

Matemáticas y Origami

Fco. Javier Cobos Gavala

Resumen

En el *First International Meeting of Origami Science and Technology* celebrado el año 1989, el profesor Humiaki Huzita presentó un trabajo en el que se establecían los axiomas de una nueva geometría que él mismo denominó *Geometría del Origami* y que resuelve problemas irresolubles con regla y compás mediante la geometría clásica como son la trisección del ángulo o la duplicación del cubo.

A partir de entonces son muchos los matemáticos que han trabajado sobre dicha geometría obteniéndose importantes resultados que sin embargo son totalmente desconocidos por muchos otros debido quizás a que tiene muy pocos años de existencia.

Se pretende con este trabajo dar a conocer los principios básicos de dicha Geometría y plantear otros problemas que relacionan el Origami con la Geometría Computacional y la Teoría de Grafos.

1 La geometría del Origami

Comencemos por dar la axiomática de la *Geometría del Origami* propuesta por Humiaki Huzita.

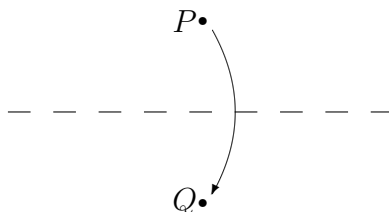
Axioma 1 *Dados dos puntos P y Q se puede realizar el pliegue que los une.*

La geometría de la regla y el compás nos dice que dados dos puntos puede dibujarse una recta que pasa por ellos.



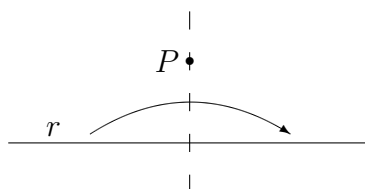
Axioma 2 *Dados dos puntos P y Q se puede realizar el pliegue que sitúa a P sobre Q .*

La geometría de la regla y el compás nos dice que dados dos puntos podemos trazar la mediatriz del segmento que los une.



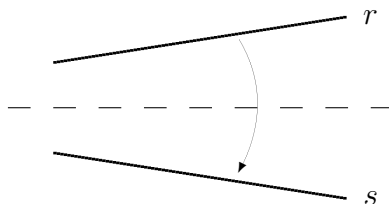
Axioma 3 *Dado un punto P y una recta r se puede realizar el pliegue perpendicular a r que pasa por P .*

Con regla y compás podemos trazar la recta perpendicular a una dada desde un punto exterior a ella.



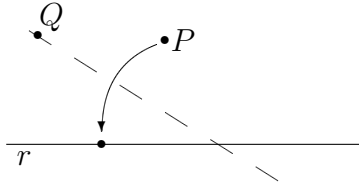
Axioma 4 *Dadas dos rectas r y s se puede realizar un pliegue que sitúe a r sobre s .*

Podemos, con regla y compás trazar la bisectriz del ángulo determinado por dos rectas. Éste problema tiene, tanto en el caso del origami como en el de la regla y compás dos soluciones posibles.



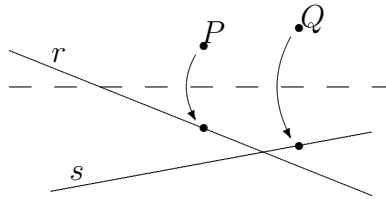
Axioma 5 *Dados dos puntos P y Q y una recta r podemos realizar un pliegue que sitúe a P sobre r y pase por Q .*

Podemos, con regla y compás trazar un arco con centro en Q y radio QP . Éste arco cortará a la recta r , en general, en dos puntos A y B (habrá casos en que sea tangente y sólo exista un punto y casos en los que el problema no tenga solución porque la distancia de Q a r sea mayor que la de Q a P). Las mediatrices de los segmentos AP y BP son soluciones de nuestro problema. Éste problema tiene, tanto en el caso del origami como en el de la regla y compás, el mismo número de soluciones.



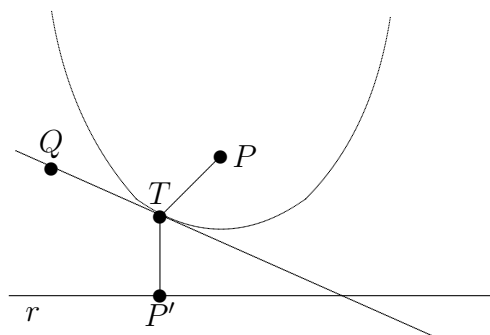
Axioma 6 *Dados dos puntos P y Q y dos rectas r y s se puede realizar un pliegue que sitúe a P sobre r y a Q sobre s .*

Éste axioma es específico de la geometría del origami, no teniendo equivalente en la geometría de la regla y el compás. En otras palabras, la recta (el pliegue) que podemos realizar mediante la técnica del plegado es imposible de realizar mediante regla y compás. Es, por tanto, éste axioma el que establece la diferencia entre ambas geometrías y el que nos va a permitir resolver problemas como los de la trisección de un ángulo o la duplicación del cubo. En general este problema también tiene dos soluciones.



1.1 Interpretación geométrica del Axioma 5

Consideremos la parábola de foco P y directriz r y tracemos una tangente que pase por el punto Q .

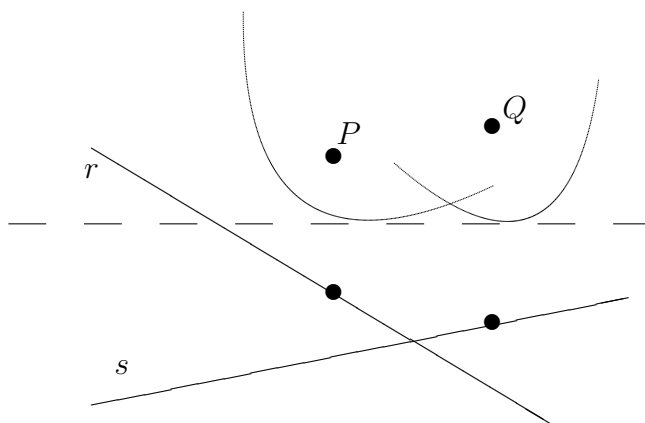


- La tangente es la bisectriz de las rectas que determinadas por $T&P$ y $T&P'$ (radios vectores del punto T).
- $\overline{TP} = \overline{TP'}$ por ser T un punto de la parábola.
- Un pliegue a lo largo de la tangente, sitúa el punto P sobre P' y, por tanto, sobre la recta r .

