

K. Ríbnikov

HISTORIA de las MATEMÁTICAS



Editorial Mir Moscú



HISTORIA de las MATEMÁTICAS

K. Ríbnikov

HISTORIA
de las
MATEMÁTICAS



К. Рыбников

ИСТОРИЯ
МАТЕМАТИКИ

Издательство
Московского университета

K. Ríbnikov

HISTORIA
de las
MATEMÁTICAS



Editorial Mir
Moscú

Impreso en la URSS

На испанском языке

Prólogo	8
---------------	---

Capítulo 1

Objeto y método de la Historia de las matemáticas

1.1. El objeto de la Historia de las matemáticas	9
1.2. Sobre la concepción materialista del objeto de las matemáticas	11
1.3. Importancia de la práctica en el desarrollo de las matemáticas	12
1.4. Relación de las matemáticas con otras ciencias	13
1.5. Sobre el carácter dialéctico de las leyes del desarrollo de las matemáticas	15
1.6. Los periodos más importantes en la historia de las matemáticas	16
1.7. El papel de la historia de las matemáticas en el sistema de preparación de especialistas-matemáticos	18

Capítulo 2

Proceso de formación de las representaciones matemáticas

2.1. Surgimiento de los primeros conceptos y métodos matemáticos	20
2.2. Las matemáticas del Egipto Antiguo	22
2.3. Las matemáticas de la Babilonia Antigua	27
2.4. Las matemáticas de la China Antigua	31
2.5. Las matemáticas de la India Antigua	44

Capítulo 3

Formación de las primeras teorías matemáticas

3.1. Las primeras teorías matemáticas en la Grecia Antigua	51
3.2. Construcción axiomática de las matemáticas en la época del helenismo	65

3.3. Métodos infinitesimales en la Grecia Antigua	74
3.4. Teorías y métodos matemáticos de la antigüedad avanzada	89

Capítulo 4

Desarrollo de las matemáticas elementales

4.1. Observaciones generales sobre el periodo de las matemáticas elementales	107
4.2. Sobre las matemáticas de los pueblos de Asia Central y el Medio Oriente	107
4.3. Las matemáticas en Europa en la Edad Media y en la época del Renacimiento	118
4.4. Desarrollo ulterior de las matemáticas elementales	138

Capítulo 5

Proceso de creación de las matemáticas de las variables

5.1. Comienzo del periodo de las matemáticas de las variables	153
5.2. Surgimiento de la geometría analítica	155
5.3. Acumulación de los métodos integrales y diferenciales	167
5.4. Surgimiento del análisis infinitesimal	189

Capítulo 6

Desarrollo de las partes fundamentales de las matemáticas en el siglo XVIII

6.1. Sobre las condiciones y particularidades del desarrollo de las matemáticas en el siglo XVIII	207
6.2. Transformación de los fundamentos del análisis infinitesimal	218
6.3. Desarrollo del aparato del análisis matemático	243
6.4. Creación del cálculo variacional	271
6.5. Desarrollo de la geometría	286
6.6. Creación de las premisas del álgebra moderna y de la teoría de los números	310
6.7. Desarrollo de la teoría de las probabilidades y del análisis combinatorio ..	336

Capítulo 7

Comienzo del periodo de las matemáticas modernas

7.1. Sobre el carácter del desarrollo de las matemáticas en el siglo XIX	339
7.2. Surgimiento de los conceptos fundamentales del álgebra moderna	341

7.3. Reconstrucción de los fundamentos del análisis matemático	358
7.4. Desarrollo del aparato y aplicaciones del análisis matemático	376
7.5. Creación de la teoría de las funciones de variable compleja	401
7.6. Transformación de la geometría	430

Capítulo 8

Las matemáticas en Rusia

448

Bibliografía	483
Índice alfabético de nombres	484

OBJETO Y MÉTODO DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

El estudio de la historia de la ciencia, de sus bases metodológicas constituye una parte importante de la preparación de especialistas en los centros de enseñanza superior. Es universalmente reconocido que el desconocimiento de la experiencia del desarrollo de la ciencia, la incapacidad para analizarla hace al investigador impotente ante los problemas del futuro. Estas consideraciones determinan el objetivo del presente libro: ayudar a los estudiantes de las especialidades de matemáticas de las universidades e institutos pedagógicos, así como a amplios círculos de especialistas matemáticos a asimilar desde posiciones materialistas la experiencia histórica de la ciencia en cuestión, las fuerzas motrices y vías de su desarrollo.

La primera edición del libro fue publicada por la Editorial de la Universidad Estatal de Moscú en dos tomos. En la preparación de la actual edición ambos tomos se redujeron a uno, y la estructura y exposición fueron unificadas. En el libro ha sido cuidadosamente seleccionado y brevemente analizado aquel material, sobre cuya base se reflejan más claramente las leyes de desarrollo de las matemáticas. En el texto y en la bibliografía han sido introducidos los cambios necesarios. El autor espera que las mejoras indicadas hagan el libro más útil en la tarea de formación ideológica de especialistas matemáticos y en la elevación del nivel de preparación científica.

El presente capítulo es introductorio. Su objetivo es aclarar una serie de cuestiones iniciales imprescindibles para una mejor comprensión de los problemas científicos de la Historia de las Matemáticas. La experiencia muestra que cuando la exposición comienza con el planteamiento preciso de las cuestiones de principio es más fácil formar una idea global sobre las matemáticas, su estado actual, vías de desarrollo y sobre el lugar de las matemáticas en el sistema del conocimiento científico de la humanidad. Naturalmente, la comprensión real del objeto de la Historia de las Matemáticas, como igualmente del objeto de cualquier otra ciencia, no se logra con el conocimiento de las definiciones correspondientes. Ella se complementa y se perfecciona en la medida que el contenido real del conocimiento se enriquece.

A causa del volumen limitado del libro, consideraremos un cúmulo de problemas relativamente estrecho y, debido a esto, las aclaraciones, siempre que sea posible, serán breves. Teniendo en cuenta esto, las afirmaciones que formularemos no pretenderán una argumentación exhaustiva.

1.1. El objeto de la Historia de las matemáticas

Todas las ramas de las matemáticas, por muy diferentes que ellas parezcan, están unidas por lo general de su objeto. Este objeto lo constituyen, según definición de F. Engels, las relaciones cuantitativas y las formas espaciales del mundo real. Las diferentes ciencias matemáticas tienen que ver con las formas particulares, individuales de estas relaciones cuantitativas y formas espaciales o se distinguen por la singularidad de sus métodos.

La composición de las matemáticas, como la de toda otra ciencia, es la siguiente:

- a) HECHOS, acumulados en el transcurso de su desarrollo;
- b) HIPÓTESIS, esto es, suposiciones científicas, basadas en los hechos, que se someten posteriormente a una verificación experimental;
- c) los resultados de la generalización del material real expresado, en este caso, POR TEORÍAS Y LEYES MATEMÁTICAS;
- d) la METODOLOGÍA de la matemática, esto es la interpretación teórica ge-

neral de las leyes y teorías matemáticas, las que caracterizan el enfoque general en el estudio del objeto de las matemáticas.

Todos estos elementos están interrelacionados y se encuentran en desarrollo constante. La aclaración de cómo ocurre y adónde conduce este desarrollo en un período histórico estudiado, constituye el objeto de la Historia de las Matemáticas, una de las disciplinas matemáticas. *La Historia de las matemáticas es la ciencia acerca de las leyes objetivas del desarrollo de las matemáticas.*

En correspondencia con esto, a la Historia de las Matemáticas se le encomienda la solución de un gran número de problemas. No hay posibilidad ni necesidad de enumerarlos. Es oportuno dar aquí sólo las características generales de las direcciones de las investigaciones histórico-matemáticas.

En primer lugar, en los trabajos de carácter histórico-matemático se reconstruye la riqueza del contenido real del desarrollo histórico de las matemáticas. En ellos se ilustra cómo surgieron los métodos, conceptos e ideas matemáticas, cómo se constituyeron históricamente las diferentes teorías matemáticas. Se aclaran el carácter y las singularidades del desarrollo de las matemáticas en los diferentes pueblos en períodos históricos determinados, así como los aportes introducidos en las matemáticas por los grandes científicos del pasado y ante todo por los científicos nacionales.

En segundo lugar, los trabajos histórico-matemáticos descubren las variadas relaciones de las matemáticas. Entre ellas: las relaciones de las matemáticas con las necesidades prácticas y la actividad de los hombres, con el desarrollo de otras ciencias; la influencia de la estructura económica y social de la sociedad y la lucha de clases (especialmente en la esfera ideológica) sobre el contenido y carácter del desarrollo de las matemáticas; el papel de los pueblos, de las personalidades y colectivos científicos, etc.

En tercer lugar, las investigaciones histórico-matemáticas ponen de manifiesto el condicionamiento histórico de la estructura lógica de las matemáticas modernas y la dialéctica de su desarrollo; ayudan a comprender correctamente la interrelación entre las partes de las matemáticas y hasta cierto grado su perspectiva.

Naturalmente, el estudio de la Historia de las Matemáticas puede ser fructífero sólo si las investigaciones se realizan basándose en la ciencia marxista-leninista con la aplicación del método del materialismo dialéctico y con el completo conocimiento del contenido especial de las cuestiones estudiadas. La Historia de las Matemáticas, como se deduce de la definición de su objeto dada más arriba, tiene que ver con todo el conjunto de esta ciencia, con todas las ramas de las matemáticas y con gran número de otras ciencias. Esta circunstancia recalca la dificultad de los problemas de la Historia de las Matemáticas y la singularidad de los métodos histórico-científicos de investigación.

1.2. Sobre la concepción materialista del objeto de las matemáticas

Como indicamos más arriba, las relaciones cuantitativas y las formas espaciales del mundo real constituyen el objeto de la investigación matemática.

Estos objetos de las matemáticas no representan directamente la realidad dada. Ellos son fruto de la abstracción. Para investigar con los recursos de las matemáticas cualquier objeto o fenómeno, es necesario abstraerse de todas sus cualidades particulares, excepto de aquellas que caracterizan directamente la cantidad o la forma.

En el transcurso del desarrollo de las matemáticas se consideran cada vez objetos más abstractos, incluidos en la clase de las relaciones cuantitativas y formas espaciales. En las teorías matemáticas modernas estas formas y relaciones frecuentemente se presentan de manera sumamente refinada y abstracta. En ellas se habla de conjuntos de elementos, cuyas propiedades y reglas de operación se dan con ayuda de un sistema de axiomas.

Lo abstracto del objeto de las matemáticas en ocasiones se percibe como elemento inicial e independiente de su contenido. En tales casos los elementos de los conjuntos que se investigan se representan en general como separados de los objetos del mundo real, y los sistemas de axiomas, definiciones y operaciones resultan introducidos arbitrariamente. Esto lleva a diferentes formas de equívocos idealistas, que influyen negativamente en el desarrollo de las matemáticas.

Es necesario aprender a evitar semejantes equívocos. Catalogarse a sí mismo honesta e ingenuamente materialista, basándose en la intuición, no es suficiente. V. I. Lenin escribía, que sin una base filosófica sólida, ninguna ciencia natural, ningún materialismo puede sostener una lucha contra el ataque de las ideas burguesas y el restablecimiento de la concepción burguesa del mundo.

El conocimiento de la historia de la ciencia contribuye a la elaboración de la concepción materialista del mundo en los científicos. La historia muestra que lo importante, lo determinante en el desarrollo incluso de una ciencia tan abstracta como la matemática, lo constituyen las exigencias de la realidad material. Lo abstracto del objeto de las matemáticas sólo ensombrece el surgimiento (frecuentemente complejo, multigradual, mediado) de todos los conceptos de la matemática a partir de la realidad material, pero en ningún caso lo suprime. La historia muestra que las reservas de las relaciones cuantitativas y formas espaciales estudiadas por las matemáticas, constantemente se engruesan en relación indisoluble con las exigencias de la técnica y las ciencias naturales, completando cada vez más el rico contenido de la definición general de las matemáticas. Una correcta

comprensión materialista del objeto de las matemáticas y el conocimiento de su historia es una condición necesaria para la comprensión cabal del lugar de esta ciencia en la actividad productiva y social de los hombres, es una garantía para saber encontrar su lugar en el trabajo común y comprender la relación del contenido de su trabajo con las tareas generales.

1.3. Importancia de la práctica en el desarrollo de las matemáticas

La Matemática es una de las ciencias más antiguas. Los conocimientos matemáticos fueron adquiridos por los hombres ya en las primeras etapas del desarrollo bajo la influencia, incluso de la más imperfecta actividad productiva. A medida que se iba complicando esta actividad cambió y creció el conjunto de factores que influían en el desarrollo de las matemáticas.

Desde los tiempos del surgimiento de las matemáticas como ciencia particular con su objeto propio, la mayor influencia en la formación de nuevos conceptos y métodos de las matemáticas la ejercieron las ciencias naturales exactas. Por ciencias naturales exactas entendemos el complejo de ciencias sobre la naturaleza, para las cuales en una etapa dada de su desarrollo resulta posible la aplicación de los métodos matemáticos. En el progreso de la matemática, antes que otras ciencias, influyeron la astronomía, la mecánica y la física.

La influencia directa de los problemas de las ciencias naturales exactas en el desarrollo de las matemáticas puede ser observada en el transcurso de toda su historia. Así, por ejemplo, el cálculo diferencial e integral en su forma más primitiva de cálculo de flujos surgió como el método de resolución más general en aquel tiempo de los problemas mecánicos, entre ellos los de la mecánica celeste. La teoría de los polinomios con desviación mínima del cero fue elaborada por el académico ruso P. L. Chébishev en relación con la investigación de la máquina de vapor. El método de los cuadrados mínimos surgió en relación con los grandes trabajos geodésicos, llevados a cabo bajo la dirección de K. F. Gauss. En la actualidad, por influencia directa de las exigencias de nuevas ramas de la técnica, obtienen un desarrollo impetuoso muchas ramas de las matemáticas: el análisis combinatorio, los métodos aproximados de resolución de ecuaciones diferenciales e integrales, la teoría de los grupos finitos, etc.

Ejemplos de este género pueden prolongarse ilimitadamente en relación con cualquier rama de las matemáticas. Todos ellos muestran que las matemáticas surgieron de la actividad productiva de los hombres y que los nuevos conceptos y métodos, en lo fundamental se formulaban bajo la influencia de las ciencias naturales exactas.

La aparición de las matemáticas en las ciencias naturales ocurre como

resultado de la aplicación de las teorías matemáticas existentes a problemas prácticos y de la elaboración de nuevos métodos para su resolución. La cuestión de la aplicabilidad a la práctica de una u otra teoría matemática no siempre obtiene inmediatamente solución satisfactoria. Antes de su solución transcurren frecuentemente años y decenios. En calidad de ejemplo tomemos la teoría de los grupos.

La teoría de los grupos tuvo su origen en la consideración por Lagrange de los grupos de sustituciones de las raíces de las ecuaciones algebraicas en relación con el problema de su solubilidad en radicales. E. Galois, con ayuda de la teoría de los grupos de sustituciones, dio respuesta a la cuestión sobre las condiciones de solubilidad en radicales de una ecuación algebraica de cualquier grado. Posteriormente, a mediados del siglo XIX en los trabajos de A. Cayley se formó la definición general abstracta de grupo. Más tarde, S. Lie desarrolló la teoría de los grupos continuos. Sin embargo, la aplicación práctica de la teoría de los grupos comienza a obtenerse sólo a finales del siglo XIX. En 1890 el científico ruso E. S. Fiódorov aplicó la teoría de los grupos a la cristalografía: resolvió con ayuda de esta teoría el problema de la clasificación de todas las redes espaciales cristalinas posibles. Más tarde, la teoría de los grupos se convirtió en un potente medio de investigación en la física cuántica.

A su vez, la práctica, y en particular la técnica, penetra en las matemáticas como insustituible medio auxiliar de investigación científica que cambia en mucho la faz de las matemáticas. Los dispositivos electrónicos de cálculo abrieron posibilidades ilimitadas para ampliar la clase de problemas solubles con los medios de las matemáticas y cambiaron la correlación entre los métodos para encontrar su solución exacta y aproximada. Sin embargo, por grande que sea el papel desempeñado por la técnica de cálculo, permanece invariable su carácter auxiliar. Ninguna, incluso la más perfecta, máquina computadora puede adquirir todas las propiedades de la materia pensante, el cerebro humano, y sustituirlo esencialmente.

1.4. Relación de las matemáticas con otras ciencias

El campo de aplicación de las matemáticas se amplía constantemente. A esta ampliación no es posible ponerle un límite. El crecimiento de las aplicaciones es una de las evidencias de la existencia y fortalecimiento de las relaciones de las matemáticas con otras ciencias.

Las matemáticas no sólo se desarrollan bajo la acción de otras ciencias. Ellas, a su vez, introducen en otras ciencias los métodos matemáticos de investigación. Esta circunstancia ha dado lugar a que algunos científicos extranjeros llamen a la matemática "la reina y servidora de todas las cien-

cias", acentuando así mismo la peculiaridad de la posición de las matemáticas entre las otras ciencias.

La aplicación de los métodos matemáticos en las ciencias naturales tiene dos facetas:

a) elección del problema matemático, que corresponde aproximadamente al fenómeno o proceso, o sea, del modelo, y el hallazgo del método de su solución;

b) elaboración de nuevas formas matemáticas, ya que inevitablemente resulta imperfecta la aproximación del modelo matemático construido.

La historia de las matemáticas abunda en ejemplos de búsquedas de métodos matemáticos universales, que den la posibilidad de resolver todos o la mayoría de los problemas planteados. Casi todo gran éxito de las matemáticas generó semejantes esfuerzos. Los hechos de la historia convencen de la no existencia de tal método universal y enseñan la aplicación correcta de los métodos matemáticos en correspondencia con las peculiaridades cualitativas de los fenómenos y procesos estudiados.

Los métodos matemáticos se aplican lo más plenamente en la mecánica y en la mecánica celeste, ciencias cuyo objeto en gran medida se abstrae de un conjunto de factores que determinan el fenómeno estudiado. Amplia aplicación encuentran los métodos matemáticos en la física, donde frecuentemente la mayor dificultad la presentan un correcto planteamiento del problema y la interpretación de los resultados obtenidos. Las ciencias biológicas todavía limitan notablemente la posibilidad de aplicación de los métodos matemáticos a causa de la gran peculiaridad y falta de claridad de los objetos de estudio. Los métodos matemáticos tienen ahora su menor aplicabilidad en las ciencias sociales, donde, en lo fundamental, además de los métodos elementales se utilizan los métodos probabilísticos-estadísticos.

En los últimos años se alcanzaron éxitos significativos en el desarrollo de la cibernética y de la técnica de cómputo y en la matemática discreta que le sirve a éstas de base teórica. Como consecuencia de esto, creció el papel de la matemática en la economía, sistemas de dirección, sicología y en muchos otros campos de la ciencia que tradicionalmente se consideraban situados lejos de la matemática.

Cada año se amplía el campo de aplicación de los métodos matemáticos en la ciencia y en la actividad práctica del hombre. Sin embargo, el carácter no uniforme de la penetración de la matemática en los distintos campos de la ciencia y en la práctica se mantiene invariable. Así como en todos los tiempos, el progreso en esto depende de la posibilidad de abstracción del objeto de estudio, de la elección del esquema lógico de los conceptos abstractos, que más o menos reflejan exactamente el contenido real de los procesos y fenómenos considerados.

1.5. Sobre el carácter dialéctico de las leyes del desarrollo de las matemáticas

Los estudiantes de los centros de enseñanza superior de la URSS estudian el materialismo dialéctico, la doctrina filosófica del marxismo-leninismo, que da el método para la más correcta y completa comprensión de las leyes de la realidad. La historia de la ciencia descubre en el material concreto de una ciencia dada la manifestación de las leyes generales del desarrollo y su carácter dialéctico. Bajo las condiciones de una colaboración estrecha y una actividad coordinada, en la colectividad del centro de enseñanza superior se crea una situación favorable para el trabajo simultáneo en dos direcciones:

a) para observar en el curso de las clases de matemáticas y de su historia las leyes del desarrollo dialéctico de esta ciencia;

b) para hallar en el estudio del materialismo dialéctico las formas particulares concretas de las leyes generales, dar interpretaciones, citar ejemplos y ejercicios de carácter matemático.

Las matemáticas como ciencia es una de las formas de la conciencia social de los hombres. Por esto, a pesar de la conocida singularidad cualitativa, las leyes que rigen su desarrollo, en lo fundamental, son las generales para todas las formas de la conciencia social.

Parece fuera de lugar tratar de abarcar en el presente capítulo todos o la mayor parte de los problemas que plantea el materialismo dialéctico. Nos limitaremos sólo a citar algunas consideraciones en apoyo de la tesis sobre el carácter dialéctico del desarrollo de nuestra ciencia. El desarrollo de las matemáticas no es un proceso armonioso de desarrollo continuo y gradual de las verdades matemáticas; el desarrollo en realidad transcurre en una lucha encarnizada de lo nuevo contra lo viejo. La historia de las matemáticas abunda en ejemplos, cuando esta lucha se revela particularmente fuerte, cuando lo nuevo irresistiblemente vence, a pesar de los fracasos e incluso de la muerte de los creadores de la ciencia. Citemos algunos ejemplos. La ciencia sobre la naturaleza, entre ellas las matemáticas, siempre experimentaron la oposición de los círculos de orientación religiosa. Esta oposición fue a veces tan fuerte que significativamente dificultó y contuvo el crecimiento de la ciencia. La ciencia le debe mucho al heroísmo de científicos conocidos e ignorados de los tiempos del Imperio Romano y la Edad Media, que hicieron avanzar la ciencia a precio de su propia vida.

En el siglo XVII el análisis infinitesimal, cuando apenas aparecía en los trabajos de Leibniz y Newton y sus seguidores, fue sometido a una encarnizada crítica, cuyo tono dio el conocido obispo Berkeley. La lucha alrededor de los conceptos fundamentales del análisis matemático, en particular

alrededor del concepto de límite, ocurre en el transcurso de toda la historia de esta disciplina científica. Esta lucha no se calmó como se acostumbraba pensar, con el surgimiento de los trabajos de Cauchy en el primer tercio del siglo XIX, sino que se intensificó con nueva fuerza. La construcción de los fundamentos del análisis sobre la base de la teoría de límites recibió el reconocimiento sólo en el mismo final del siglo pasado.

Los fundamentos de la geometría no euclidiana se conocieron desde el año 1826, gracias a los trabajos del genial científico ruso N.I. Lobachevsky. Sin embargo el reconocimiento y posterior desarrollo, esta ciencia la logró hacia finales del siglo XIX después de una larga lucha. En esencia, las ya creadas geometrías no euclidianas pudieron desarrollarse sólo, cuando después del surgimiento de la teoría de la relatividad se convirtieron en parte de los fundamentos matemáticos de las investigaciones físicas sobre la naturaleza real del continuo espacio-tiempo.

Los métodos geométricos de investigación de espacios abstractos de dimensión finita e infinita, que se utilizan en la expresión de los procesos en espacios de fases, resultaron necesarios en física. También en nuestro tiempo en todas las ramas de la matemática continúa la lucha de las tendencias progresistas y reaccionarias.

1.6. Los períodos más importantes en la historia de las matemáticas

En la historia de las matemáticas pueden distinguirse períodos aislados, diferenciados uno del otro por una serie de particularidades características. La periodización es necesaria para poder orientarse con mayor facilidad en toda la riqueza de hechos que presenta el desarrollo histórico de las matemáticas. Existen muchos intentos de periodización de la historia de las matemáticas. La periodización se efectúa por países, por formaciones socio-económicas, por descubrimientos relevantes, los cuales determinaron hasta cierto punto el carácter del desarrollo de las matemáticas, etc. Las discusiones sobre las periodizaciones son interminables. Sin embargo, según nuestro criterio, el papel de las periodizaciones es puramente auxiliar y se determina por las necesidades del objetivo fundamental: el descubrimiento de las leyes del desarrollo objetivo de las matemáticas.

En el presente libro nos atenemos a la periodización establecida por A.N. Kolmogórov. Esta periodización nos parece la más exacta puesto que en su fundamento se acentúa el contenido de las matemáticas: sus principales métodos, ideas y resultados. En la historia de las matemáticas A.N. Kolmogórov diferencia los siguientes períodos:

a) NACIMIENTO DE LAS MATEMÁTICAS. Este período se prolonga hasta los siglos VI—V antes de nuestra era, esto es, hasta el momento cuando las matemá-

ticas se convierten en una ciencia independiente que tiene un objeto y métodos propios. El comienzo del período se pierde en la profundidad de la historia de la civilización primitiva. Es característica para este período la acumulación del material efectivo de las matemáticas en los límites de una ciencia general indivisible.

b) EL PERÍODO DE LAS MATEMÁTICAS ELEMENTALES se prolonga desde los siglos VI—V antes de nuestra era hasta el siglo XVI de nuestra era inclusive. En este período fueron obtenidos logros en el estudio de las magnitudes constantes. Una cierta representación sobre estos logros la pueden dar las matemáticas que se estudian actualmente en la escuela media. Este período culmina cuando los procesos y los movimientos se hacen objeto principal de los problemas matemáticos y comienza a desarrollarse la geometría analítica y el análisis infinitesimal. El concepto matemático elemental es discutible y en el presente no existe una definición universal reconocida, sin embargo, la separación en el tiempo de tal período está completamente justificada.

c) PERÍODO DE FORMACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS DE MAGNITUDES VARIABLES. El comienzo de este período está representado por la introducción de las magnitudes variables en la geometría analítica de Descartes y la creación del cálculo diferencial e integral en los trabajos de I. Newton y G.V. Leibniz. El final de este período se sitúa a mediados del siglo XIX cuando en las matemáticas ocurrieron los cambios que la llevaron a su estado actual. En el transcurso de este período impetuoso y rico en acontecimientos se formaron casi todas las disciplinas científicas conocidas actualmente como los fundamentos clásicos de las matemáticas contemporáneas.

d) PERÍODO DE LAS MATEMÁTICAS CONTEMPORÁNEAS. Es evidente que el concepto de contemporaneidad en las matemáticas constantemente se desplaza. Probablemente entre el período de la creación de las matemáticas de magnitudes variables y la actualidad ya se puede señalar un nuevo período (o períodos). En los trabajos histórico-matemáticos esto aún no se ha hecho, aunque la necesidad de ello, según nuestra opinión, ya es imperiosa. En los siglos XIX y XX el volumen de las formas espaciales y relaciones cuantitativas, abarcadas por los métodos de las matemáticas han aumentado desmesuradamente. Han aparecido muchas teorías matemáticas nuevas, han aumentado en forma nunca vista las aplicaciones de las matemáticas. El contenido del objeto de las matemáticas se ha enriquecido en tal forma, que esto ha llevado a una reestructuración y cambio de la totalidad de sus problemas más importantes.

Junto a otros problemas primordiales, un significado poco usual adquirió el problema de los fundamentos de las matemáticas. Por fundamentos de las matemáticas se entiende el sistema de problemas y teorías históricas, lógicas y filosóficas de las mismas. En particular, se trata de una re-

consideración crítica del sistema de axiomas de las matemáticas y de la totalidad de los métodos lógicos de demostraciones matemáticas. Esta reconsideración crítica tiene el objetivo de construir un riguroso sistema de fundamentos de las matemáticas, que corresponda a la experiencia de avanzada acumulada por el pensamiento humano. Esto último, es decir, la experiencia acumulada por el pensamiento matemático de la humanidad, lo estudia la historia de las matemáticas.

1.7. El papel de la historia de las matemáticas en el sistema de preparación de especialistas-matemáticos

La práctica nos enseña que todo el orden lógico de cualquier ciencia, su estructura, interrelación e incluso la existencia de ramas independientes no constituyen algo inmutable. Ellas son fruto del desarrollo histórico. Además de esto, el mismo desarrollo lógico de las ideas sobre una ciencia no es otra cosa que el reflejo del proceso histórico en forma consecuente, abstracta y teórica.

La existencia de esta particularidad del desarrollo de la ciencia, los clásicos del marxismo la demostraron en ejemplos concretos de una serie de ciencias sociales y naturales, entre ellas las matemáticas. K. Marx, por ejemplo, en sus manuscritos matemáticos se acercó a la solución del problema de la fundamentación del cálculo diferencial, mostrando las raíces matemático-elementales de este cálculo, el prototipo de sus conceptos y las formas no desarrolladas de sus nacientes métodos. Uno de los elementos que caracterizan el comienzo de la madurez científica es la tendencia a abarcar la ciencia estudiada en su totalidad, comprender la estructura lógica e interrelación de disciplinas matemáticas aisladas, la tendencia a completar el conocimiento de los hechos científicos estudiados con el conocimiento de las leyes del desarrollo de la ciencia, y en lo posible, de sus perspectivas.

Darse cuenta de la inseparabilidad de lo lógico y lo histórico requiere en matemática el conocimiento de los hechos fundamentales de la historia de las matemáticas y de los trabajos clásicos, la comprensión de las leyes del desarrollo de las ciencias matemáticas y del carácter histórico de la correspondencia entre las disciplinas matemáticas particulares. Esta exigencia es provocada y apoyada además por el ejemplo de los principales científicos matemáticos. Su actividad en ramas concretas de las matemáticas, como regla, se conjuga con investigaciones de problemas históricos.

En calidad de ejemplo puede citarse el artículo de A.N. Kolmogórov "Matemática" en el tomo 26 de la Gran Enciclopedia Soviética, donde el mismo objeto de las matemáticas se considera en un plano histórico. Muchos científicos soviéticos han publicado valiosas investigaciones sobre

historia de las matemáticas: P.S. Alexándrov, A.D. Alexándrov, B.V. Gnedenko, V.V. Gólubev, A.I. Markushévich y otros. En esencia no hay ningún científico que trabaje creadoramente, el cual no se dedique a la historia de su ciencia.

