 114
cantidad de movimiento 532, 653
capacitor 544, 547
carburador 653
carga
líneas de 67
par de torsión 67
carga compartida 480

carrera de admisión 652
carrera de escape 653
cartesiana(s)
coordenadas 169
forma 161
gráfica 732
Cayley, diagrama de 126, 127
degradado 123
centro
de curvatura 439
de gravedad 534, 535, 575, 664
global 535
de percusión 539, 666
de rotación 539, 540, 666
punto del 235
circunferencia de 235
centro de masa global 627
céntrodas 284
engranes no circulares 486
fijas, móviles 286
centros 268
centros instantáneos 268
en eslabonamiento de cuatro barras 269, 284, 777
en generación de centrados 286
en leva-seguidor 274, 430
en manivela-corredera 272
permanentes 269, 271
utilizados en el diseño de eslabonamientos 282
cerrado! as)
cadenas cinemáticas 30
ciclo 70
curva 112
mecanismo 30
ciclo de cuatro tiempos 651, 708
ciclo de Otto 651
ciclo Diesel 655
cicloidal
curva de acoplador 288
desplazamiento 386, 389, 403
comparado 397
detenimiento simple 411
fuerza dinámica 755
par de torsión dinámico 764
vibración 450
cicloide
curva 113
en diente de engrane 469
generado geométricamente 444
cierre de forma 29, 375, 759
cigüeñal 653, 693
ángulos de fase 825-826
diagrama de fase 696
pesos de equilibrio 683
simétrico especular 713
cilindro
espaciamiento (en motores de CI) 825
neumático e hidráulico 71
cinemática 3, 4, 5, 531, 741, 756, 766
definición de 3
historia de la 5, 21
Cinemático(as)
aplicaciones 6
cadena 30
clase de 5], 58, 59
definición de 30
inversión de 51
estructura 33, 35
par 6, 27
síntesis 564
cinética 3, 5, 531
cinetostática 532, 564, 755, 763
circuito
defecto del 189, 248
definición de 188
circuito eléctrico 545
circuitos
de un eslabonamiento 173, 174
distinción de los 191
número de 189
circular(es)
engranes 286
interpolación 447
paso 474
circunferencia
arco de 132
con centro remoto 112
de punto 235
circunferencial 235
circunferencia base
de envolvente 470
de leva 427, 441
en engrane 474, 476, 483
radio de 427
Clerk 653
ciclo 651
motor 653
coeficiente
de amortiguamiento 543, 549
de fluctuación 599, 600, 674, 827-828
de fricción 542
cognado 122, 127
con engranaje de cinco barras 122
eslabonamiento de cuatro barras 121
cojinete 60
de bolas 61
de bolas lineales 61
de elemento giratorio 61
de rodillos 61
diámetro efectivo 64
en caja de brida 61
en caja de chumacera 61
en casquillo 64
en manguito 60
en pista 60
longitud efectiva 64
relación 63, 64
definición de 64
deficiente, ejemplo de 64
rótula esférica 62
colinealidad 87, 106
complejo
movimiento 25
acoplador 30, 112
biela 665
definición de 26, 163
Whitworth, manivela-corredera 48
número 169
notación 169, 170
plano 169
componente
ortogonal 174
componente de CD 660
componente primaria
de fuerza de sacudimiento 660
de momento de sacudimiento 705
componente secundaria
de fuerza de sacudimiento 660
de momento de sacudimiento 705
compresión
carrera de 652
encendido por 655
compuerta 116

compuesto
tren epicíclico 503
tren de engranes 480, 489, 490
común
normal 276, 470, 472
tangente 276, 470
comunicación 17, 781
cóncavo(a) 434, 434
concentrado(a)
masa 623, 667
modelo 547, 667, 741
parámetro 547, 552
condiciones de frontera 372, 379, 407, 412
condiciones iniciales 744
conectores envolventes 6
conexiones en serie
de amortiguadores 545
de resortes 544
configuración estacionaria 87
conjugada(s)
acción 483
levas 375, 759, 762
conjugados 375, 469
conjuntos de problemas
Capítulo 2 73
Capítulo 3 144
Capítulo 4 194
Capítulo 5 252
Capítulo 6 303
Capítulo 7 352
Capítulo 8 457
Capítulo 9 518
Capítulo 10 559
Capítulo 11 603
Capítulo 12 641
Capítulo 13 687
Capítulo 14 737
Capítulo 15 772
conservación de la energía 557
consideraciones prácticas 602, 769
constante
aceleración 390
de integración 744
velocidad 414
continuo 46
movimiento 414
contra
eje 512
equilibrio 60
par 522
peso 620, 632, 683, 732
en balance óptimo 634
en cigüeñal 683
rotatorias, excéntricas 730
control numérico (CN) 444
control numérico continuo (CNC) 444, 445
convexo 434
corriente 544
corrimiento (en manivela- 174
cortador (engranes) 477
costo 85
creatividad 8, 10, 22, 777
cremallera 484
y piñón 484
dirección 484
crúnoda 113, 119
cruzado(s)
engranes helicoidales 482
mecanismo 173, 228
cuasiestático 555
cuerpo libre 555, 569
diagrama de 565, 575, 670, 678, 742, 745
cuerpo rígido 25, 26
aceleración de 332
movimiento de 163
cuña 5
cúspide
en céntrodo móvil 288
en una curva de acoplador 113, 116, 119
en una leva 434
Chasles, teorema de 165, 267
Chebyschev 122, 129, 130, 237
choque acelerante 349
choque transversal 454, 473, 761, 763

D

d'Alembert 5, 555, 556, 558, 617, 668
de Coriolis, aceleración 338, 339
dedendo 474, 476
circunferencia de 474
deformación 433, 542
por flexión 552
por torsión 553
Dejonge 6
delta
ángulo de carrera 708
ángulo de fase 697
óptimo 697
tripleta 39, 43, 46
deltoide 53
Denavit, J. 6, 122
densidad
masa 533
peso 533
desequilibrio 638
desgaste 27
deslizamiento 113
componente de 291,292,338
contacto de 6
juntas de 36
velocidad 338
desmodrómico 375, 454, 760
desplazamiento
definición de 161
en leva 379, 400
total 164
detenciones 46, 399
detenimiento 46, 65, 137, 139, 379, 456
definición de 137
en leva
doble 754
simple 403
eslabonamientos con 137
mecanismo con 46, 136, 140
movimiento con 111
determinante 230
diada 91, 208, 210, 214, 223, 235
definición de 30
de impulsor 95, 97, 99
de salida 108, 109, 137
diagrama de temporización 381
diferencial 499
de deslizamiento limitado 517
de Torsen 517
de un automóvil 517
central 517
trasero 517
definición de 515
dinámica inversa 532, 564, 755

dinámico(as)
análisis 19
equilibrio 555
dispositivos que requieren de 622
en máquinas 638
fricción 542
fuerza 4, 19, 158, 347, 532
análisis de 531, 564
medición de 766
modelos 532
sistema 4, 555, 565
discontinuidades 383
discriminante 747
diseño 7, 85, 776
asistido por computadora 13
axiomático 15
caso de estudio 777
cualitativo 84
definición de 8
detallado 12, 13, 14, 20
especificaciones de 10
por análisis sucesivo 84, 85
proceso de 3, 8, 9, 14, 22, 84, 533, 776
relaciones 686
simplicidad en 49
transacción en 65, 599, 686
disparo de respuesta 748
dispositivos electromecánicos 87
Dixon, A. 15
doble
armónico 404, 764
balancín 52, 87, 979, 129
detenimiento 140, 380
eslabonamiento 139, 379
envolvente en mecanismo de gusano 483
eslabonamiento de paralelogramo 52
manivela 52
dos tiempos
ciclo de 651,653,706
motor de 708
duplicación analógica 448
DYNACAM, programa
cómo operarlo 813, 819
ejemplos
fuerza 755, 756, 762
par de torsión 764, 766
polinomio de 411
radio de curvatura 436
simple detenimiento 403
velocidad constante 417
información general 785