El pliegue del axioma 5 es una de las tangentes a la parábola de foco P y directriz r que pasan por el punto Q .

1.2 Interpretación geométrica del axioma 6

Consideremos las parábolas de focos y directrices $P&r$ y $Q&s$ respectivamente.



Teniendo en cuenta el axioma 5 el pliegue del axioma 6 ha de ser tangente a ambas parábolas simultáneamente, por lo que:

El pliegue del axioma 6 es una de las tangentes comunes a las parábolas de focos y directrices P y Q respectivamente.

Consideremos las parábolas

$$(y - \frac{1}{2}a)^2 = 2bx \quad y = \frac{1}{2}x^2$$

Sea μ la pendiente de una tangente común a ambas parábolas y (x_0, y_0) y (x_1, y_1) los respectivos puntos de tangencia.

Dado que

$$2(y - \frac{1}{2}a)y' = 2b \implies y' = \frac{b}{y - \frac{1}{2}a} \quad e \quad y' = x$$

son las funciones derivadas para cada una de las parábolas respectivamente, se tiene que

$$\mu = \frac{b}{y_0 - \frac{1}{2}a} = x_1$$

y, por tanto:

$$y_1 = \frac{1}{2}\mu^2 \quad x_0 = \frac{(y_0 - \frac{1}{2}a)^2}{2b} = \frac{b}{2\mu^2}$$

y que

$$(y_0 - \frac{1}{2}a)^2 = 2b \frac{b}{2\mu^2} \implies y_0 = \frac{a}{2} + \frac{b}{\mu}$$

por lo que

$$\mu = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\frac{\mu^2}{2} - \frac{a}{2} - \frac{b}{\mu}}{\mu - \frac{b}{2\mu^2}}$$

que operando nos queda

$$\mu^3 + a\mu + b = 0$$

Puede observarse entonces que el problema del trazado de una tangente común a dos parábolas es equivalente al de la resolución de una ecuación de tercer grado.

Podemos asegurar, por tanto, que:

El axioma 6 resuelve ecuaciones de tercer grado.

Conjetura 1 *No se conoce si la lista de axiomas de Huzita está completa en el sentido de que puedan existir otras operaciones de plegado que permitan resolver ecuaciones de grado 5 o superior. La idea más generalizada es que no existe un séptimo axioma, pero está aún por demostrar.*

2 Solución a problemas irresolubles con regla y compás

En esta sección se presenta la forma de resolver mediante la geometría del origami algunos de los problemas que no tienen solución mediante la geometría clásica basada en la regla y el compás. Destacamos entre ellos la *trisección de un ángulo* y la *duplicación del cubo*.

2.1 Trisección de un ángulo

Tomemos de una hoja cuadrada de papel en la que, partiendo del ángulo inferior izquierdo, hemos dibujado una recta L_2 que forma con la base del cuadrado el ángulo α que pretendemos trisecar.

Doblemos la hoja horizontalmente por la mitad y volvamos a doblar por su mitad la mitad inferior.

El Axioma 6 nos permite realizar el pliegue que lleva el punto P_1 a la recta L_1 y el punto P_2 a la recta L_2 .

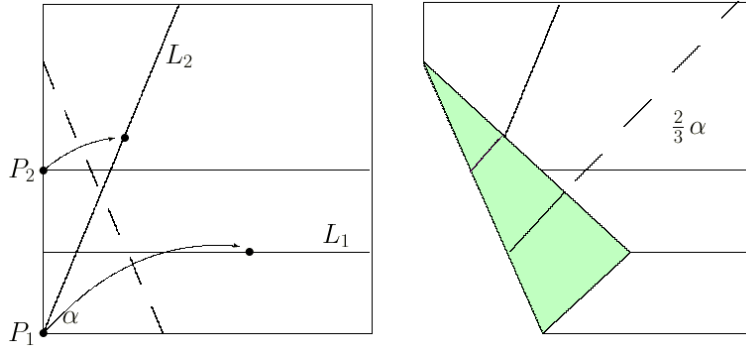


Figura 1: Teorema de H. Abe

Teorema 1 [H. ABE] *La dirección del trozo de recta L_1 que ha quedado doblada triseca el ángulo α .*

DEMOSTRACIÓN:

El trapecio $ABB'A'$ (ver Fig. 2) es simétrico y sus diagonales se cortan en el punto N del eje de simetría OP.

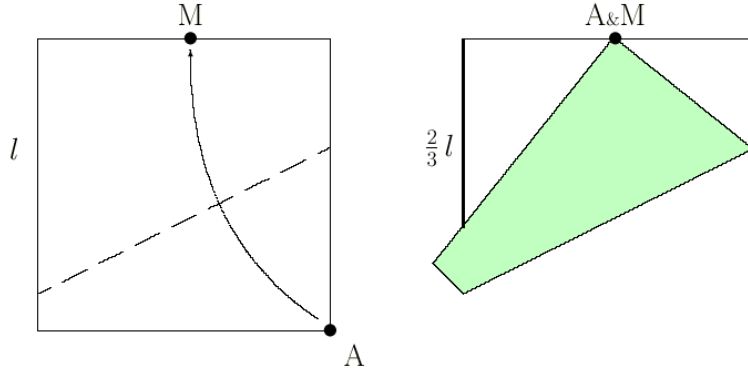


Figura 3: Teorema de Kasuo Haga

DEMOSTRACIÓN: Observando la Figura 4 podemos comprobar que

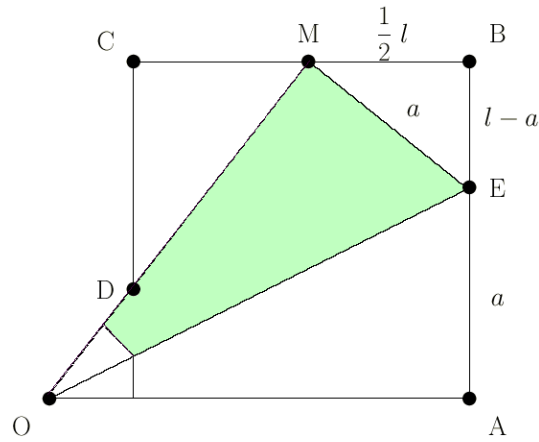


Figura 4: Demostración del Teorema de K. Haga

$$a^2 = (l - a)^2 + \left(\frac{1}{2}l\right)^2 = \frac{5}{4}l^2 - 2al + a^2 \implies \frac{5}{4}l^2 = 2al \implies a = \frac{5}{8}l$$

Si $l = 8$ se tiene que $MB=4$, $ME=5$ y $BE=3$. Es decir, el triángulo EBM es semejante a un triángulo 3,4,5. $OM \perp ME \implies \widehat{CMD}$ es complementario de $\widehat{EMB}$ y, por tanto, $\widehat{EMB} = \widehat{MDC}$, es decir, los triángulos EMB y MDC son

semejantes, por lo que podemos asegurar que

$$\frac{BE}{BM} = \frac{CM}{CD} \implies \frac{3}{4} = \frac{\frac{1}{2}l}{CD}$$

es decir:

$$CD = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}l = \frac{2}{3}l$$

■

Algunas extensiones al Teorema de Haga han sido dadas por Kohji y Mitsue Fushimi (ver Fig. 5).