En el extranjero se le dedica gran atención a la historia de las matemáticas. A ella está dedicado un conjunto de libros y artículos. No todo en ellos, por supuesto, es fidedigno. A veces los autores de obras sobre historia de la ciencia subordinan su trabajo a fines ajenos a la objetividad y al carácter científico.

Es necesario poder diferenciar tales obras, en las cuales la historia de la ciencia se expone de manera deformada, y juzgar sobre ellas acertadamente. Es necesario saber diferenciar, por ejemplo, entre las diversas formas de negación de las leyes objetivas del desarrollo de la ciencia en general, entre ellas las matemáticas, su orientación idealista y reaccionaria, comprender los métodos de descrédito de las tendencias científicas progresistas y de las actividades de los científicos progresistas. Es necesario aprender a luchar contra todo tipo de tales fenómenos. La lucha entre las fuerzas progresistas y reaccionarias en la ciencia matemática, que es una de las formas de la lucha de clases, se revela en forma más intensa en las cuestiones históricas y filosóficas de las matemáticas. Aquí está la línea de avanzada de uno de los sectores de la lucha por el progreso, por la ciencia necesaria a la nueva sociedad. De esta forma, el estudio de la historia de las matemáticas se nos presenta como una parte importantísima de la preparación de los especialistas-matemáticos, necesaria para una correcta comprensión de la esencia de la ciencia dada y para una elección correcta de la orientación y formas de su actividad individual.

La experiencia, en particular la experiencia de la Universidad de Moscú demuestra que, la enseñanza de la historia de la ciencia, sus fundamentos metodológicos no pueden ser dejados a la espontaneidad. Ella debe estar bien organizada como parte de la educación ideológica del estudiantado y de los trabajadores científicos.

PROCESO DE FORMACIÓN DE LAS REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS

2.1. Surgimiento de los primeros conceptos y métodos matemáticos

El proceso de formación de los conceptos matemáticos y de los procedimientos regulares de solución de determinadas clases de problemas elementales abarca un gran intervalo de tiempo. Su comienzo probablemente data de tiempos remotos, cuando el hombre pasó a utilizar instrumentos para la obtención de medios de subsistencia y posteriormente, al intercambio de los productos del trabajo. Este periodo concluye con el surgimiento de formas cualitativamente nuevas del pensamiento matemático, esto es, cuando el conjunto de estos conceptos y métodos y su contenido se hicieron lo suficientemente ricos para constituir sistemas lógicamente relacionados, es decir, formas primarias de teorías matemáticas. Estas últimas surgen en las matemáticas alrededor de los siglos VI—V a. n. e.

Los testimonios materiales, por los que se puede estudiarse este periodo, el más antiguo en la historia de las matemáticas, son escasos e incompletos. El investigador está obligado a valerse de hechos de la historia general de la cultura de la humanidad, fundamentalmente de materiales arqueológicos y de la historia del lenguaje. La historia de las matemáticas en el periodo de su surgimiento es prácticamente inseparable de toda la historia de la humanidad.

Las formas y vías del desarrollo de los conocimientos matemáticos en los diferentes pueblos son muy diversas. Sin embargo, a pesar de las diferentes vías de desarrollo, es común para todos los pueblos que todos los conceptos básicos de las matemáticas: el concepto de número, figura, área, prolongación infinita de la serie natural, etc., surgieron de la práctica y atravesaron un largo periodo de perfeccionamiento.

Por ejemplo, el concepto de número surgió como consecuencia de la necesidad práctica de contar los objetos. Inicialmente se contaba con ayuda de los medios disponibles: dedos, piedras, conos de abetos, etc. Huellas de esto se han conservado en las denominaciones de los cálculos matemáticos: por ejemplo, *calculus* en su traducción del latín significa *cuenta con piedras*. La reserva de números en las primeras etapas era muy limitada. La serie de los números naturales conocidos y utilizados era finita y se fue extendiendo sólo gradualmente. La conciencia de la prolongación ilimitada de la serie natural constituye un síntoma de alto nivel de conocimientos y cultura.

Junto a la utilización de más y más números surgieron y se desarrollaron sus símbolos, y los propios números formaron sistemas. Para los primeros periodos de la historia de la cultura material es característica la diversidad de sistemas numéricos. Gradualmente se perfeccionaron y unificaron los sistemas de numeración. El sistema posicional de numeración decimal, utilizado actualmente en todos los países, es el resultado de un largo proceso de desarrollo histórico. A él le precedieron:

1. Los diferentes sistemas jeroglíficos no posicionales. En cada uno de ellos se construye el sistema de los denominados números claves (los más frecuentes 1, 10, 100, 1000, ...). Cada uno de tales números tiene un símbolo individual, un jeroglífico. Los restantes números (ellos se denominan algorítmicos) se forman añadiendo a uno u otro lado del número central otros números centrales y repitiéndolos. Ejemplos de tales sistemas lo constituyen el egipcio, fenicio, palmireno, cretense, sirio, ático, chino antiguo, indio antiguo, azteca y romano. Este último tiene un sistema de números claves: I, V, X, L, C, D, M, construido según un criterio decimal con notable influencia del sistema de base cinco.

2. Sistemas de numeración alfabéticas. En estos sistemas las letras del alfabeto, tomadas de 9 en 9, se utilizan para la designación respectiva de las unidades, decenas, centenas. A cada letra se le da un signo diferenciador, que indica que ella se utiliza como número. En el caso que las letras del alfabeto sean insuficientes se valen de letras y signos adicionales. Ejemplo típico de sistema alfabético es el griego-jónico (la escritura más antigua que se conserva hecha en este sistema data del siglo V (a. n. e):

										$\xi \quad \eta \quad \theta$								
										(digamma)								
										1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	\omicron	π	ρ	(coppa)									
10	20	30	40	50	60	70	80	90										
σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϵ	(sampi)										
100	200	300	400	500	600	700	800	900										

La escritura de los números según este sistema resulta clara del ejemplo: $\nu\mu\delta = 444$. Para escribir números mayores que mil, es necesario complicar los símbolos, por ejemplo, $\alpha = 1000$, $\beta = 2000$, etc.

Los sistemas alfabéticos son más cómodos debido a la brevedad de su escritura, sin embargo, ellos son poco útiles para las operaciones con números grandes y exigen grandes esfuerzos para recordarlos. Ejemplos de sistemas alfabéticos, además del expuesto, lo constituyen el eslavo antiguo (cirílico y glagolítico), el hebreo, árabe, georgiano, armenio y otros.

3. Sistemas posicionales no decimales y luego sistema decimal. A los sistemas posicionales no decimales pertenecen el babilonio, indio (las tribus mayas de la península de Yucatán), hindú, binario actual.

La escritura en el sistema decimal posicional con el cero apareció por primera vez aproximadamente en el año 500 a. n. e. en la India.

Como resultado del largo desarrollo histórico de la actividad diaria práctica de los hombres se formaron otros conceptos matemáticos: área, volumen, y otras propiedades espaciales abstractas de los objetos.

La acumulación de conocimientos, tanto de carácter numérico-aritmético, como geométrico creó las siguientes premisas para la formación de teorías matemáticas:

a) la posibilidad de sustituir las operaciones directas con los objetos por su representación y denominación esquemática simplificada (símbolos). En etapas posteriores, esto llevó al desarrollo de los sistemas numéricos y de las construcciones geométricas;

b) La posibilidad de sustituir un problema concreto por un problema canónico de tipo más general, que se resuelve por leyes determinadas y que abarca un conjunto entero de casos particulares. Se trata de las formas primarias de creación de algoritmos generales y de cálculos matemáticos relacionados con ellas.

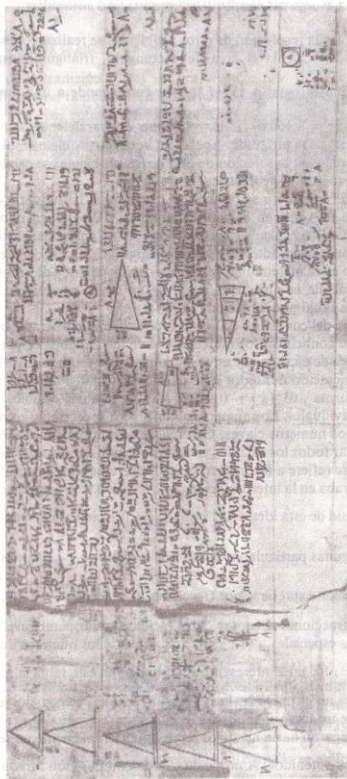
Cuando las premisas indicadas actúan en gran escala y en la sociedad se forma una capa de individuos, que pueden utilizar una determinada colección de métodos matemáticos, entonces surgen las bases para hablar del inicio de la existencia de la matemática como ciencia, de la presencia de sus elementos.

Consideremos concretamente los estadios primitivos de la formación de las matemáticas en el ejemplo de los monumentos que se conservan de la cultura matemática de los antiguos egipcios, babilonios, chinos e hindúes.

2.2. Las matemáticas del Egipto Antiguo

Nuestros conocimientos sobre las matemáticas del Egipto Antiguo están basados principalmente en dos grandes papiros de carácter matemático y en algunos fragmentos pequeños. Uno de los grandes papiros se denomina el papiro matemático de Rhind (por el nombre del científico que lo descubrió) y se encuentra en Londres. Tiene aproximadamente 5,5 m de largo y 0,32 m de ancho. El otro gran papiro de casi la misma longitud y 8 cm de ancho, se encuentra en Moscú. La información matemática contenida en ellos data aproximadamente del año 2000 a. n. e.

El papiro de Rhind constituye una colección de 84 problemas de carác-



Papiro de Rhind (Museo Británico; fotocopia de las hojas X, XI, XIII, XIX, XVI).

ter aplicado. Para la resolución de estos problemas se realizan operaciones con fracciones, se calcula el área del rectángulo, triángulo, trapecio y círculo (la última es igual a $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$, que corresponde a una aproximación grosera de $\pi = 3,1605 \dots$), los volúmenes del paralelepípedo, cilindro y las dimensiones de la pirámide. Aparecen, además, problemas sobre división proporcional y en la solución de uno de los problemas se encuentra la suma de una progresión geométrica.

En el papiro moscovita se recogen 25 problemas. La mayoría de ellos son del mismo tipo que en el papiro de Rhind. Además en uno de los problemas (Nº 14) se calcula correctamente el volumen de la pirámide truncada con base cuadrada. En otro problema (Nº 10) está contenido el primer ejemplo en la matemática de determinación del área de una superficie curva: se calcula la superficie lateral de un cesto, esto es, un semicilindro de altura igual al diámetro de la base.

En el estudio del contenido de los papiros matemáticos se advierte el siguiente nivel de conocimientos matemáticos de los antiguos egipcios.

Para la época de escritura de estos documentos ya estaba constituido un sistema de numeración definido: el jeroglífico-decimal. Para los números claves de la forma 10^k ($k = 0, 1, 2, \dots, 7$) estaban establecidos los jeroglíficos individuales. Los números algorítmicos se escribían como combinaciones de los números claves. Con ayuda de este sistema, los egipcios lograban realizar todos los cálculos en los que se utilizan los números enteros. En lo que se refiere a fracciones, los egipcios crearon un aparato especial que se apoyaba en la interpretación de la fracción sólo como parte de la unidad. En virtud de esta idea se utilizaban sólo fracciones alícuotas (de la forma $\frac{1}{n}$) y algunas particulares, como por ejemplo, $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$. Todos los re-

sultados que debían expresarse por fracciones de la forma $\frac{m}{n}$ se expresaban como suma de fracciones alícuotas. Para facilitar estas operaciones se conformaron tablas especiales, por ejemplo, la tabla de los números de la forma $\frac{2}{n}$ ($n = 3, \dots, 101$). Es interesante advertir que en esta tabla la selección de los sumandos no es unívoca. Las tablas, al parecer, se constituyeron en el transcurso de un largo tiempo, perfeccionándose gradualmente y en la forma en que llegaron hasta nosotros representan simplemente un resumen de los resultados obtenidos. A propósito, la descomposición "trivial" $\frac{2}{n} =$

$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ nunca se encuentra, probablemente por su evidencia o por la estabilidad de la tradición.

Se formaron también determinados métodos de operaciones matemáticas con números enteros y fracciones. Común a toda la técnica del cálculo egipcio es su carácter aditivo, por el cual todos los procedimientos, en lo posible, se reducen a la suma. Conjuntamente con la comprensión primitiva de fracción sólo como parte de la unidad, esta singularidad condicionó el carácter particular de los cálculos.

En la multiplicación, por ejemplo, preferentemente se utiliza el método de duplicación paso a paso de uno de los factores y de la suma de los productos parciales convenientes (señalados con asterisco).

(12 · 12)	1	12
		2 24
	*	4 48
	*	8 96
En total		144

$$\left(\frac{2}{3} \frac{1}{5} \frac{1}{30} \cdot 10\right)$$

1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{30}$
* 2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{10} \frac{1}{30}$
4	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$
* 8	7	$\frac{1}{5}$	

En total 8 $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{30}$ ó 9.

En la división también se utiliza el procedimiento de duplicación y operación sucesiva por la mitad. La división, al parecer, era la más difícil operación matemática para los egipcios. Aquí se observa la mayor diversidad de métodos.

Así, a veces en calidad de operación intermedia se aplicaba el hallazgo de dos tercios o de una décima parte del número y así sucesivamente:

$$\begin{array}{r}
 (19:8) \quad \begin{array}{r} 1 \quad 8 \\ * 2 \quad 16 \\ \hline 1 \\ \frac{1}{2} \quad 4 \\ * 1 \quad 2 \\ \hline 4 \\ * 1 \\ \hline 8 \end{array} \quad (16:3) \quad \begin{array}{r} * 1 \quad 3 \\ 2 \quad 6 \\ \hline * 4 \quad 12 \\ \frac{2}{3} \quad 2 \\ * 1 \quad 1 \\ \hline * 1 \\ \hline 3 \end{array} \quad (4:15) \quad \begin{array}{r} 1 \quad 15 \\ \frac{1}{10} \quad \frac{1}{2} \\ \hline * 1 \quad 3 \\ \hline * 1 \quad 1 \\ \hline 15 \end{array}
 \end{array}$$

esto es, $19:8 = 2 \frac{1}{4} \frac{1}{8}$, o sea, $16:3 = 5 \frac{1}{3}$ esto es, $4:15 = \frac{1}{5} \frac{1}{15}$.

Además de estos ejemplos mostraremos también un ejemplo de uno de los problemas: "Grasa. Producción de un año 10 b. ¿Cuál es la producción anual? Transforma 10 b en r. Esto será 3200. Transforma años en días. Esto será 365. Divide 3200 entre 365. Esto es $8 \frac{2}{3} \frac{1}{10} \frac{1}{2190}$. Transforma. Es-

to es $\frac{1}{10} \frac{2}{3} \frac{1}{2190} \frac{1}{64}$ b y $8 \frac{2}{3} \frac{1}{10} \frac{1}{2190}$ r. Divide como se hace".

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 365 \quad \frac{2}{3} \quad 243 \frac{1}{3} \\
 2 \quad 730 \quad \frac{1}{10} \quad 36 \frac{1}{2} \\
 4 \quad 1460 \quad \frac{1}{2190} \quad \frac{1}{6} \\
 8 \quad 2920
 \end{array}$$

En total $8 \frac{2}{3} \frac{1}{10} \frac{1}{2190}$.

En la columna izquierda sucesivamente se escoge el cociente. Primer resultado: 8 da la diferencia entre el dividendo real y parcial: $3200 - 2920 = 280$. El factor $\frac{2}{3}$ da: $365 \cdot \frac{2}{3} = 243 \frac{1}{3}$. Todavía hasta 280 falta $36 \frac{2}{3}$. La elección consecutiva $\frac{1}{10}$ da ya la diferencia en $\frac{1}{6}$ (ya que $36 \frac{2}{3} - 36 \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$).

Queda sólo elegir el número que siendo multiplicado por 365 dé $\frac{1}{6}$. Esto es, $\frac{1}{2190}$.

De esta forma, el cociente se busca con una elección sucesiva para la cual aún no hay un método único.

Frecuentemente se encuentra la operación, denominada xay (montón), que corresponde a la solución de una ecuación lineal de la forma

$$ax + bx + \dots + cx = \alpha.$$

En la suma de fracciones que tienen diferentes denominadores los egipcios utilizaban la multiplicación de éstas por números auxiliares. El método de selección de estos números auxiliares no da, sin embargo, el derecho a juzgar sobre este método como un proceso uniforme, una manera adecuada de reducir las fracciones a un denominador común. Las reconstrucciones históricas son aún en mucho discutibles y no se confirman con una cantidad suficiente de hechos.

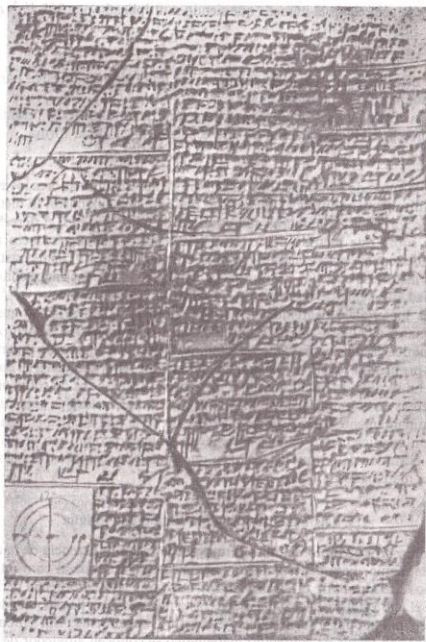
Los materiales, contenidos en los papiros, permiten afirmar que 20 siglos antes de nuestra era en Egipto comenzaron a formarse elementos de matemática como ciencia. Estos elementos apenas comenzaban a separarse de los problemas prácticos y estaban enteramente subordinados a su contenido. La técnica de cálculo era aún primitiva, los métodos de solución de problemas no eran uniformes. Sin embargo, los materiales que permitirían determinantemente juzgar sobre el desarrollo de la matemática en Egipto, aún son insuficientes. Por esto sólo hemos utilizado como uno de los posibles ejemplos de en qué época y en qué forma comienza a formarse la ciencia matemática.

2.3. Las matemáticas de la Babilonia Antigua

Como otro ejemplo del mismo tipo puede servir la herencia de la antigua Babilonia. Esta denominación usualmente se extiende al conjunto de Estados situados entre el Tigris y el Eufrates y que existieron en el período desde el año 2000 hasta el 200 a. n. e. Hasta nosotros han llegado alrededor de cien mil tablillas de arcilla con escritura cuneiforme. Sin embargo, tablillas con textos de contenido matemático se conocen alrededor de 50 y tablas matemáticas sin texto, cerca de 200.

El sistema babilonio de símbolos matemáticos tiene dos elementos fundamentales: la caña ∇ con el valor numérico de 1 y el gancho \llcorner con el valor numérico 10. Con la repetición de estos símbolos pueden escribirse los números desde el 1 hasta el 59.

Cualquier número se escribe de izquierda a derecha según el principio



Texto cuneiforme de la Babilonia Antigua VM 85 194. La parte de la tabla representada contiene 16 problemas con soluciones. Los problemas están relacionados con presas, terraplenes, pozos, relojes de agua y trabajos agrícolas. El cuatro problema, provisto de un gráfico, está relacionado con un pozo circular. El problema 14 considera un cono truncado. Su volumen se determina multiplicando la altura por la semisuma de las áreas de las bases superior e inferior.

$N = \alpha_0 60^0 + \alpha_1 60^1 + \alpha_2 60^2 + \dots$ De esta forma el sistema de numeración resulta posicional sexagesimal. No obstante, este sistema no tiene cero, y un mismo símbolo "cuña" puede designar no sólo la unidad, sino también un número de la forma $60 \cdot k$ (k es un número natural). Diferenciar los números en tal sistema (se denomina no absoluto) puede ser sólo partiendo de las condiciones del problema.

El contenido de las tablillas muestra que sobre la base de este sistema fueron creadas muchas reglas uniformes de las operaciones aritméticas, tanto con números enteros como con fracciones. Para facilitar las operaciones existían tablas de multiplicación (desde $1 \cdot 1$ hasta $60 \cdot 60$). Para la multiplicación de números grandes con ayuda de las tablas de multiplicar se hallaban los productos parciales, los cuales después se sumaban. La división se realizaba con ayuda de las tablas de los valores inversos (ya que

$$b : a = b \cdot \frac{1}{a}.$$

Además de las tablas indicadas los babilonios utilizaban la tabla de los cuadrados de los números enteros, sus cubos, tablas de inversión (tablas de raíces cuadradas), tablas de los números de la forma $n^2 + n^2$, etc. En una serie de textos babilonios están contenidos cálculos de tantos por ciento de las deudas, división proporcional. Se tienen, además, una serie de textos dedicados a la solución de problemas los cuales desde el punto de vista moderno se reducen a ecuaciones de primero y segundo grado e incluso de tercero.

B.L. Van der Waerden en su libro "Science Awakening" clasificó todos los métodos de solución de los problemas en las tablillas babilonias. Llegó a la conclusión de que estos métodos eran equivalentes a los métodos de solución de los siguientes diez tipos de ecuaciones y sus sistemas:

a) ecuaciones con una incógnita: $ax = b$; $x^2 = a$; $x^2 \pm ax = b$; $x^3 = a$; $x^2(x + 1) = a$

b) sistemas de ecuaciones con dos incógnitas: $x \pm y = a$; $xy = b$; $x \pm y = a$; $x^2 + y^2 = b$.

Además de esto los babilonios conocían: la suma de las progresiones aritméticas; sumas de la forma

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1;$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}n\right) \sum_{k=1}^n k.$$

Finalmente, en el año 1954 Neugebauer y Saks publicaron el descifre de una tablilla sumamente interesante que se conserva en la biblioteca de la Universidad de Columbia (E.E.UU.). En ella aparecen enumerados los triángulos rectángulos con lados racionales, o sea, los *trios* de números pitagóricos $x^2 + y^2 = z^2$. La reconstrucción del método de su elección conduce, aparentemente, a las fórmulas: $x = p^2 - q^2$; $y = 2pq$; $z = p^2 + q^2$, conocidas en la teoría de números como diofánticas.

Los conocimientos geométricos de los babilonios, por lo visto, superaban a los egipcios, ya que en los textos junto a los tipos generales de problemas se encontraban rudimentos de medición de ángulos y relaciones trigonométricas. En lo fundamental, además, ellos también contenían cálculos de áreas y volúmenes de figuras rectilíneas, comunes para la geometría elemental. El área del círculo se calculaba según la fórmula $S = \frac{c^2}{12}$ (c es la

longitud de la circunferencia), de donde se obtiene una aproximación todavía mala: $\pi = 3$. Poseían también métodos de cálculo aproximado de volúmenes basados en la mediación original de las dimensiones (ver fig. 1). Por ejemplo, el volumen de una pirámide truncada no regular se calcula según la fórmula

$$V = \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a_1+b_1}{2} \right) \cdot \frac{h+h_1}{2}$$

La atención de una serie de investigadores está dedicada a la gran algoritmización, que se revela en los textos matemáticos de la Babilonia Antigua. Esto dio lugar a la opinión de que en aquellos tiempos se cultivaban

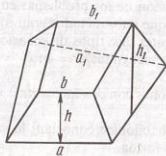


Fig. 1

métodos generales, que se abstraían de los problemas concretos y que representaban un álgebra singular (Neugebauer, Vogel). Sin embargo existen también apreciaciones más cuidadosas de los logros matemáticos de los babilonios.

Las tradiciones matemáticas de los babilonios se extendieron fuera de

los límites de los estados del Medio Oriente y pueden ser halladas incluso en la época del helenismo (alrededor de los años 330—30 a. n. e.).

Así, hacia mediados del primer milenio a. n. e. en una serie de países de la cuenca del Mar Mediterráneo se formaron tales condiciones, que la matemática pudo ser interpretada como una ciencia autónoma; fueron extraídos, como objetos independientes del pensamiento humano, sus conceptos y proposiciones fundamentales, y la forma de esta extracción resultó suficientemente general y abstracta para introducir demostraciones lógicas. Esta fase siguiente del desarrollo de la matemática con mayor fuerza se determinó en la Grecia Antigua hacia los siglos VI—V a. n. e.

Los ejemplos propuestos muestran como en diferentes países transcurrió el proceso de acumulación de un gran material matemático concreto en forma de métodos de operaciones aritméticas, métodos de definición de áreas y volúmenes, métodos de solución de algunas clases de problemas, tablas auxiliares, etc. Aproximadamente un proceso similar de acumulación de conocimientos matemáticos ocurrió en la China y la India.

2.4. Las matemáticas de la China Antigua

El desarrollo de los conocimientos científicos en China tiene una rica historia de muchos siglos; ha sido también establecido el desarrollo original y temprano de la matemática china. Sin embargo, hasta el momento no ha sido superada la disparidad y pobreza de información científica fidedigna sobre los conocimientos matemáticos de los chinos en la antigüedad.

Según afirmación del matemático historiador chino Ling Wang, los conocimientos matemáticos de los chinos se remontan al siglo XIV a. n. e. En la historia de las matemáticas de la China Antigua se tienen noticias sobre el sistema decimal de cálculo, una simbólica especial de números en jeroglíficos, sobre operaciones con números grandes, la existencia de dispositivos auxiliares de cálculo (hatos de nudos, tableros de cálculo), sobre operaciones con regla, compás y escuadra, etc.

La primera obra matemática, si no se considera el tratado sobre Chou Pei (horas solares), es La Matemática en nueve libros, a veces llamada "La Matemática en nueve capítulos" o apartados. Esta obra apareció como un resumen original de los logros matemáticos de China hacia comienzos de nuestra era. Hay noticias de que fue compuesto por el insigne hombre de estado y científico Chuan Tsanom (en el año 152 a. n. e.), que coleccionó y sistematizó todos los conocimientos matemáticos conocidos hasta su época. "La Matemática en nueve libros" sufrió modificaciones y adiciones en múltiples ocasiones: en el siglo I a. n. e. (Hen Chou-Chan), en el siglo III de n. e. (Liu Hui), en el siglo VI (Chen Luang), en el siglo VII (Li Chung-Fan) y otros.

Como resultado de estas reelaboraciones “La Matemática en nueve libros” tomó la forma de una original enciclopedia matemática con contenido relativamente heterogéneo. En los siglos VII—X de n. e. se constituyó en texto fundamental para los que ingresaban al servicio del Estado y en una obra clásica en la cual se basaban los científicos matemáticos para sus investigaciones. Su texto fue conocido en la URSS hace relativamente poco; en el año 1957 E.I. Berezkina hizo la primera traducción al ruso de “La Matemática en nueve libros”, con comentarios detallados.

Los libros que componen esta obra tienen la forma de pergaminos independientes. Ellos están dedicados a diferentes temas fundamentalmente de carácter práctico. La diferencia está determinada, al parecer, porque los diferentes libros se destinaban a funcionarios de diferentes departamentos: agrimensores, ingenieros, astrónomos, recaudadores de impuestos, etc. Los últimos suplementos fueron introducidos en el libro según el criterio de unidad temática y no de generalidad matemática. La exposición es dogmática: se formulan las condiciones del problema (en total 246 problemas) y se dan las respuestas a ellas. Después de un grupo de problemas de un mismo tipo se formula el algoritmo de su resolución. Este algoritmo consta bien de la formulación general de la regla, o bien de indicaciones de las operaciones sucesivas con números concretos. Las deducciones de estas reglas, explicaciones, definiciones, demostraciones no aparecen. El libro I se denomina “Medición de Campos”. La unidad de medida es el rectángulo de lados 15 y 16 bu (es decir, de pasos aproximadamente iguales a 133 cm). Las áreas de figuras rectilíneas se calculan correctamente. En el cálculo del área del círculo, el sector y el anillo se toma $\pi = 3$. El área del segmento circular se calcula como el área del trapecio, la base mayor del cual coincide con la base del segmento y la base menor y la altura son iguales a la altura del segmento.

El sistema de numeración utilizado en el libro es el decimal jeroglífico. Los números se dividen en clases con cuatro categorías en cada una. Un signo especial para el cero, en tal sistema, evidentemente no es necesario. El cero, realmente, surge considerablemente más tarde, sólo en el siglo XII y fue, por lo visto, tomado de la matemática de la India. Para dar mayor generalidad al planteamiento del problema general sobre la medición del área, en el primer libro han introducido las fracciones simples y las operaciones aritméticas con ellas. Las reglas de las operaciones son las habituales: lo singular es solo que en la división de fracciones se exige la previa reducción de estas a un común denominador.

El valor $\pi = 3$ usado en el primer libro por lo visto se conserva de tiempos muy remotos. Los matemáticos chinos de esta época podían calcular más exactamente el valor de π . Por ejemplo en el siglo I de n. e. en las obras de Lin Sing encontramos $\pi = 3,1547$, en el siglo II n. e. en los traba-

jos de Chisan Hen $\pi = \sqrt{10}$ (Chuan Hen consideraba que el cuadrado de la longitud de la circunferencia está en la relación de 5:8 con el cuadrado del perímetro del cuadrado circunscrito). En el siglo III de n. e. calculando los lados de los polígonos inscritos Liu Hui encontró que $\pi = 3,14$. El partió de la suposición que el área del círculo se aproxima por defecto por las áreas de los polígonos inscritos. Para la aproximación por exceso al área de estos polígonos se adicionan las áreas de los rectángulos circunscritos en torno a los segmentos restantes. De donde $S_{2n} < S_p < S_n + 2(S_{2n} - S_n)$. Llegando hasta el polígono de 192 lados, Liu Hui obtuvo (con $R = 10$): $S_{96} = 313 \frac{584}{625}$ y $S_{192} = 314 \frac{64}{625}$, de donde concluyó que $\pi = 3,14$. Algunos autores afirman que Liu Hui continuó sus cálculos hasta el polígono de 3072 lados y obtuvo $\pi = 3,14159$. En el siglo V de n. e. Tsu Chung-Chih (430—501), como aclara Wei Shi (año 643), dio para π dos valores de las fracciones convenientes: $\frac{22}{7}$ y $\frac{385}{113}$, y la estimación del valor de π hasta la séptima cifra: $3,1415926 < \pi < 3,1415927$.