E

ecuación característica 746, 747
ecuación de forma estándar 241
efectivo(as)
amortiguamiento 550
eslabonamiento 372, 468
eslabones 43, 278
masa 549
resorte 549
eficiencia 483, 557
de un tren de engranes convencional 508
de un tren epicíclico 508
definición de 508
eje
de deslizamiento
en bloque de corredera 288, 290, 292
en leva-seguidor 275, 428
en manivela-corredera invertida 298, 338, 584
de rotación 535
de transmisión 472
en bloque de corredera 288, 290, 292
en dientes de engrane 471
en leva y seguidor 428
en manivela-corredera invertida 301, 584
eje (o árbol) 282
eje (o árbol)
codificador 639
hueco 500
eje imaginario 169
eje oblicuo 25
ejes principales 25
elastómeros 487
elemento disipador 752
embrague
de automóvil 600, 674
sincroconexión 512
encendido
ángulos de 826
no uniforme 710
orden de 708, 727, 826
patrón de 706
uniforme 705
de cuatro cilindros en línea 711, 713, 715
motores de ocho cilindros en V 727
motores en línea 710
motores en V 728
energía
almacenamiento de 752
elementos 752
cinética 260
en leva-seguidores 390, 399, 422
en relaciones de palanca 547
en resonancia 752
en sistemas rotatorios 537
en trabajo virtual 557, 559
en volantes 595, 673
pico 398
ley de conservación 557
método de 557, 590
potencial 557, 752
ENGINE, **programa 648, 660, 671, 692**
cálculos de volantes 674
engranaje 468, 483
ángulo de ataque 471
ángulo de presión 472
ángulo de salida 471
arco de acción 471
cambio de la distancia entre centros 472
externa 469
interna 469, 476
ley fundamental del 468
definición de 471
longitud de acción 471, 479
punto más elevado de contacto de un solo diente 480
relación de contacto 479, 480
engranaje de cinco barras
curvas de acoplador 119
mecanismo de 56, 179
análisis 179, 343
cognado de cuatro barras 129
curvas de acoplador 112

inversiones del 58
programa para 805
engrane(s)
acción de diente 466
antijuego en 474
conformador de 476
cónico 485
espiral 485
recto 485
conjunto de 129, 286
conjunto de tornillos sin fin 483
cremallera 484
de espuela 482
de tornillos sin fin 483
dientes de 470
adendo desigual 478
número mínimo 478
profundidad completa 476
espinales 482
helicoidal 482
hipoidal 486
loco 489, 806
paso base 479
pieza base de un 484
relación 121, 180, 546, 805-806
tren de 466, 488
compuesto 490
diseño algorítmico 494
epicíclico 499, 500, 502, 512
error en la distancia entre centros 472
referencia más temprana conocida 466
relación irracional 498
revertido 491, 512
simple 488
engrane de anillo 500
engrane planetario 499
engrane solar 499
engranes 26, 468
con desplazamiento de perfil 479
no circulares 286, 486
engranes hipoidales 486
enunciado de metas 10, 610
equilibrio 542, 555
completo 617
dinámico 617, 621, 625, 627, 733
de llantas 638, 639
de eslabonamientos 627
de contrapesos óptimos 634
efecto sobre el par de torsión de entrada del 632, 634
efecto sobre las fuerzas en pasador del 631
fuerza de sacudimiento 626, 627
momento de sacudimiento 634
de ejes rotatorios 712, 730, 733
de masas 618
en un plano 618
estático 617, 618, 620, 733
de llantas 638
motor unicilíndrico 681
equilibrio biplanar 621
equivalencia dinámica 635
requisitos de 665
equivalente
masa 547
resorte 547
sistema 544, 550, 741
Erdman, A. 6, 106, 205, 238
ergonomía 16
escalamiento 13
escritura de reportes de ingeniería 22
esfuerzos 4, 155, 348, 533
eslabón 6, 25, 26, 40
contracción de
completa 43, 45
parcial 43
de "hueso de perro" 635
de salida 158
relación de 114, 119
eslabón cuaternario 26, 36
eslabón de arrastre 52, 108
eslabón ternario 26, 36, 37
eslabonamiento 86
bloques formativos básicos 26, 57
de autobloqueo 88, 101
de conformidad 284
de seis barras 182
de Stephenson 183
de Watt 182
desventajas 65
diseño de 26
en línea 634
ensamblaje de 58
par de torsión 89, 98
rotabilidad 50
sin eslabones 287
sin retroceso rápido 106
síntesis de un 85, 87, 122
transformación de un 36, 43, 372
ventajas del 65
eslabonamiento de cuatro barras 49, 122, 575, 617
aceleración en 332
antiparalelogramo 52
clasificación de 54
cognados 126
carácter de los 123
curvas de acoplador 113
doble-balancín 87, 91
línea recta óptima 132
manivela-balancín 43, 88
mecanismo de 777
nueve parámetros independientes del 242
puntos de cambio 52
retroceso rápido 106
simétrico 118
sin eslabones 286
subcadena 91
triple balancín 52, 87
eslabonamiento de cuatro barras sin eslabones 288
eslabonamiento de Hoeken 130, 132
eslabonamiento de limpiador de parabrisas 53
eslabonamiento de paralelogramo 52, 53
eslabonamientos 6, 26
conectados en paralelo 57
conectados en serie 57
versus levas 65
eslabonamientos planos duplicados 86
espacial(es)
eslabonamiento 116
mecanismos 29, 87
espacio bidimensional 25
especificación de punto extremo 378
especificaciones de tarea 10, 15, 611, 778
espesor de diente 473, 474
estado estable 743
estática
equivalencia 667
fricción 542
estricción 542

estructura 33, 35
precargada 35
estructura precargada 33
estructural
bloque formativo 37
subcadena 43
Euler 5
equivalentes de 171
identidad de 170
teorema de 165
¡Eureka! **780**
Evans, J. 5
excéntrica(s)
leva 443
manivela 63
masas 730, 731
excentricidad
leva
definición de 429
usar para controlar el ángulo de presión 432
leva-seguidor
de cara plana 433, 442
de rodillo 428
efecto sobre el ángulo de presión 432
externo(a)
carga 575
engranaje 477
par de torsión 575
"extremo grande" (en biela) 667