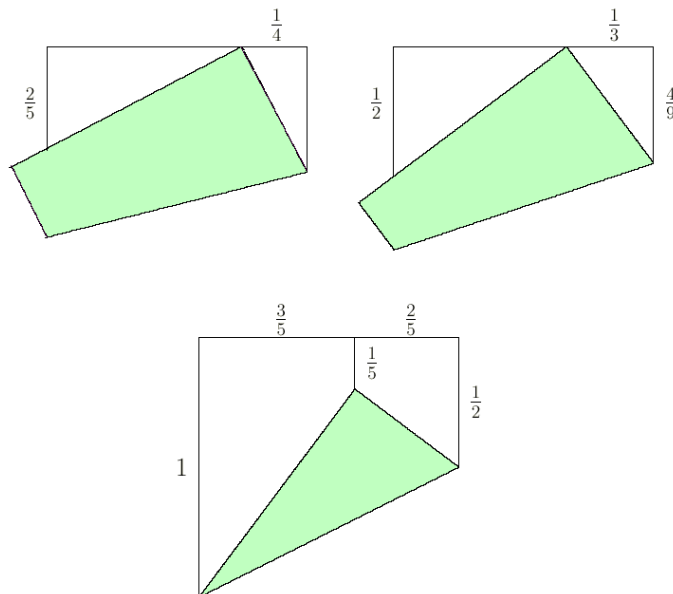


Figura 5: Extensiones al Teorema de Haga

2.3 Duplicación del cubo

Dividamos en tres partes iguales (ver Fig. 6.) una hoja de papel cuadrada (puede hacerse mediante el método de Haga) y realicemos el pliegue que lleva el punto P_1 (esquina inferior derecha del cuadrado) sobre la recta L_1 (lado izquierdo) y P_2 (extremo derecho de la recta inferior de las dos resultantes

de dividir al cuadrado en tres) sobre la recta L_2 (la recta superior de las dos que dividen al cuadrado). Este último pliegue nos lo garantiza el Axioma 6.

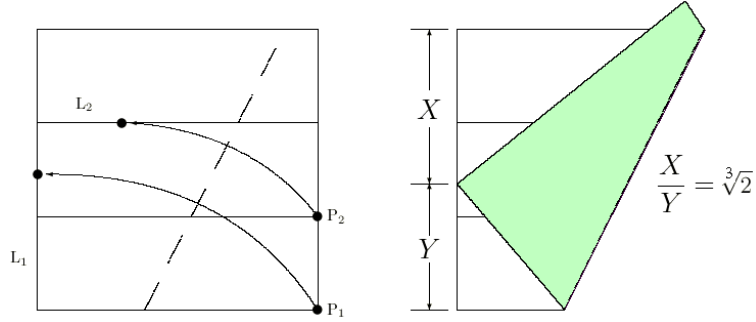


Figura 6: Teorema de P. Messer

Teorema 3 [PETER MESSER] *La razón entre los dos segmentos en que queda dividido el lado del cuadrado, mediante el último pliegue realizado, es exactamente $\sqrt[3]{2}$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos, para simplificar, que el lado del cuadrado es la unidad.

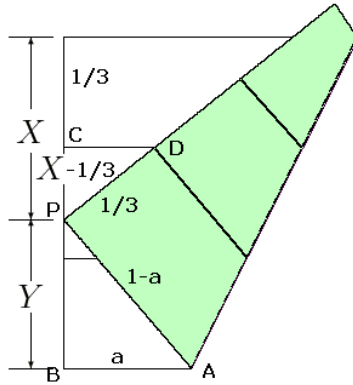


Figura 7: Demostración del Teorema de P. Messer

Por construcción $BA + AP = 1$ (véase la Fig. 7), por lo que si denotamos por $a = BA$ se tiene que $AP = 1 - a$ y al ser rectángulo el triángulo PBA

el teorema de Pitágoras nos dice que

$$(1 - a)^2 = Y^2 + a^2 \iff 1 - 2a = Y^2 \iff a = \frac{1 - Y^2}{2}$$

y, por tanto

$$AP = 1 - a = \frac{1 + Y^2}{2}$$

Por otro lado, $PC = X - \frac{1}{3}$ y $PD = \frac{1}{3}$ (por construcción).

Dado que los triángulos PCD y PBA son semejantes, por ser rectángulos y tener los ángulos CDP y BPA iguales, se tiene que

$$\frac{AP}{AB} = \frac{PD}{PC}$$

es decir

$$\frac{\frac{1 + Y^2}{2}}{\frac{1 - Y^2}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{X - \frac{1}{3}} \iff \frac{1 + Y^2}{1 - Y^2} = \frac{1}{3X - 1}$$

Teniendo en cuenta que $X = 1 - Y$ podemos hacer

$$\frac{1 + Y^2}{1 - Y^2} = \frac{1}{3(1 - Y) - 1} = \frac{1}{2 - 3Y}$$

o lo que es lo mismo,

$$(1 + Y^2)(2 - 3Y) = 1 - Y^2 \iff 3Y^3 - 3Y^2 + 3Y - 1 = 0$$

Si hacemos el cambio

$$\frac{X}{Y} = t \implies t = \frac{1 - Y}{Y} \implies tY = 1 - Y \implies Y = \frac{1}{1 + t}$$

obtenemos que

$$3\frac{1}{(1 + t)^3} - 3\frac{1}{(1 + t)^2} + 3\frac{1}{1 + t} - 1 = 0$$

que multiplicando por $(1 + t)^3$ nos genera la ecuación

$$3 - 3(1 + t) + 3(1 + t)^2 - (1 + t^3) = 0$$

que desarrollando se convierte en

$$2 - t^3 = 0$$

es decir, $t = \sqrt[3]{2}$ o, lo que es lo mismo, $\frac{X}{Y} = \sqrt[3]{2}$. ■

3 Las matemáticas del origami plano

Al realizar un pliegue en una hoja de papel, este puede realizarse de dos formas diferentes, en MONTAÑA o en VALLE. Es general el uso de la notación $- \cdot - \cdot - \cdot -$ para los pliegues en montaña y $- - - - -$ para los pliegues en valle.