El libro 2 “Relación entre las diferentes formas de cereales” refleja la práctica antigua de cobro de impuestos sobre el grano, medido en unidades de volumen, y de cálculos durante la elaboración de este grano. Los problemas matemáticos que surgen debido a esto, son los problemas de regla de tres y división proporcional. Al segundo libro le fue posteriormente añadido un grupo de problemas sobre la determinación del costo de los objetos, el número de los cuales puede ser tanto entero como fraccionario.

Los problemas sobre división proporcional, división proporcional a los valores inversos de los números, y también la regla de tres simple y compuesta constituyen el contenido también del siguiente, el tercero, libro de “División escalonada”. Las reglas de sumación de progresiones aritméticas no aparecen aquí todavía; ellas se encuentran, por lo visto, por primera vez en el tratado matemático de Chang Tsiu Tsen (siglo VI).

En el cuarto libro “Shao-Huan” al principio se trata de la determinación del lado del rectángulo dados los valores del área y el otro lado. Después se exponen las reglas de extracción de raíces cuadradas y cúbicas, el hallazgo del radio del círculo dada su área. Las reglas están formuladas especialmente para el tablero de cálculo, el número subradical se divide en categorías correspondientes a 2 ó 3 signos, después sucesivamente se selecciona el valor siguiente de la raíz y se da la regla de reconstrucción de las varillas del tablero de cálculo. En la resolución de problemas relacionados con el cálculo de elementos del círculo o la esfera se toma $\pi = 3$. Solamente en el último problema, donde $V_{\text{esfera}} = 1644 \ 866 \ 437 \ 500$ chi y

contrar el diámetro según la fórmula $d = \sqrt[3]{\frac{16}{9} V}$, se ha tomado $\pi = \frac{27}{8}$ ($d = 143\ 000$ chi).

En el libro 5 "Estimación de los trabajos" se recopilan problemas relacionados con los cálculos para la construcción de paredes fortificadas, murallas, diques, torres, fosos, y otras obras. Para esto se calculan tanto los volúmenes de diferentes cuerpos, como las exigencias de fuerza de trabajo, materiales y medios de transporte bajo diferentes condiciones.

El libro 6 "Distribución proporcional" comienza con un grupo de problemas sobre una justa (proporcional) distribución de los impuestos. Los métodos matemáticos son aquí los mismos que en el libro 3, donde se trataba de la distribución de los ingresos entre los funcionarios de diferentes clases, esto es, la división proporcional, la regla de tres simple y compuesta. Además en el sexto libro se encuentra una serie de problemas sobre la sumación de algunas progresiones aritméticas y problemas sobre el trabajo colectivo con diferente productividad.

"Exceso-defecto", así se llama el libro séptimo. En él se recogen problemas que conducen a ecuaciones lineales y sus sistemas, y se elabora el método de sus resoluciones, que coincide con el método de las dos situaciones erróneas. Los problemas, también en este caso se presentan en orden creciente de dificultad. El método tampoco está formulado en forma precisa y tiene muchas variedades de carácter particular. Mostremos ejemplos.

En el problema N° 18 se afirma que 9 lingotes de oro pesan tanto como 11 lingotes de plata. Si se intercambian los lingotes de uno en uno, entonces el peso del oro y la plata se diferenciarán en 13 lan (16 lan son iguales a 1 tzin). El problema de la determinación de los pesos de los lingotes se reduce a la solución del sistema de ecuaciones:

$$9x = 11y; \quad 8x + y + 13 = 10y + x$$

la cual se resuelve con ayuda de la regla de las dos situaciones erróneas.

Precisamente, se toma $x_1 = 3$ tzin y $x_2 = 2$ tzin. Entonces $y_1 = 2 \frac{5}{11}$ tzin,

$y_2 = 1 \frac{7}{11}$ tzin. La sustitución de estos valores en la segunda ecuación (en la cual todos los miembros están trasladados a un solo lado, supongamos que el izquierdo) da respectivamente el defecto: $z_1 = -\frac{49}{11 \cdot 16}$ tzin y el exceso

$$z_2 = \pm \frac{15}{11 \cdot 16} \text{ tzin.}$$

El verdadero valor de x se encuentra por la regla

$$x = \frac{x_1 z_2 - x_2 z_1}{z_2 - z_1}$$

y es igual a $2 \frac{15}{64}$ tzin. Por tanto $y = \frac{9}{11} x = 1 \frac{53}{64}$ tzin.

En el problema N° 16 se indica que del jasje (peso específico = a) y de la piedra (peso específico $b = a - 1$) se construye un cubo, el peso total del cual P_0 y el volumen V_0 son conocidos. Los pesos P_1 y P_2 y los volúmenes V_1 y V_2 correspondientes al jasje y la piedra se hallan del sistema:

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 &= V_0 \\ aV_1 + bV_2 &= P_0 \end{aligned}$$

el cual se resuelve por la sustitución de los dos valores $V_1 = V_0$ y $V_2 = V_0$.

El perfeccionamiento hecho al séptimo libro consiste en la regla de resolución del sistema de ecuaciones lineales y su generalización a sistemas con mayor número de incógnitas expuesto en la regla "fan-chen", a la que está dedicado todo el libro 8. Los problemas de este libro conducen a un sistema de cinco ecuaciones lineales con raíces positivas. Para todos los sistemas se establece un algoritmo único de cálculo de las raíces en el mencionado "fan-chen" que consiste en lo siguiente.

Sea dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2, \\ \dots & \dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned}$$

En correspondencia con el método chino de escritura (de derecha a izquierda por columnas de arriba hacia abajo) se forma la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{11} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & a_{12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{1n} \\ b_n & \dots & b_2 & b_1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se transforma de tal modo que todos los números a la izquierda y arriba de la diagonal principal de los coeficientes sean cero.

$$\begin{array}{l} 0 \dots\dots\dots 0 \ a_{11} \\ 0 \dots\dots\dots a'_{22} \ a_{12} \\ \dots\dots\dots \\ a'_{nn} \dots\dots\dots a'_{2n} \ a_{1n} \\ b'_n \dots\dots\dots b'_2 \ b_1 \end{array}$$

La transformación conduce a la vía usual para la teoría de los determinantes, pero para esto se opera sólo con las columnas; las columnas y filas de las matrices aquí aún no gozan de iguales derechos. La matriz transformada con los ceros corresponde a un sistema escalonado de ecuaciones:

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a'_{22} x_2 + \dots + a'_{2n} x_n = b'_2 \\ \dots\dots\dots a'_{nn} x_n = b'_n \end{array}$$

de donde sucesivamente se determinan las raíces del sistema de ecuaciones.

En el proceso de transformación de la matriz del sistema los científicos chinos introdujeron los números negativos. Para su adición y sustracción fue introducida una regla especial "cheng-fu", la cual puede traducirse como regla "más-menos". Puesto que todos los cálculos, entre ellos la transformación de matrices, se realizaban en el tablero de cálculo, para la designación de los números negativos se utilizaban palillos de cálculo de otro color o forma, y en el caso de escritura se utilizaban jeroglíficos de diferente color.

La extensión del concepto de número, que notamos antes, es una particularidad característica del desarrollo de las matemáticas. Esta misma tendencia de dar generalidad a la solución en radicales de las ecuaciones de segundo al cuarto grado en el siglo XVI condujo en Italia a la introducción de los números imaginarios. En cuanto a la prioridad de los matemáticos chinos en relación a la regla "fan-chen", esto es indiscutible. Es suficiente indicar que en Europa la idea de la creación de un determinante semejante fue emitida por primera vez solo por Leibniz a finales del siglo XVII. Los números negativos en forma explícita aparecieron algo antes, a finales del siglo XV en las obras de N. Chuquet.

La base práctica del último libro de "La Matemática en nueve libros" la constituyen los problemas de la determinación de distancias y alturas no accesibles con ayuda del teorema de Pitágoras y las propiedades de los triángulos semejantes. Matemáticamente, este libro es particularmente interesante por la formulación algebraica general de las reglas. Aparte de los métodos elementales de aplicación del teorema de Pitágoras en ella se en-

cuentra el método de búsqueda de las ternas pitagóricas, esto es, las soluciones en números enteros de la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$:

$$x = \alpha\beta, \quad y = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}, \quad z = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}.$$

Algunos problemas conducen a una ecuación cuadrática completa y las reglas de su solución son equivalentes a las fórmulas de uso común actualmente.

Por ejemplo, el problema N° 11 sobre las dimensiones de una puerta conocida la diagonal y la diferencia entre la longitud y el ancho se reduce a dos ecuaciones: $x^2 + y^2 = c^2$; $y - x = k$ o a una ecuación cuadrática completa $2x^2 + 2kx + k^2 - c^2 = 0$. La regla formulada en el texto, si se escribe simbólicamente, es

$$x_{1,2} = \sqrt{\frac{c^2 - 2\frac{k^2}{2}}{2}} \pm \frac{k}{2}.$$

Deducciones y demostraciones, como ya se dijo, en este tratado no aparecen. E.I. Berezkina, al parecer correctamente, supone que las reglas fueron obtenidas mediante el siguiente método elemental: sea

$$x_{1,2} = z \pm \frac{k}{2},$$

entonces

$$x_1^2 + x_2^2 = 2z^2 = 2\left(\frac{k}{2}\right)^2 = c^2,$$

de donde

$$z = \sqrt{\frac{c^2 - 2\left(\frac{k}{2}\right)^2}{2}}.$$

Nos detuvimos detalladamente en el examen del contenido de "La Matemática en nueve libros" ya que esta obra es la más significativa y, quizá, el único gran monumento de las matemáticas de la China Antigua, que tiene además carácter enciclopédico. Ella demuestra que en el transcurso de muchos siglos la matemática de China se desarrolló preferentemente con una orientación de cálculo-algorítmica y creó los elementos esenciales del camino algebraico para la resolución de los problemas.

Las causas de que la matemática de China (y como veremos más adelante también de la India) adquiriera tales particularidades, radica en las condiciones socio-económicas de la vida de la sociedad. Las condiciones fueron tales que estos Estados, en calidad de una de sus funciones fundamentales, estuvieron obligados a tomar para sí la organización de los trabajos sociales en las ramas de la irrigación, transporte y obras defensivas.

Las preocupaciones constantes sobre el calendario y sobre la comunidad y el rigor de las instituciones religiosas acrecentaron esta orientación de los trabajos científicos. La opresión feudal y la presión de la religión determinaron el carácter lento y estancado del desarrollo de todas las ciencias, entre ellas de las matemáticas.

La orientación de cálculo algorítmico fue conservada por la matemática china también en el período siguiente, incluso hasta mediados del siglo XIV. Los mayores éxitos fueron nuevamente alcanzados en las ramas del álgebra y de los métodos de cálculos aritméticos. Después de la resolución de ecuaciones cuadráticas encontramos en las obras de Wang Shao Tung en el siglo VII la reducción de problemas a ecuaciones cúbicas. En un triángulo

rectángulo se dan: el producto de los catetos $xy = P = 706 \frac{1}{50}$ y la diferencia entre la hipotenusa y uno de los catetos $\sqrt{x^2 + y^2} - x = Q = 36 \frac{9}{10}$. Se quiere encontrar los lados del triángulo. Wang Shao Tung para

resolver la ecuación $x^3 + \frac{Q}{2}x^2 - \frac{P^2}{2Q} = 0$ se refiere (como algo comúnmente conocido) al método que se utiliza para la extracción de raíces.

Referencias a este método aparecen también en "La Matemática en Nueve libros" y en libros matemáticos posteriores. Pero una aclaración detallada del método se encuentra sólo en el manuscrito del matemático del siglo XIII Chin Kin Shao conocido por haber introducido el título ya tradicional de "Las nueve partes de la matemática".

La esencia de este método, el cual obtuvo en la matemática china la denominación de método "del elemento celeste" (así denominaban a la incógnita) consiste en lo siguiente. Es necesario resolver la ecuación $P_n(x) = 0$; para precisar tomar $P_n(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. La primera cifra p de la raíz se busca por selección. Se realiza la sustitución $x = y + p$. Se obtiene la ecuación auxiliar:

$$\varphi(y) = A_4y^4 + A_3y^3 + A_2y^2 + A_1y + A_0.$$

La sucesión de operaciones para hallar los coeficientes de esta ecuación auxiliar puede ser expresada por el esquema:

$$\begin{array}{r} + a_4 \cdot a_3 \quad a_2 \quad a_1 \quad a_0 \\ \hline a_4p \quad a_3'p \quad a_2'p \quad a_1'p \\ + a_4 \quad a_3' \quad a_2' \quad a_1' \quad a_0' = A_0 \\ \hline a_4p \quad a_3''p \quad a_2''p \\ + a_4 \quad a_3'' \quad a_2'' \quad a_1'' = A_1 \\ \hline a_4p \quad a_3'''p \\ + a_4 \quad a_3''' \quad a_2''' = A_2 \\ \hline a_4p \end{array}$$

$$a_4 = A_4 \quad a_3''' = A_3$$

De nuevo, por el método de selección se encuentra la primera cifra de la raíz de la ecuación auxiliar $\varphi(x) = 0$; o, lo que es lo mismo, la segunda cifra de la raíz de la ecuación $P_n(x) = 0$. Supongamos que ésta sea q . La sustitución $y = z + q$ conduce a la ecuación $\psi(z) = 0$, los coeficientes de la cual se encuentran nuevamente por el esquema antes indicado, etc.

Chin Kin Shao demuestra este método en el ejemplo de la ecuación $-x^4 + 763200x^2 - 40642560000 = 0$, cuya raíz es $x = 840$. Este mismo método sin variaciones se aplica a la extracción de raíces de cualquier orden. Para esto se resuelve la ecuación $x^n - a = 0$. De esta manera, por ejemplo, se hallan $\sqrt[3]{17576}$, $\sqrt[4]{1336336}$, etc.

El método del elemento celeste ha sido un gran logro, con el cual se culminó el desarrollo del álgebra en China en la edad media. Los matemáticos chinos lo utilizaban con gran arte. Por ejemplo, alrededor del año 1300 Chou Shi Hié encontró mediante este método raíces no sólo enteras, sino también racionales. Por ejemplo, en la ecuación $576x^4 - 2640x^3 + 1729x^2 + 3960x - 1695252 = 0$ él elige la parte entera de la raíz igual a 8, realiza la sustitución $x = y + 8$ y obtiene $576y^4 + 15792y^3 + 159553y^2 + 704392y - 545300 = 0$. Después, para reducir a la unidad el coeficiente de la potencia mayor de la incógnita, hace la sustitución $y = \frac{z}{576}$ y determinando en la nueva ecuación que $z = 384$, concluye que $y = \frac{384}{576} = \frac{2}{3}$ y por consiguiente, $x = 8 \frac{2}{3}$.

El método del elemento celeste, por su esencia matemática, es equivalente al método de Ruffini—Horner, descubierto en Europa en los albores del siglo XIX.

Junto a los problemas aritmético-algebraicos, en China se desarrollaron elementos de combinatoria; fue hallado el triángulo de los coeficientes del binomio, conocidos actualmente como triángulo de Pascal. Por lo visto, como una generalización de los problemas de la aritmética surgieron los problemas teórico-numéricos. Ejemplos típicos de tales problemas se encuentran en las obras de Sun Tzi (siglo III de n. e.) que resolvió el problema del hallazgo de los números, los cuales divididos por 3, 5, 7 dan respectivamente restos 2, 3, 2. Este es un problema de resolución de un sistema lineal de congruencias con módulos simples entre sí de dos en dos:

$$x \equiv r_1 \pmod{q_1},$$

$$x \equiv r_2 \pmod{q_2}, \quad (r_1 = 2; r_2 = 3; r_3 = 2; q_1 = 3; q_2 = 5; q_3 = 7)$$

$$x \equiv r_3 \pmod{q_3}.$$

Sun Tzi encuentra los números auxiliares N_1, N_2, N_3 para los cuales:

$$N_1 q_2 q_3 \equiv 1 \pmod{q_1}, \quad 35N_1 \equiv 1 \pmod{3}, \quad 2N_1 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$N_2 q_1 q_3 \equiv 1 \pmod{q_2}, \quad \text{esto es, } 21N_2 \equiv 1 \pmod{5}, \quad \text{o, } N_2 \equiv 1 \pmod{5}$$

$$N_3 q_1 q_2 \equiv 1 \pmod{q_3}, \quad 15N_3 \equiv 1 \pmod{7}, \quad N_3 \equiv 1 \pmod{7}$$

Entonces:

$$N_1 = 2; N_2 = 1; N_3 = 1; N_1 q_2 q_3 = 70; N_2 q_1 q_3 = 21; N_3 q_1 q_2 = 15;$$

$$x \equiv (N_1 q_2 q_3 + N_2 q_1 q_3 + N_3 q_1 q_2) \pmod{q_1 q_2 q_3};$$

$$x \equiv (140 + 63 + 30) \pmod{105}; \quad x \equiv 233 \pmod{105}; \quad x = 233 - 105t.$$

El menor valor de x será 23 para $t = 2$.

Problemas análogos fueron resueltos también en tiempos más recientes. Así, Chin Kin Shao (siglo XIII) resolvió el problema que se reducía al siguiente sistema de congruencias:

$$x \equiv 32 \pmod{83},$$

$$x \equiv 70 \pmod{110},$$

$$x \equiv 32 \pmod{135}.$$

El enfoque práctico de los problemas de geometría que se observan en "La Matemática en nueve libros" se conservó en la matemática china en el transcurso de todo el período de tiempo considerado. En la herencia geométrica de la China antigua y medieval un lugar destacado ocupa la obra de Lin Hui (siglo III de n. e.) "La Matemática de la isla del Mar" que tenía inicialmente carácter de comentario y complemento a la última parte de "La Matemática en nueve libros". En su forma definitiva entran en "La Matemática de la isla del mar" problemas sobre la determinación de las di-

mensiones de objetos inaccesibles y de las distancias hasta ellos. Se resuelven, principalmente, por la aplicación del teorema de Pitágoras o la semejanza de triángulos. En la China no se advierten tentativas de una construcción sistemática deductiva.

Todas las fuentes conocidas afirman que desde el siglo XIV en China comienza un largo período de estancamiento en el desarrollo de las ciencias. Los conocimientos alcanzados antes no se desarrollan e incluso se olvidan; la matemática se desarrolla preferentemente a costa de la asimilación de conocimientos foráneos. En el año 1583 en China penetró el jesuita misionero M. Ricci, detrás del cual invadió a China un ejército entero de eclesiásticos y monjes. Al parecer, es con su colaboración que en el año 1606 en China por primera vez se editan "Los Elementos" de Euclides, en el año 1650 las tablas de logaritmos de Vlack. El desarrollo original de la ciencia china, bajo la presión de los colonizadores y de las formas feudales de gobierno que se conservaban, se interrumpió. Los especialistas matemáticos chinos se preparaban para la actividad científica en el extranjero y en su mayoría allí mismo trabajaban.

La Matemática en China recibió un nuevo estímulo para el desarrollo sólo en el siglo XX bajo la influencia del movimiento popular de liberación y después de la revolución popular. En el año 1928 en Nankin fue organizada la Academia Central de Investigación Científica, entre cuyos 13 institutos estaba el Instituto de Matemáticas. Los científicos reunidos en este instituto trabajaban en muchas direcciones simultáneamente. Obtuvieron resultados en las ramas de las series de Fourier, en la teoría analítica de los números, topología, geometría diferencial, teoría de probabilidades y estadística matemática, álgebra y teoría de los grupos finitos.

Después del año 1949 en China comenzó un rápido desarrollo de las matemáticas en colaboración estrecha con los matemáticos de la URSS. Especialmente estrecha fue la cooperación en las ramas de la teoría analítica de los números donde Hua Lo-Ken y otros llevaron a cabo trabajos mediante la aplicación del método de sumas trigonométricas, hallado por el académico I.M. Vinogradov. Los trabajos de Chen Tzian-Guan y Van Fu-Chun son afines a los trabajos de D.E. Menshov, sobre series ortogonales. Las investigaciones de Su Bo-Tsin y otros están relacionadas con los trabajos de los matemáticos soviéticos de la escuela de C.P. Finíkov sobre complejos lineales. Incluso en teoría de probabilidades, donde ejercieron una influencia particularmente fuerte los matemáticos ingleses y americanos se manifestó la proximidad a los especialistas soviéticos de la escuela de A.N. Kolmogórov. La colaboración de los matemáticos chinos con los colegas soviéticos siempre fue productiva, los enriqueció en el sentido científico y coadyuvó al desarrollo de una concepción del mundo progresista y a logros prácticos en las aplicaciones de las matemáticas.

2.5. Las matemáticas de la India Antigua

En la matemática antigua y medieval de los pueblos de la India hay mucho de común con la matemática china. En la India la matemática también es una ciencia muy antigua, la cual desde antaño formó parte de la cultura. En ella también predominaron los métodos de cálculo-algorítmico y estuvieron ausentes las tentativas de construcción de un sistema deductivo; la geometría de los hindúes es también práctica.

Esta generalidad del carácter de la ciencia y las vías de su desarrollo no son casuales y reflejan la convergencia de las vías de desarrollo histórico de estos dos grandes países y las antiguas relaciones económicas y culturales entre ellos. En la India, hacia el comienzo de nuestra era, ya estaba constituido un sistema feudal desarrollado de organización de la sociedad. La prolongada conservación de las relaciones feudales se acrecentaba por la separación en castas de los grupos sociales de la población que determinó, a pesar del, a veces violento, curso de los acontecimientos políticos, el ritmo tan lento del desarrollo de la producción y la ciencia.

Los colonizadores ingleses, franceses y portugueses en el transcurso de siglos frenaron forzadamente el natural desarrollo de la producción, la ciencia y la cultura del pueblo hindú. Sólo en nuestro tiempo transcurre un proceso de liberación nacional y elevación de las fuerzas productivas de la India.

Los más antiguos monumentos de la cultura matemática de los hindúes, los constituyen los libros religiosos: Suttas y Vedas. Su procedencia se sitúa hacia los siglos VIII—VII antes de n. e. Están escritos en el sánscrito, lengua antigua muerta ya hace mucho tiempo. En ellos encontramos construcciones geométricas que constituyen parte importante de los rituales en la construcción de obras para el culto: templos, altares, etc. En ellos pueden encontrarse los primeros métodos de cuadratura de círculos, aplicación del teorema de Pitágoras. Al parecer, como consecuencia de las exigencias de la arquitectura resolvieron también el problema aritmético sobre el hallazgo de las ternas pitagóricas de números naturales.

El sistema numérico desde tiempos remotos se determinó como decimal. Igualmente temprano se definió la inclinación hacia las operaciones con números grandes que encontró su reflejo en las leyendas. Buda, por ejemplo, se distinguía por su fenomenal capacidad para calcular; él construyó un sistema decimal de numeración hasta 10^{54} , dando denominación a cada clase. Los novios de la hermosa diosa de la tierra, pretendiendo su mano, estaban obligados a competir en la escritura, la aritmética, la lucha y el tiro con arco. El vencedor de la competencia Sarvatasida encontró, en particular, una escala de números, en progresión geométrica con razón $\frac{1}{100}$

hasta $107+9\cdot 46$, esto es, hasta el número con 421 ceros. La afición por las operaciones con grandes números se conservó en el transcurso de toda la historia de las matemáticas en la India.

El más brillante período de desarrollo, el cual dejó los más significativos ejemplos de literatura matemática, fueron los siglos V—XII de n. e. En esta época trabajaron los eminentes científicos indios, matemáticos y astrónomos: Aryabhata (finales del siglo V), Brahmagupta (nace en el año 598), Mahavira (siglo IX), Bhaskara Akaria (nace en el año 1114).

De Aryabhata, que vivió en el noroeste de la India, quedaron sus obras en versos de contenido matemático y astronómico. En ellas están formuladas las reglas de la matemática elemental: la aritmética, la geometría y la trigonometría. Brahmagupta, también en forma de versos escribió una obra enorme en 20 libros "La ciencia perfeccionada de Brahma", cuyo libro 12 está dedicado a la aritmética y la geometría y el libro 18 al álgebra y las ecuaciones indeterminadas. Un notable contenido matemático tienen los dos libros de Bhaskara "Lilavati" y "Vijaganita".

El "Lilavati" (lo que significa "hermosa") Bhaskara lo dedicó a su hija. En forma poética en las 13 partes del libro se exponen: 1) metrología; 2) operaciones con números enteros y fracciones, y extracción de raíces; 3) método de conversión, método de la situación errónea y otros métodos particulares de resolución de problemas; 4) problemas de estanques y mezclas; 5) sumación de series; 6) planimetría; 7—11) cálculo de diferentes volúmenes; 12) problemas de análisis indeterminado; 13) problemas de combinatoria.

La otra obra de Bhaskara "Vijaganita" está constituida por ocho partes: 1) operaciones con números positivos y negativos; 2—3) ecuaciones indeterminadas de 1° y 2° grados; 4) ecuaciones lineales algebraicas; 5) ecuaciones cuadráticas; 6) sistema de ecuaciones lineales; 7—8) ecuaciones indeterminadas de 2° grado.

No nos proponemos como objetivo el describir todas las fuentes, méritos y papel jugado por individuos en particular. Nuestro objetivo es la valoración del nivel de los logros de los matemáticos de la India, las singularidades de la forma y los métodos de investigación matemática y la vía del desarrollo de la matemática hindú. Por esto aquí daremos sólo las características generales.

Como ya se dijo, la particularidad principal de la matemática india es el predominio de los métodos de cálculo, los que se presentaban a los estudiantes o lectores en forma dogmática. Entre las reglas aritméticas llama la atención la gran difusión de la regla de inversión, la cual consiste en lo siguiente: se piensa un número, pero al estudiante o contrario sólo se le comunica la sucesión de operaciones con el número pensado y el resultado final. La resolución del problema consiste en realizar sucesivamente todas

las operaciones en orden inverso. Por ejemplo, en la obra de Bhaskara "Lilavati" ante una beldad desconocida se presenta el siguiente problema; decir el número, el cual, multiplicado por tres, se aumenta después en tres cuartas del producto, se divide entre 7, se disminuye el cociente en $\frac{1}{3}$, se multiplica por sí mismo y se disminuye en 52, después de extraerle la raíz cuadrada, añadirle 8 y dividirlo entre 10, da 2. Entre las otras reglas de la técnica de cálculo de los hindúes está la regla de extracción de la raíz cuadrada y operaciones con irracionales.

Las operaciones con números grandes (en calidad de otro ejemplo más expongamos el problema de la determinación del número de términos de una progresión geométrica, si $a_1 = 3$, $q = 5$, $S = 22\ 888\ 183\ 593$), además de la elaboración de un sistema único de numeración decimal con cero y una simbólica numérica condujo a la introducción en la matemática de la idea sobre números infinitamente grandes. Bhaskara introdujo esta idea considerando la expresión de la forma $\frac{a}{0}$ y aclarando que este es también un número, pero que no sufre cambios de incremento o disminución, cualquiera que sea el número que le adicionemos o que le sustraigamos; según expresión de Bhaskara, se le puede comparar con el tiempo eterno de la cadena infinita de las existencias.

Los matemáticos hindúes introdujeron y trataron correctamente el concepto de número negativo. Así Brahmagupta aclara que los números pueden tratarse o como pertenencias o como deudas. Las reglas de operaciones con los números, entonces, son las siguientes: la suma de dos pertenencias es una pertenencia, de dos deudas, una deuda, de una pertenencia y una deuda, su diferencia, y si son iguales es cero. La suma del cero y una deuda es una deuda, de una pertenencia y el cero, una pertenencia. El producto de dos pertenencias o dos deudas es una pertenencia; el resultado del producto de una pertenencia por una deuda representa una pérdida. Esta misma regla es válida también en la división. El cuadrado de una pertenencia o deuda es una pertenencia; la pertenencia tiene dos raíces: una constituye una ganancia y la otra una deuda. La raíz de una pérdida no existe, ya que tal no puede ser un cuadrado. Sin embargo, introduciendo los números negativos, los matemáticos hindúes no los utilizaban como elementos equitativos de la matemática, considerándolos sólo como algo del género de las posibilidades lógicas, ya que, según expresión de Bhaskara, las personas no están de acuerdo con ellos.

Además de las reglas y problemas de la aritmética en la matemática hindú fueron introducidas también las soluciones de una serie de problemas de álgebra, de análisis indeterminado, problemas de combinatoria. Con el álgebra están relacionadas en primer término las reglas de resolución de

ecuaciones lineales de sus sistemas, y de ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, Aryabhata formula el siguiente problema: un capital de 100 (lo designaremos por p) se da a interés. El incremento de un mes ($=x$) se da de nuevo a interés durante 6 ($=t$) meses. El incremento total es de 16 ($=q$). ¿Cuál es el incremento mensual?

La ecuación correspondiente $tx^2 + px + qp$ Aryabhata, por supuesto, no la escribe, pero la regla dada por él para la resolución de este problema no es otra que la regla general para la ecuación cuadrática. En efecto, él da la siguiente prescripción: multiplica la suma del incremento y del incremento del incremento (o sea q) por el tiempo (t) y el capital (p), añade el cuadrado de la mitad del capital $\frac{p^2}{4}$, extrae la raíz cuadrada, luego resta la mitad del capital y divide la diferencia por el tiempo. La fórmula que corresponde, evidentemente será:

$$x = \frac{\sqrt{qpt = \frac{p^2}{4} - \frac{p}{2}}}{t}$$

El desarrollo de métodos de resolución de problemas de análisis indeterminado o diofántico constituye uno de los mayores logros de las matemáticas hindúes. El surgimiento de semejantes métodos es un fenómeno común para todas las culturas matemáticas antiguas. La causa de que los matemáticos de la India, Grecia, China y otros países se interesaran por la solución de semejantes problemas yace, por lo visto, en la necesidad del estudio de fenómenos que se repiten periódicamente, como, por ejemplo, en astronomía.