F

factores humanos en ingeniería 16, 22
fijación
definición de 30
pivotes de 103
plano de 122
fijo(s)
céntrodo 284, 287
pivotes 98, 101, 114, 122
especificado 101
finito(as)
método de diferencias 16
método de elementos 16
FIVEBAR, programa
ejemplo 57
cognado de cuatro barras 129
curvas de acoplador 122
de línea recta exacta 130
cómo operarlo 785
fluctuación 599
FOURBAR, programa 88, 119, 564
cómo operarlo 725
ejemplos en
agarrotamiento 187
cognados 126
curva de acoplador 114
equivalente de cinco barras 130
eslabonamientos de línea recta 130
retroceso rápido 106
síntesis biposicional 215
síntesis triposicional 98, 228
Fourier 5
serie de 659, 701
frecuencia
armónica 745
forzada 751, 752
fundamental 744, 753, 759
natural 741
circular 744, 750
leva-seguidor 755, 756, 759, 769
no amortiguada 744, 745
versus *frecuencia forzada 752*
y resonancia 752
relación de 751
respuesta de 769
frecuencia fundamental 660
frecuencia natural 733, 744, 769
circular 744
amortiguada 744, 747
no amortiguada 744, 747
freno 494
Freudenstein, F. 6, 172
fricción 29, 467, 668
en bandas 467
en eslabonamientos 89
fuerza de 571
no lineal 542
par de torsión 822
trabajo de 290
fricción de Coulomb 542, 583
frisbee 268
frustración 10, 12, 779
fuerza! s)
análisis
cinetostático 755, 756, 759, 763
dinámico 532, 755
aplicada 566, 571
centrífuga 555, 556, 670
cerrada 29
de cierre 29, 375, 759
de eslabón 116
de impacto 756
de inercia 547, 558, 603, 618, 660, 667, 680
de perno principal 680
de reacción 577
de resorte 541, 742
de sacudimiento 589, 617, 648
cancelación de 730
en eslabonamiento de cuatro barras 633
en motores de un cilindro 661
en motores en línea 698, 714
en motores en V 721
primaria 711
secundaria 711
de transmisión 89
dinámica 648
comparada con la gravitacional 558
en leva-seguidor 755, 756, 759, 762, 764
minimización de 390
en el lado de pistón 679
en pasador de manivela 679, 683
en pasador de pistón 679, 681
exteriormente aplicada 566
externa 558, 618
gravitacional 557, 565
primaria 713
secundaria 713
transductor de 639, 769
fuerza bruta e ignorancia (FBI) 786
fuerza centrífuga 555, 730
función
forzada 750, 769
generación de 85, 379
de dos posiciones 91
definición de 86, 205
síntesis analítica 238
tabla de opciones libres 241
generador de 86, 239, 372

función continua parte por parte 386
función cúbica
determinación de las raíces de la 190
función objetivo 244
funciones combinadas
para levas 389, 399
funciones delta de Dirac 383

G

gas
fuerza del 655, 660, 670, 680, 705, 822
curva 655, 662
par de torsión 662, 663, 705, 822
presión de 662, 822
curva 653, 655, 662
Gauss-Jordan, eliminación de 217
***GDL* translacional 27**
***GDL. Véase* grado de libertad**
generación de ideas
geometría descriptiva 5, 781
geometría euclidiana 90
Ginebra
mecanismo de 46
rueda de 46
grado 112, 119, 407
grado de libertad 24, 29, 33, 547
de mecanismos espaciales 33
definición de 30
distribución de 43
visual ización del 29
graficación por computadora 106
gráfico(a)
análisis posicional 159
síntesis dimensional 85
comparada con la analítica 213
herramientas necesarias para la 90, 97
Grashof 51, 158
caso especial 52
condición de 50, 51, 53, 97
engranaje de cinco barras 57
doble-balancín 186
eslabonamiento 65
eslabonamiento de cinco barras 129
manivela-balancín 132
gravedad 347
gravitacional
constante 18, 19
sistema 18
Gruebler 31
criterio de 40
ecuación de 32, 35, 36, 43

H

Hachette 6
Hain, K. 6
Hall, A. S. 6, 106, 129
Hammond, T. 121
Hartenberg, R. 6, 122
hidráulico
cilindro 85
motor 65, 70
hiperboloides 486
Hitchcock, silla de 283
hodográfica 793
hoja de cálculo 554
holgura 473, 474
homogéneo(a) 745
EDO 745
solución 745
Hrones y Nelson, atlas de 114

I

ideación 9, 11, 15, 779
e invención **9**
identificación de la necesidad 9
impulsor! a) 65
etapa o paso 97
manivela 577
incremento digitalizador 451
incubación 12, 780
indexación 125
tabla de 398
indexadores 399
índices de mérito 282
inductor 544, 546
inercia
equilibrio de 711
en motores en V 715, 728
fuerza de 554,555,618,670,697, 705
par de torsión 555, 559, 670, 702
infinidad de soluciones 213, 235
ingeniería 14
diseño en 4, 8, 83, 137
costo en 85
definición de 8
enfoque de 14
factores humanos 16
informe de 17
ingeniería civil 5
inobtenio 665, 754
instrumentos de medición para deformaciones unitarias 769
interferencia 477
invención 8, 10
inversión
de manivela-corredera **111**
análisis de fuerzas 584
solución posicional 177
definición de 48
en la ideación 11
para síntesis triposicional 101, 103, 105
inversiones
de eslabonamiento de cuatro barras 51
de eslabonamientos de seis barras 49
específicas 48
inverso
tren compuesto 491
tren de engranes, diseño de 491
investigación de fondo 9, 17, 611, 778
involuta 469
involuta 469, 472, 477, 484
definición 470
dientes de la 472
isómero 40, 807
no válido 43
número de isómeros válidos 41
iteración 9, 12, 13, 84, 90, 92, 415, 533, 602

J

jacobiana 192, 193
joystick (palanca de juegos) 25
juego 473, 474
definición de 473
juicio diferido 11

junta 6, 26
con cierre de forma 29
con cierre de fuerza 29
con dos grados de libertad 29
con un grado de libertad 27
de corredera 27
de índice de fuerza 184, 600
de montura en silleta 58
deslizante 271
leva-seguidor 61
múltiple 33, 36
orden 29
viga en voladizo 63
junta completa 27, 31
junta de dos grados de libertad 27
junta de tres grados de libertad 26
junta rodante-deslizante 29

K

Kant 5
Kaufman, R. 106, 205
Kennedy, Alexander 6
Kennedy, regla de 269, 270
Kimball, B. 787
Kinsyn 106
KISS 16
Koster 544, 754, 755, 771
Kota, S. 118
Kutzbach 33