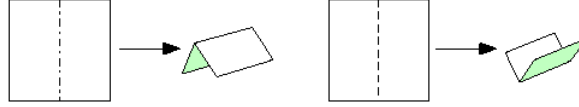


Figura 8: Un pliegue en montaña (izquierda) y otro en valle (derecha)

Si desplegamos una figura, realizada mediante plegados, nos quedan en la hoja de partida las marcas de los pliegues que se han realizado. Así, por ejemplo, si desplegamos la grulla tradicional nos queda el mapa que aparece en la Figura 9.

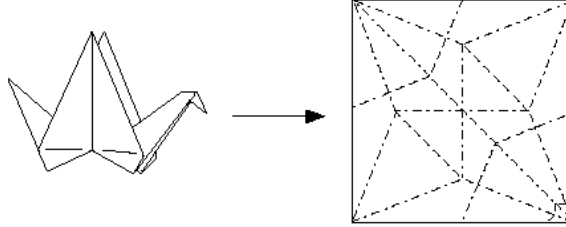


Figura 9: El mapa de los pliegues de la grulla tradicional

Definición 1 Un origami es un par $(\mathcal{C}, f)$, donde $\mathcal{C}$ es el conjunto de pliegues y $f : \mathcal{C} \rightarrow (-\pi, \pi)$ es tal que la representación de $(\mathcal{C}, f)$ inducida de $[0, 1] \times [0, 1]$ en $\mathbf{R}^3$ es biyectiva.

Definición 2 Un origami plano es un par $(\mathcal{C}, f)$, donde $\mathcal{C}$ es el conjunto de pliegues y $f : \mathcal{C} \rightarrow \{M, V\}$ es tal que la representación de $(\mathcal{C}, f)$ inducida de $[0, 1] \times [0, 1]$ en $\mathbf{R}^3$ es biyectiva.

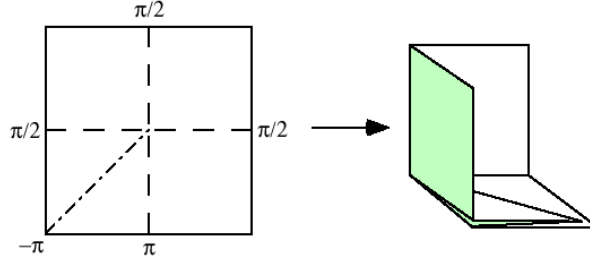


Figura 10: Un origami tridimensional

Obsérvese que para que el origami sea plano (pueda ser aplastado) los pliegues han de ser, necesariamente de ± 180 grados, por lo que les asignaremos los valores M si el pliegue es en montaña o V si es en valle.

Como vamos a tratar de los origamis planos, la función $f : \mathcal{C} \rightarrow \{M, V\}$ la llamaremos **asignación MV** y diremos que es una *asignación válida* si el mapa $\mathcal{C}$ con dicha asignación permite la construcción de un origami plano, mientras que en el caso contrario diremos que se trata de una asignación *no válida*.

Un mapa $\mathcal{C}$ para el que ninguna asignación MV es válida diremos que se trata de un origami *irrealizable*.

3.1 Propiedades locales del origami plano

Se denomina *vértice cono* a cualquier punto del interior del cuadrado en el que confluyen pliegues.

Teorema 4 [MAEKAWA] *Sea M el número de pliegues en montaña y V el de pliegues en valle que confluyen en un vértice cono. Se verifica entonces que $M - V = \pm 2$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea n el número de pliegues adyacentes al vértice cono v y sean M el número de los realizados en montaña y V el de los realizados en valle. Se verifica entonces que $n = M + V$.

Si realizamos el plegado de un vértice cono y practicamos un corte (ver Fig. 11) observamos que el corte define un polígono plano en el que los ángulos interiores son de 0 o de 360 grados. Podemos observar también que los

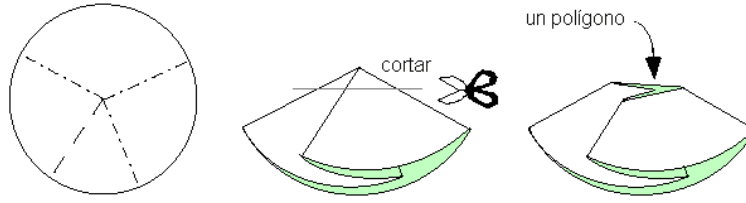


Figura 11: Demostración del Teorema de Maekawa

pliegues en montaña se corresponden con los ángulos interiores de 0 grados, mientras que los pliegues en valle se corresponden con los de 360 grados.

Como la suma de los ángulos interiores de un polígono de n vértices viene dada por $(n - 2)180$ podemos asegurar que

$$0M + 360V = (M + V - 2)180 \implies 2V = M + V - 2 \implies M - V = 2 \quad \blacksquare$$

Corolario 1 *El grado de un vértice cono es siempre par.*

DEMOSTRACIÓN: Si denotamos por n el grado del vértice cono se tiene que $n = M + V$, donde M representa el número de pliegues en montaña y V el de pliegues en valle alrededor de dicho vértice.

Por el teorema de Maekawa sabemos que $M - V = 2$, por lo que

$$n = M + V = M - V + 2V = \pm 2 + 2V = 2(\pm 1 + V)$$

que es siempre un número par. ■

Teorema 5 [KAWASAKI] *La suma de los ángulos alternos en un vértice cono de $\mathcal{C}$ es 180 grados.*

DEMOSTRACIÓN: Denotemos por α_i a los ángulos situados alrededor del vértice, donde $i = 1, 2, \dots, 2n$ y supongamos que recorremos con el dedo una circunferencia alrededor del vértice desde el inicio del ángulo α_1 .