En efecto, la cuestión sobre un período de tiempo que consta simultáneamente de un número entero de días (x) y un número entero de años (y) conduce a una ecuación indeterminada: $10960y = 30x$. Otras cuestiones, por ejemplo, sobre el período de repetición de algunos fenómenos, conducen a una ecuación indeterminada completa. Los científicos hindúes sabían encontrar las soluciones enteras de diferentes tipos de ecuaciones indeterminadas de 1^{ro} y 2^{do} grados.

Nosotros ya mencionamos la forma característica de la exposición durante la cual no se reproduce ni los pasos del razonamiento ni la demostración, lo que no da la posibilidad de juzgar sobre los métodos teórico-numéricos de los matemáticos hindúes. Sin embargo, lo poco que se conoce muestra la presencia de una serie de métodos teórico-numéricos. Por ejemplo, se conoce que las raíces de la ecuación indeterminada de 1^{er} grado

$ax - by = c$ se obtienen multiplicando por c las raíces de la ecuación $ax - by = 1$.

Sea

$$a \geq b; \quad a = bq + r; \quad qx + \frac{r}{b}x - y = \frac{1}{b};$$

$$y = qx + \frac{2x - 1}{b} = qx + z$$

Para que la solución y sea entera es necesario que z sea entero, esto es, el problema se reduce a la resolución de la ecuación $rx - bz = 1$, los coeficientes de la cual son menores que los coeficientes de la ecuación dada ($r < b, b < a$), y la forma de la ecuación no cambia.

Continuando esta operación, nosotros en un número finito de pasos llegaremos hasta la ecuación $u = r_n, v = 1$. Retornando a la ecuación original, expresamos x e y a través de v . Este método, posiblemente, fue encontrado por analogía con el procedimiento de la búsqueda del máximo común divisor o con el algoritmo de las fracciones continuas.

Expongamos un ejemplo más de resolución de ecuaciones indeterminadas. La ecuación $xy = ax + by + c$ se transformaba a la forma $(x - b)(y - a) = c + ab$ con ayuda de la siguiente interpretación geométrica. El área del rectángulo completo trazado es $S = xy$. El área rayada, es igual a $ax + by - ab$. La parte restante no rayada del rectángulo es $S_1 = (x - b)(y - a)$ (fig. 2) y a la vez $S_1 = xy - ax - by + ab = c + ab$

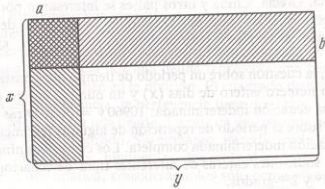


Fig. 2

(según la condición), $(x - b)(y - a) = c + ab$. Después de esto, la parte derecha se representa en la forma del producto de dos factores enteros.

En calidad de un ejemplo más consideremos el método cíclico de Bhaskara para la resolución de ecuaciones de la forma $y^2 = ax^2 + 1$. Inicial-

mente por ensayo se eligen los números x_1, y_1, b_1 para que satisfagan la ecuación $ax_1^2 + b_1 + y_1^2 = 1$, además, que x_1 y b_1 sean primos entre sí, y b_1 sea el menor posible. Esto puede hacerse aunque sea poniendo $\frac{y_1}{x_1} \approx \sqrt{a}$. Ahora

se forma $\frac{x_1 z + y_1}{b_1} = x_2$, esto es, $x_1 z + y_1 = b_1 x_2$. De ella se obtienen valores enteros de x_2 y z eligiéndolos de tal modo que $z^2 - a$ sea lo menor posible. Entonces $\frac{z^2 - a}{b_1} = b_2$ es entero y $x_1 z + b_2$, igual al cuadrado del

número y_2^2 , esto es, $ax_2^2 + b_2 = y_2^2$. Repitiendo se obtiene una sucesión decreciente de números enteros: $b_1, b_2, \dots, 1$ y finalmente $ax_k^2 + 1 = y_k^2$. Por supuesto, la demostración no se dio; por vez primera fue encontrada por Lagrange. El nombre de Pell fue adjudicado a esta última ecuación en el siglo XVIII simplemente por equivocación.

Las soluciones racionales de la ecuación de Pell los científicos hindúes la obtienen de la siguiente forma: para los arbitrarios x_1, y_1 y x_2, y_2 y los correspondientes b_1 y b_2 formaban las ecuaciones:

$$ax_1^2 y_1^2 = b_1; \quad b_1 = (x_1 \sqrt{a} - y_1)(x_1 \sqrt{a} + y_1);$$

$$ax_2^2 - y_2^2 = b_2; \quad b_2 = (x_2 \sqrt{a} - y_2)(x_2 \sqrt{a} + y_2);$$

$$b_1 b_2 = (ax_1 x_2 \pm y_1 y_2)^2 - a(x_1 y_2 \pm x_2 y_1)^2;$$

Suponiendo que es conocida la raíz $x_0, y_0: ax_0^2 - y_0^2 = b$, de la expresión para $b_1 b_2$ obtenían $x = 2x_0 y_0; y = ax_0^2 + y_0^2$ o

$$a(2x_0 y_0)^2 + b^2 = (ax_0^2 + y_0^2)^2 \text{ o } a \left(\frac{2x_0 y_0}{b} \right)^2 + 1 = \left(\frac{ax_0^2 + y_0^2}{b} \right)^2$$

Por último, en las matemáticas hindúes se refieren a las ramas del álgebra y la teoría de los números, las cuestiones sobre combinatoria elemen-

tal, el conocimiento de las sumas $\sum_{k=1}^n k$ y $\sum_{k=1}^n k^2$, el triángulo de Pascal y

otros conocimientos.

La geometría hindú tiene todos los rasgos de una ciencia aplicada. Hay dibujos, hay reglas, a veces incluso no hay reglas, bajo los dibujos está escrito sólo: "¡mira!". Cierto interés tienen las tablas trigonométricas en las cuales las cuerdas se sustituyen por semicuerdas. Al mismo tiempo se consideran en esencia las funciones trigonométricas: seno, coseno y senoverso (sen vers $\alpha = 1 - \cos \alpha$).

En la historia de la India se encuentran suficientes hechos que ponen en evidencia la existencia de relaciones políticas y económicas con los estados griegos, egipcios, árabes y con China. En matemáticas se considera indistinguible la procedencia hindú del sistema de numeración decimal con el cero y las reglas de cálculo. Se puede observar como los hindúes tomaron de los griegos algunas cuestiones geométricas, etc. Pero la cantidad de estos hechos no es grande. La cuestión sobre las relaciones y mutuas influencias de las matemáticas de la India, Grecia, China y los países árabes aún no está suficientemente clara.

En conclusión, nuevamente advertimos que disponemos de una cantidad de información muy limitada en relación con las matemáticas en China y la India. O bien desaparecieron, o bien aún no han sido encontrados muchos testimonios materiales del surgimiento y recopilación de conocimientos matemáticos como parte de las culturas antiguas. Además de la influencia destructora del tiempo, de esto son culpables los colonizadores, los cuales destruyeron pueblos enteros. Donde esto último resultó imposible, como en China y en la India, todos los esfuerzos fueron dedicados a falsificar la historia, para exaltar los méritos de los "civilizadores" capitalistas, como si estos fueran portadores de la luz a los pueblos "ignorantes". En forma más velada estas tendencias están expresadas en las teorías sobre una fuente científica única, sobre la propagación por todo el mundo de los conocimientos de un pueblo elegido, etc.

La historia enseña que el desarrollo de todas las formas de actividad de la sociedad humana transcurre bajo la influencia de los únicos motivos del desarrollo económico. Esta influencia se pone de manifiesto, en particular, en el dominio de la matemática, en la pluralidad de las fuentes de su surgimiento. La matemática surgió y se formó como ciencia en muchos lugares, frecuentemente muy alejados unos de otros y al parecer no relacionados entre sí.

En esto siempre actuaron y se revelaron leyes generales: la procedencia de las matemáticas a partir de la actividad práctica de los hombres, extracción de las abstracciones numéricas y geométricas en calidad de rama independiente del conocimiento humano, formación de un sistema lógico consecuente de estas abstracciones, aplicación de las últimas a problemas prácticos, etc.

Sin embargo, la forma de cumplimiento de estas leyes generales, el carácter de la ciencia matemática, la correlación de sus elementos tuvo muchas diferencias y particularidades, las cuales es necesario tomar en cuenta para formar una representación correcta sobre las vías y perspectivas del desarrollo de las ciencias matemáticas.

FORMACIÓN DE LAS PRIMERAS TEORÍAS MATEMÁTICAS

3.1. Las primeras teorías matemáticas en la Grecia Antigua

La parte teórica de las matemáticas tiene sus orígenes en las escuelas científicas y filosóficas de la Grecia Antigua. La contribución de estas escuelas al desarrollo de la ciencia es tan significativa que incluso en nuestra época "las ciencias naturales teóricas, si quieren seguir la historia del surgimiento y desarrollo de sus tesis generales actuales, están obligadas a dirigirse a los griegos" ¹⁾.

En el periodo de los siglos VI—IV a. n. e., que es el que consideramos aquí, Grecia estaba constituida por un conjunto de Estados (ciudades) esclavistas que llevaban a cabo un intensivo comercio, tanto entre sí, como con otros Estados de la cuenca del Mar Mediterráneo: Egipto, Fenicia, Persia, etc. En los Estados de la Grecia Antigua la técnica, la ciencia y la cultura alcanzaron un alto nivel, lo que se manifiesta con gran convicción en los hermosos monumentos históricos que se conservan. Los trabajos de ciencias naturales y filosóficos de los científicos antiguos llegados hasta nosotros y las informaciones sobre ellos muestran que en la Grecia Antigua se formaron los tipos fundamentales de concepciones del mundo, actuaron diferentes escuelas científico-naturales. El lugar principal entre las escuelas griegas de filosofía natural lo ocupaban sucesivamente: la jónica (siglos VII—VI a. n. e.), la pitagórica (siglos VI—V a. n. e.) y la ateniense (desde la segunda mitad del siglo V hasta nuestra era). En estas escuelas se elaboraban también cuestiones matemáticas en forma bastante completa y detallada.

En las matemáticas de esta época los problemas prácticos relacionados con la necesidad de cálculos aritméticos, mediciones y construcciones geométricas continuaron jugando un gran papel. Sin embargo, lo nuevo era que estos problemas poco a poco se desprendieron en una rama independiente de las matemáticas que obtuvo la denominación de logística. A la logística fueron atribuidas: las operaciones con números enteros, la extracción numérica de raíces, el cálculo con la ayuda de dispositivos auxiliares, del tipo del ábaco, el cálculo con fracciones, la resolución numérica de

¹⁾ F. Engels. Antiduhring. Moscú, Editorial política, 1970, págs. 340—341 (en ruso).

problemas que conducen a ecuaciones de 1^{ro} y 2^{do} grados, problemas prácticos de cálculo y constructivos de la arquitectura, agrimensura, etc.

Al mismo tiempo, ya en la escuela de Pitágoras se advierte un proceso de recopilación de hechos matemáticos abstractos y la unión de ellos en sistemas teóricos. Así por ejemplo, de la aritmética fue separada en una rama independiente la teoría de números, es decir, el conjunto de conocimientos matemáticos que se relacionan con las propiedades generales de las operaciones con números naturales. En esta época ya resultaban conocidos los métodos de sumación de progresiones aritméticas simples y resultados del

tipo $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$. Se estudiaban cuestiones sobre la divisibilidad de los números, fueron introducidas las proporciones aritméticas, geométri-

cas y armónicas ⁽¹⁾ y diferentes medias: la aritmética $\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n}$, la geométrica

$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ y la armónica $\frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}$. Junto a la demostración geométrica

del teorema de Pitágoras fue encontrado el método de hallazgo de la serie ilimitada de las ternas de números "pitagóricas", esto es, las ternas de números que satisfacen la relación $a^2 + b^2 = c^2$ y que tienen la forma $n, \frac{1}{2}(n^2 - 1), \frac{1}{2}(n^2 + 1)$, donde n es impar. Otra regla: $n, \left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1, \left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1$, donde n es par, la encontramos en las obras de Platón, o sea, en época posterior. Fueron descubiertas muchas leyes matemáticas de la teoría de la música. Una particularidad de la escuela de Pitágoras es que a ciertos números y relaciones numéricas se les asignaban propiedades misteriosas, mágicas, y la propia dedicación a la teoría de números se consideraba como patrimonio de "los elegidos" e "iniciados". Es comprensible, que el misticismo numérico de los Pitagóricos no tuvo origen científico-natural sino político-social.

En este mismo período transcurrieron la abstracción y sistematización de las informaciones geométricas. Fueron escritos libros especiales en los

¹⁾ La última tenía el aspecto $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$, recibiendo su nombre del hecho de que en la teoría matemática de la música los intervalos entre los tonos completos son inversamente proporcionales a la altura del tono.

que se exponía el sistema de geometría formado en ese tiempo. Tales son, por ejemplo, los "Elementos" de Hipócrates de Quíos. En los trabajos geométricos se introdujeron y perfeccionaron los métodos de demostración geométrica. Se consideraron, en particular, el teorema de Pitágoras, los problemas sobre la cuadratura del círculo, la trisección de un ángulo, la duplicación del cubo, la cuadratura de una serie de áreas, en particular las acotadas por líneas curvas.

Una de las causas de la creación de teorías matemáticas fue el descubrimiento de la irracionalidad, inicialmente en forma del establecimiento del hecho geométrico de incommensurabilidad de dos segmentos. El significado de este paso en el desarrollo de las matemáticas es difícil sobreestimar. En las matemáticas se introdujo un concepto tal que representa, en esencia, una abstracción matemática tan compleja, que no tiene suficiente sustento firme en la experiencia humana precientífica.

Casi seguro que la primera irracionalidad descubierta es $\sqrt{2}$. Puede suponerse que el punto de partida de este descubrimiento fueron los intentos de encontrar una medida común con ayuda del algoritmo de sustracción sucesiva, conocido como algoritmo de Euclides. Es posible que jugara cierto papel el problema de la teoría matemática de la música: división de las octavas que conducían a la resolución de proporciones $1:n = n:2$. El interés común de la escuela Pitagórica por los problemas de la teoría de los números, al parecer, debe haber jugado un papel importante.

Los griegos antiguos conocieron muy temprano la rigurosa demostración lógica de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ por la vía de reducción al absurdo.

Sea $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, donde m y n son números primos entre sí. Entonces $m^2 = 2n^2$, de donde sigue que m^2 es par y, consecuentemente, m es par. Entonces n es impar. Sin embargo si m es par, entonces m^2 se divide por 4 y por consiguiente n^2 es par. Por tanto n también es par. La contradicción formal obtenida (n no puede ser a la vez par e impar) indica la falsedad de la suposición sobre la racionalidad de $\sqrt{2}$.

Para la investigación de las recién descubiertas irracionalidades cuadráticas inmediatamente resultó necesario elaborar la teoría de la divisibilidad.

En efecto, sea $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, donde p y q son primos entre sí, y n es el producto

de sólo las primeras potencias de los factores. De donde $p^2 = nq^2$. Si t es un divisor primo de n , entonces p^2 (y por lo tanto p) se divide entre t . Por consiguiente p^2 se divide entre t^2 . Pero en n está contenida sólo la primera potencia de t . Por lo tanto, q^2 (al igual que q) se divide por t . Pero este resultado formalmente contradice la suposición de que p y q son primos entre sí.

Tras la irracionalidad de $\sqrt{2}$ fueron descubiertas muchas otras irracionalidades. Así, Arquitas (finales del siglo V antes de n. e.) demostró la irracionalidad de los números de la forma $\sqrt{n(n+1)}$. Teodoro de Cirene estableció la irracionalidad de la raíz cuadrada de los números 3, 5, 6,, 17. Teeteto (comienzos del siglo IV antes de n. e.) dio una de las primeras clasificaciones de los irracionales.

Con el surgimiento de la irracionalidad en la aún no fortalecida matemática griega aparecieron serias dificultades tanto en el plano teórico-numérico, como en el plano geométrico. Fue realmente amenazada toda la teoría de la geometría métrica y la teoría de la semejanza. La necesidad de comprensión científica de la esencia del fenómeno descubierto y su combinación con las ideas formadas provocó el desarrollo posterior de las teorías matemáticas.

Esta etapa siguiente se distingue por los esfuerzos de crear, para las necesidades de la investigación científica, una teoría matemática general adecuada tanto para los números racionales como para las magnitudes irracionales. En cuanto se descubrieron los irracionales resultó que la colección de las magnitudes geométricas (por ejemplo, los segmentos) era más completa que el conjunto de los números racionales, entonces resultó oportuno construir un cálculo más general en forma geométrica. Este cálculo fue creado. Recibió el nombre de álgebra geométrica.

Los elementos primarios del álgebra geométrica resultaron los segmentos de recta. Con ellos fueron definidas todas las operaciones de cálculo. La suma se interpretaba como la adición de segmentos, la diferencia como la eliminación de una parte del segmento igual al segmento sustraendo. La multiplicación de segmentos condujo a la construcción de una representación bidimensional y el producto de los segmentos a y b se consideraba un rectángulo con lados a y b . El producto de tres segmentos daba un paralelepípedo, y el producto de un número mayor de factores en el álgebra geométrica no podía considerarse. La división resultaba posible solo bajo la condición de que la dimensión del dividendo fuera mayor que la dimensión del divisor. Ella se interpretaba como equivalente al problema de anexión de áreas:

Anexar al segmento c un rectángulo equivalente al dado (ab) . La resolución del problema como se ve en la figura 3 consiste en la adición uno a otro de los rectángulos ab y bc en la construcción de un nuevo rectángulo, la diagonal del cual es la diagonal del rectángulo bc prolongada hasta la intersección con la prolongación del lado b . Entonces los rectángulos $ab = cx$ resultan equivalentes y el problema está resuelto.

El método de anexión de áreas, descrito aquí, permitió resolver problemas que conducían a ecuaciones lineales y llevaba el nombre de método parabólico ($\mu\alpha\rho\alpha\beta\omicron\lambda\eta'$ significa en griego anexión de áreas).

En el álgebra geométrica también se incluía el conjunto de proposiciones geométricas que interpretaban las identidades algebraicas. Por ejemplo, la figura 4 da una interpretación geométrica de la identidad $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

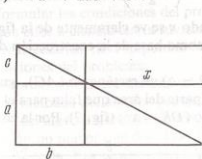


Fig. 3

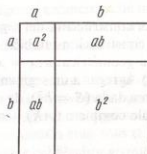


Fig. 4

El método de anexión de áreas fue extendido también al caso en que la resolución del problema conduce a una ecuación cuadrática. Ejemplos de tales problemas lo constituyen la determinación del lado de los polígonos regulares inscritos: la llamada "división áurea" del segmento, esto es, la división del segmento a en dos partes: x y $a - x$ que satisfacen la relación $\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x}$; la expresión de la arista de un poliedro regular a través del diámetro de la esfera circunscrita, etc. La solución de esta clase de problemas se realizaba con ayuda de un método canónico uniforme, que tiene las siguientes particularidades en dependencia de la forma de la ecuación cuadrática.

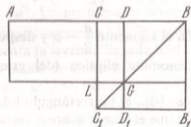


Fig. 5

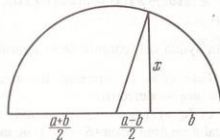


Fig. 6

a) Construir un cuadrado equivalente a un rectángulo dado ab . La esencia del método consiste en la sustitución del rectángulo ab por la diferencia de los cuadrados $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ y la aplicación siguiente del teorema de Pitágoras (figura 5).

$$AD \cdot DG = \text{área } (CLGD_1 B_1 B) = CB^2 - LG^2$$

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

La construcción del segmento buscado x se ve claramente de la fig. 6. Esta construcción también fue tomada como base de la construcción de la media geométrica: $a : x = x : b$.

b) Agregar a un segmento dado ($AB = a$) un rectángulo (AG), igual a un área dada ($S = b^2$), de modo que la parte del área que falta para el rectángulo completo (AK), sea un cuadrado ($DK = x^2$) (fig. 7). Por la condi-

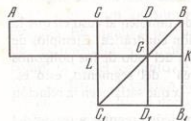


Fig. 7

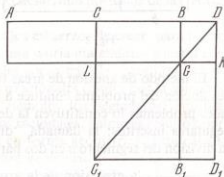


Fig. 8

ción del problema $b^2 = (a - x) \cdot x$, pero

$$(a - x) \cdot x = \text{área } (CLGD_1 B_1 B) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-x}{2}\right)^2.$$

Con ayuda del teorema de Pitágoras se halla el segmento $\frac{a}{2} - x$ y después x . Este caso de anexión de áreas se denomina elíptico (del griego ελλειρῖς — defecto).

c) Agregar a un segmento dado ($AB = a$) (fig. 8) un rectángulo (AK) igual a un área dada ($S = b^2$), de tal manera que el exceso sobre el rectángulo (AG) sea un cuadrado ($BK = x^2$), $b^2 = (a + x) \cdot x$; pero

$$(a + x) \cdot x = \text{área } (CLGB_1 D_1 D) = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

por tanto, $b^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, de donde con ayuda del teorema de Pitágoras se encuentra mediante la construcción del segmento $\frac{a}{2} + x$ y después x . Es-

te tipo de anexión de áreas se denomina hiperbólico (del griego υπερβολῆν exceso, sobrante).

Es evidente que semejante método daba sólo una raíz positiva de la ecuación cuadrática. Los matemáticos antiguos comprendían la necesidad de formular las condiciones del problema del álgebra geométrica de manera que ellos a ciencia cierta tuvieran una solución positiva. Por eso en los casos necesarios ellos imponían limitaciones (diorismos, διορισμοί) a las condiciones del problema.

Esta circunstancia determinaba la limitación del campo de aplicación de los métodos del álgebra geométrica. Aún más se limitaban las posibilidades del álgebra geométrica debido a que sus objetos eran figuras de dimensión no mayor que dos. Los medios de construcción eran sólo el compás y la regla. Era posible imaginarse en los límites del álgebra geométrica operaciones con figuras tridimensionales. Esto, sin embargo no se hacía, ya que incluso un problema al parecer tan sencillo como la construcción de un cubo, que tiene un volumen el doble que el dado, no admitía solución con ayuda de una regla y un compás. Los problemas que conducían a ecuaciones de grado superior al tercero, como ha sido indicado, eran en el álgebra geométrica de los antiguos simplemente imposibles.

La insuficiencia del álgebra geométrica como teoría matemática general fue especialmente subrayada por la distinción de una clase de problemas que no admitían solución con regla y compás. Entre estos problemas los más conocidos eran: el problema de la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo.

El problema sobre la duplicación del cubo, esto es, sobre la construcción de un cubo con arista desconocida x , pero que tiene un volumen el doble que el dado, se reduce a la resolución de la ecuación cúbica: $x^3 = 2a^3$. Un problema equivalente lo constituye el problema de la construcción del segmento $\sqrt[3]{2}$. El problema era enormemente popular, sobre lo que cuenta la leyenda llegada hasta nosotros acerca de la exigencia del oráculo en la isla de Delos de aumentar en el doble el volumen del altar cúbico situado ante él. Los numerosos esfuerzos de resolver este problema con ayuda de cálculos en el campo de los números racionales o con los medios del álgebra geométrica, resultaron, desde luego, infructuosos.

El primer éxito en la resolución de este problema lo alcanzó Hipócrates de Quíos (mediados del siglo V a. n. e.). El lo redujo (más exactamente hablando, es el problema algo más general de la transformación de un paralelepípedo en un cubo) al problema de la búsqueda de dos medias proporcionales. En efecto, sea el paralelepípedo $V = a_1 b_1 c_1$ transformado en otro con base cuadrada $V = a^2 b$, lo que se realiza con los medios del álgebra geométrica. Es necesario transformarlo en un cubo: $x^3 = a^2 b$. La arista del cubo buscado se determina, según Hipócrates, por la proporción:

$a:x = x:y = y:b$. Es posible que el problema de la duplicación del cubo se concibiera como el análogo espacial del problema de la cuadratura de figuras planas. En tal caso la formulación del problema de Hipócrates es una generalización del problema plano correspondiente sobre la inserción de una media proporcional: $a:x = x:b$.

Para la resolución del problema de Hipócrates sobre la inserción de dos medias proporcionales fueron elaborados nuevos métodos. En su mayoría se reducían a la investigación de los lugares geométricos: $x^2 = ay, xy = ab, y^2 = bx$. Las dos medias proporcionales entre a y b se determinaban como las coordenadas del punto de intersección de dos de estos lugares geométricos. Esto último recibió a su vez una interpretación estereométrica como secciones de conos de revolución.

La historia del problema sobre la duplicación del cubo constituye uno de los ejemplos de como transcurre el enriquecimiento de los métodos matemáticos. La influencia de este problema fue una de las causas de que las secciones cónicas entraran en la matemática, de que se convirtieran en las matemáticas antiguas en medios de resolución de tales problemas, los cuales no pueden ser resueltos con ayuda de la regla y el compás. Por otra parte, para la resolución del problema de la duplicación del cubo se aplicaban también otros métodos. Eratóstenes, por ejemplo, construyó un instrumento (mezolabio), cómodo para duplicar aproximadamente el cubo. Sin embargo, ninguno de los métodos influyó tan fuertemente en el desarrollo de las matemáticas antiguas como el método de las secciones cónicas.

El destino ulterior del problema considerado está relacionado con otro problema: se puede o no resolver en principio este problema por medio de construcciones con regla y compás. Con el desarrollo del álgebra la formulación del problema tomó una forma algebraica: ¿Puede o no la operación de extracción de la raíz cúbica de un número racional ser reducida a un número finito de extracciones de raíces cuadradas? La duda sobre la posibilidad de tal solución del problema la expresó por vez primera en el año 1637 Descartes. Pero sólo después de 200 años el problema de la duplicación del cubo recibió solución definitiva. En el año 1837 Wantzel demostró que las irracionalidades cúbicas no pertenecen ni al campo de los números racionales ni a su ampliación mediante la adición de irracionales cuadráticos.

El segundo famoso problema de la antigüedad que no admita solución mediante el álgebra geométrica fue el problema sobre la trisección del ángulo, o sea, sobre la división de un ángulo arbitrario en tres partes iguales. Este problema, como el anterior, se reduce a la resolución de una ecuación cúbica, lo que resulta evidente de la siguiente relación trigonométrica:

$$\cos \varphi = 4 \cos^3 \frac{\varphi}{3} - 3 \cos \frac{\varphi}{3}, \text{ ó } a = 4x^3 - 3x. \text{ Nosotros comprendemos,}$$

que los numerosos esfuerzos por realizar la trisección del ángulo sólo con regla y compás no podían tener éxito y conducían en el mejor de los casos, a la concientización de la necesidad de introducción de nuevos métodos.

Ya en el siglo V a. n. e. Hippias de Elis aplicó, para la resolución del problema de la trisección del ángulo, una curva trascendente, la cuadratriz, definida de la forma siguiente. Supongamos que en el rectángulo $ABCD$ (fig. 9) el lado BC se traslada paralela y uniformemente hasta coincidir con AD . Durante este mismo tiempo el lado AB gira alrededor de A en sentido

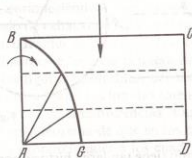


Fig. 9

de las agujas del reloj hasta su coincidencia con AD . El lugar geométrico de la intersección de estos dos lados forma una curva, la cuadratriz, cuya existencia permite reducir el problema de la división de un ángulo en cualquier número de partes iguales al problema de la división del segmento AB (o CD) en partes iguales. El punto G ($AG = \frac{2r}{\pi}$) de intersección de la cuadratriz con el lado AD se define por continuidad, con razonamientos, los cuales pueden servir de ejemplo de una de las primeras formas del método de los límites. Otro método de resolución del problema sobre la trisección del ángulo, fue el método de las inserciones. Por inserción se entiende la construcción de un segmento de una recta, cuyos extremos se encuentran en las líneas dadas y el cual (o su prolongación) pasa a través del punto dado. Ejemplos de inserciones que se aplicaron a la trisección del ángulo ($\angle ABC$) (figs. 10, 11):

Inserción: $DE = 2AB$

Inserción: $FE = AB$

$$(DF = FE = AB);$$

$$(\angle DEF = \frac{1}{2} \angle BFC = \frac{1}{2} \angle FCB =$$

$$\angle ABF = \angle AFB = 2 \angle AEF = 2 \angle CBD);$$

$$= \frac{1}{3} \angle ABC).$$

$$\angle CBD = \frac{1}{3} \angle ABC).$$

Las inserciones se realizaban de forma mecánica con ayuda de una regla que se desplaza, en la cual ya antes fue trazada la magnitud de la inserción. La regla la giraban alrededor de un punto fijo, preocupándose de que una señal se moviera por una de las líneas dadas hasta que la otra señal cayera sobre la otra línea.

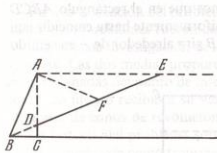


Fig. 10

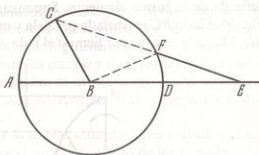


Fig. 11

La trisección del ángulo tiene tan larga historia como la duplicación del cubo. La reducción de ella a una ecuación cúbica fue conocida sólo hacia los siglos IX—X de n. e. La demostración rigurosa de la imposibilidad de una trisección exacta del ángulo con regla y compás es una con secuencia sencilla del resultado de Wantzel mencionado anteriormente.