L

L'École Polytechnic 5
Lagrange 5
Lanchester, balancín de 734
leva 6, 26, 85, 137, 350, 372, 741
acabado a mano 444
axial 376, 445
cara 377
cilindrica 377
con cierre de forma 761, 762, 764
con cierre de fuerza 761, 764
contorno de 441
corte con remetido 444, 445
de barrilete 377, 399
de disco 541, 742
de pista 761
de placa 376, 764
definición de 373
desmodrómica 762
diseño de
ley fundamental del 384
estacionaria 438
fresada 456
generación geométrica 443
irregularidades 445
maestra 448
manufactura 444
máquina duplicadora 448
materiales 443
mecanismos 544
para válvula de motor de automóvil 550, 756
radial 376, 455
rectificada 456
sistema de pruebas dinámicas 446
tridimensional 378
y seguidor 85, 137, 274
Levai
de los 12
trenes epicíclicos básicos, clasificación de 499
levanta válvulas 551
levoide 378
ley fundamental
del diseño de levas 386, 754
del engranaje 468, 471, 472
definición 471
libra fuerza (lbf) 19
libra masa (lbm) 19
límites 107
Lincages 85, 106, 238
línea
de acción 471
de centros 114
de contacto 27
línea recta
eslabonamiento de 5, 85
óptimo 132
mecanismos de 130
aproximados 132
exactos 130
lineal) es)
aceleración 324, 347
actuador 71
álgebra 217
cojinetes de bolas 61
gráfica 268
interpolación 444, 451
mecanismo de Ginebra 46
movimiento 70
rapidez de aceleración 350
velocidad 260
locomotora 52
Loerch 205, 229
lógica difusa 244, 247
longitud de acción 471, 479
lubricación 60, 65, 456, 655
hidrodinámica 60
problemas 61
sellos para 60
lubricante 27
lluvia de ideas 11

M

magnitud escalar 277
mandril 639
manivela 114, 650, 665
codo de cigüeñal 693
corta 63
definición de 30
diagrama de fase 697, 713, 824
excéntrica 63
manivela-balancín 52, 105
manivela-corredera 43, 48, 65, 271, 582, 585
análisis
aceleración 336
centros instantáneos 271
de Fourier 659
lazo de vectores 174
solución posicional 174
corrimiento
definición de 174
de tres barras 568
eslabonamiento
corrimiento 176
en motores de CI 648
modelo dinámico 667
multicilíndrico 692
unicilíndrico 650
invertida 176, 340, 584
aceleración 339
retroceso rápido 109
sin corrimiento 656
manivela-corredera de tres barras 568
manivela de cepilladora 48

manivela impulsada 108
manivela sobreequilibrada 685
máquina 4, 5, 29, 158
definición de 4, 29
diseño de 3, 5, 19, 65, 83, 350
maquinaria
rotatoria 537
marco de referencia 30
marco de referencia inercial 160
masa 4, 19, 532, 541, 664, 742, 753, 755
concentrada 550, 665
densidad 533
efectiva 549, 550, 755, 766
equilibrio 619
equivalente 664
momento de inercia 535, 565, 595, 632, 664
momento estático 534, 535, 627
puntual 532, 538, 618
masas
combinadas 547
materiales 687
Mathcad 194, 431 602
Matlab 431
MATRIX, programa
análisis de fuerzas 554
cómo usarlo 218
ejemplo
análisis de fuerzas 572, 575, 578
síntesis de eslabonamientos 227
matriz de decisión 12
matriz de identidad 217
matriz
aumentada 218, 223, 230
de coeficientes 223
inversa 217
resolvedor de 216, 554
solución de 216, 554
May, **Rollo 777**
mecánico(a)
circuito 544
computadora analógica 86
eficiencia 279
generador de funciones 86
ingeniería 5
sistema 544
ventaja 279, 281, 469
mecanismo 4, 5, 29, 33, 158
con doble detenimiento 140
con retroceso rápido 106
de ajuste óptico 284
definición de 4, 29
fuerzas en 531
manivela de cepilladora 112
plano 87
sin retroceso rápido 106
Whitworth 112
mecanismo de articulación 87
mecanismo de avance de la película fotográfica 114
mecanismos de reloj 5
mecedor(a) (u oscilante)
par 522
silla 287
medio(a)
cicloide 423, 424, 425
identidades de ángulo 172
junta 29, 36
periodo, armónica de 423
método tabular 501
métodos de continuidad 245
métodos de resolución 554
métodos homotópicos 245
microcomputadora 14, 86
Milton, J. 466
modelación de sólidos 606
modelo 14, 224, 535, 544
de un *GDL* 554
dinámicamente equivalente 664
dinámico 538
elemento finito 650
en cartulina 14, 88, 93
estáticamente equivalente 667
masa concentrada 667
parámetro concentrado 742
simplificado 532
valor de 667
modelo masa-resorte 742
modificado
seno 395, 400, 424, 451, 754
trapecio 395, 398, 451
modo conservador 742
módulo 476
de elasticidad 550
de ruptura 552
módulo de Young 552
momento
de sacudimiento 617, 648, 731
en motores en V 721
en motores en línea 703, 705
primario 712
secundario 711, 714
momento de sobrevolteo 433
Monge, Gaspard 5
motor 30, 66, 559
característica velocidad-par de torsión 593
de CA 66
de CD 66
con control de velocidad 69
con imán permanente (PM por sus siglas en inglés) 66
de ciclo abierto 70
de ciclo cerrado 70
de excitación en derivación 68
de excitación en serie 68
de excitación mixta 66, 67
de pasos 66, 70, 86
imán permanente 66
reductores 60, 69
servo 66
sincrónico 69
universal 66
motor de combustión interna 582, 548, 692
motor de pasos 66, 70, 75
motor sobrecuadrado 686
motor subescuadrado 686
motores 65, 650
en línea 693
de seis cilindros 729
enV 650,694,715
de doce cilindros 729
de ocho cilindros 650, 715, 723, 724, 729, 827
de seis cilindros 715, 729
multicilíndricos 693
opuestos 694
con cuatro costados 729
gemelos 728
radiales 694
rotatorios 696
motores eléctricos 65, 594
móvil(es)
centrado 286, 287
pivotes 98, 103, 139

movilidad 30. ***Véase también*** **grado de libertad**
movimiento
armónico simple 384, 385
complejo
definición de 163
generación de 97, 206
biposicional 93
definición 86
síntesis analítica 208
triposicional 97, 99
intermitente 70
paralelo 127
rectilíneo 84
movimiento armónico simple 424
movimiento de retroceso 87, 484
movimiento en trayectoria crítica (MTC) 373, 378, 414, 415, 420, 424
movimiento helicoidal 27
movimiento intermitente 46, 414
movimiento por huelgo 474
muñón de manivela 667
desplazamiento de 730

N

Nakamura, balancín de 734
Nelson, G. L. 114
Newton
ecuación de 18, 743
leyes de 347, 531, 564, 618
método de 190, 564
segunda ley de 4
tercera ley de 569
Newton-Raphson, método de 183, 190, 352
comportamiento caótico del 191
en la resolución de ecuaciones 194
nodo 26, 31, 40
no-Grashof 51
doble-balancín 186

O

obtención de raíces 352
octoide 486
oído interno 347
opciones libres 92
para síntesis de funciones 241
en síntesis de tres posiciones 220, 223
en síntesis de dos posiciones 208, 213, 214
operador 169
orden
de eslabones 36
de juntas 29
de un polinomio 407
defecto de 248
ortogonal 174
oscilación 474
oscilación en leva-seguidor 752