Si describimos el desplazamiento del dedo sobre el papel doblado observamos que se describe un movimiento pendular para estar al final en el mismo sitio de partida, es decir, podemos observar que

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \dots - \alpha_{2n} = 0$$

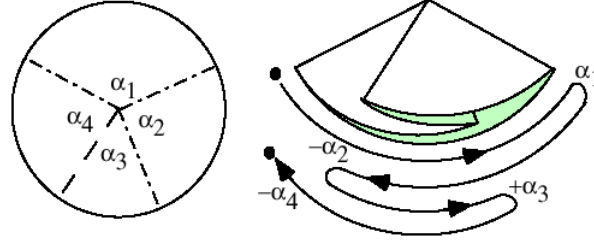


Figura 12: Demostración del Teorema de Kawasaki

mientras que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \cdots + \alpha_{2n} = 360$$

por lo que

$$2\alpha_1 + 2\alpha_3 + 2\alpha_5 + \cdots + 2\alpha_{2n-1} = 360$$

de donde dividiendo por 2 obtenemos que

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \cdots + \alpha_{2n-1} = 180.$$

Evidentemente, también se verifica que

$$\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \cdots + \alpha_{2n} = 180. \quad \blacksquare$$

El recíproco del Teorema de Kawasaki también es cierto, es decir, si la suma de los ángulos alternos de un vértice cono es 180 grados, su plegado es plano.

Sin embargo, el hecho de que *todos* los vértices cono existentes en el mapa de un origami verifiquen la condición de Kawasaki no quiere decir que *globalmente* se pueda realizar un plegado plano de la figura. Veamos, para ello, el siguiente teorema.

Teorema 6 *En cualquier origami plano $(\mathcal{C}, f)$ definido el disco unidad D (en el que sólo existe un vértice y se encuentra en el origen) se verifica que si $\alpha_i < \alpha_{i-1}$ y $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ entonces $f(l_i) \neq f(l_{i+1})$.*

DEMOSTRACIÓN: Puede observarse en la Figura 13 que si el pliegue l_i se ha realizado en montaña, y teniendo en cuenta que se trata de un origami plano, resulta imposible realizar también en montaña el pliegue l_{i+1} ya que

tendríamos, por debajo, el papel resultante del primer pliegue impidiendo este último, por lo que necesariamente ha de realizarse en valle. Análogamente, si el primer pliegue se realiza en valle, el segundo ha de realizarse necesariamente en montaña. Así pues, $f(l_i) \neq f(l_{i+1})$. ■

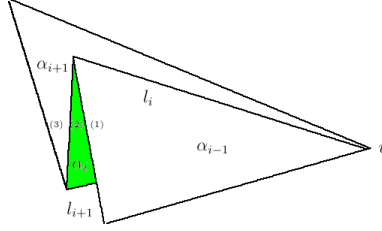


Figura 13: Esquema para la demostración del Teorema 6

Teniendo en cuenta el teorema anterior podemos ver que el origami representado en la Figura 14 no es plano a pesar de cumplir los requisitos de teorema de Kawasaki.

En efecto, si nos fijamos en uno de los vértices del triángulo equilátero central (60 grados) podremos observar que los pliegues que lo definen tienen ángulos adyacentes de 90 grados, por lo que ambos pliegues tienen que tener diferente asignación, es decir, si uno se realiza en montaña el otro hay que realizarlo en valle. Al darse la misma circunstancia en los tres vértices del triángulo central llegamos a una incompatibilidad, pues si hemos asignado a dos de sus lados los valores M y V (montaña y valle) no podemos asignar al tercer lado ninguno de los dos valores.

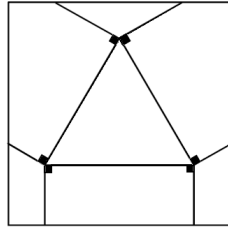


Figura 14: Un origami irrealizable

4 Vértices de plegado plano

Llamaremos *vértices de plegado plano* a aquellos que se corresponden con un mapa que contiene a un único vértice en el interior y permiten un doblado plano (verifican las condiciones del Teorema 5 [KAWASAKI]).

Un vértice v estará totalmente determinado cuando se conozcan los ángulos determinados por los pliegues que confluyen en él, por lo que lo denotaremos por $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n})$ donde los α_i denotan los ángulos existentes entre sus pliegues, de tal forma que si $l_1, \dots, l_n$ son los pliegues que confluyen en v de forma consecutiva, los α_i ($i = 1, \dots, 2n - 1$) representan los ángulos existentes entre los pliegues l_i y l_{i+1} y α_{2n} el que forman l_{2n} y l_1 .

Vamos a denotar por $C(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n})$ al número de asignaciones MV válidas de un vértice de plegado plano con ángulos consecutivos $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$.

Supongamos que tenemos una asignación MV válida para los pliegues del vértice, es decir, que se verifica que $M - V = \pm 2$. Si $M - V = 2$ diremos que el vértice v es un *vértice hacia arriba*, mientras que si $M - V = -2$ diremos que se trata de un *vértice hacia abajo*. Es evidente que si tenemos un vértice hacia arriba y cambiamos la asignación MV de tal forma que los pliegues que estaban en valle los realizamos en montaña y viceversa, lo habremos convertido en un vértice hacia abajo. De la misma forma podemos cambiar de un vértice hacia abajo a otro hacia arriba.

Podemos asegurar, por tanto, que $C(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n})$ es siempre un número par.

Si tomamos ejemplos sencillos para computar, vemos que $C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ puede tomar los valores 8, 6 o 4 dependiendo del valor de los ángulos α_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Podemos contar sólo las asignaciones que hacen de v un vértice hacia arriba (aquellas para las que $M - V = 2$) y multiplicar por 2 y dado que sólo existen cuatro pliegues y $M - V = 2$, necesariamente ha de ser $M = 3$ y $V = 1$.

Si nos fijamos en la Figura 15 podemos observar, para el caso (a) que el pliegue en valle podemos situarlo en cualquiera de las cuatro posiciones posibles, por lo que se pueden realizar $4 = \binom{4}{1}$ asignaciones para hacer de v un vértice hacia arriba y, por tanto $C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 8$.