El tercer problema famoso de la antigüedad es el de la cuadratura del círculo, o sea, el problema sobre la búsqueda de un cuadrado de área equivalente a la de un círculo dado. Este problema en la Grecia Antigua lo consideraban en dos aspectos: exacto y aproximado. El último enfoque del problema condujo a la introducción de aproximaciones del área del círculo por polígonos inscritos o circunscritos y al cálculo aproximado del número π . La enorme cantidad de esfuerzos por cuadrar exactamente el círculo no pudo conducir al éxito como consecuencia de la naturaleza trascendente de este problema.

En efecto, sea el segmento r_0 el radio de un círculo dado; entonces el lado del cuadrado equivalente es $x = r_0 \sqrt{\pi}$. El problema se reduce a la multiplicación gráfica del segmento r_0 por el número $\sqrt{\pi}$. Esta multiplicación puede realizarse sólo si este número es una raíz de una ecuación algebraica con coeficientes enteros y resoluble en radicales cuadráticos. Por lo tanto un tratamiento riguroso y completo del problema de la cuadratura del círculo puede obtenerse como resultado del esclarecimiento de la naturaleza aritmética del número π . La solución de este problema se prolongó durante muchos siglos.

Sólo a finales del siglo XVIII I. Lambert y A. Legendre pudieron demostrar que π no es un número racional. La trascendencia de este número,

esto es, el hecho de que no puede ser raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros, fue demostrado en el año 1882 por Lindemann. A propósito, en la geometría de Lobachevsky para algunos valores del radio de curvatura del espacio la cuadratura del círculo es resoluble en irracionalidades cuadráticas.

Los matemáticos antiguos, que se esforzaron por resolver con una exactitud teórica el problema sobre la cuadratura del círculo, esto, se sobreentendiendo, no lo sabían. Pero sus esfuerzos trajeron al desarrollo de la matemática gran utilidad, enriqueciéndola con nuevos hechos y métodos. Así fue elaborado el método de exhaustión, que es el predecesor del método de los límites. Fueron introducidas diferentes curvas trascendentes, en primer lugar la cuadratriz. Finalmente, por vez primera en la historia de las matemáticas fueron halladas figuras cuadrables, delimitadas por líneas curvas. Nosotros tenemos en cuenta aquí las lúnulas (meniscos) de Hipócrates de Quios, formadas por arcos de circunferencias. Las investigaciones de Hipócrates se apoyaban en el teorema de que en los círculos las áreas de segmentos semejantes son proporcionales a los cuadrados de los diámetros.

La primera de las lúnulas cuadrables fue recortada del semicírculo con arco de radio $r\sqrt{2}$, que se apoya sobre el diámetro. La lúnula resulta ser igual al área del triángulo rectángulo isósceles ABC cuya hipotenusa es el diámetro del círculo (fig. 12). Una variación de este resultado la constituye el teorema de que, si sobre los lados de un triángulo rectángulo, como sobre diámetros, se construyen circunferencias, entonces la suma de las áreas de las lúnulas, que se apoyan sobre los catetos, será igual al área del triángulo, es decir, es cuadrable (fig. 13). Otro tipo de lúnula se obtiene

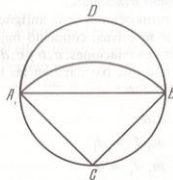


Fig. 12

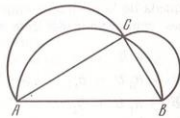


Fig. 13

cuando alrededor de un trapecio con lados $1, 1, 1\sqrt{3}$ se circunscribe una circunferencia y en la cuerda $\sqrt{3}$ se construye un segmento semejante a los segmentos truncados por las restantes cuerdas. El área de la lúnula obtenida es

igual al área del trapecio original. Finalmente, el arco exterior de la tercera (3) es menor que la semicircunferencia.

La aparición de lúnulas cuadrables suscitó una serie de preguntas naturales: ¿Cuán grande es la clase de las lúnulas cuadrables? ¿Han sido halladas todas sus formas? ¿Existen otras lúnulas, cuyas áreas también se expresan mediante irracionalidades cuadráticas a través de los elementos lineales que entran en su construcción? Sin embargo, las respuestas a estas preguntas también fueron obtenidas muchos siglos después. Sólo en el año 1840 el matemático alemán Klausen encontró dos lúnulas cuadrables más. La cuestión sobre las lúnulas fue totalmente investigada sólo en el siglo XX cuando los matemáticos soviéticos N.G. Chebotariov y A.V. Dórdnov utilizando los métodos de la teoría de Galois mostraron que si las medidas angulares de los arcos interior y exterior de las lúnulas son conmensurables, entonces no existen más lúnulas cuadrables que las encontradas. A propósito, las relaciones de las medidas angulares de las lúnulas encontradas, mencionadas antes, son:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{1}, \frac{5}{3}$$

El descubrimiento de la incommensurabilidad, como ya indicamos, puso en una situación difícil toda la parte métrica de la geometría, la teoría de la semejanza y aquellas partes de las matemáticas, donde era imprescindible la utilización de formas elementales del concepto de continuidad, paso al límite, etc. La teoría de los números racionales ya no podía servir de base a estas ramas de las matemáticas. Así, el surgimiento de las irracionalidades condicionó la necesidad de la creación de una teoría general de las relaciones, capaz de dar las definiciones e introducir las operaciones aplicables tanto en las magnitudes racionales como irracionales.

El fundamento inicial de la teoría de las proporciones de la antigüedad lo constituyó el algoritmo de las diferencias sucesivas, conocido bajo el nombre de algoritmo de Euclides. Sean dadas dos relaciones: $a:b$ y $c:d$. La búsqueda de la medida común de la magnitud que participa en las relaciones, conduce a la siguiente cadena de relaciones:

$$\begin{array}{ll} a:b & c:d \\ a - n_0 b = b_1 & c - m_0 d = d_1 \\ b - n_1 b_1 = b_2 & d - m_1 d_1 = d_2 \\ b_1 - n_2 b_2 = b_3 & d_1 - m_2 d_2 = d_3 \end{array}$$

En el caso en que los miembros de las proporciones son conmensurables, esta cadena se detiene; la incommensurabilidad no da un algoritmo finito. El algoritmo de las diferencias sucesivas es equivalente a las representaciones con ayuda de las fracciones continuas. Por ejemplo:

$$\frac{a}{b} = n_0 + \frac{b_1}{b} = n_0 + \frac{1}{\frac{b}{b_1}} = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{\frac{b}{b_1 - n_1 b_1}}}$$

La comparación de las sucesiones n_0, n_1, n_2, \dots y m_0, m_1, m_2, \dots permite establecer entre las relaciones los conceptos de igualdad y desigualdad, y además compararlas en su magnitud. Supongamos que $k - 1$ elementos de ambas sucesiones coincidan. Entonces, si $n_k > m_k$, se tiene que $a:b < c:d$, para k impar, y $a:b > c:d$ para k par; si $n_k < m_k$ entonces $a:b < c:d$ en el caso que k sea par y $a:b > c:d$, en el caso que sea impar.

Sin embargo los esfuerzos por introducir operaciones sobre las proporciones definidas de tal modo, inmediatamente tropezaron con serias dificultades matemáticas. Por ejemplo, para introducir la multiplicación de proporciones, era necesario encontrar un método de determinar las parciales incompletas de una fracción continua, es decir, los productos a través de las parciales incompletas de las fracciones continuas factores. Para esto, todavía en nuestra época no existe ninguna fórmula elemental. Finalmente, en aquel tiempo no existía aún un concepto general de magnitud. En virtud de estas circunstancias el algoritmo de Euclides no se convirtió en la base de la teoría de las relaciones.

La siguiente concepción de la antigua teoría general de las proporciones está ligada al nombre de Eudoxo (Cnidos, 408, Cnidos, 355 a. n. e.), al que se le atribuye la creación de esta teoría. En ella:

a) se produce una generalización del concepto de magnitud mediante su subordinación a un sistema de cinco axiomas: 1. Si $a = b$ y $c = b$, entonces $a = c$; y si $a = c$, entonces $2. a + b = c + b$. 3. $a - b = a - b$. 4. Los coincidentes son iguales. 5. Un entero es mayor que una parte;

b) se introduce el axioma de homogeneidad: a y b pueden estar en relación si ellas, tomadas múltiplemente, pueden exceder una a la otra, esto es, para cualesquiera a y b finitos existen m y n tales que $na > b$ y $mb > a$. Este axioma fue introducido para excluir las llamadas magnitudes no arquimedeanas, por ejemplo, los ángulos corniformes.

Las relaciones fueron introducidas en la teoría de Eudoxo a través de la definición de su igualdad. Exactamente, la igualdad de dos relaciones $a:b = c:d$ se considera establecida, si de las tres condiciones $ma < nb$ se deducen, respectivamente, los tres resultados $mc < nd$ para cualquier par de números naturales m y n . Existe una suposición de que semejante definición surgió como una abstracción del procedimiento de medición y comparación de segmentos mediante sus aproximaciones racionales. Esto se corrobora en las relaciones de orden entre las proporciones en la teoría de Eudoxo. Precisamente, $a:b > c:d$, si existe un par de números naturales m

y n tales que $ma > nb$ y $mc \leq nd$. De aquí se deduce que $c:d \leq \frac{m}{n} < a:b$,

esto es, que entre dos relaciones diferentes puede situarse un número racional. Es válido suponer que la idea actual de las aproximaciones racionales de los números reales procede de la teoría de las proporciones de Eudoxo.

En esta teoría fue introducida solamente una operación de composición de relaciones, correspondiente a la operación de multiplicación de los números reales. Si existen dos relaciones $a:b$ y $b:c$, entonces de ellas puede formarse la relación $a:c$. Esta relación se denomina doble.

Se pueden formar también relaciones más generales, por ejemplo, triples. En el caso que sea necesario componer las relaciones $a:b$ y $c:d$, es necesario transformar una de ellas, por ejemplo, la segunda, buscando previamente la cuarta proporcional: $c:d = b:x$.

La introducción solamente de una operación se explica por el hecho de que la teoría de Eudoxo se aplicaba sólo al estudio de la semejanza, donde la teoría de las proporciones servía de base, y en la determinación de áreas y volúmenes.

Ya citamos algunas analogías entre la antigua teoría de las proporciones y las teorías actuales del número real. El mayor fundamento para semejante analogía lo da la teoría de las cortaduras de Dedekind. En efecto, cada par de magnitudes arquimedeanas a y b que forman parte de la relación $a:b$, según la teoría de Eudoxo, produce una partición de los pares de números enteros (m, n) en clases. Aquellos pares, para los cuales es cierto $ma > nb$, pueden ser incluidos en una clase, aquellos, para los cuales es cierto lo contrario: $ma < nb$, en otra clase. El par (m, n) que cumple $m_0a = n_0b$, puede colocarse en una de las clases anteriores. El propio Dedekind no negó la posibilidad de semejante analogía, indicando sólo que en la teoría de Eudoxo no se consideraba el factor de continuidad.

Sin embargo, las diferencias entre la teoría de las relaciones de Eudoxo y la teoría de las cortaduras de Dedekind no se agotan con esta observación. La cuestión es que la primera de ellas realiza una partición de los pares de números enteros en clases, pero no demuestra lo recíproco. Precisamente no demuestra que a cualquiera de estas particiones corresponde cierto par de magnitudes arquimedeanas que definen esta partición. Además, no se determinan las condiciones a las que deben satisfacer el conjunto de pares de números enteros para ser clases de particiones, esto es, para no ser vacías, no interceptarse y tener la propiedad de unilateralidad de cualquier elemento de un conjunto con respecto a cualquier elemento de otro conjunto.

Finalmente, Dedekind previamente definió las cuatro operaciones aritméticas, mientras que Eudoxo introdujo sólo una operación, mientras que

el conjunto de pares de números enteros quedó sin ordenar. En otras palabras, los números reales de Dedekind constituyen un campo, mientras que las relaciones de Eudoxo constituyen un grupo.

El desarrollo ulterior de la antigua teoría de las proporciones se encaminó hacia la interpretación de las relaciones como números generalizados y la identificación de ellos con las fracciones. Así procedieron Arquitas, Arquímedes, Herón y otros muchos científicos. En esto se puso de manifiesto la influencia de la práctica que exigía el desarrollo de los métodos de cálculo-algorítmicos y su extensión a clases de números más amplios.

Nos detuvimos en este ejemplo para mostrar que las teorías matemáticas de la antigüedad tienen frecuentemente mucho de común con las teorías matemáticas actuales. Sin embargo, es necesario siempre saber destacar la especificidad de su desarrollo histórico para no caer en uno de los dos errores: identificación del pasado con el presente o la ruptura nihilista entre el presente y el pasado, la ruptura que hace al investigador un ciego ante el futuro.

3.2. Construcción axiomática de las matemáticas en la época del helenismo

Las primeras teorías matemáticas que se abstrajeron de los problemas concretos o de un conjunto de problemas de un mismo tipo, crearon las condiciones necesarias y suficientes para el reconocimiento de la autonomía y especificidad de las matemáticas. Esto a su vez despertó en los matemáticos antiguos la tendencia a sistematizar los hechos de las matemáticas y exponer lógico y consecuentemente sus fundamentos. Semejante trabajo es un caso imprescindible y normal en cualquier ciencia, el cual sirve de punto de partida para el posterior desarrollo de ésta. En las matemáticas antiguas el proceso de sistematización y generalización dio resultados significativos hacia el siglo IV a. n. e. Este proceso, en esencia, es una parte del proceso análogo ocurrido en todo el sistema de los conocimientos de las ciencias naturales y que encontró una expresión brillante en las ideas filosóficas de Aristóteles, (años 384—322 a. n. e.). Una enorme influencia en las matemáticas de aquella época la ejercieron también los éxitos de la lógica. Las formas fundamentales del pensamiento que se habían constituido ya estaban sistematizadas e investigadas, estaban propuestos los principios de construcción de la ciencia deductiva. Esta última se consideraba como un sistema que se complica lógicamente, apoyándose en los elementos primarios, los axiomas.

El carácter abstracto del objeto de las matemáticas y los métodos de demostración matemática establecidos fueron las principales causas de que las matemáticas se comenzaran a exponer como una ciencia deductiva, que

presenta una sucesión lógica de teoremas y problemas sobre construcciones y que utiliza un mínimo de condiciones iniciales. La forma geométrica del sistema de las matemáticas en la Grecia Antigua, como ya indicamos, tuvo su origen, fundamentalmente, en el establecimiento del hecho de una mayor plenitud del conjunto de los segmentos en comparación con el conjunto de los números racionales. Las obras en las cuales en aquella época se exponían los primeros sistemas matemáticos se denominaban "Elementos".

Los primeros "Elementos", de los cuales ha llegado hasta nosotros información, fueron escritos por Hipócrates de Quios. Se encuentran menciones también de "Elementos" pertenecientes a otros autores. Sin embargo, todas estas obras fueron olvidadas y prácticamente perdidas desde que aparecieron los "Elementos" de Euclides. Estos últimos obtuvieron un reconocimiento general como sistema de conocimientos matemáticos, cuya rigurosidad lógica quedó insuperable en el transcurso de más de veinte siglos. Todo este tiempo los hombres estudiaban la geometría según Euclides. Sus "Elementos" permanecen hasta el momento como fundamento de todos los cursos escolares sistemáticos de geometría. Las investigaciones matemáticas, sobre todo las elementales, en gran medida se apoyan en el sistema de Euclides, a veces imitando incluso la forma de su exposición.

Sobre el autor de los "Elementos", Euclides, se conserva muy poca información. Se conoce que vivió alrededor del año 300 a. n. e. en Alejandría, que formaba parte en aquella época del dominio egipcio. Este último se formó como resultado del desmembramiento de la potencia mundial de Alejandro de Macedonia. La situación ventajosa de Alejandría como centro comercial y centro de perfeccionamiento técnico estimuló a los gobernantes de Egipto, los Ptolomeos, a la organización de un centro científico-docente, el Museo (lo que significa refugio de las musas). En el Museo fueron coleccionados más de 500 mil manuscritos de carácter científico. El trabajo científico en el Museo, bajo las condiciones de manutención estatal, fue llevado a cabo permanente o temporalmente por casi todos los grandes científicos de la época del helenismo, entre ellos Euclides, Arquímedes, Apolonio, Eratóstenes, y otros. La influencia positiva del Museo en el desarrollo de la ciencia se conservó alrededor de 700 años; ella comenzó a decaer al principio de nuestra era como resultado de las guerras de conquista de los romanos y más tarde se suspendió, cuando bajo la influencia de la cristiandad reaccionaria los científicos "paganos" fueron desterrados o asesinados y el propio Museo devastado.

Al escribir los "Elementos" Euclides, al parecer, no se rigió por el objetivo de componer una enciclopedia de los conocimientos matemáticos de su época. Probablemente, trató de exponer sólo los fundamentos de las matemáticas en forma de una teoría matemática perfeccionada lógicamente,

partiendo de un mínimo de tesis iniciales. En este sentido los "Elementos" constituyen el primer antecedente del método actual de construcción axiomática de las ciencias matemáticas.

Los "Elementos" están constituidos por trece libros, cada uno de los cuales consta de una sucesión de teoremas. A veces a estos libros se añaden los libros 14 y 15 que pertenecen a otros autores y están próximos por su contenido al último libro de Euclides. En el primer libro se antepone las definiciones, axiomas y postulados. Las definiciones se encuentran también en algunos otros libros (2—7, 10, 11). Los axiomas y postulados no aparecen en los demás libros de los "Elementos".

Las definiciones son proposiciones mediante las cuales el autor introduce los conceptos matemáticos, aclarándolos. Por ejemplo, "el punto es aquello que no tiene partes", "el cubo es el cuerpo sólido que está limitado por cuadrados iguales", etc. Estas proposiciones de Euclides fueron sometidas muchas veces en el transcurso de la historia a crítica, desde el punto de vista de su completitud y precisión lógica. Sin embargo, un sistema de definiciones equivalente o más perfeccionado no fue propuesto. La cuestión radica en que en nuestra época en la construcción axiomática de una teoría matemática el único método de descripción de los objetos de esta teoría y sus propiedades lo constituye el propio sistema de axiomas, y los objetos se introducen como entes primarios, los cuales no se esclarecen. En lo que respecta a las definiciones de Euclides, ellas deben ser consideradas como abstracciones de los objetos reales históricamente formadas en su época, cuya introducción en las matemáticas fue consagrada por la tradición. Esto no es un procedimiento de introducción de definiciones matemáticas raro, sino que el que más frecuentemente se encuentra en la historia.

Los axiomas, o conceptos generales, son en Euclides proposiciones que introducen las relaciones de igualdad o desigualdad de las magnitudes. Los axiomas en los "Elementos" son cinco:

1. Los iguales a uno mismo son iguales entre sí;
2. Si a iguales se añaden iguales, entonces los totales serán iguales;
3. Si de iguales sustraemos iguales, entonces los restos serán iguales;
4. Los que pueden superponerse unos con otros son iguales entre sí;
5. Un entero es mayor que una parte.

Entre los puntos de partida de los "Elementos" se encuentran los postulados, o sea, las afirmaciones sobre la posibilidad de construcciones geométricas. Con su ayuda Euclides fundamenta todas las construcciones geométricas y las operaciones algorítmicas. Los postulados también son cinco:

1. A través de dos puntos cualesquiera puede trazarse una línea recta;
2. El segmento de una recta puede prolongarse indefinidamente;

3. Desde cualquier centro y con cualquier radio puede trazarse una circunferencia;
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí;
5. Si dos rectas de un plano son cortadas por una tercera y si la suma de los ángulos interiores, que se forman de un mismo lado de la recta es menor que dos rectos, entonces las dos primeras rectas, al ser prolongadas convenientemente, se cortarán del mismo lado donde esto tiene lugar.

En las diferentes ediciones de los "Elementos" y anteriormente a ello por los copistas y comentaristas, el sistema de axiomas y postulados de Euclides se modificaba y complementaba, además, casi siempre desafortunadamente. Se sobreentiende, la crítica poco a poco fue descubriendo las lagunas lógicas del sistema de puntos iniciales de Euclides: la sobrecarga lógica de las definiciones, la falta de recursos en la posibilidad de superposición de figuras, la ausencia de criterios de intersección de rectas y circunferencias (teoremas de existencia) y otras insuficiencias más insignificantes.

Sin embargo, los primeros éxitos reales en la creación de un sistema de axiomas de la geometría, más acordes con las exigencias crecientes del rigor matemático fueron alcanzados solo a finales del siglo XIX en los trabajos de Pasch (1882), Peano (1889) y Pieri (1899). El más difundido en nuestra época y comúnmente reconocido, es el sistema de axiomas de D. Hilbert que en una primera redacción apareció en el año 1899 en la obra "Fundamentos de la geometría". Más tarde Hilbert introdujo en su sistema no pocos complementos y perfeccionamientos. En nuestra época está constituido por los siguientes cinco grupos de axiomas:

- a) ocho axiomas de enlace o pertenencia;
- b) cuatro axiomas de orden;
- c) cinco axiomas de congruencia o movimiento;
- d) axioma de paralelismo;
- e) dos axiomas de continuidad: el de Arquímedes y el de completitud lineal.

Estos cinco grupos de axiomas introducen los objetos fundamentales de la geometría: *punto*, *recta* y *plano*, y las relaciones entre los objetos expresados por las palabras: *pertenecer*, *entre* y *congruente*. El sistema de condiciones básicas actuales no tiene ni definiciones ni postulados.

Utilizando ampliamente la idea de isomorfismo, la geometría axiomática se abstrae de las particularidades cualitativas de los objetos estudiados e investiga sólo las posibles formas de relación lógica entre ellas. Con ello, mediante las palabras *punto*, *recta* y *plano* pueden ser designados objetos no sólo no parecidos a lo que designaban en el transcurso de toda la historia, sino también objetos de naturaleza, al parecer, absolutamente no geométrica. Los "Elementos" de Euclides están lejos de tal presentación de

los problemas de la geometría. En ellos se examinan etapas más inferiores, primarias de las abstracciones de las propiedades espaciales y cuantitativas de los objetos del mundo material.

Pasemos a un examen del contenido de los "Elementos" de Euclides. Los primeros seis libros son de planimetría, de ellos los libros del 1 al 4 contienen aquella parte de la planimetría que no exige aplicación de la teoría de las proporciones. El primer libro introduce las construcciones fundamentales, las operaciones con segmentos y ángulos, las propiedades de los triángulos, rectángulos y paralelogramos, comparación de las áreas de estas figuras. Culminan el primer libro el teorema de Pitágoras y su recíproco.

Algunas particularidades características del método de razonamiento matemático y formas de exposición de Euclides son evidentes ya del primer libro:

a) El método de razonamiento de Euclides es siempre sintético. Para la demostración de cualquier teorema él parte de la afirmación válida a ciencia cierta, la cual se apoya en última instancia en el sistema de condiciones iniciales. A partir de esta última él desarrolla sucesivamente consecuencias que conducen a la afirmación buscada. El camino inverso de razonamiento es: tomando el teorema buscado como demostrado, el deducir de él una sucesión de consecuencias, hasta que sea obtenida a ciencia cierta una afirmación verdadera, en los "Elementos" en calidad de demostración no se utiliza. En contraposición a la síntesis los antiguos denominaron a este método análisis.

b) Las demostraciones se construyen según un esquema único que consiste de las siguientes partes: formulación del problema o teorema (*προτασις*, es decir proposición); introducción de un dibujo para la formulación de los datos del problema (*επιχειρις*, esto es, exposición); formulación según el dibujo de lo que se busca (*διωρισμος* o sea, determinación); introducción de líneas auxiliares (*κατασκευη*, esto es construcción); demostración propiamente dicha (*αποδειξις*, es decir, demostración); declaración de lo que se demostró y de que lo demostrado resuelve el problema o el teorema adecuadamente propuesto (*συμπερασμα*, o sea, conclusión). En forma algo simplificada, este esquema se convirtió en tradicional y llegó hasta nuestros días como modelo clásico de razonamiento matemático, en cierto sentido obligatorio para los matemáticos.

c) Los medios de construcción geométrica, la regla y el compás, en esencia no se utilizaban como medios de medición. La regla no tiene subdivisión. Por esto en los "Elementos" no se trata de la medición de las longitudes de los segmentos, de las áreas de las figuras y los volúmenes de los cuerpos, sino sólo sus relaciones.

En el segundo libro se tratan las relaciones entre las áreas de los rectángulos y cuadrados, elegidos de tal forma que ellos forman un aparato ge-

ométrico para la interpretación de identidades algebraicas y para la resolución de problemas que se reducen a ecuaciones cuadráticas, esto es, el álgebra geométrica. El tercer libro trata de las propiedades del círculo y la circunferencia, las cuerdas, tangentes, ángulos centrales e inscritos. El cuarto libro está dedicado a las propiedades de los polígonos regulares: inscritos y circunscritos y también a la construcción de polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 15 lados.

En el quinto libro de los "Elementos" se desarrolla la teoría general de las relaciones entre magnitudes, la cual constituye un prototipo de la teoría del número real en la forma correspondiente a las cortaduras de Dedekind. Ya mencionamos esta teoría como la teoría de Eudoxo, introducida en la matemática antigua en calidad de teoría general igualmente cómoda tanto para los números como para los segmentos de una recta. En el quinto libro de los "Elementos" después de la introducción de las relaciones, de sus igualdades y desigualdades se demuestran otras propiedades elementales del género de: si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$ y también $\frac{ma}{nb} = \frac{mc}{nd}$, etc.

En las proposiciones siguientes se desarrolla la teoría de las proporciones, entre ellas las derivadas (esto es, las formadas por intercambios permisibles y otras transformaciones de los miembros de las proporciones) y compuestas (es decir, formadas de varias proporciones dadas, por ejemplo: si $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$

y $\frac{b}{c} = \frac{e}{i}$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{d}{i}$, etc.).

Las aplicaciones geométricas de la teoría de las relaciones están incluidas en el sexto libro. En él, por ejemplo, se demuestran los teoremas sobre las relaciones entre las áreas de los rectángulos y paralelogramos que tienen altura común, sobre la proporcionalidad de los segmentos que se producen en los lados de un ángulo cortado por un par de rectas paralelas, sobre la semejanza de figuras y relaciones entre las áreas de figuras semejantes, etc. Aquí se encuentra un grupo de teoremas sobre la aplicación elíptica e hiperbólica de áreas, generalizada en los paralelogramos. Este grupo da un método geométrico de resolución de los problemas que pueden

reducirse a ecuaciones de la forma $ax \pm \frac{b}{c}x^2 = S$ (donde a, b, c son segmentos dados, S es el área dada, x es el segmento desconocido), y constituye una conocida generalización de los resultados del álgebra geométrica.

El siguiente grupo de libros (libros del 7 al 9) contiene cierto equivalente de la teoría de los números racionales. Parecería consecuente exponer en estos libros el sistema de representaciones espaciales, es decir, la estereometría. Sin embargo, la no consecutividad es sólo aparente. El

hecho es que al final de los "Elementos" Euclides investiga los poliedros regulares y determina la relación entre sus aristas y el diámetro de la esfera circunscrita. Estas relaciones se expresan, como es conocido, por irracionalidades cuadráticas y bicuadráticas. Por esto Euclides se vio obligado previamente a considerar la construcción y clasificación de este tipo de irracionalidades. Para cumplir esta tarea él se apoyó en una serie de proposiciones de la teoría de los números racionales (de los segmentos conmensurables). A su vez los números racionales Euclides los representa como relaciones entre números enteros; estos últimos él los concibe como colección de unidades. Por esto los denominados libros aritméticos de los "Elementos" (libros del 7 al 9) contienen el estudio sobre los números enteros y sus relaciones, tomado en lo fundamental de la matemática pitagórica. La conservación del sentido diferente en principio entre el concepto de número y el de magnitud general resultó ser la causa de la repetición en los libros aritméticos de muchos hechos de la teoría de números ya obtenidos en el libro quinto de los "Elementos".

El primero de los libros aritméticos, el séptimo, comienza con la exposición del algoritmo de las restas sucesivas. A continuación siguen una serie de proposiciones de la teoría de la divisibilidad. Finalmente, el libro contiene la teoría de las proporciones para los números racionales. Esta última continúa en el libro octavo donde se tratan las proporciones numéricas continuas (esto es, las proporciones de la forma $\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \dots = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$), y se termina en el noveno libro. En esta teoría, en esencia, se

introducen las progresiones geométricas de números enteros, se muestra que la relación entre los miembros de una proporción continua es una forma antigua de la potencia de los números, se halla la media proporcional y se da un método de búsqueda de la suma de una progresión geométrica.

Una parte significativa del noveno libro la constituye el estudio sobre los números primos, además se demuestra que los números primos son infinitamente muchos. La demostración se realiza por el mismo método que actualmente: la suposición de la finitud de los números primos se contradice con la construcción de un número más que supera en la unidad el producto de todos los números primos. En una serie de teoremas se consideran las propiedades de paridad e imparidad de los números. El libro termina

con el notable teorema de que si el número S de la forma $\sum_{k=0}^n 2^k$ es primo,

entonces el número $S_1 = S \cdot 2^n$ es perfecto (se denomina perfecto al número que es igual a la suma de sus divisores, incluyendo la unidad y excluyéndose

él mismo). La cuestión sobre si los números del tipo dado agotan todo el conjunto de números perfectos queda sin resolver aún en nuestra época.