P

palanca 5
relación de 547, 552
par de torsión 632
aplicado 566
árbol de levas 763, 764
convertidor de 512
de entrada 632, 763, 764
de inercia 660
en el trabajo virtual 559
en motor de cuatro cilindros en línea 711, 713
en motor unicilíndrico 672
en motores en línea 702
en motores en V 722
regularización con volante 674
de transmisión 558
del gas 663
en motor de cuatro cilindros en línea 708, 713
en motor unicilíndrico 660
en motores en V 723
regularización con volante 674
dinámico 764
externo 558
fuente 566, 571, 577, 603
oscilaciones en 764
regularizado con volante 674
relación de 281, 469
respecto al centro de masa 535
total 713, 727, 827
motor 673
trepidación 589, 662
en eslabonamiento de cuatro barras 634
en motores multicilíndricos 705
en motores unicilíndricos 671
variación 593
par de torsión de entrada 593, 632
par de torsión impulsor 582, 662
par de torsión-tiempo
diagrama 596
función 673
par inferior 6, 27
par superior 6, 27, 29
paradoja de Ferguson 503, 507
paradojas
de Ferguson 505
de Gruebler 39
paralelos
conexiones
de amortiguadores 545
de resortes 545
movimiento 127
planos de eslabonamiento 87
teorema de los ejes 537, 603
pares 27
inferior 27
superior 27
pasador de émbolo 665, 667
pasador
en cortante simple 63
en doble cortante 63
fuerzas en 660, 674
pasador de émbolo 677
pasador de manivela 677
pasador principal 680
junta 26, 60
paso
circunferencia de 469, 473, 474
curva de 427, 434, 438
diametral 475
diámetros de 469, 472
punto de 469, 470
paso diametral 475
Peaucellier 132
péndulo físico 635
pérdidas 557, 752
peso 18
factor de 12
piezoeléctrico
acelerómetro 769
transductor de fuerza 639
pinza de sujeción 281
piñón 468, 484

pistón 349, 583, 650, 665, 667
aceleración del 657, 660, 668
bomba de 48, 582, 651, 692
motor de 48
posición del 657
velocidad del 657
pivotes fijos especificados 101, 103, 228
plano inclinado 5
planos de corrección 622, 733
plantillas 84
polar(es)
coordenadas 169
forma 160
graficación 714, 793
polea abombada 487
poleas 487
polinomial 764
3.4.5 406,410,411,754
4-5-6-7 410, 411
función 384, 406
regla de diseño 412
pólodas 285
polos 268
posición 158, 160, 260
absoluta 165
análisis 165, 167
de un punto cualquiera en un eslabón 183
diferencia de 162
ecuación 161, 262
relativa 163
vector 160, 168
posición aparente 163
posición extrema crítica (PEC) 373, **378, 381**
potencia 67, 279, 544, 557, 707, 764
carrera de fuerza o de 653,708,713
ángulos 707, 708, 825-826
diagrama de 824, 826
ecuación de 559
relación con el peso 651
precarga
en leva-seguidor de resorte 756
precisión
posición de 206, 208, 218
puntos de 206, 214
primo
círculo 427, 766
radio 427, 436
principio
de d'Alembert 554
de transmisibilidad 278
problema no estructurado 8
problema
definición de 778
no estructurado 8
proceso creativo 11, 777
definición de 777
producción 14
producto masa-radio 620, 625, 640, 685
producto punto 557
Programa *Working Model* 84, 88, 114, 785
programas de computación
abrir un archivo 789
acciones posibles de los usuarios 788
apoyo 796
cómo operarlos 796
copia en carpeta 790
correr 788
creación de nuevos archivos 789
DYNACAM 813
datos de entrada 813
dibujo de la leva 818
dimensionamiento de la leva 817
dinámica de seguidor 819
funciones polinomiales 815
revisión continua 817
ENGINE 820
cálculos de volantes 827
ejemplos en 789
equilibrio de manivelas 822
gráficas 825
multicilíndrico 823
unicilíndrico 820
eslabonamiento
animación 800
autoescalamiento 801
cálculos en 797
condición de Grashof 799
dinámica 801
errores de cálculo 799
pasos angulares 798
pasos de tiempo 799
seguimiento encendido/apagado 801
uniposicional 798
FIVEBAR 805
ángulo de fase definido 805
animación 807
dinámica 807
información de entrada 805
punto de acoplador 806
FOURBAR
balanceo en 803
céntrodos 801
cognados 803
datos de entrada 796
síntesis 805
graficación de información 791
gráficas cartesianas 792
gráficas polares 793
guardar información 789
impresión desde 790
información general 785
MATRIX 828
negación de la responsabilidad 786
operación 787, 828
pantalla principal 788
salida de 796
sistemas de coordenadas en 792, 801
SIXBAR 807
animación 810
datos de entrada 808
dinámica 810
SLIDER 811
animación 813
cálculos 812
datos de entrada 811
dinámica 813
unidades 789
programas de computación: *Véase* programas, computadora
prototipificación 12
y pruebas 13
prototipos 13, 552
proyectos
Capítulo 3 153
Capítulo 8 462
Capítulo 11 610
Capítulo 13 690
Capítulo 14 738
pruebas 12, 13
punto muerto inferior (PMI) 651
punto muerto superior (PMS) 651
punto suave 539

puntos de cambio 52
puntos de inflexión 412, 436
puro(a)
armónica 599, 705, 745
deslizamiento 29
rodamiento 29, 113, 540, 617
junta 29
rotación 26, 93, 261, 665, 668
traslación 26, 336, 439, 665, 668

Q

quinteto E **39**

R

radio
de círculo primario 757
de curvatura 326
en seguidor de cara plana 438
en seguidor de rodillo 434, 436
de giro 538, 540
rama
defecto de 189, 248
definición de 188
rapidez de aceleración 349, 403
angular 350, 351
diferencia de 352
en una leva 379
finita 754
lineal 351
rápido
avance 106
retroceso 106, 109, 114
mecanismo de 49
en seis barras 108
rebaje 435, 439, 477
relación
de engranaje 547
de palanca 549
relación de amplitud 751
relación de contacto 479
mínimo 480
relación de la velocidad angular 278, 281, 468
definición 278
relación de tiempo 106, 109, 111
relación de tren de engranes 489
relación diámetro/carrera 686
relación manivela-biela 659, 686
relación par de torsión-velocidad 67
relativa
aceleración. *Véase* **aceleración: relativa**
velocidad. *Véase* **velocidad: relativa**
reporte técnico 17
resistencia 533
resistor 545
resolvedor de ecuaciones 194, 554, 602
resonancia 752
en leva-seguidor
con cierre de forma 759
con cierre de fuerza 752
resonar 752
resorte
constante 60, 541, 550, 552, 742, 757, 760
definición de 542
efectiva 547, 549, 755, 760
de compresión 552
de espiras helicoidales 755
físico 755, 760
longitud libre 755
precarga de 756
resortes 117, 546
combinados 546
como eslabones 59
en paralelo 547
en serie 546
respuesta
amortiguada 745
completa 751
de estado estable 751
forzada 751
no amortiguada 742
transitoria 743, 748, 751
restringidos 30
retroexcavadora 7
Reuleaux, Franz 6, 27, 30
clasificación de mecanismos 30
revolvabilidad 58
definición de 58
rigidez 533, 753
Roberts
-Chebyschev, teorema de 122
diagrama de 123
eslabonamiento rectilíneo 132
Roberts, Richard 132
Roberts, Samuel 122, 132
robot 31, 85
rodamiento
céntrodos en 486
cilindros de 467, 469
conos de 485
contacto en 6
rodillo(s) 375
cadena de 488
seguidor de 375, 436, 455, 541, 742
cromado del 456
corona del 455
en trenes de válvulas 454
materiales 457
de deslizamiento 454
roldana 450
rotabilidad 50, 58
de eslabonamientos de N barras 58
de un eslabonamiento de cinco barras con engranaje 58
definición de 58
rotación 25
definición de 163
pura 26
equilibrio en 617
rotacional
energía cinética 651
GDL 27
libertad 29
rotopolo 93
rueda 6
y eje **5**
rueda Catarina 488
rugosidad, superficie con 451
ruido, vibración y discordancia (RVD) 733