En el caso (b) los pliegues de las direcciones noreste, este y sureste no pueden tener la misma asignación, por ejemplo en montaña (si realizamos el pliegue en montaña de la dirección sureste ya no podemos realizar, también en montaña y simultáneamente los de las direcciones este y noreste) por tanto,

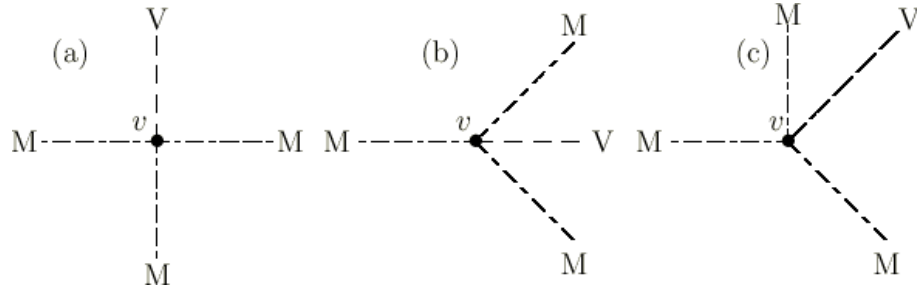


Figura 15: (a) $C(\alpha_1, \dots, \alpha_4) = 8$, (b) $C(\alpha_1, \dots, \alpha_4) = 6$, (c) $C(\alpha_1, \dots, \alpha_4) = 4$

el pliegue de la dirección oeste no puede ser en valle. Así pues sólo tenemos tres posibilidades para asignar el pliegue en valle, es decir, tres posibilidades para hacer de v un vértice hacia arriba y, por tanto $C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 6$.

En el caso (c) observamos que el ángulo formado por las direcciones norte y noreste es de 45 grados mientras que los dos ángulos adyacentes son de 90 grados, por lo que las direcciones norte y noreste han de tener diferente asignación. En otras palabras, el pliegue en valle sólo podemos situarlo en una de esas dos direcciones para construir un vértice hacia arriba, por lo que $C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 4$.

Obsérvese que, en general, si tenemos $2n$ pliegues adyacentes a v y queremos realizar un vértice hacia arriba podremos asignar, a lo más, $n-1$ pliegues en valle (nos quedarán $n+1$ en montaña y se verificará que $M - V = 2$) por lo que $C(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}) \leq 2 \binom{2n}{n-1}$.

Hay que tener en cuenta que si, por ejemplo, todos los ángulos tienen de la misma medida es posible asignar de forma arbitraria las $n-1$ posiciones de los pliegues en valle, por lo que para cualquier valor de n es posible alcanzar la cota de $2 \binom{2n}{n-1}$.

Teorema 7 Sea $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n})$ un vértice de plegado plano (o un vértice cono de un origami cualquiera). Se verifica que

$$2^n \leq C(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}) \leq 2 \binom{2n}{n-1}$$

DEMOSTRACIÓN: La desigualdad de la derecha está probada, por lo que sólo resta probar la de la izquierda.

Supongamos que α_i es el ángulo más pequeño de todos los que definen al vértice v (o uno de los más pequeños en el caso de haber varios iguales). Si l_i y l_{i+1} son los pliegues que definen dicho ángulo tenemos, al menos dos posibilidades de asignación MV para l_i y l_{i+1} , es decir, $f(l_i, l_{i+1})$ puede ser (M, V) o (V, M) (por supuesto pueden existir otras posibilidades como (V, V) o (M, M)).

Así, si doblamos l_i y l_{i+1} utilizando una de estas dos posibilidades y lo pegamos, o identificamos las capas de papel que se han unido, el papel se convertirá en un cono (a menos que ya sea un cono, en cuyo caso que se convertirá en un cono más pequeño) y los ángulos α_{i-1} , α_i y α_{i+1} se fundirán en un nuevo ángulo de amplitud $\alpha_{i-1} - \alpha_i + \alpha_{i+1}$ que tiene que ser positivo por ser α_i uno de los ángulos más pequeños. Como el vértice de plegado plano original podía doblarse de forma plana, nuestro nuevo cono también podrá doblarse en plano utilizando las líneas de pliegue resultantes $l_1, l_2, \dots, l_{i-1}, l_{i+2}, \dots, l_{2n}$.

En otras palabras, podemos repetir el proceso. Tomamos el menor de los ángulos de nuestro cono, doblamos las líneas de su frontera mediante una de las dos asignaciones posibles (M, V) o (V, M) , fundimos los papeles que se han unido y repetimos. En cada paso se han eliminado dos líneas y se ha dispuesto de dos configuraciones de asignación MV para ellas. Finalmente nos quedará sólo dos líneas a un lado de nuestro cono y éstas puede ser dobladas, por el Teorema 4 [MAKAEWA] o bien las dos en montaña o bien las dos en valle.

En definitiva, si partimos de un total de $2n$ líneas habremos eliminado un total de n parejas con dos posibilidades de asignación MV para cada una de ellas, por lo que $C(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}) \geq 2^n$. ■

La igualdad se alcanza cuando no existen ángulos consecutivos iguales y en todo el proceso no aparecen ángulos consecutivos iguales. Por ejemplo $C(100, 70, 50, 40, 30, 70) = 2^3 = 8$ ya que eliminar el ángulo de 30 grados sólo admite las asignaciones (M, V) o (V, M) (obsérvese que al ser los ángulos adyacentes mayores de 30 grados, las asignaciones de sus lados han de ser distintas por el Teorema 6). El nuevo cono que nos queda tiene de ángulos 100, 70, 50, $40-30+70=80$. El ángulo más pequeño es ahora el de 40 y sus adyacentes son mayores que 40, por lo que volvemos a tener únicamente dos posibilidades de asignación para sus lados. Nos queda al final un cono de ángulos 100, $70-50+80=100$ cuyos lados podemos doblar ambos en montaña o ambos en valle, es decir, existen $2^3 = 8$ posibilidades de asignación.

En todo caso, vemos que no es posible dar una fórmula general en función de n para $C(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n})$. Es necesario recopilar más información, en particular son necesarios los valores de los ángulos entre los pliegues.

4.1 Varios ángulos iguales seguidos

Nos será útil introducir la siguiente notación: si $l_i, \dots, l_{i+k}$ son líneas del pliegue contiguas en un vértice de plegado plano a las que se les ha dado una asignación MV, denotaremos por $M_{i, \dots, i+k}$ al número de montañas y $V_{i, \dots, i+k}$ al número de valles existentes entre dichas líneas de pliegue.