El décimo libro de los "Elementos" es interesante, en primer lugar por la voluminosa y compleja clasificación de los 25 tipos posibles de irracionalidades bicuadráticas (esto es, expresiones de la forma $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, donde a y b son segmentos conmensurables), cuya reproducción aquí no consideramos oportuna. En el décimo libro, en calidad de lemas han sido deducidas diferentes proposiciones por sí mismas importantes. Ante todo está el lema fundamental del método de exhaustión que trata de que si de una magnitud dada se extrae una parte mayor que su mitad y con el resto se repite lo mismo, etc., entonces para un número suficientemente grande de pasos puede obtenerse una magnitud menor que cualquiera prefijada. Además en el libro décimo se dan: el método para hallar un número ilimitado de "ternas pitagóricas" de números enteros, el criterio de conmensurabilidad de dos magnitudes, basado en el algoritmo de la sustracción sucesiva, la búsqueda de la medida mayor común a dos y tres números racionales (magnitudes conmensurables) y otros.

Los últimos tres libros (del 11 al 13) de los "Elementos" son sobre estereometría. El primero de ellos comienza con un gran número de definiciones, lo cual es completamente natural, ya que en los libros anteriores no se tratan cuestiones sobre estereometría. Después sigue una serie de teoremas sobre la posición relativa de rectas y planos en el espacio y teoremas sobre ángulos poliedros. La última tercera parte del libro la constituye la consideración de la relación entre los volúmenes de paralelepípedos y prismas.

La investigación del volumen de otros cuerpos elementales (pirámides, cilindros, conos y esferas) exige obligatoriamente, en esencia, la utilización del paso al límite. En el libro doce de los "Elementos" la relación entre los volúmenes de estos cuerpos se encuentra con ayuda del método que recibió posteriormente (en el siglo XVII) la denominación de método de exhaustión. La idea de este método, que constituye una forma primitiva, peculiar del método de los límites, consiste en lo siguiente: Euclides establece, que los polígonos regulares semejantes, inscritos en los círculos, se relacionan como los cuadrados de sus diámetros. Después los círculos se "agotan" por sucesiones de polígonos regulares inscritos de 2^n lados ($n = 2, 3, 4, \dots$). La relación entre los últimos cuando se aumenta el número de lados queda invariable. Después de un paso al límite implícito se demuestra por el método del absurdo que las áreas de los círculos están en la misma relación que los cuadrados de sus diámetros. Razonamientos análogos de carácter límite se llevan a cabo en todos los casos de búsqueda de las relaciones entre los cuerpos anteriormente mencionados. Más detalladamente este método será caracterizado posteriormente.

El último, el libro trece de los "Elementos", contiene la construcción de los cinco poliedros regulares: tetraedro (poliedro de 4 caras), hexaedro (poliedro de 6 caras), octaedro (poliedro de 8 caras), dodecaedro (poliedro de 12 caras), icosaedro (poliedro de 20 caras); allí mismo se encuentran las relaciones entre los volúmenes de las esferas. Finalmente se demuestra que no existen otros poliedros regulares.

El examen del contenido de los "Elementos" muestra que esta obra constituye un sistema de los fundamentos de la matemática antigua. En ella están incluidos: la geometría elemental, los fundamentos de la teoría de los números racionales, la teoría general de las relaciones entre magnitudes y basada en ellas, la teoría de las proporciones y la teoría de las irracionalidades cuadráticas y bicuadráticas, elementos del álgebra en forma geométrica y el método de exhaustión. Lo más característico en los "Elementos" es que está dado un sistema que permite ver en él el predecesor antiguo de la actual construcción axiomática de las teorías matemáticas. Al mismo tiempo, la estructura lógica de los "Elementos" refleja el camino histórico de la formación de las teorías matemáticas desde las más simples, tipo de álgebra geométrica, hasta las más complejas: teoría de las relaciones, método de exhaustión y clasificación de las irracionalidades.

Ya mencionamos que los "Elementos" de Euclides dejaron una huella imborrable en la historia de las matemáticas y en el transcurso de muchos siglos sirvieron de prototipo clásico de la rigurosidad y secuencia matemática. Sin embargo, algunas particularidades de los "Elementos" reflejan una serie de condiciones no favorables al desarrollo subsiguiente de las matemáticas, las cuales se formaban en la época de su redacción. La exposición es geométrica, incluso los números están representados como segmentos. Los métodos de construcción geométrica, en esencia, estaban limitados sólo a la regla y el compás. Por eso en los "Elementos" no aparecen la teoría de las secciones cónicas, ni curvas transcendentales y algebraicas. Finalmente en los "Elementos" están completamente ausentes los métodos de cálculo.

Todas estas insuficiencias de los "Elementos" podrían, hasta cierto punto, justificarse por los objetivos específicos de su autor. Sin embargo, en las condiciones de la antigüedad, este primer experimento de exposición axiomática de las matemáticas podía tener una tendencia limitadora tan fuertemente expresada sólo bajo la influencia de las tendencias limitadoras generales de la filosofía idealista. Por esto, puede decirse que los "Elementos" de Euclides reflejan tanto el alto nivel de desarrollo teórico de las matemáticas como la situación socioeconómica e ideológica desfavorable para el posterior desarrollo al final de la antigüedad griega.

En el transcurso de toda la multisecular historia de las matemáticas, los "Elementos" constituyen el fundamento de todas las investigaciones geométricas. Incluso el cambio decisivo de todo el sistema de la geometría,

provocado por la introducción a principios del siglo XIX, en los trabajos de Lobachevsky, de la geometría no euclidiana, en gran medida está vinculado con los esfuerzos de perfeccionamiento de los "Elementos".

Los "Elementos" de Euclides aún en nuestra época constituyen la base de los textos escolares de geometría, el número de sus ediciones es enorme. Han sido editados en Rusia y en la URSS multitud de veces. La primera edición de los "Elementos" en ruso apareció en el año 1739. La última edición salió en tres tomos en el transcurso de los años 1948—1950. Ella está comentada en detalle. El conocimiento de los "Elementos" de Euclides es útil para todo matemático también en nuestros días.

3.3. Métodos infinitesimales en la Grecia Antigua

En la construcción de las teorías matemáticas en la Grecia Antigua muy temprano se diferenció una clase específica de problemas para la solución de los cuales resultaba necesario investigar los pasos al límite, los procesos infinitos, la continuidad, etc. Uno de los primeros descubrimientos de carácter teórico, la revelación de la incommensurabilidad de las magnitudes, ya propuso la tarea de una explicación racional de problemas semejantes. En el caso dado ellos están relacionados: a) con la prolongación ilimitada del proceso de búsqueda de una medida común; b) con lo infinitamente pequeña de la última y c) con que ésta debe estar contenida un número infinito de veces en las magnitudes que se comparan. A este grupo de problemas enseguida fueron agregados los geométricos, la solución de los cuales conducía a dificultades análogas (determinación de la mayoría de las longitudes, áreas y volúmenes).

Algunos grupos de científicos antiguos buscan la salida de estas dificultades en la aplicación a la matemática de las ideas filosóficas atomísticas. Un ejemplo de la más fuerte expresión de un enfoque semejante lo constituye la escuela de filosofía natural de Demócrito (alrededor de 460—370 a. n. e.). Demócrito consideraba que todos los cuerpos estaban constituidos de pequeños átomos, las magnitudes primarias. Los cuerpos se diferencian entre sí por la forma, posición y método de unión de los átomos que los componen. Algunas de sus opiniones acerca de las infinitésimas matemáticas y sobre su aplicación a la definición de algunas magnitudes geométricas reflejan sus ideas atomísticas.

Sin embargo, sobre la parte matemática de semejantes manifestaciones e investigaciones se conoce demasiado poco. Mucho más se conoce sobre las réplicas de sus adversarios científicos. Tenemos en cuenta aquí a las paradojas de Zenón (nació alrededor del año 500 a. n. e.), es decir, las paradojas lógicas a las cuales conducen los esfuerzos por obtener magnitudes continuas de un conjunto infinito de partículas infinitamente pequeñas.

Entre las paradojas las más conocidas son: a) la *dicotomía*, esto es, la imposibilidad de realizar movimiento, ya que el camino puede ser dividido hasta el infinito (por la mitad, otra vez por la mitad, etc.) y por esto, es necesario superar consecutivamente un conjunto infinito de tramos del camino (matemáticamente esto se reduce a la negación del hecho de que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1); b) Aquiles, el cual no puede alcanzar la tortuga, ya que él$$

tiene que alcanzar sucesivamente aquellos lugares donde un momento antes se encontraba la tortuga, esto es, agotar una sucesión infinita de segmentos del camino (matemáticamente esto resulta la negación del entonces ya co-

nocido hecho de que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{n}{n-1}$); c) el *vuelo de la flecha* se hace

imposible si se considera el tiempo como una suma de instantes discretos, y el espacio como una suma de puntos discretos.

Las paradojas de Zenón demostraron convincentemente que si se buscan demostraciones exactas y soluciones lógicamente exhaustivas a los problemas es imposible utilizar el infinito apoyándose en las consideraciones atomísticas ingenuas. Para semejantes objetivos es necesario elaborar y valerse de métodos que contienen, junto a las variedades de los criterios sobre los infinitésimos, elementos de paso al límite.

Uno de los más antiguos métodos de este género es el método de exhaustión. Su creación se le atribuye a Eudoxo. Ejemplos de su utilización están expuestos en el libro duodécimo de los "Elementos" de Euclides y en una serie de obras de Arquímedes. El método de exhaustión se aplicaba al cálculo de las áreas de figuras, volúmenes de cuerpos, longitud de curvas, búsqueda de las subtangentes a las curvas, etc. La esencia matemática del método (se entiende que en forma algo diferente a la forma de exposición de los griegos antiguos) consiste en la sucesión de las siguientes operaciones:

- si es necesario, por ejemplo cuadrar la figura B (fig. 14), entonces como primer paso en esta figura se inscribe una sucesión de otras figuras $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ cuyas áreas crecen monótonamente y para cada figura de esta sucesión pueden ser determinadas;
- las figuras A_k ($k = 1, 2, \dots$) se eligen de tal forma que la diferencia positiva $B - A_k$ pueda ser hecha tan pequeña como se quiera;
- del hecho de la existencia y construcción de las figuras descritas se hace

la deducción sobre la acotación superior de la sucesión de las figuras inscritas "agotadoras";

d) implícitamente, por lo general con ayuda de otras consideraciones teóricas y prácticas, se busca A , es decir, el límite de la sucesión de las figuras inscritas;

e) se demuestra, para cada problema por separado, que $A = B$, esto es, que el límite de la sucesión de las figuras inscritas es igual al área B . La demostración, como regla, se realiza por reducción al absurdo. Sea $A \neq B$. Entonces $B > A$ ó $B < A$. Supongamos que $B > A$, elijamos un elemento A_n de la sucesión tal que $B - A_n < B - A$. Esto es posible para cualquier diferencia fijada $B - A$. Pero entonces debe ser $A_n > A$ y esto es imposible ya que en realidad $A > A_n$ para todo n finito. La suposición contraria ($B < A$) también conduce a una contradicción, puesto que puede elegirse A_n tal que $A - A_n < A - B$. Pero entonces debe obtenerse que $A_n > B$ y esto es imposible.

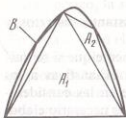


Fig. 14

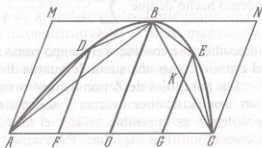


Fig. 15

Con el método de exhaustión se demuestra, de esta forma, la unicidad del límite. En combinación con otros métodos es útil para la búsqueda de límites. Sin embargo, este método no puede dar la solución de la cuestión sobre la existencia del límite.

En calidad de ejemplo del método de exhaustión citemos el de la cuadratura de la parábola en las obras de Arquímedes. Se pide encontrar el área de un segmento parabólico ABC , cortado por la cuerda AC . La tangente en el punto B del diámetro BO , conjugado con la cuerda dada, es paralela a esta última: $MBN \parallel AC$ (fig. 15).

La primera figura de la sucesión de figuras "agotadoras" A_1 es el $\triangle ABC$. La segunda figura A_2 se obtiene añadiendo al $\triangle ABC$ dos triángulos: $\triangle ADB$ y $\triangle BCE$. Para la construcción de los últimos se divide AC en 4 partes iguales y se trazan $FD \parallel OB$ y $GE \parallel OB$. Análogamente se construyen las figuras A_3, A_4, \dots, A_n . De las propiedades de la parábola se obtiene: $\triangle ABC = 4(\triangle ADB + \triangle BCE)$. En efecto, tomemos OB y MN res-

pectivamente como ejes x e y de un sistema oblicuo de coordenadas ¹⁾. Las coordenadas del punto $E(\xi, \frac{y}{2})$ satisfacen la condición $(\frac{y}{2})^2 = m\xi$, de donde

$$\xi = \frac{y^2}{4m}, \quad GE = x - \xi = \frac{y^2}{m} - \frac{y^2}{4m} = \frac{3}{4} \cdot \frac{y^2}{m} = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}OB.$$

Como $GK = \frac{1}{2}OB$, entonces $KE = \frac{1}{4}OB$ y $GK = 2KE$. Ahora ya pueden ser comparadas las áreas de los triángulos:

$$\triangle CKG = 2 \triangle KCE = \triangle BCE; \quad \triangle OBC = 4 \triangle GKC = 4 \triangle BCE.$$

Razonamientos análogos conducen a la relación $\triangle AOB = 4 \triangle ABD$ y la propiedad mencionada de la parábola queda demostrada. Así, si $A_1 = \Delta$, entonces $A_2 = \Delta + \frac{\Delta}{4}$; $A_3 = \Delta + \frac{\Delta}{4} + \frac{\Delta}{4^2}$; ...; $A_n = \Delta + \frac{\Delta}{4} + \dots + \frac{\Delta}{4^{n-1}}$. Ahora se exige demostrar que la sucesión de figuras indicada "agota" realmente el segmento parabólico, esto es, $S - A_n < \epsilon$, donde $n = n(\epsilon)$.

Para esto se circunscribe el paralelogramo $AMNC$, en el cual $AM \parallel NC \parallel BO$. $A_1 = \frac{1}{2}S_{AMNC}$, pero $S < S_{AMNC}$; luego $A_1 > \frac{1}{2}S$ y $S - A_1 < \frac{1}{2}S$. La figura A_1 "agotó" más de la mitad del área S y las figuras siguientes agotarán más de la mitad de los correspondientes restos del área S . Se satisface el lema fundamental del método de exhaustión: si de una magnitud dada se quita una parte mayor que su mitad, luego se vuelve a sustraer una y otra vez, entonces el resto puede hacerse tan pequeño como se quiera.

El paso siguiente debe ser la búsqueda del límite de la sucesión de figuras inscritas. En las obras de los autores antiguos, este paso frecuentemente no se aclara. Sin embargo, este caso constituye una excepción. Arquímedes

demuestra que $A_n = \Delta + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Delta}{4^k} = \frac{4}{3}\Delta - \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta}{4n-1}$; y como el

¹⁾ Hemos aplicado aquí las coordenadas, para hacer la exposición del método compacta.

sustrando puede ser hecho tan pequeño como se quiera entonces él afirma que $S = \frac{4}{3} \Delta$. Para esto Arquímedes se apoya en el siguiente curioso teorema: Sea $S = A + B + C + D + E$, además $A:B = B:C = C:D = D:E = 4:1$. Entonces $S = \frac{4}{3} A - \frac{1}{3} E$. En efecto, hagamos:

$$\frac{4}{3} S = \frac{4}{3} (A + B + C + D + E) = \frac{4}{3} A + \frac{1}{3} (A + B + C + D + E) - \frac{1}{3} E;$$

$$\frac{4}{3} S = \frac{4}{3} A + \frac{1}{3} S - \frac{1}{3} E,$$

ó $S = \frac{4}{3} A - \frac{1}{3} E$. El teorema puede ser extendido a cualquier número de sumandos.

La resolución del problema se culmina con la demostración, por reducción al absurdo, de la unicidad del resultado $S = \frac{4}{3} \Delta$.

El método de exhaustión fue uno de los métodos más difundidos de la matemática antigua. Fue muy utilizado por Arquímedes. Antes, este método lo incluyó Euclides en los "Elementos", haciéndolo el fundamento del duodécimo libro. Los pasos al límite, que antes se realizaban, frecuentemente, en virtud de consideraciones intuitivas y prácticas, obtuvieron en el método de exhaustión la primera formalización teórica; históricamente es la primera forma del método de límites.

El rigor lógico del método de exhaustión resultó insuperable en el transcurso de muchos siglos. En esencia, solo en el siglo XIX fueron propuestos y comenzaron a recibir solución los problemas que surgen directamente de la esencia lógica del antiguo método de exhaustión. Sin embargo, la forma de este último era aún muy imperfecta. El método se desarrollaba sólo en relación con problemas concretos: no se convirtió en un método abstracto con un sistema desarrollado de conceptos iniciales y con algoritmos únicos. La unicidad del límite se demostraba para cada problema de nuevo. Esta insuficiencia no era casual, particular. La cuestión es que cada intento de introducir esta demostración de una vez por todas para una determinada, suficientemente amplia, clase de problemas, inevitablemente traía consigo la necesidad de precisar una serie de conceptos de naturaleza infinitesimal. Sería necesario dar una explicación racional al concepto de aproximación infinitamente próxima, de magnitud infinitamente pequeña, etc. Los matemáticos antiguos no pudieron superar las dificultades relacionadas con esto.

No obstante el método de exhaustión yace en la base de muchos méto-

dos infinitesimales y de logros notables concretos de los matemáticos antiguos, en primer lugar de Arquímedes (alrededor de los años 287—212 a. n. e.), al cual le pertenece el ejemplo citado anteriormente de la cuadratura del segmento parabólico. Este sabio notable era oriundo de Siracusa (la parte sur de Sicilia), hijo del astrónomo y matemático Fidias. Para el perfeccionamiento de sus conocimientos durante algún tiempo trabajó en Alejandría en colaboración con otros de los más grandes matemáticos. Después de regresar a Siracusa, Arquímedes continuó un intenso trabajo científico. En el último período de su vida participó en la defensa de su ciudad natal de los conquistadores romanos, dirigiendo la construcción de complejas instalaciones técnicas e inventando armas. Durante el ataque y toma de Siracusa Arquímedes fue asesinado y su biblioteca e instrumentos saqueados.

Las obras de Arquímedes fueron escritas fundamentalmente en forma de cartas. Hasta nosotros han llegado diez obras grandes y algunas más pequeñas de carácter matemático. La característica fundamental de las obras matemáticas de Arquímedes es la aplicación de métodos matemáticos rigurosos en la mecánica y la física.

Esta particularidad hace de los trabajos de Arquímedes el más brillante modelo del desarrollo de los conocimientos matemáticos aplicados, de las técnicas de cálculo y de nuevos métodos matemáticos, en especial los infinitesimales, en la época final de la antigüedad.

Nosotros no nos proponemos la tarea de dar una caracterización completa de la obra de Arquímedes. Aquí consideraremos la cuestión sobre la interpenetración de los métodos de las matemáticas y la mecánica en los trabajos de Arquímedes, sobre la elaboración por él del método de las sumas integrales y sobre sus así denominados métodos diferenciales.

Numerosos inventos y descubrimientos mecánicos de Arquímedes son ampliamente conocidos. A él pertenecen el tornillo arquimedeano, los sistemas de palancas, bloques y tornillos para el levantamiento y movimiento de grandes pesos, determinación del contenido de las aleaciones mediante su sumersión en agua, el planetario, catapultas, etc. Son conocidos también los trabajos teóricos de Arquímedes en la mecánica "Sobre el equilibrio de las figuras planas", donde se expone la ley de las palancas, "Sobre los cuerpos que flotan", "El libro de los soportes", etc.

En la obra de Arquímedes, los trabajos sobre mecánica ocuparon un lugar tan importante que los métodos de la mecánica y análogos penetraron incluso en los métodos matemáticos. Hasta hace poco tiempo era imposible juzgar a ciencia cierta sobre tales penetraciones. La cuestión se aclaró definitivamente después que en el año 1906 se encontró la obra de Arquímedes "Epístola a Eratóstenes" sobre el método mecánico de resolución de problemas geométricos. El método consistía en lo siguiente.

Sea, por ejemplo, necesario calcular el volumen de una esfera. A la vez que la esfera se construye un cono y un cilindro, el radio de la base y la altura de las cuales es igual al diámetro de la esfera. Después a través de todos estos cuerpos se traza una sección, paralela a la base, a una distancia de ellos arbitraria fijada (fig. 16).

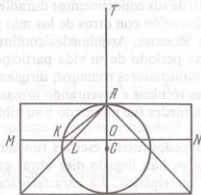


Fig. 16

$AK^2 = OK^2 + OA^2 = OK^2 + OL^2$; al mismo tiempo $AK^2 = AB \cdot OA$. Por consiguiente, $OK^2 + OL^2 = AB \cdot OA$. La misma relación hay entre las magnitudes, proporcionales a los sumandos: $(\pi AB^2) \cdot OA = (\pi OK^2)AB + (\pi OL^2) \cdot AB$ representa la relación entre las secciones horizontales de la esfera, el cilindro y el cono.

Arquímedes da a esta relación una interpretación mecánica, fundamentada en la regla de la palanca, o lo que es lo mismo, de las balanzas de cruz. Precisamente, si se toma el punto A como punto de apoyo de la palanca, entonces el elemento del cilindro fijado en O equilibra los elementos del cono y la esfera, fijados en $T(AT = AB)$. Pasando a los volúmenes de los cuerpos como sumas de todas las secciones arbitrarias, paralelas entre sí, él obtiene:

$$V_{cil} \cdot AC = (V_{esf} + V_{cono}) \cdot AT = (V_{esf} + V_{cono}) \cdot 2AC;$$

de donde

$$V_{esf} = \frac{1}{2} V_{cil} - V_{cono}$$

Pero como

$$V_{cono} = \frac{1}{3} V_{cil}, \text{ entonces } V_{esf} = \frac{1}{6} V_{cil}, \text{ ó}$$

$$V_{esf} = \frac{1}{6} \pi (2r)^2 \cdot 2 = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Este mismo método de analogía mecánica lo utilizó Arquímedes en la obra "Sobre la cuadratura de la parábola". Una lámina parabólica se representa colgada de uno de los brazos de una palanca de brazos desiguales y dividida en elementos, cada uno de los cuales está equilibrado por la correspondiente carga en el otro brazo.

En concordancia con la tradición científica de su época Arquímedes trajo las demostraciones, obtenidas por el método de la analogía mecánica, al lenguaje de uso general del método de exhaustión con la obligatoria culminación en este último, con la demostración por reducción al absurdo para cada caso particular.

Las analogías mecánicas y físicas también se aplicaron, frecuentemente con éxito, en los siglos siguientes para la resolución de problemas matemáticos difíciles. Por ejemplo, a mediados del siglo XVIII el académico D. Bernoulli partiendo de consideraciones físicas encontró la solución general de la ecuación de oscilaciones de una cuerda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \text{ en la forma } y = \sum_1^{\infty} \alpha_k \text{sen } \frac{k\pi x}{l}.$$

D. Bernoulli partió de que el sonido producido por una cuerda vibrante de longitud l con extremos fijos es igual a la suma del tono fundamental y los sobretonos. La desviación de la cuerda (de la ordenada) en cada punto, en todo momento, es igual a la suma algebraica de las ordenadas, correspondientes al tono fundamental y a los sobretonos para un momento de tiempo dado. Puede además indicarse en calidad de ejemplo a B. Riemann, el cual a mediados del siglo XIX demostró, partiendo de la representación de una superficie dada como de un conductor eléctrico cargado homogéneamente y considerando el campo potencial, que en cada superficie de Riemann cerrada existe una función algebraica no constante.

La siguiente variedad de los métodos infinitesimales de la remota antigüedad es el método que puede caracterizarse como el método de las sumas integrales. Los más brillantes ejemplos de aplicación de este método se encuentran en las obras de Arquímedes "Sobre la esfera y el cilindro", "Sobre las espirales", "Sobre los conoides y esferoides". La esencia de este método en su aplicación, por ejemplo, al cálculo de los volúmenes de los cuerpos de revolución consiste en lo siguiente: un cuerpo de revolución se divide en partes y cada parte se aproxima por cuerpos inscritos y circunscritos, cuyos volúmenes pueden ser calculados. La suma de los volúmenes de los cuerpos circunscritos será mayor y la suma de los cuerpos inscritos, menor que el volumen del cuerpo de revolución. Ahora queda escoger los cuerpos que se aproximan superior e inferiormente de tal manera que la diferencia de sus volúmenes pueda hacerse tan pequeña como se quiera. Esto

se logra por la elección de los cilindritos correspondientes, en calidad de cuerpos indicados (fig. 17).

Como ejemplo del método de las sumas integrales citemos el de la resolución de Arquímedes del problema del cálculo del volumen de un elipsoide

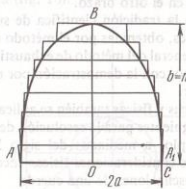


Fig. 17

de revolución en las obras "Sobre los conoides y esferoides". Así él denomina los cuerpos formados por el giro de las secciones cónicas alrededor del eje mayor: los conoides son los paraboloides e hiperboloides de revolución y los esferoides son los elipsoides de revolución. A la resolución concreta del problema se antepone el lema: si está dado un segmento de conoide, seccionado por un plano, perpendicular al eje, o un segmento de esferoide, seccionado de la misma manera, entonces pueden ser inscrito en él y circunscrito alrededor de él figuras que constan de cilindros de igual altura y de tal forma que la figura circunscrita supere a la inscrita en menos que cualquier magnitud sólida (volumétrica).

Así, sea dado un cuerpo de revolución ABC y una magnitud sólida (de volumen) $\varepsilon > 0$. Arquímedes divide BO en n partes iguales y construye cilindros circunscritos e inscritos, cuya suma de volúmenes designa por V_{cir} y V_{ins} respectivamente. Su diferencia es igual al volumen del cilindro AA_1 , esto es, $\pi a^2 \cdot \frac{b}{n}$, el cual puede ser hecho tan pequeño como se quiera, eligiendo n lo suficientemente grande.

Ahora se puede suponer que en el dibujo dado está representado un segmento de elipsoide de revolución y se plantea el problema de calcular su volumen. En este caso

$$V_{\text{cir}} = \pi ha^2 + \pi hx_1^2 + \pi hx_2^2 + \dots + \pi hx_{n-1}^2 = \pi h \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 (x_0 = a).$$

El problema se reduce a sumar los cuadrados de los números. Después Arquímedes realiza transformaciones geométricas equivalentes a las siguientes transformaciones analíticas: ya que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, entonces

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 - y^2) \text{ y para cada sección}$$

$$x_1^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 - h^2),$$

$$x_2^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 - (2h)^2),$$

$$\dots$$

$$x_{n-1}^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 - [(n-1)h]^2),$$

de donde

$$V_{\text{cir}} = \sum_{k=1}^{n-1} \pi hx_k^2 = \frac{\pi a^2 h}{b^2} \left[nb^2 - h^2 \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^2 \right],$$

donde ν son números naturales consecutivos. Para encontrar la suma de los cuadrados de los últimos, Arquímedes aplicó estimaciones geométricas de la forma

$$\frac{n^3 h^2}{3} < \sum_{\nu=1}^{n-1} (\nu h)^2 < \frac{(n+1)^3 h^2}{3},$$

dadas por él en la obra "Sobre las espirales". De hecho él realiza las estimaciones geométricas de la forma

$$\frac{n^3 h^3}{3} < \sum_{\nu=1}^n (\nu h)^2 h < \frac{(n+1)^2 h^3}{2},$$

de donde (como $nh = b$)

$$\frac{b^3}{3} < \sum_{\nu=1}^n (\nu h)^2 h < \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{n} + \frac{b^3}{n^2} + \frac{b^3}{3n^3},$$

lo que en cierto grado es equivalente a la estimación para $\int_a^b x^2 dx$.

De estas estimaciones él obtiene $V_{\text{cir}} > \frac{\pi a^2}{b^2} h \left[nb^2 - \frac{n^3}{3} h^2 \right] = \pi a^2 b \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} \pi a^2 b$. Análogamente $V_{\text{ins}} < \frac{2}{3} \pi a^2 b$. Pero como, de acuerdo al lema, $V_{\text{cir}} - V_{\text{ins}} < \varepsilon$, entonces el volumen buscado del segmento es $V = \frac{2}{3} \pi a^2 b$, esto es, es igual al volumen duplicado del cono con la misma base y altura que el segmento. La unicidad del límite, Arquímedes la demuestra, como en todos los otros casos, por reducción al absurdo.

El ejemplo citado muestra que en la matemática antigua ya se formaba una serie de elementos de integración definida, en primer término la construcción de sumas integrales superiores e inferiores, análogas en cierta medida a las sumas de Darboux.

Otro ejemplo del método de las sumas integrales es la determinación del área de la primera espira de la espiral de Arquímedes: $\rho = \varphi$. La espiral se introduce cinemáticamente como trayectoria de un punto, sometido a dos

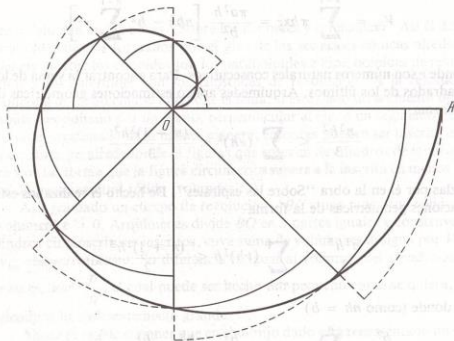


Fig. 18

movimientos uniformes: un giro del rayo alrededor del punto y un movimiento del punto a lo largo del rayo desde el centro (fig. 18). Para la determinación del área de la primera espira, se divide la circunferencia ($r = a$)

en n partes. A continuación se construyen dos sucesiones de sectores circulares inscritos y circunscritos, cuyos radios son $\frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \frac{3a}{n}, \dots, \frac{na}{n} = a$.