S

s v aj, **diagramas 379**
polinomios 406
Sanders 352
Sandor, G. N. 6, 106, 205
seguidor 741
¿con cierre de fuerza o de forma? 454

de cara plana 375, 438, 455
de hongo 375
de rodillo 761
deslizante 761
en leva 86, 372, 468
alineado 428
con cierre de forma 759
con cierre de fuerza 742, 755
sistema de 372, 741
subamortiguado 753
flotante 454
rotatorio 374
salto de 454, 753, 756, 758
traslatorio 374
de cara plana 550
de rodillo 764
¿traslatorio o rotatorio? 453
velocidad del 764
seguidor de leva 45, 46, 49, 65
segundo(a)
armónica 660
momento
de área 552
de masa 535
seis barras
de retroceso rápido con eslabón de arrastre, mecanismo de 108
eslabonamiento de 122
eslabonamiento de Watt de 97
mecanismo de 137
selección 12
servo
mecanismos 474
motor 69, 86
válvula 71
silla mecedora tipo Boston 287
simétrico especular 712, 729
simple (o un)
cilindro, motor de 650
detenimiento 140, 403, 410
mecanismo de ¡36, 137
envolvente en mecanismo de gusano 483
tren de engranes 489
simulador de vuelo 786
sincroconexión 483, 512
de embrague 512
de transmisión 512
síndrome de la hoja de papel en blanco 8, 602
sinónimos 11
síntesis 83, 84, 87, 90
analítica 85, 90
comparada con la gráfica 213
ecuación 242
método de la energía elástica 248
métodos de ecuaciones 244
métodos de optimización 244
métodos de puntos de precisión 244
optimizada 242
precisión 242
síntesis de precisión selectiva 247
uso de algoritmos genéticos 248
biposicional 91
analítica 214
gráfica 97
cuadriposicional
analítica 238
gráfica 106
cualitativa 83, 84, 85, 92
cuantitativa 84, 106
de algoritmo 85
de mecanismos 3, 19, 24
definición de 8
gráfica
herramientas necesarias para 90
tipo de 86
triposicional
analítica 218, 224
de movimiento 218
gráfica 97
pivotes fijos especificados 228, 232
síntesis analítica de eslabonamientos 86, 87, 205, 206, 216
comparada con la gráfica 213
síntesis de tipo 84, 143
síntesis dimensional 85, 87, 90, 143
de un eslabonamiento de cuatro barras 90
síntesis numérica 36
sistema de coordenadas 26, 160, 565
absoluto 18, 160
global 160, 208, 582, 803
local 160
no rotatorio 160, 565, 582, 801
rotatorio 160, 582, 801
sistema de inducción 652
sistema de suspensión 282
sistema de unidades pie-libra-segundo (FPS, por sus siglas en inglés) 18
sistema de unidades pulgada-libra-segundo (IPS por sus siglas en inglés) 18
sistema de unidades SI 18
sistema mks 19
sistema sobreamortiguado 747
sistemas de unidades 17
sistemas meteorológicos 340
SIXBAR, programa 785
diferencias con el FOURBAR 809
ejemplo 57
doble detenimiento 140, 379
retroceso rápido 111
simple detenimiento 139
síntesis biposicional 97
síntesis triposicional 101, 228
slugs 18, 19
solenoide 30, 71, 85
solución de forma de cierre
definición de 190
solución particular 743, 750
solución por ecuaciones simultáneas 216
fuerzas dinámicas 554, 556
soluciones múltiples 16
Soni, A. 127
Stephenson
cadena de 43, 45
eslabonamiento de seis barras de 49, 57, 182, 807, 809
subamortiguado 748, 750
subida-bajada, mecanismo de leva 373, 379
subida-bajada-paro, mecanismo de leva 373, 379, 404
subida-paro-bajada-paro, mecanismo de leva 373, 379
Suh, N. P. 15
superficie de contacto 27
superposición 554, 660, 623

T

termodinámica 648, 655
Ting, K. L. 58
TKSolver 194, 352, 431, 602
tolerancia 445
(humana) de la aceleración 347
tornillo 6
junta de 26
tornillo sin fin 483
mecanismo de 483
rueda de 483
Towfigh, K. 284, 776, 777
trabajo 30, 557
trabajo virtual 552, 559, 590
ecuación 558
tracción en las cuatro ruedas 517
transacciones 85, 137, 403, 760
transferencia
de puerto 653
teorema de 537
transitorios 743
análisis de 799
translatorio
corredera 108
seguidor 374
transmisión 469, 483, 651
automática 505
automotriz 512
componente de 291, 293, 338
"caja trituradora" 515
de sincroconexión 512
de un Ford modelo T 515
transmisiones en ángulo recto 485
trapezoidal
aceleración 390
regla 598
traslación 25, 26
curvilínea 127, 163
definición de 163
rectilínea 163, 375
traslación curvilínea 127
traslado 52
trayectoria 86
generación de 86
definición de 86
puntos de precisión 206
con curva de acoplador 112, 114, 116, 121
con temporizarían prescrita 86, 238
tren de engranes epicíclico
eficiencia de 511
flujo de potencia en 509
trepidación 139
trinquete 6
rueda de 46
y uña de 46
triple balancín 52, 186
tronco rodillo 5
tuerca 27

U

unidad derivada 18
unidades fundamentales 18
uña de trinquete
empuj adora 46
fijadora 48

V

ángulo en 694, 715, 727
banda en 487
válvula 550
flotador de 756
leva de 459, 468
resorte de 550
válvulas 372
variable a través del sistema 544
variable de paso 544
varilla de empuje 550
vector (o vectorial)
ángulo del
definición de 170
lazo 208
libre 268, 331, 332
vector libre 268, 331, 332
vectores unitarios 169
velocidad 158, 260
absoluta 262, 266, 268
análisis
algebraico 293
en junta deslizante 290
en manivela-corredera invertida 291
en un engranaje de cinco barras 300
gráfico 263, 265
utilizando centros instantáneos 276
angular 260, 291, 300, 339
constante 132
de deslizamiento 288, 300, 340
de transmisión 300
de un punto en un eslabón 301
definición 260
diferencia de 262, 266, 267, 294, 326
ecuación 262
en leva 379
relación de 469, 476, 486
de engranes de involuta (de evolvente) 472
relativa 262, 267, 289, 294, 542
velocidad cero 113
velocidad sin carga 69
vibración
en eslabonamientos 588
en mecanismos de leva-seguidor 427, 544, 750, 760
en motores 705
residual 754
viga
en doble voladizo 552
en voladizo 552
indeterminada 35
simplemente apoyada 35
viraje por obstáculo 283
visualización 780, 781
visualización funcional 10
volante 69, 537, 590
cálculo
en el programa DYNACAM 764
en el programa ENGINE 63
en el programa FOURBAR 594
de motor 673, 674
dimensionamiento 598
diseño
para eslabonamiento de cuatro barras 593
para motor de CI 673
efecto de 632
en motores de CI 729
físico 599
materiales 600
momento de inercia de 674
tamaño de 827
voltaje 544