Supongamos que en alguna parte en nuestro vértice (o en un vértice cono) tenemos que $\alpha_i = \alpha_{i+1} = \alpha_{i+2} = \dots = \alpha_{i+k}$ con $\alpha_{i-1} > \alpha_i$ y $\alpha_{i+k+1} > \alpha_{i+k}$ (si se diese el caso de que α_1 y α_{2n} aparecieran en nuestra sucesión de ángulos iguales, etiquetaríamos de nuevo los vértices para que no sucediese)¹

Si $k = 0$ tendríamos un ángulo α_i situado entre otros dos mayores, lo que hace que los pliegues l_i y l_{i+1} no puedan tener la misma asignación (ambos en valle o ambos en montaña), es decir, que $M_{i, i+1} - V_{i, i+1} = 0$.

Si $k > 0$ tenemos varios ángulos consecutivos de la misma amplitud y existen muchas más posibilidades para la asignación MV. El siguiente teorema presenta un resultado general.

Teorema 8 *Sea $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n})$ un vértice de plegado plano y supongamos que existe algún valor de k para el que $\alpha_i = \alpha_{i+1} = \dots = \alpha_{i+k}$ con $\alpha_{i-1} > \alpha_i$ y $\alpha_{i+k+1} > \alpha_{i+k}$. Entonces*

$$M_{i, i+1, \dots, i+k+1} - V_{i, i+1, \dots, i+k+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es par} \\ \pm 1 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: El resultado es una aplicación directa del Teorema 4 [MAEKEWA]. Si k es par, entonces la sección del papel alrededor de los pliegues en cuestión adopta, forzosamente ², la forma de la Figura 16. Si consideramos, por sí sola, esta sucesión de ángulos y agregamos una sección de papel con ángulo β para conectar los extremos izquierdo y derecho (ver Fig. 16),

¹Obsérvese que el caso $k = 2n - 2$ es imposible, ya que ello implicaría que $i = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{2n-1}$ y α_n mayor de todos los demás ángulos, pero por el Teorema de Kawasaki se tendría que $n\alpha_1 = (n-1)\alpha_1 + \alpha_{2n}$, o lo que es lo mismo, que $\alpha_{2n} = \alpha_1$ lo cual es una contradicción.

²Decimos “forzosamente” porque se funden en uno los ángulos iguales en sentidos contrarios.

entonces tendremos un plegado plano que debe satisfacer el el Teorema de Maekawa. El ángulo β agrega dos pliegues extras que deben ser ambos en montaña o ambos en valle. Podemos asumir que el vértice es hacia arriba (M-V=2) y, por tanto $M_{i,i+1,\dots,i+k+1} - V_{i,i+1,\dots,i+k+1} = 0$.

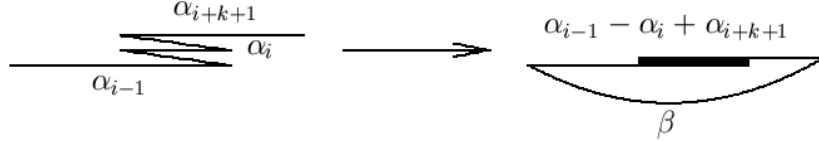


Figura 16: K es par

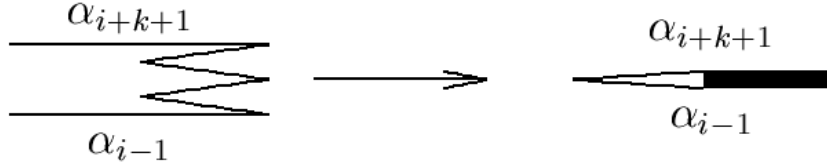


Figura 17: K es impar

Si k es impar (ver Fig. 17), la sucesión de ángulos iguales, considerada por sí sola, tiene en sus extremos dos alas de ángulos α_{i-1} y α_{i+k+1} apuntando en el mismo sentido. Si las unimos, posiblemente extendiendo una de ellas si $\alpha_{i-1} \neq \alpha_{i+k+1}$, podemos aplicar la condición de Maekawa. Quitando (o añadiendo) 1 al resultado, a causa del pliegue extra que se ha añadido al pegar los extremos, tenemos que $M_{i,i+1,\dots,i+k+1} - V_{i,i+1,\dots,i+k+1} = \pm 1$. ■

En [1] Justin utiliza este resultado para convertir un vértice de plegado plano en una *permutación circular* para denotar dónde puede ser aplicado de forma iterativa el Teorema 8. Esto nos da un mecanismo para enumerar todas las asignaciones MV válidas para los pliegues. Una estrategia similar es crear fórmulas recursivas del Teorema 8.

Teorema 9 Sea $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n})$ un vértice de plegado plano, y supongamos que $\alpha_i = \alpha_{i+1} = \alpha_{i+2} = \dots = \alpha_{i+k}$ con $\alpha_{i-1} > \alpha_i$ y $\alpha_{i+k+1} > \alpha_{i+k}$ para algún valor de k . Entonces

$$C(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}) = \binom{k+2}{\frac{k+2}{2}} C(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-2}, \alpha_{i-1} - \alpha_i + \alpha_{i+k+1}, \alpha_{i+k+2}, \dots, \alpha_{2n})$$

si k es par, y

$$C(\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}) = \binom{k+2}{\frac{k+1}{2}} C(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+k+1}, \dots, \alpha_{2n})$$

si k es impar.

DEMOSTRACIÓN: Si k es par, por el Teorema 8 $M_{i,\dots,i+k+1} - V_{i,\dots,i+k+1} = 0$ por lo que de entre los $k+2$ pliegues $l_i, \dots, l_{i+k+1}$, cualesquiera $\frac{k+2}{2}$ de ellos puede ser valles, y el resto montañas, ya que todos los ángulos son iguales. Si tomamos una cualquiera de esas posibilidades, realizamos los pliegues y fusionamos las capas de papel alrededor de estos ángulos en una sola, entonces los ángulos $\alpha_{i-1}, \dots, \alpha_{i+k+1}$ quedarán reemplazados por un único ángulo de amplitud $\alpha_{i-1} - \alpha_i + \alpha_{i+k+1}$. Esto nos da la forma de realizar la recursión.