Sus áreas: $S_k = \frac{\pi r_k^2}{n}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Estas sucesiones forman figuras inscritas y circunscritas, el área de las cuales es respectivamente mayor y menor que el área de la espira de la espiral:

$$\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{ka}{n} \right)^2 < S < \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{ka}{n} \right)^2, \quad \delta$$

$$\frac{\pi a^2}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 < S < \frac{\pi a^2}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2.$$

Sobre la base de las estimaciones citadas en el ejemplo anterior,

$$V_{\text{ins}} < \frac{\pi a^2}{n^3} \cdot \frac{n^3}{3} = \frac{\pi a^2}{3}, \quad \text{y además } V_{\text{cir}} > \frac{\pi a^2}{3}.$$

Pero la diferencia entre las sumas que aproximan puede ser hecha tan pequeña como se quiera. Por consiguiente $S = \frac{\pi a^2}{3}$.

Parecería que la analogía del método de las sumas integrales de los antiguos y la integración definida es total. Tal impresión se refuerza porque nosotros modernizamos la forma de exposición. Por eso, es necesario señalar también sus diferencias. La cuestión está en que el método de las sumas integrales de los antiguos se apoya en un concepto de área intuitivo, no rigurosamente definido y no utiliza el aparato aritmético-algebraico. En él no se introducen y no se definen los conceptos generales necesarios: límite, integral, suma infinita, etc. y no se estudian las condiciones de aplicabilidad de los teoremas enunciados. El método se aplica para cada problema concreto sin la extracción y formalización de sus fundamentos teóricos generales.

Junto al método de las sumas integrales, en las matemáticas antiguas fueron elaborados métodos, los cuales pueden ser retrospectivamente valorados como diferenciales. Como ejemplo de semejantes métodos puede servir el método para encontrar la tangente a la espiral en la obra de Arquímedes "Sobre las espirales".

El problema de hallar la tangente a cualquier punto P de la espiral se resuelve por el método ordinario de determinación de la magnitud correspon-

diente a la subtangente OT (fig. 19). Previamente se demuestra el lema, de que $\angle OPT < \frac{\pi}{2}$ ($\angle POT = \frac{\pi}{2}$, por construcción). Después se considera el triángulo diferencial $\triangle FPR$, en esencia formado por el radio vector,

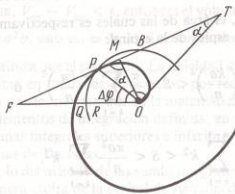


Fig. 19

próximo al dado, el arco PR de la circunferencia de radio OP y la prolongación de la tangente FP . Este triángulo es rectángulo ($\angle PRF = \frac{\pi}{2}$) y aproximadamente semejante al triángulo OPT , ya que $\angle PTO = \angle FPR$.

De donde $\frac{FR}{PR} = \frac{PO}{OT}$, o, si lo llevamos a una simbólica más cómoda para nosotros ($OP = \rho$, $PR = \rho \Delta\varphi$, $FR = \Delta\rho$), $\frac{\Delta\rho}{\rho \Delta\varphi} = \frac{\rho}{OT}$, de donde $OT = \rho^2 \frac{\Delta\varphi}{\Delta\rho}$. Esta relación general en el caso de la espiral de Arquímedes $\rho = \varphi$ toma la forma $OT = \rho^2$, u $OT = \rho\varphi$.

De esta manera, el método de Arquímedes consiste en la introducción prácticamente de un triángulo suficientemente pequeño, formado por el incremento del radio-vector polar de la tangente, por el correspondiente arco de circunferencia pequeño y por el segmento de la tangente. Este juega el papel de triángulo diferencial lo que da fundamento para considerar el método del orden de los infinitesimales.

Junto a otros problemas y métodos de la antigüedad, el triángulo diferencial de Arquímedes fue objeto de constante investigación de una serie de eminentes matemáticos de los siglos XVI—XVII. Pascal y Barrow, explícitamente lo introdujeron en la matemática: el primero en la estructura de sus métodos integrales, el segundo durante el trazado de tangentes y

la demostración de la dependencia mutuamente recíproca entre las cuadraturas y las tangentes. Leibniz utilizó este triángulo como uno de los puntos de partida en la creación de su cálculo de diferenciales.

Con los métodos infinitesimales pueden relacionarse también una serie de otros procedimientos y métodos de los antiguos. Ante todo señalaremos el procedimiento de Dinóstrato (siglo IV a. n. e.), el cual buscando el punto de intersección de la cuadratriz con el eje de las abscisas, halló, en esencia, el valor de los límites

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \varphi}{\varphi} = 1, \quad \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\text{tg } \varphi}{\varphi} = 1.$$

Las ordenadas de los puntos de la cuadratriz, como es conocido, son proporcionales a los ángulos correspondientes. De aquí, denotando $OA =$

$= r$, obtenemos para cierto punto arbitrario $H(HL = y)$: $\frac{r}{y} = \frac{\pi}{\varphi}$, de

donde $\frac{2r}{\pi} = \frac{y}{\varphi}$ (fig. 20). Teniendo en cuenta que y es la línea del seno para el círculo de radio OH y la línea de la tangente para el círculo de radio OL ,

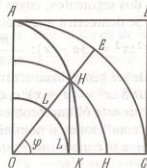


Fig. 20

obtenemos

$$\frac{2r}{\pi} = OH \cdot \frac{\text{sen } \varphi}{\varphi} = OL \cdot \frac{\text{tg } \varphi}{\varphi}.$$

Cuando

$$\varphi \rightarrow 0 \quad OH \rightarrow OK \quad \text{y} \quad OL \rightarrow Ok.$$

Consecuentemente,

$$OK = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{2r}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\text{sen } \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{2r}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\text{tg } \varphi}$$

El hecho de que $OK = \frac{2r}{\pi}$, Dinóstrato lo demuestra por reducción al absurdo, apoyándose en la continuidad de la cuadratriz y la desigualdad $\text{sen } \varphi < \varphi < \text{tg } \varphi$, demostrando así ambos límites notables.

Sea $OK < \frac{2r}{\pi}$. En la cuadratriz se encuentra un punto H , para el cual $OH = \frac{2r}{\pi}$ para el correspondiente ángulo φ . Entonces la ordenada de este punto es $y = \frac{2r}{\pi} \text{sen } \varphi$ y simultáneamente $y = \frac{r\varphi}{\frac{\pi}{2}}$, de las propiedades de la cuadratriz. De esto debe deducirse que, $\text{sen } \varphi = \varphi$ lo cual es imposible.

La suposición de que $OK > \frac{2r}{\pi}$ de la misma manera conduce a la conclusión imposible $\varphi = \text{tg } \varphi$.

Los métodos infinitesimales se elaboraban también para la resolución de clases de problemas extremos. En la obra de Arquímedes "Sobre la esfera y el cilindro" (libro 2, párrafo 4) se plantea el problema de la división de la esfera (de radio a) en dos segmentos, cuyos volúmenes se encuentren en una relación dada $m:n$. Se demuestra que la altura del segmento mayor x satisface la proporción $4a^2 \cdot x^2 = (3a - x) \cdot \frac{m}{m+n} \cdot a$. Se demuestra además que este problema puede ser generalizado: dividir el segmento a en dos partes x y $a - x$ de modo que $S \cdot x^2 = (a - x) \cdot c$, donde S es un área dada y c un segmento dado. Para que este último problema tenga solución no negativa es necesario imponer condiciones al dominio de los valores de S y c .

De manuscritos posteriores se conoce que Arquímedes, buscando la resolución geométrica de la ecuación $x^2(a - x) = Sc$, encontró de forma correcta que el máximo de su miembro izquierdo en la región $0 < x < a$ se alcanza cuando $x = \frac{2}{3}a$; así que él resolvió un problema extremal.

Finalmente, en las matemáticas antiguas se consideraban también los denominados problemas variacionales. En las obras de Arquímedes semejante problema se encuentra sólo una vez en la proposición final de la obra "Sobre la esfera y el cilindro". Aquí se consideran segmentos con igual superficie de diferentes esferas y se demuestra que el segmento que tiene forma de semiesfera tiene el mayor volumen. Algo después, apareció la obra de Zenodoro, en la cual la teoría de las figuras isoperimétricas fue desarrollada rigurosa y completamente para los polígonos, círculos y en cierta medida para los poliedros, los cuerpos simples de revolución y la esfera.

Las proposiciones de carácter extremal estaban ampliamente difundidas en aquella época, algunas veces teniendo un carácter no puramente matemático, sino mecánico e incluso de filosofía natural.

Los métodos infinitesimales de Grecia Antigua sirvieron de punto de partida para muchas investigaciones de los científicos-matemáticos de los siglos XVI y XVII. Particularmente con mayor frecuencia se estudiaban los métodos de Arquímedes. Leibniz, uno de los fundadores del análisis matemático escribió sobre esto que, estudiando los trabajos de Arquímedes cesas de admirarte de los éxitos de los matemáticos actuales.

Los métodos infinitesimales constituyen aquella parte de las matemáticas antiguas, la cual se formaba bajo la presión directa de las exigencias científico-prácticas. Ellos salían de los límites de los sistemas matemáticos cerrados formados en aquella época, contruidos sobre la base de un número mínimo de condiciones iniciales. En los métodos infinitesimales obtuvieron la primera manifestación los elementos de los nuevos recursos matemáticos, los cuales condujeron a la creación del análisis infinitesimal. La relación de contradicción entre el conjunto de semejantes métodos y los sistemas lógico-matemáticos cerrados en la Grecia Antigua constituyen uno de los ejemplos históricos de contradicciones, las cuales han sido la fuerza motriz del desarrollo de las ciencias matemáticas.

3.4. Teorías y métodos matemáticos de la antigüedad avanzada

Dentro de la compleja y variada herencia científica de los sabios de la antigüedad nosotros extraemos en calidad de objeto de estudio preferiblemente aquellas facetas que llevan a la creación de teorías matemáticas. Esto último es el rasgo más característico de la creación matemática en la época de la antigüedad griega. Al mismo tiempo las teorías matemáticas de los griegos antiguos constituyen la base clásica de muchos problemas importantes relacionados con las bases de las matemáticas modernas, haciéndolas especialmente valiosas.

Desde la época de Euclides y Arquímedes, las matemáticas antiguas cambiaron fuertemente tanto por su forma como por su contenido. En virtud de causas que caracterizaremos más adelante, el proceso de formación de las teorías matemáticas se fue haciendo más pausado y finalmente se interrumpió. Sin embargo, este proceso fue largo y no se manifestó inmediatamente. Los jóvenes contemporáneos de Arquímedes y los sabios de la antigüedad más avanzada dejaron en sus obras ejemplos de investigaciones teóricas e incluso teorías matemáticas desarrolladas. Entre ellas el primer lugar por el nivel del desarrollo teórico y la completitud de los hechos considerados lo ocupa la teoría de las secciones cónicas.

Antes indicamos que las secciones cónicas entraron en las matemáticas

antiguas como método de resolución de problemas que no admitían resolución con los métodos del álgebra geométrica, esto es, a través de construcciones con ayuda de la regla y el compás. Para su obtención se utilizaba el lugar geométrico de los puntos de intersección de la superficie de un cono (acutángulo, obtusángulo o rectángulo respectivamente) con el plano perpendicular a una de las generatrices del cono. Con ayuda de estas curvas Menechme (siglo IV a. n. E.) dio solución al problema de la duplicación del cubo.

No se conservó información acerca de cómo fueron por primera vez encontradas las propiedades de las secciones cónicas, las cuales representaban el equivalente geométrico de sus ecuaciones algebraicas. Sin embargo, el problema del descubrimiento de estas propiedades es resoluble por métodos elementales, lo que confirman las reconstrucciones históricas que se tienen.

Sea, por ejemplo, dado un cono con vértice en T (Fig. 21). La sección de él a través del eje es KTC , la traza de la sección circular paralela a la base es GH , la traza de la sección perpendicular a la generatriz es AP . La perpendicular a la sección KTC en el punto P hasta su intersección con la superficie del cono la denotamos por y .

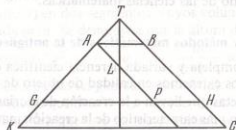


Fig. 21

Entonces $y^2 = PG \cdot PH = \sqrt{2} AP \cdot AB = 2AP \cdot AL$. Si denotamos $AP = x$, $AL = p$, entonces obtenemos la ecuación de la parábola: $y^2 = 2px$.

En caso de que el cono no sea rectangular, entonces en el dibujo se agrega sólo el punto A_1 de intersección con la segunda generatriz o con su prolongación. Designando en este caso $AP = X$, $A_1P = x_1$, el segmento hasta el eje $AL = p$ (semiparámetro), $AA_1 = 2a$, obtenemos

$$y^2 = \frac{2AL}{AA_1} \cdot AP \cdot A_1P, \text{ ó } y^2 = \frac{p}{a} xx_1$$

Esta reconstrucción pertenece a H. G. Zeuthen. Ella demuestra convincentemente la posibilidad de deducción de las propiedades de las secciones

cónicas por métodos de la geometría elemental. Con ello, se obtiene una ecuación referida a los ejes, además, el parámetro $2p$ obtiene una interpretación geométrica cómoda (el semiparámetro p es igual al segmento AL desde la superficie cónica hasta el eje).

El interés hacia las secciones cónicas creció a medida que aumentaba la cantidad de problemas resueltos con su ayuda. Las propiedades de las secciones cónicas se convirtieron en objeto de investigación especial teórica. A las secciones cónicas fueron dedicadas una serie de obras. Sin embargo, semejante a como esto tuvo lugar después de la aparición de los "Elementos" de Euclides, todas estas obras fueron olvidadas cuando surgió el trabajo de Apolonio sobre las secciones cónicas. El no tiene iguales por su completitud, generalidad y exposición sistemática de la teoría de las secciones cónicas.

Apolonio (alrededor del año 200 a. n. e.) es un contemporáneo joven y un rival científico de Arquímedes. Un tiempo prolongado vivió y trabajó en Alejandría. Después regresó a su patria en la ciudad de Pérgamo (en el



Fig. 22

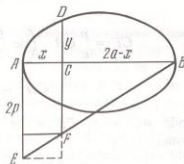


Fig. 23

Asia Menor), donde fue la cabeza de una escuela matemática. De las numerosas obras matemáticas de Apolonio hasta nosotros llegaron en lo fundamental sólo 7 de los 8 libros de las "Secciones Cónicas". Los primeros cuatro libros llegaron hasta nosotros en griego, en el idioma original, los

libros 5—7 se conservaron sólo en su traducción al árabe; el supuesto contenido del libro octavo lo reconstruyó el astrónomo y físico inglés E. Halley (1656—1742) partiendo del contenido de los primeros siete libros y de las informaciones comunicadas por los comentaradores de Apolonio.

La teoría de las secciones cónicas es desarrollada por Apolonio sobre la base de premisas iniciales suficientemente generales. De una vez introduce ambas cavidades de un cono arbitrario con base circular y examina sus secciones planas arbitrarias (fig. 22). Cada una de las curvas que así se obtienen las considera con relación a un cierto diámetro y a una familia de cuerdas conjugadas a él. De la clase de curvas que se forman separa las formas canónicas en las cuales los diámetros son perpendiculares a las cuerdas conjugadas a él. Apolonio indica que estas formas canónicas son secciones de los conos de revolución.

Con este método de estudio se garantiza la unanimidad de acceso a todos los tipos de secciones cónicas. Con esto, se consideran a la vez ambas ramas de la hipérbola. La referencia a los diámetros y a las cuerdas conjugadas con ellos contiene en sí la idea del método de coordenadas, aunque en forma imperfecta.

La propiedad de las curvas, que es el equivalente geométrico de sus ecuaciones, se formula con la aplicación de los recursos del álgebra geométrica. Sean dadas las secciones cónicas: la elipse y la hipérbola (fig. 23 y 24). Denotemos los diámetros de ambas por AB . Si del extremo A del eje se bajan las perpendiculares $AE = 2p$ y CF , entonces el cuadrado, constituido sobre CD , será igual al rectángulo AF :

$$CD^2 = CF \cdot AC$$

Pero

$$CF = \frac{p}{a} CB \quad \left(\text{de } \frac{CF}{2p} = \frac{CB}{2a} \right) \text{ y por esto}$$

$$CD^2 = \frac{p}{a} AC \cdot CB$$

Poniendo $AC = x$, $CB = 2a - x$, obtenemos respectivamente las ecuaciones:

$$y^2 = \frac{p}{a} (2a - x)x \quad \text{y} \quad y^2 = \frac{p}{a} (2a + x)x$$

En el primer caso el rectángulo CF se utiliza por defecto, en el segundo por exceso. Si no hay defecto ni exceso entonces tiene lugar la parábola: la simple igualdad entre el cuadrado y el rectángulo de lado $2p$.

El álgebra geométrica, en términos de la cual está expresado el equivalente geométrico de las ecuaciones de las secciones cónicas, juega aquí

aproximadamente el mismo papel, que el álgebra en la geometría analítica. Naturalmente, que para tales conclusiones sobre la utilización del álgebra y el método de coordenadas en la teoría de las secciones cónicas de Apolonio no debe olvidarse que, en primer lugar, los sistemas de coordenadas de

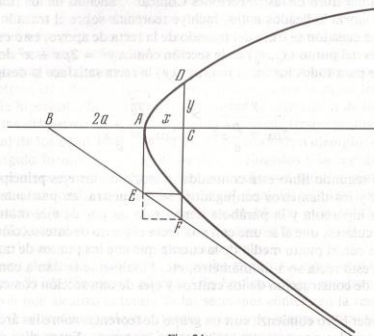


Fig. 24

Apolonio son inseparables de sus curvas individuales; en segundo lugar, no se introducen aún las coordenadas para todos los puntos del plano, tanto pertenecientes, como no pertenecientes a la curva dada; en tercer lugar, aquí aún no se habla sobre la reducción del problema de la relación entre los puntos y los ejes de coordenadas a los cálculos, ya que no hay, en general, una tendencia a reducir los problemas geométricos a los algebraicos.

En calidad de ejemplo del estilo de razonamiento de Apolonio citemos su definición de la parábola $y^2 = 2px$: "Si un cono se interseca por un plano por el eje y se interseca además por otro plano, el cual interseca la base del cono por una recta, perpendicular a la base del triángulo respecto al eje, y si además de esto el diámetro de la sección es paralelo a uno o a otro de los dos lados del triángulo respecto al eje, entonces cada recta, la cual se traza desde la sección del cono, paralelamente a la sección común del plano en cuestión y a la base del cono, hasta el diámetro, tomada al cuadrado, será igual al rectángulo encerrado directamente desde el diámetro, seccionado desde él hasta el vértice de la sección y alguna otra recta, la cual tiene

con la recta, tomada entre el ángulo del cono y el vértice de la sección, la misma relación que el cuadrado de la base del triángulo, respecto al eje, al rectángulo encerrado por los restantes dos lados del triángulo. Tal sección se denomina "parábola".

El primer libro de las "Secciones Cónicas", además de los fundamentos de la teoría indicados antes, incluye teoremas sobre el trazado de tangentes. La cuestión se trata del trazado de la recta de apoyo, esto es, la recta a través del punto (x_0, y_0) de la sección cónica $y^2 = 2px \pm x^2$ de tal manera, que para todos los otros puntos (xy) la recta satisface la desigualdad

$$\frac{y^2}{2px \mp \frac{p}{a} x^2} > \frac{y_0^2}{2px_0 \mp \frac{p}{a} x_0^2}$$

En el segundo libro está contenida la teoría de los ejes principales, las asíntotas y los diámetros conjugados. Se demuestra, en particular que la elipse, la hipérbola y la parábola tienen sólo un par de ejes mutuamente perpendiculares, que si se une con una recta el punto de intersección de dos tangentes con el punto medio de la cuerda que une los puntos de tangencia, entonces esta recta será un diámetro, etc. Finalmente se dan a conocer los métodos de construcción de los centros y ejes de una sección cónica dada y otros.

El tercer libro comienza con un grupo de teoremas sobre las áreas de figuras formadas por secantes, asíntotas y tangentes. Entre ellas está, por ejemplo, el ampliamente conocido teorema: Si desde un punto trazamos dos tangentes a una sección cónica y trazamos paralelamente a ellas dos secantes hasta su intersección, entonces la relación de los cuadrados construidos sobre las tangentes, será igual a la relación de los rectángulos construidos sobre las secantes y sus segmentos exteriores. En este mismo libro se encuentran los teoremas sobre los polos y polares y sobre la obtención de secciones cónicas con ayuda de dos haces proyectivos u homográficos. Finalmente, a través de la propiedad de las áreas correspondientes se consideran los casos más simples de trazado de tangentes sin hacer uso de los puntos de tangencia y, además, la teoría de los focos de la elipse e hipérbola.

El primer grupo de proposiciones del cuarto libro está relacionado con la división armónica de rectas. A continuación se descifra detalladamente la cuestión sobre el mayor número de puntos de intersección y de contacto de dos secciones cónicas. Los libros 1—4 frecuentemente los caracterizan como contentivos de la exposición de las propiedades fundamentales de las secciones cónicas. Los siguientes libros se consideran relativos a cuestiones especiales de la teoría de las secciones cónicas.

En el libro quinto por vez primera se resuelven problemas extremales

del género de problemas sobre la menor distancia desde un punto dado hasta una sección cónica. Aquí surgen elementos de la teoría de los desarrollos en la forma de determinación del lugar geométrico de los centros de curvatura.

El libro sexto contiene un análisis del problema de semejanza de las secciones cónicas y la generalización del problema sobre la construcción de una familia de conos que pasan a través de una sección cónica dada. En el último de los libros conocidos, el séptimo, se investigan las cuestiones relacionadas con las funciones de las longitudes de los diámetros conjugados, parámetros, etc. Por ejemplo, se demuestra que para la elipse (respectivamente la hipérbola) la suma (respectivamente la diferencia) de los cuadrados de los diámetros conjugados es igual a la suma (respectivamente la diferencia) de los cuadrados de los ejes. O tenemos otro ejemplo: el área de un triángulo formado por dos diámetros conjugados y la cuerda que une sus extremos es constante. La elaboración de diorismos (limitaciones que se imponen a las condiciones del problema) al final del séptimo libro indica, que el octavo libro, posiblemente, contiene problemas próximos al material teórico de libro séptimo. Así interpretó el octavo libro E. Halley, trabajando sobre la reconstrucción del texto extraviado.

Hemos dedicado relativamente mucho espacio a estas anotaciones de cada libro de las "Secciones cónicas" de Apolonio, para mostrar cuán alto es el nivel que alcanzó la teoría de las secciones cónicas en la remota antigüedad. Los resultados de esta teoría más tarde fueron utilizados por los matemáticos en la creación de la geometría analítica.

De lo expuesto aquí y antes se ve, que la mayoría de las teorías matemáticas tuvieron como tema objetos geométricos. El carácter geométrico de la forma de la teoría matemática se convirtió con el transcurso del tiempo en su atributo indispensable. Con ello, el carácter geométrico se identificaba con la importancia general de una teoría matemática, ya que se consideraba que las magnitudes geométricas tienen la ventaja de una mayor generalidad en la clase de las magnitudes matemáticas.

No hay, desde luego, fundamento para afirmar que las formas geométricas agotaban todo el conjunto de formas de la actividad matemática. Los griegos antiguos en el campo práctico aplicaban un gran complejo de métodos aritmético-computacionales. Estos métodos penetraron también en los trabajos teóricos, completando la teoría con elementos aritmético-algebraicos y teórico-numéricos.

La incomodidad del sistema alfabético de numeración y la no elaboración de los símbolos resultaba un serio obstáculo para las operaciones de cálculo. Durante cierto tiempo también las exigencias de la práctica en relación con esto no fueron suficientes para estimular las operaciones con grandes números. Tras una colección de números relativamente limitada,

los cuales tenían una denominación, aparecía el umbral, después del cual el número de elementos se consideraba no calculable.

Para eliminar semejante imperfección y mostrar la prolongación ilimitada de los números de la serie natural, Arquímedes escribió una obra especial bajo el nombre "Psammit" (cálculo de arena). En ella se construye un sistema de números, se muestra que puede prolongarse tanto como se quiera y servir para contar cualquier conjunto finito de objetos. El sistema de números de Arquímedes fue construido según el principio decimal: las unidades (mónadas), las decenas (décadas), las centenas (hécadas), los miles (killiadas), las decenas de miles (miriadas), etc. La miriada después se consideraba como base del cálculo hasta el número de miriada de miriadas (10^8). Los números desde el 1 hasta 10^8 constituyen la primera octava (de la palabra octo, ocho) y los números que entraron en ella se denominaban primarios. Después sigue: la segunda octava ($10^8 - 10^{16}$), la tercera ($10^{16} - 10^{24}$), etc., hasta la octava de los números octádicos ($10^8 - 10^{72}$), los cuales cierran el primer período. Ello constituye la unidad de partida del segundo período. La octava de las unidades de este período ($10^8 - 10^{72 + 8}$) será la unidad de los segundos números del segundo período, etc. Luego siguen las unidades de los números del tercer período ($10^{72} - 10^{80}$), cuarto ($10^{80} - 10^{88}$), etc. hasta la octava de los números octádicos del octavo período ($10^{10^2 - 8 \cdot 10^8}$).

Las números enormes así obtenidos se interpretaban como transfinitos peculiares de los antiguos, cuya escala de crecimiento podía ser prolongada indefinidamente. Ellos bastaban y sobran incluso para el problema de la determinación de orden del número de granos de arena que llenan totalmente todo el universo.

Para hacer el problema lo más determinado posible, Arquímedes, partiendo de las ideas heliocéntricas de Aristarco de Samos, representa el universo como una esfera, en el centro de la cual se encuentra el Sol. El radio de la esfera se considera desde el Sol hasta las estrellas inmóviles. Para la precisión ulterior del problema se considera que el diámetro del universo es tantas veces mayor que el diámetro del sistema solar, cuantas veces este último es mayor que el diámetro de la Tierra. Arquímedes utiliza los datos experimentales de los astrónomos, redondeándolos por exceso.

La unidad de medida del universo, el grano de arena, se toma como 0,0001 de un grano de amapola de la cual se necesitan 40 para compararse con el ancho de un dedo humano. Los cálculos de Arquímedes mostraron que el número buscado de granos de arena no es mayor que 10^{63} o mil (10^3) miriadas (10^4) de los números octavos (10^{78}) tomados del primer período.

A Arquímedes se le adjudica también otro problema en el cual se exige operar con números enormemente grandes, el llamado problema sobre los

toros de Helios (dios del Sol). Para abreviar designaremos con las letras b, n, c, m , el número de toros respectivamente de pelaje blanco, negro, cobrizo y manchado y con las letras b', n', c', m' , el número de vacas del correspondiente tipo de pelaje. En forma de versos se plantea el problema de determinar la cantidad de ganado, partiendo de las siguientes condiciones:

$$1. b = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)n + c; \quad 4. b' = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot (n + n'); \\ 2. n = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)m + c; \quad 5. n' = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \cdot (m + m'); \\ 3. m = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)b + c; \quad 6. m' = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \cdot (c + c'); \\ 7. c' = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \cdot (b + b');$$

8. $b + n$ es un cuadrado exacto;
9. $m + c$ es un número triangular;
10. $b + n + c + m$ es también un número triangular.

Las primeras 7 condiciones componen un sistema de siete ecuaciones con ocho incógnitas. Las menores soluciones numéricas dan una cantidad de 50 389 073 cabezas de ganado. Las condiciones 8, 9, 10 conducen, según cálculos posteriores, a encontrar la menor solución de número entero de la ecuación indeterminada $x^2 - 4\,729\,494\,y^2 = 1$, la cual se expresa sólo con un número de 206 545 cifras.

El cálculo del valor de números, irracionales o trascendentes, promovió la idea de su aproximación por números racionales. Por ejemplo, en el trabajo de Arquímedes "Medición del círculo" el número π se calcula con ayuda de polígonos inscritos y circunscritos y da una aproximación de $3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}$. La estimación superior e inferior se introduce también

para el cálculo de $\sqrt{3}$: $\frac{1351}{780} < \sqrt{3} < \frac{265}{133}$ y otras irracionalidades cuadráticas. Sólo existen reconstrucciones históricas de la mayoría de los métodos de búsqueda de estas estimaciones; en las fuentes antiguas la información sobre esto es insuficiente.

Sin embargo, el nivel de las aplicaciones prácticas de cálculo de muchas teorías matemáticas desarrolladas seguía siendo, con todo, relativamente bajo. Esto se explica principalmente por el carácter del contenido y la forma de estas teorías: por la separación de la práctica, lo forzado de la forma geométrica, la limitación del conjunto de métodos aplicados, la ausencia de

la trigonometría. Las exigencias que la astronomía planteaba a las matemáticas se pronunciaron con suficiente fuerza sólo después.

Tras la época de la vida y actividad de Euclides, Arquímedes y Apolonio comenzó una época de cambio rápido y radical de las matemáticas antiguas, tanto por su contenido como por su forma. Estos cambios en lo fundamental estuvieron condicionados por los grandiosos cambios, sucedidos entonces, en la vida económica, social, política y cultural de los pueblos.