W

Watt
cadena de 43, 57
eslabonamiento de 809
eslabonamiento de línea recta de cuatro barras de 130
eslabonamiento de seis barras de 45, 49, 91, 182, 807
Watt, James 5
Whitworth, retroceso rápido 48, 111
Willis, Robert 6
Wood, George A. Jr. 776

Y

yugo escocés 45, 46

Z

Zhang, C. 121, 841

ÍNDICE DEL CD-ROM

Clave para los sufijos de los archivos

DYNACAM	.CAM
ENGINE	.ENG
FIVEBAR	.5BR
FOURBAR	.4BR
MATRIX	.MAT
SIXBAR	.6BR
SLIDER	.SLD
TKSOLVER	.TKW
WORKING MODEL	.WM

Programas
- DYNACAM
- ENGINE
- FIVEBAR
- FOURBAR
- MATRIX
- SIXBAR
- SLIDER
- WORKING MODEL

Ejemplos y figuras
- Capítulo 2
  - F02-19B.5BR
- Capítulo 3
  - COGNATE1.4BR
  - COGNATE2.4BR
  - COGNATE3.4BR
  - F03-01A.4BR
  - F03-01B.4BR
  - F03-04.4BR
  - F03-06.4BR
  - F03-07B.6BR
  - F03-07C.6BR
  - F03-08.4BR
  - F03-09C.6BR
  - F03-12.4BR
  - F03-13A.6BR
  - F03-17B.4BR
  - F03-18.4BR
  - F03-24.4BR
  - F03-28A.4BR
  - F03-28B.5BR
  - F03-31C.6BR
  - STRAIGHT.5BR
- Capítulo 4
  - F04-11.5BR
  - F04-15.4BR
- Capítulo 5
  - E05-01.4BR
  - E05-02A.MAT
  - E05-02B.MAT
  - E05-02.4BR
  - E05-03.4BR
- Capítulo 6
  - F06-14.4BR
  - F06-15A.4BR
  - F06-15B.4BR
  - F06-17B.4BR
- Capítulo 8
  - E08-03.CAM
  - E08-04.CAM
  - E08-05.CAM
  - E08-06.CAM
  - E08-07.CAM
  - E08-08.CAM
  - E08-09.CAM
  - E08-10.CAM
  - E08-11.CAM
- Capítulo 11
  - E11-01.MAT
  - E11-02.MAT
  - E11-03.MAT
  - E11-03.4BR
  - F11-06.4BR
- Capítulo 12
  - F12-05.4BR
- Capítulo 14
  - BMWV12.ENG
  - F14-12.ENG
  - F14-14.ENG
  - F14-18.ENG
  - F14-24.ENG
- Capítulo 15
  - E15-01.CAM
  - E15-02.CAM
- Apéndice A
  - F_A-05.4BR
  - F_A-11.5BR

Solución a los problemas
- Capítulo 3
  - P03-14.4BR
  - P03-22.4BR
  - P03-23.4BR
  - P03-36.4BR
  - P03-42.4BR
- Capítulo 4
  - P04-21.4BR
  - P04-23.4BR
  - P04-25.4BR
  - P04-26.4BR
  - P04-29.4BR
  - P04-30.4BR
- Capítulo 5
  - P05-08.4BR
  - P05-11.4BR
  - P05-15.4BR
  - P05-19.4BR
  - P05-26.4BR
- Capítulo 6
  - P06-47.4BR
  - P06-48.4BR
  - P06-49.4BR
  - P06-51.4BR
  - P06-62.4BR
- Capítulo 7
  - P07-04X.4BR
  - P07-39.4BR
  - P07-40.4BR
  - P07-41.4BR
  - P07-42.4BR
  - P07-44.4BR
- Capítulo 10
  - P10-04A.MAT
  - P10-04B.MAT
- Capítulo 11
  - P11-03X.SLD
  - P11-05X.4BR
  - P11-07X.4BR
  - P11-12.4BR
  - P11-13.4BR
- Capítulo 12
  - P12-09.4BR
- Capítulo 13
  - P13-11.ENG
  - P13-14.ENG
  - P13-19.ENG

Archivos TKSolver
- COMPOUND.TKW
- REVERT.TKW
- TRIPLE.TKW

Archivos Working Model
- FIGURE 2-12C.WM
- FIGURE 2-13.WM
- FIGURE 2-15.WM
- FIGURE 2-16.WM
- FIGURE 2-19B.WM
- FIGURE 3-07BC.WM
- FIGURE 3-09C.WM
- FIGURE 3-12B.WM
- FIGURE 3-13A.WM
- FIGURE 3-14.WM
- FIGURE 3-15.WM
- FIGURE 3-17.WM
- FIGURE 3-18.WM
- FIGURE 3-29.WM
- FIGURE 6-11.WM
- FIGURE 6-12.WM
- FIGURE 6-17A.WM
- FIGURE 8-03C.WM
- FIGURE 8-39.WM
- FIGURE 9-28.WM

INSTRUCCIONES DE INSTALACIÓN PARA LOS PROGRAMAS Y ARCHIVOS DE DISEÑO DE MAQUINARIA

1. Cierre todas las aplicaciones de Windows 95/NT o Windows 3.1 que se ejecuten actualmente en su computadora.
2. Inserte el CD-ROM en la unidad de CD-ROM de su computadora.
3. MÉTODO A. Ejecute el archivo DOM.EXE en el CD, ya sea oprimiendo dos veces su icono o seleccionando *Start/ Run* y después teclear D:\DOM.EXE (suponiendo que D: es la letra para su unidad de CD-ROM). Las instrucciones en pantalla lo guiarán en la instalación. Cuando se inicie, seleccione el (los) programa(s) que desee instalar (FOURBAR, FIVEBAR, SIXBAR, DYNACAM, ENGINE O MATRIX). Cuando finalice la instalación, los programas seleccionados aparecerán en el menú de *Start/Programs* en Windows 95/NT o como un icono en un grupo de programas en Windows 3.1.
4. MÉTODO B. Si no funciona el método A, o si desea instalar cualquier programa directamente sin utilizar el archivo proporcionado DOM.exe, puede abrir la carpeta *Programs* en el CD-ROM, luego abra la carpeta *DOM32bit* (para Windows 95/NT) o la carpeta *DOMlóbit* (para Windows 3.1) y localice la carpeta con el nombre del programa deseado (por ejemplo, FOURBAR, FIVEBAR, etc.). Dentro de la carpeta de cada programa hay un archivo llamado *Setup.exe.* Oprima dos veces sobre el archivo y éste instalará el programa en su disco duro. Windows 95/NT colocará el nombre del programa en el menú desplegable *Start/Programs.* Windows 3.1 pondrá un icono con el nombre del programa en su pantalla de escritorio.

Véase el **apéndice A** para instrucciones específicas sobre la operación de cada programa. En la página 877 se proporciona un índice de los contenidos del CD-ROM. Los archivos de datos para cada programa pueden copiarse del CD-ROM al disco duro con técnicas de copiado estándar de Windows. Véase abajo los requerimientos de hardware para los sistemas de plataformas Windows.