Si k es impar, entonces $M_{i,\dots,i+k+1} - V_{i,\dots,i+k+1} = \pm 1$. Podemos, por tanto asignar a cualesquiera $\frac{k+1}{2}$ entre las $k+2$ líneas $l_i, \dots, l_{i+k+1}$ un pliegue en montaña y el resto en valle, o viceversa. Existen, por tanto, $2 \binom{k+2}{\frac{k+1}{2}}$ asignaciones MV para los pliegues. De cualquier modo, dado que k es impar, al fundir todas estas capas se creará una nueva línea de pliegue que forzará la asignación MV y arruina nuestras esperanzas de recursión. Para evitarlo, dejamos uno de los pliegues sin asignación y dividimos el número de asignaciones MV entre dos. Cuando fundimos las capas en una sola, los ángulos $\alpha_i, \dots, \alpha_{i+k}$ son absorbidos por uno de los ángulos α_{i-1} o α_{i+k+1} , que nos da el método de recursión. ■

Así, por ejemplo, para un vértice $v(20, 10, 40, 50, 60, 60, 60, 60)$ se tiene:

$$\begin{aligned} C(20, 10, 40, 50, 60, 60, 60, 60) &= \binom{2}{1} C(50, 50, 60, 60, 60, 60) \\ &= \binom{2}{1} \binom{3}{1} C(60, 60, 60, 60) \\ &= \binom{2}{1} \binom{3}{1} 2 \binom{4}{1} = 48 \end{aligned}$$

Obsérvese que para un vértice, como el anterior, de ocho pliegues, el Teorema 7 nos dice que $C(\alpha_1, \dots, \alpha_8)$ puede ser cualquier número comprendido entre $2^4 = 16$ y $2 \binom{8}{3} = 112$. El Teorema 9 nos permite calcular el valor exacto de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_8)$ con, a lo más, 4 operaciones.

5 Plegado de vértices múltiples

Contar el número de asignaciones MV posible cuando existen más de un vértice puede resultar muy difícil. Para ilustrarlo, basta con ver un caso muy simple de pliegues de origami con más de un vértice: pliegues de origami plano cuyo mapa de pliegues sólo contiene rectas perpendiculares formando una cuadrícula. Podemos realizar un plegado para convertirlo en un sólo cuadrado pequeño.

Koehler [2] y Lunnon [3, 4], entre otros, lo identificaron con el problema del **plegado de una hoja de sellos** o del **plegado de un mapa**. Dada una matriz $m \times n$ (hoja) de sellos del mismo tamaño se trata de contar el número de formas en que puede ser doblada independientemente de la asignación MV. Los autores citados dan complicados algoritmos para hacerlo, especialmente en el caso $n = 1$, caso conocido como la **tira de sellos**. No obstante, se basan en el número de formas diferentes en que uno puede ordenar sus capas. Sin embargo, esto no es lo mismo que contar el número de asignaciones MV posibles.

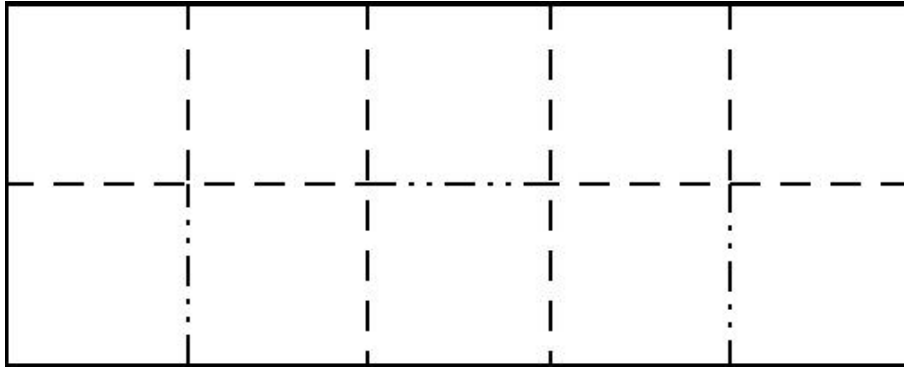


Figura 18: Una asignación imposible para una hoja de 2×5 sellos

Sea $S_{m,n}$ una matriz $m \times n$ de sellos del mismo tamaño y sea $C(S_{m,n})$ el número de asignaciones MV diferentes para doblar $S_{m,n}$ en una simple pila de sellos. El mapa presenta una celosía de $(m - 1) \times (n - 1)$ vértices todos ellos de grado cuatro. De partida, para el vértice superior izquierdo disponemos ya de 8 asignaciones posibles. Para el siguiente vértice situado a su derecha sólo disponemos de 4 (ya que uno de sus pliegues tiene asignado un valor M o V de la asignación del anterior). Si continuamos moviéndonos hacia

la derecha nos encontramos con que tenemos 4 asignaciones posibles para cada vértice. El primer vértice de la segunda fila tiene también 4 posibles asignaciones pero el resto de la segunda fila sólo dispone de dos asignaciones por vértice. Lo mismo ocurre con el resto de las filas. Por tanto, el número total de asignaciones MV para $S_{m,n}$ puede ser acotada por

$$C(S_{m,n}) \leq 8 \cdot 4^{m-2} \cdot 4^{n-2} \cdot 2^{(m-2)(n-2)} = 2^{mn-1}$$

La igualdad no siempre se consigue, ya que no todas las asignaciones son válidas. Justin en [1] da un número de asignaciones imposibles para los casos $n = 2$ y $m = 5, 6$ y 7 . Uno de los más sencillos se presenta en la Figura 18. Se deja al lector la prueba de la imposibilidad de su plegado.

6 Conclusiones

El Teorema 9 nos proporciona un algoritmo lineal para computar el número de asignaciones MV para el caso de un único vértice de plgado plano dado. El ejemplo de la Figura 18 ilustra cómo el problema equivalente cuando existen varios vértices es bastante más complejo.

Podemos probar $C(S_{m,n}) \leq 2^{mn-1}$ y que se da la igualdad cuando $n = 1$ o m y n son ambos menores que 5. Obtener una fórmula mejor es un problema abierto.

Planteamos algunas preguntas para quienes deseen trabajar en esté área:

- a) ¿Se pueden extender los resultados presentados en este trabajo a los casos de dos o tres vértices?
- b) ¿Existen familias F de vértices múltiples para las cuales sea fácil computar $C(F)$?

Referencias

- [1] Justin, J. *Toward a mathematical theory of origami* In: K. Miura ed., *Origami Science and Art: Proceedings of the Second International Meeting of Origami Science and Scientific Origami*, (Seian University of Art and Design, Otsu, 1997) 15-29.
- [2] Koehler, J. *Folding a strip of stamps* *Journal of Combinatorial Theory*, 5 (1968) 135-152.

- [3] Lunnon, W.F. *A map-folding problem* Mathematics of Computation, 22, No.101 (1968) 193-199.
- [4] Lunnon, W.F. *Multi-dimensional map folding* The Computer Journal, 14, No.1 (1971) 75-80.