REQUISITOS DEL SISTEMA PARA EL PROGRAMA WORKING MODEL

Plataformas Windows®

- Una PC 486/66 o mejor. Se recomiendan ampliamente los procesadores Pentium.
- Windows® 95 o Windows NT™ 4.0 o superior.
- 12 megabytes de RAM (se recomienda ampliamente de 16 MB).
- Unidad de CD-ROM.

Plataformas Mac™OS

- Procesadores 68020 o superiores. Se recomiendan ampliamente los sistemas de PowerPC.
- Sistema Mac™OS 7.1 o superior.
- 12 megabytes de RAM.
- Unidad de CD-ROM.

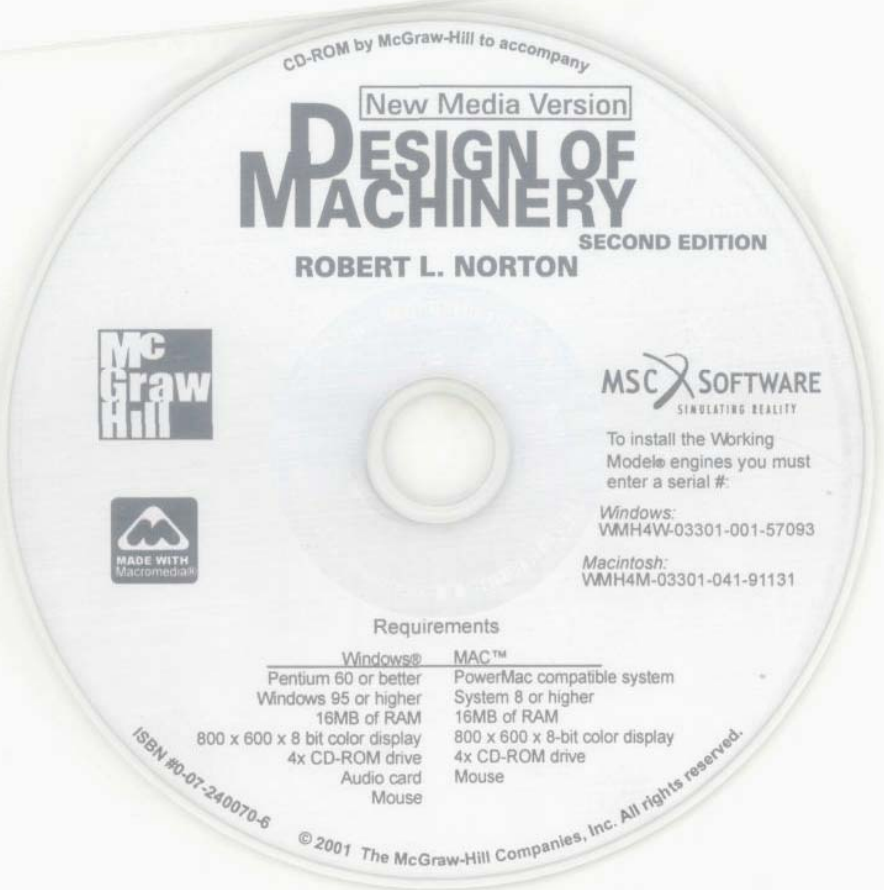
INSTRUCCIONES DE INSTALACIÓN PARA EL PROGRAMA WORKING MODEL Y SUS ARCHIVOS

Plataformas Windows

1. Cierre todas las aplicaciones que se ejecuten en su máquina.
2. Inserte el CD-ROM de Working Model® 2D Homework Versión 4.1. Se supondrá que se designa como D:
3. Oprima dos veces A/y *Computer.* Asegúrese de que su computadora no oculte extensiones de archivos MS-DOS. (Verifique en View, después en Options y después adentro de éste en View. El cuadro para ocultar las extensiones de archivos MS-DOS deberá estar inactivo.)
4. Oprima dos veces la unidad D. Verá el archivo InstallReadMe. Para la instalación, abra la carpeta WMInstaller.
5. Oprima dos veces Setup.exe para iniciar el proceso de instalación. Cuando se inicie introduzca su nombre, escuela y el número de serie de *Windows* WMH4W-03301-001-57093. Nota: No INSTALE el Working Model como un DEMO. Utilice el número de serie.
6. Puede elegir entre tres tipos de instalación: Typical, Compact o Custom. En la mayoría de los casos deberá elegir la Typical; ésta instala la versión 4.1 del Homework del Working Model 2D y los archivos de simulación. La instalación Compact sólo instalará la versión 4.1 del Homework de Working Model 2D. La instalación Custom le permite seleccionar la aplicación o los archivos de simulación que se instalarán.
7. El Working Model 2D puede accionarse oprimiendo el icono en el menú *Start/Programs* en su sistema Windows 95/NT.

Plataformas MacOS

1. Cierre todas las aplicaciones que se ejecuten en su máquina.
2. Inserte el CD-ROM del Working Model Homework 4.0k.
3. Oprima dos veces en el icono titulado "Double-click me to install".
4. Siga las instrucciones de la instalación. La opción Easy Install instala el Working Model 2D y los archivos de simulación. La opción Custom Install le permite elegir los componentes para la instalación así como los archivos de simulación o la aplicación.
5. Después de la instalación accione el Working Model 2D Homework 4.0. Cuando se inicie introduzca su nombre, escuela y el número de serie de *Macintosh* WMH4M-03301-041-91131. Nota: No INSTALE el Working Model como un DEMO. Utilice el número de serie.


CD-ROM by McGraw-Hill to accompany
New Media Version
DESIGN OF MACHINERY
SECOND EDITION
ROBERT L. NORTON
Mc Graw Hill
MADE WITH Macromedia
MSC SOFTWARE
SIMULATING REALITY
To install the Working Models engines you must enter a serial #:
Windows:
WMH4W-03301-001-57093
Macintosh:
WMH4M-03301-041-91131
Requirements
Windows®
Pentium 60 or better
Windows 95 or higher
16MB of RAM
800 x 600 x 8 bit color display
4x CD-ROM drive
Audio card
Mouse
MAC™
PowerMac compatible system
System 8 or higher
16MB of RAM
800 x 600 x 8-bit color display
4x CD-ROM drive
Mouse
ISBN #0-07-240070-6
© 2001 The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

Esta nueva edición se realizó con un estilo amigable, pues hace una exposición clara de los conceptos difíciles y cuenta con una atractiva presentación que enfatiza el análisis del diseño y la síntesis, a través de la aplicación de programas interactivos de computadora.

Los temas se presentan de tal forma que preparan al estudiante para desarrollarse en la ingeniería genuina y resolver los problemas que se le presentan en la práctica.

El software que acompaña a la obra es una versión completa del Working Model 2D v4.1, tanto para Windows/NT como para Macintosh, con 20 de los ejemplos del texto.

Los estudiantes pueden abrir, correr, interactuar e, inclusive, modificar los modelos del CD. Incluye además siete modernos programas interactivos de plataforma Windows para el diseño y el análisis de máquinas y mecanismos: Fourbar, Fivebar, Sixbar, Slider, Dyncam, Engine y Matrix, los cuales se pueden operar en ambiente Windows 3.1 o Windows 95/NT.

ISBN 970102655-1
9 789701 026557

McGraw-Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V.
A Subsidiary of The McGraw-Hill Companies
www.mcgraw-hill.com.mx