El proceso principal de carácter económico fue la descomposición del modo de producción esclavista, la cual condujo a una enorme transformación revolucionaria y al establecimiento de la estructura feudal. F. Engels caracterizó así este proceso en su aplicación al Imperio Romano: "La esclavitud antigua perdió su significado. Ni en la gran agricultura ni en las manufacturas de la ciudad ella ya no producía ganancias que justificaran el trabajo invertido, el mercado para sus productos desapareció. Y en la pequeña agricultura y en los pequeños oficios, a cuyas dimensiones se redujo la enorme producción de la época de florecimiento del Imperio, no pudo encontrar aplicación el gran número de esclavos. Sólo para los esclavos que servían en la economía doméstica y en la vida suntuosa de los ricos quedaba todavía lugar en la sociedad. Pero la esclavitud en desaparición aún estaba en condiciones de sostener la idea de que cada labor productiva era un asunto de esclavos, indigno de los romanos libres, y tales eran entonces todos los ciudadanos. El resultado fue, por un lado, el aumento del número de esclavos liberados, que estaban demás y se convirtieron en una carga innecesaria y por otro lado, el aumento del número de colonos y libertos empobrecidos... La esclavitud cesó de resarcir los gastos y por eso murió. Pero la esclavitud agonizante dejó su aguijón venenoso en la forma del desdén de los libertos al trabajo productivo. Este fue el callejón sin salida en el cual cayó el Imperio Romano: la esclavitud se hizo económicamente insostenible, el trabajo de los hombres libres se consideraba despreciable desde el punto de vista moral. Lo primero ya no podía ser, lo segundo aún no podía ser la forma fundamental de producción social. Salir de esta situación se podía sólo con una revolución radical".¹⁾

Los cambios radicales en la estructura económica de la sociedad se acompañaban de grandes acontecimientos políticos. Estos acontecimientos, como regla, sucedían en una atmósfera de guerras destructoras que influían nefastamente en la ciencia y la cultura. El imperio mundial de los romanos en el transcurso de las guerras de conquista destruyó todos los centros científicos y no creó condiciones para su restablecimiento y desarrollo. El posterior hundimiento de Roma también se produjo en un am-

biente de guerras y destrucciones. Los Estados feudales de Europa, surgidos como resultado de todos estos acontecimientos eran al comienzo, como regla, pequeños, su economía, natural, la enseñanza e instrucción y también el intercambio cultural y científico eran insignificantes.

El significado de Alejandría como centro científico principal, en esta época decaee. Por algún tiempo todavía se llevan a cabo investigaciones científicas. Sin embargo, una serie de sucesos desfavorables reduce este trabajo a la nada. Los incendios del Museo causaron una pérdida irreparable a la biblioteca. Al comienzo de nuestra era los científicos fueron privados del apoyo material del Estado. Bajo la presión de la reacción religiosa se cerraron los templos no cristianos y las escuelas adjuntas a ellos. En el año 412 el último grupo de científicos alejandrinos fue dispersado, su dirigente, la primera mujer matemática que conoció la historia, Hipatia, fue destrozada por instigación de los sacerdotes cristianos, la biblioteca fue destruida. Los científicos que quedaron vivos se reunieron en Atenas donde trabajaron hasta el año 529 cuando su actividad fue prohibida por un mandato oficial.

Sobre los cambios que ocurrieron en las matemáticas en este periodo de tiempo podemos juzgar por las obras matemáticas que han llegado hasta nosotros. Estas últimas muestran, ante todo, que bruscamente disminuyó y después se suspendió totalmente el proceso de formación de teorías matemáticas. Los resultados a veces muy importantes por su esencia y bellos en su realización, se hicieron cada vez más particulares y especiales. Citemos dos ejemplos. Así, Nicomedes (siglo II a. n. e.) investigó un tipo especial de la conoide, curva plana que se obtiene por aumento o disminución del radio vector de una recta dada (en el caso general de una curva dada) en una misma magnitud (fig. 25). Esta curva Nicomedes la obtuvo investigando el problema de interpolaciones para la resolución de los problemas sobre la trisección del ángulo y la duplicación del cubo. Con investigaciones de este tipo se relaciona el estudio de la cisoide por Deocles como el lugar geométrico de los puntos de un haz de rectas con centro en A , tales que $AM = PQ$ (véase fig. 26). Estas y otras investigaciones, resultados particulares (del género de los problemas isoperimétricos de Zenodoro), por mucho tiempo aparecieron en las matemáticas. Sin embargo, ellos constituían solo resultados particulares, disgregados que ya no conducían a la creación de nuevas direcciones clásicas, de nuevas teorías clásicas.

En las matemáticas de la antigüedad avanzada y en la época del dominio de Roma, un lugar cada vez mayor ocupan los métodos y problemas prácticos de cálculo. Modelo de trabajos de semejante orientación lo constituyen los trabajos matemáticos de Herón de Alejandría (siglos I—II de a. n. e.) en especial su "Métrica". El estilo de este último es de recetario: para determinadas clases de problemas se formulan reglas, la veracidad de

¹⁾ C. Marx y F. Engels. Obras completas, t. 21, págs. 148—149.

las cuales se adquiere con ejemplos. En la "Métrica" están contenidas: la regla para la determinación exacta y aproximada del área de figuras geométricas y de volúmenes de los cuerpos, la regla de la resolución numérica de ecuaciones cuadráticas y la extracción (preferentemente aproximada) de

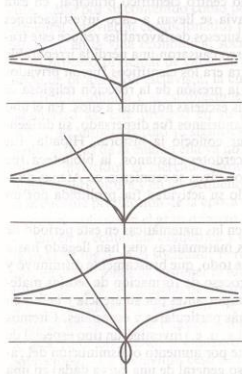


Fig. 25

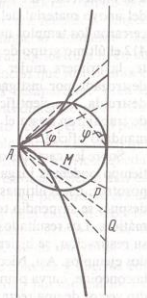


Fig. 26

las raíces cuadradas y cúbicas. En particular, en ella se presenta la conocida fórmula de Herón para calcular el área del triángulo dados sus tres lados.

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \left(a, b, c, \text{ son los lados,} \right.$$

$$\left. p = \frac{a+b+c}{2} \right).$$

Finalmente, una parte significativa del contenido de la "Métrica" lo constituye la descripción de los métodos de agrimensura y de los instrumentos geodésicos.

En otras obras de Herón: "Mecánica", "Neumática", "Dióptrica" se exponen sistemáticamente los logros fundamentales de los científicos anti-

guos en el campo de la mecánica aplicada. La "Métrica" en esta serie de obras juega el papel auxiliar (en sentido aplicado) de enciclopedia matemática.

El significado de las matemáticas aplicadas de cálculo se subraya aún más por el gran trabajo que los matemáticos estuvieron obligados a llevar a cabo en relación con la confección de las tablas astronómicas. Entre estas últimas un lugar destacado lo ocupan las tablas de las cuerdas (lo que es equivalente a la tabla de senos) de Ptolomeo (siglo II de n. e.), en el que los datos se daban cada 30' desde 0° hasta 180°.

Sobre la base del crecimiento preferente de la parte de cómputo de las matemáticas, y posiblemente bajo otras influencias complementarias, en las matemáticas de la antigüedad avanzada se engendraron elementos de álgebra y formas elementales de la simbólica algebraica. Sobre estas circunstancias testimonian los métodos y resultados de Diofanto.

De las obras matemáticas de Diofanto, el cual vivió y trabajó en Alejandría (probablemente en el siglo III de n. e.) se conservan 6 libros de la "Aritmética" y fragmentos del libro sobre los números poligonales. El concepto de números poligonales surgió en la matemática pitagórica como consecuencia de la interpretación geométrica de las relaciones teórico-numéricas. Si se designan los números por puntos y se distribuyen en forma de cualquier figura, entonces las sumas parciales de las progresiones aritméticas (de la forma $a_1 = 1, d = n - 2$) pueden ser representadas en forma de familias de polígonos semejantes (ver fig. 27 para $n = 3, 4, 5$) y los correspondientes valores numéricos pueden llamarse (y se llaman) poligonales. En la época de Diofanto esta idea se extendía también al espacio.

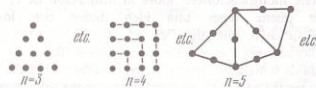


Fig. 27

Con ello, también se obtenían los números espaciales, representados por familias de paralelepípedos semejantes (en casos particulares, por cubos), números piramidales (sumas parciales de sucesiones de números poligonales), etc.

Las operaciones con los números, más exactamente hablando, con los números racionales, se investigan en la "Aritmética" de Diofanto. En el primer libro él introduce los conceptos fundamentales de la aritmética, las reglas de los signos en la multiplicación, las reglas de las operaciones con

polinomios, resuelve ecuaciones lineales. En los libros siguientes están contenidos numerosos problemas que conducen a ecuaciones con coeficientes racionales, que tienen raíces racionales.

Diofanto en todos los problemas utiliza valores numéricos especiales y realiza sólo operaciones con números, no mencionando en ninguna parte teorías generales. Para la designación de la cantidad incógnita en la ecuación y para la escritura de las funciones de ella estuvo obligado a elaborar un sistema de símbolos.

La simbólica de Diofanto está basada en la abreviatura de palabras. En la historia del desarrollo de la simbólica algebraica ésta marca el paso de las expresiones con palabras de las dependencias algebraicas (álgebra "retórica") a las abreviaturas de estas expresiones (álgebra "sincopada"). La siguiente etapa de desarrollo ya es el álgebra puramente simbólica.

La magnitud desconocida x en las ecuaciones de Diofanto se representa por un símbolo especial. A propósito, los copistas utilizaron diferentes símbolos, lo que no cambia de principio la esencia del asunto. Si la incógnita, la cual designamos ξ , aparece en la ecuación con un coeficiente, entonces se designa $\xi\xi$, lo que corresponde a un número múltiple. Para las potencias de x se utilizan los símbolos: para x^2 , δ^v (de la palabra $\delta\nu\alpha\mu\alpha\sigma$, es decir potencia), para x^3 , κ^v (de $\kappa\nu\beta\omicron\varsigma$), para x^4 , $\delta\delta^v$, para x^5 , $\delta\kappa^v$, etc.

El signo de suma no se utiliza, para la sustracción se introduce un símbolo especial, \uparrow . La igualdad se escribe con la palabra $\iota\omicron\sigma\varsigma$ (igual), más raramente con la letra ι . Los términos independientes de una ecuación tienen una designación especial $\mu\epsilon$ (de $\mu\omicron\nu\alpha\epsilon\varsigma$, es decir unidad). El sistema de numeración es alfabético. A propósito, la simbólica no es estrictamente uniforme, tiene modificaciones. Sobre la utilización de la simbólica de Diofanto se puede tener una idea mejor con los ejemplos: a) $\kappa^v\alpha\xi\xi\eta\uparrow\delta^v\epsilon\mu^v\alpha\iota\xi\alpha$ que significa $x^3 + 8x - (5x^2 + 1) = x$, b) $\xi\xi\alpha\rho\alpha\mu\epsilon^v\lambda\iota\omicron\sigma\epsilon\iota\alpha\nu\xi\xi\omicron\mu\epsilon\alpha\iota\mu\epsilon^v\alpha\alpha\iota\mu\epsilon$ que significa $10x + 30 = 11x + 5$.

Con ayuda de semejante simbólica, en los libros 2—6 de la "Aritmética" Diofanto resuelve (esto es, encuentra una de sus soluciones racionales) numerosos problemas que conducen en su mayoría a ecuaciones indeterminadas de segundo grado. Encuentra soluciones racionales de alrededor de 130 ecuaciones indeterminadas, las cuales pertenecen a más de 50 clases diferentes. En cada caso Diofanto se limita a encontrar solo una raíz. Un método general de resolución de las ecuaciones indeterminadas o su clasificación no aparece en la obra de Diofanto. No hay tampoco demostraciones; la veracidad del resultado obtenido se confirma solo porque al efectuar la sustitución satisface las condiciones del problema.

La teoría general de las ecuaciones diofánticas de primer grado: $ax + by = 1$, donde a y b son números enteros primos entre sí, fue construida en el siglo XVII por el matemático francés Bachet de Méziriac (1587—

1638), quien también editó en el año 1621 las obras de Diofanto en griego y latín con sus comentarios. Sobre la creación de la teoría general de las ecuaciones diofánticas de 2º grado trabajaron muchos científicos notables: P. Fermat, J. Wallis, L. Euler, J. Lagrange y K. Gauss. Como resultado de sus esfuerzos a comienzos del siglo XIX estaba en lo fundamental investigada la ecuación general no homogénea de 2º grado con dos incógnitas y coeficientes enteros:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Las ecuaciones diofánticas son objeto de estudio también en las matemáticas contemporáneas. Así se denominan las ecuaciones algebraicas indeterminadas o sus sistemas con coeficientes enteros, a los que se les busca soluciones enteras o racionales. Un punto de vista más general sobre las ecuaciones diofánticas consiste en que las soluciones de estas ecuaciones se buscan entre los números algebraicos. Investigaciones fundamentales en la teoría de las ecuaciones diofánticas han sido llevadas a cabo por los científicos soviéticos A. O. Gelfond, B. N. Delone, D. K. Faddeev y V. A. Tartakovsky.

El nombre de Diofanto se afianzó sólidamente también en la parte de la teoría de los números que estudia la aproximación de los números reales por números racionales. Estas aproximaciones se denominan diofánticas. Con la teoría de las aproximaciones diofánticas también se relacionan las cuestiones relativas a la solución en números enteros de desigualdades (o sus sistemas) con coeficientes reales y las cuestiones sobre la teoría de los números trascendentes.

Un lugar central en la teoría de las aproximaciones diofánticas lo ocupan los métodos y resultados del académico I. M. Vinogradov.

De esta forma, las obras de Diofanto sirvieron en esencia de punto de partida a muchas investigaciones teórico-numéricas y algebraicas. Con relación a las matemáticas antiguas, ellas caracterizaron el reforzamiento de las tendencias algebraicas, el florecimiento de las cuales fue entorpecido (como también el desarrollo de todas las ramas de las matemáticas) por las condiciones socio-económicas desfavorables antes mencionadas.

Entre los rasgos característicos de las matemáticas de la antigüedad posterior se encuentra además la gran difusión de obras que son comentarios a las obras clásicas. El predominio de los comentarios constituye, indudablemente, un criterio de descenso en la creatividad matemática. Sin embargo, las obras de los comentaristas fueron muy útiles para la historia de las matemáticas, conservando en fragmentos o en recuentos muchas obras clásicas importantes. A veces los comentarios son la única fuente de información sobre obras perdidas o logros olvidados de los matemáticos antiguos.

Uno de los primeros comentaristas fue Géminus de Rodas (alrededor del año 100 a. n. e.). Según testimonios de Proclus (siglo V de n. e.) Géminus expuso la historia de las curvas superiores: espirales, concoides, cisoides y otras. A él pertenece además una de las primeras divisiones de la ciencia en teoría (Geometría y Aritmética) y práctica (Astronomía, Mecánica, Óptica, Geodesia, Reglas de Cálculo).

Otro gran comentarista Teon de Alejandría (siglo IV) realizó comentarios sobre los "Elementos" de Euclides y sobre el tratado astronómico "Almagesto" de Ptolomeo. Su hija, Hipatía, comentó la obra de Arquímedes, Apolonio y Diofanto.

Un lugar especial entre la serie de comentaristas lo ocupa Pappo de Alejandría (siglo IV de n. e.). Además de los comentarios a las obras de Euclides y Ptolomeo escribió una gran obra, "Colección Matemática", en la cual detalladamente y con conocimientos del asunto expuso con sus observaciones muchos descubrimientos notables de sus predecesores. De los 8 libros de "Colección Matemática" hasta nosotros han llegado solo 6 (los libros 3—8). Los libros desaparecidos contenían, por lo visto, un recuento de la aritmética griega, lo que indican los fragmentos que se conservan.

El tercer libro está dedicado a la historia de la resolución del problema de la duplicación del cubo y la trisección del ángulo. Pappo da también su resolución al primero de ellos, que se reduce a la construcción de dos medias proporcionales. Los problemas relativos a la construcción de curvas de dos curvaturas y superficies constituyen el cuarto libro. La descripción de la obra de Zenodoro sobre las propiedades isoperimétricas de las figuras planas y superficies ocupa la primera mitad del quinto libro; en la segunda mitad entra el estudio sobre los cuerpos regulares. Pappo dedicó a la Astronomía el sexto libro. En él se contienen los comentarios a la "Óptica" y los "Fenómenos" de Euclides, a "Sobre las magnitudes y distancias" de Aristarco, a la "Esférica" de Feodosio y otros.

El séptimo libro es el más grande y de carácter variado. Al comienzo se aclaran los métodos de análisis y síntesis de los antiguos y se citan ejemplos. A continuación sigue el famoso problema de Pappo: sean dadas n rectas en el plano. Encontrar el lugar geométrico de los puntos para los cuales el producto de los segmentos trazados desde los puntos buscados bajo ángulos idénticos a $n/2$ rectas dadas, tenga una relación dada con el producto de los segmentos, trazados de la misma forma a las restantes rectas. Para una cantidad significativa de situaciones Pappo demostró que el lugar geométrico buscado es una sección cónica. Descartes en el siglo XVII resolvió el problema de Pappo con los recursos de la geometría analítica.

Tras el problema de Pappo en el séptimo libro se descifra el teorema, conocido actualmente como teorema de Guldin: los volúmenes de los cuerpos formados por rotación de las líneas o superficies se relacionan como

los productos de las áreas de las figuras formadas por la longitud de la circunferencia, descrita por sus centros de gravedad. El lugar restante en el séptimo libro lo ocupan los comentarios a los trabajos de Apolonio sobre las transversales y relaciones anarmónicas. El último, el octavo libro, está dedicado a la mecánica práctica y a los problemas y teoremas geométricos relacionados con ella. Entre estos últimos se encuentra, por ejemplo, el siguiente teorema: si tres puntos materiales que se encuentran en los vértices de un triángulo se mueven a la vez en una misma dirección por el perímetro con una velocidad proporcional a las longitudes de los lados, entonces la posición del centro de gravedad no cambia.

Los últimos entre los más notables comentaristas, Proclo (siglo V) y Eutoquio (siglo VI) pertenecen a la escuela ateniense, la cual existió algún tiempo después de la destrucción del centro científico en Alejandría. Proclo es interesante por el hecho de que en las obras de carácter no matemático (comentarios a las obras de Platón) y matemático (comentarios a los "Elementos" de Euclides) reprodujo muchos hechos de la historia de las matemáticas antiguas. Eutoquio escribió comentarios detallados a las obras de Arquímedes y Apolonio y en mayor grado que Proclo citó fragmentos de las obras de sus predecesores. Particularmente escogió numerosos fragmentos de los problemas famosos de la antigüedad. En particular, reprodujo 11 resoluciones de problemas sobre la duplicación del cubo, pertenecientes a diferentes científicos desde Arquímedes hasta Pappo.

La actividad de los comentaristas se suspendió en el siglo VI, después de la clausura de la escuela ateniense. En la cuenca del Mediterráneo se produjo un largo receso en el desarrollo de las matemáticas.

Nuestro resumen de las matemáticas antiguas es, naturalmente, incompleto. Es difícil en este libro dedicar a esto mayor lugar. Sin embargo, según nuestro punto de vista, el material citado es suficiente para hacer conclusiones sobre el carácter del desarrollo de las matemáticas en el periodo considerado.

Las matemáticas de la Grecia Antigua representa uno de los primeros ejemplos del establecimiento de las matemáticas como ciencia y de la formación en ella de todas sus partes componentes. Las particularidades principales de las matemáticas antiguas son el surgimiento, crecimiento impetuoso y la interrupción del desarrollo de una serie de teorías matemáticas.

Dentro de los límites de las teorías matemáticas de la antigüedad remota surgieron y se desarrollaron los elementos de las ciencias matemáticas ulteriores: álgebra, análisis infinitesimal, geometría analítica, mecánica teórica, el método axiomático en matemáticas. Sin embargo, la desvinculación de los resultados de las teorías matemáticas de la práctica, la estrechez de su forma geométrica predeterminó la limitación de la región y la época de su desarrollo. La tendencia limitada en la elección de los objetos y métodos

de investigación matemática introducida en las matemáticas bajo la presión de la filosofía idealista predominante, sólo aumentó estas dificultades en el desarrollo de la teoría.

Las contradicciones internas del desarrollo de la matemática en el periodo de su reforzamiento coincidieron con las condiciones socio-políticas desfavorables de la época de desintegración de la estructura esclavista, producida en virtud de los cambios de la forma de producción. Así, los factores económicos de finales de la formación económica esclavista resultaron en última instancia la causa determinante de la supresión temporal del desarrollo teórico y práctico de las matemáticas.

Para un nuevo ascenso de la ciencia matemática fue necesario un nuevo ascenso de las fuerzas productivas de la sociedad humana. En Europa y en la región de la cuenca del Mediterráneo este nuevo en principio ascenso apareció solo muchos siglos después, comenzando con la época del llamado Renacimiento, época de finales del feudalismo y comienzo del desarrollo del modo de producción capitalista. Además, una de las fuentes más importantes de nuevas ideas matemáticas fue la asimilación de la herencia clásica de los matemáticos de la Grecia Antigua, Euclides, Arquímedes y otros.

DESARROLLO DE LAS MATEMÁTICAS ELEMENTALES

4.1. Observaciones generales sobre el período de las matemáticas elementales

Según la periodización establecida para la historia de las ciencias matemáticas, al período de las matemáticas elementales se relaciona, como fue mencionado en el primer capítulo, un enorme intervalo de tiempo, alrededor de 1000 años (desde el siglo VI—V a. n. e. y hasta el siglo XVI).

Tan largos periodos no son una rareza en la historia de la ciencia. Como regla, ellos se refieren a las primeras etapas de su desarrollo. Esto se explica bien porque se logró encontrar cierta unidad en el desarrollo de la ciencia con el período considerado, o bien por la insuficiencia de nuestros conocimientos sobre él.

En lo que se refiere a la denominación del período considerado, es necesario decir que, los esfuerzos por definir el contenido del concepto de elemental no es en absoluto un problema elemental. Además, este concepto en sí no puede ser definido de una forma lógica y rigurosa de una vez para siempre. En diferentes períodos históricos ha sido completado y es completado con diferentes contenidos. En nuestros días, cuando se denomina a cualquier juicio matemático elemental, con esto se vincula, en la mayoría de los casos, nociones que están contenidas en los marcos del programa de matemática de la escuela de instrucción media general.

Trataremos concretamente el contenido y las vías de las corrientes fundamentales del desarrollo de las matemáticas en este período. Este abarca principalmente las matemáticas de las magnitudes constantes, su nivel en realidad supera en poco el nivel de los conocimientos, determinados por el programa de la escuela media y en esencia tiene con éste mucho de común. [Aquí se revela una vez más la relación entre lo histórico y lo lógico en el desarrollo de las matemáticas, relación que confirma la conocida tesis marxista de que lo lógico en la ciencia es lo histórico, pero sólo asimilado y puesto en cierto orden.]

4.2. Sobre las matemáticas de los pueblos de Asia Central y el Medio Oriente

En los enormes territorios desde el noroeste de la península indostánica hasta la costa norte de África y el sur de España, desde tiempos remotos existieron numerosos imperios orientales. Fundados frecuentemente por la

via de las conquistas, enormes, pero no vinculados en un único organismo económico, no poseían estabilidad política y tenían un destino complejo, pleno de vicisitudes. Las tradiciones científicas y culturales de los pueblos que los habitaban, se desarrollaron en tales condiciones relativamente con lentitud.

A partir del siglo VII en todas estas tierras se extendió una ola de guerras de conquistas, comenzadas por las tribus que habitaban la península Arábiga, bajo la presión de una fuerte crisis económica. Estas guerras tomaron la forma de lucha por el predominio de una nueva religión, el islam (o como a veces se denomina mahometismo). En el transcurso de una serie de siglos se formó una región enorme de intercambio comercial y relaciones económicas. Surgieron grandes ciudades, centros comerciales, artesanales y de dirección administrativa. La religión mahometa ocupó una posición dominante y el árabe se convirtió en el idioma de los documentos oficiales, libros religiosos, tratados científicos y obras artístico-poéticas.

Las condiciones de vida económica y política que se formaron favorecían el desarrollo de las matemáticas. Los conocimientos matemáticos eran exigidos por las necesidades de la dirección del estado, la irrigación, las construcciones, el comercio y la artesanía. Las relaciones internacionales, realizadas mediante largos viajes por los mares, montañas y lugares inexpugnables, contribuían al desarrollo de las matemáticas, geografía y astronomía.

Por esto, muchos gobernantes orientales y dinastías enteras llevaban a cabo una política de auspicio estatal de la ciencia. En el aparato de dirección estatal aparecieron científicos especialmente pagados. Para éstos se construyeron observatorios, se coleccionaron bibliotecas de obras antiguas, las cuales se buscaban por todas partes y se traducían al árabe.

Como resultado se formaba un sistema específico de conocimientos matemáticos. Un lugar prominente en él lo ocupaba la creación de diversos métodos de cálculo e instrumentos de medición para las necesidades del comercio, la dirección administrativa, los trabajos de agrimensura, la cartografía, la astronomía, para la confección de calendarios, etc. En este sistema entraron a formar parte a la vez los datos de la ciencia griega antigua, los tratados clásicos de Euclides, Arquímedes, Apolonio y otros. En él también recibieron desarrollo los conocimientos de matemática de los pueblos de la India y la China y además de la población radicada en los países del Medio y Lejano Oriente. La asimilación y reelaboración de las numerosas fuentes y la preparación de matemáticos calificados exigía, naturalmente, mucho tiempo. Por eso, para las matemáticas árabes (como las designaremos a veces por brevedad, a pesar de lo no fundamentado de este término) es característica cierta multiplicidad de aspectos, mezcolanza en la

presentación de los problemas, en los métodos de su resolución e incluso en su simbólica. El sistema de las matemáticas, formado bajo influencias tan diversas, tuvo tantos rasgos originales que la hicieron cualitativamente diferente a sus fuentes. Consideremos detalladamente las cuestiones sobre las particularidades características de las matemáticas del Oriente medieval y sobre el nivel de desarrollo alcanzado por las ciencias matemáticas. La cuestión sobre la diferenciación de las matemáticas por países tomados separadamente y sobre su influencia mutua, en vista de su especificidad y falta de elaboración, no la trataremos aquí.

En la práctica de cálculos los pueblos de lengua árabe trabajaban igualmente en dos sistemas de numeración: el decimal absoluto y el sexagesimal. El primero fue tomado de la India antes del siglo VII de n. e. y obtuvo rápidamente amplia difusión. Por el tratado aritmético de Khuwarizmi (siglo IX) "Sobre los números hindúes", traducido en el siglo XII al latín, el sistema decimal resultó conocido en Europa. Paralelamente al decimal, se conservó y utilizó regularmente en los observatorios astronómicos el sistema sexagesimal heredado de los babilonios. De un modo análogo a los matemáticos de la Babilonia antigua se hicieron y utilizaron las tablas auxiliares semejantes a las tablas de multiplicación (desde 1·1 hasta 59·59). Incluso en época relativamente reciente (alrededor del año 1427) en el observatorio del astrónomo y Khan uzbeko Ulug-Begs en la ciudad de Samarcanda se encontraban en uso tanto el sistema decimal como el sexagesimal. Para comodidad en los cálculos fueron elaboradas reglas de paso de un sistema a otro. Normas regulares existían para el cálculo con fracciones: sencillas y decimales. (En Europa Occidental las fracciones decimales fueron introducidas sólo alrededor del año 1585 por el matemático e ingeniero flamenco S. Stevin).

En el arsenal de los matemáticos árabes se acumularon muchos procedimientos de cálculos y algoritmos especiales. Citemos algunos de ellos para demostrar el nivel de la técnica de cálculo.

- a) Obtención de hasta 17 cifras exactas del número π mediante polígonos inscritos y circunscritos en la circunferencia. Los cálculos fueron realizados en la primera mitad del siglo XV por Kashi y fueron llevados hasta la determinación del lado del polígono regular de $3 \cdot 2^{28}$ lados. Después de más de 150 años, en 1593, en Europa F. Viete encontró solo 9 cifras decimales exactas de π mediante un polígono de $3 \cdot 2^{17}$ lados. Sólo a fines del siglo XVI y comienzos del XVII (Van Roomen, 1597) el resultado de Kashi fue repetido y posteriormente superado.
- b) Cálculo de raíces por el método, conocido actualmente como método de Ruffini-Horner. Puede suponerse que este método fue adquirido como resultado de las relaciones estrechas con los matemáticos

chinos. En el desarrollo del método fue considerado que el cálculo sucesivo de las cifras de la raíz $\sqrt[n]{q} = a, b, c, \dots$ está relacionado con la búsqueda de la sucesión de diferencias:

$$q = a^n, \quad q - \left(a + \frac{b}{10}\right)^n, \quad q - \left(a + \frac{b}{10} + \frac{c}{100}\right)^n, \dots$$

Además, fue advertida y expresada la serie del desarrollo binomial de la forma:

$$(a + 1)^n - a^n = C_n^1 a^{n-1} + C_n^2 a^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} a + 1;$$

$$(a + b)^n - a^n = C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n;$$

también fue enunciada la regla de formación de los coeficientes binomiales

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$$

En Europa la tabla de coeficientes binomiales (para $n \leq 17$) fue publicada sólo en el año 1544 (Stifel), y el método descrito superado por Ruffini (1804) y Horner (1819).

c) Extracción aproximada de raíces. El método conocido en la antigüedad $\sqrt{q} = \sqrt{T^2 + r} \approx T + \frac{r}{2T + 1}$, donde T es entero, fue extendido hacia el siglo XV (Kashi) al caso de cualquier índice natural de la raíz. La base de este procedimiento fue la interpolación lineal, esto es, un razonamiento del tipo: pongamos

$$y = \sqrt{x}; \quad \text{para} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = T^n \\ x_2 = (T + 1)^n \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} y_1 = T \\ y_2 = T + 1 \end{array} \right\} x = x_1 + r$$

Entonces

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) = T + \frac{r}{(T + 1)^n - T^n}$$

Al parecer, de los hindúes fue tomada la regla $\sqrt[n]{q} = \frac{1}{z} \sqrt[n]{qz^n}$, aplicada tanto en el sistema decimal ($z = 10^k$), como en el sexagesimal ($z = 60^k$).

La extensión de semejantes procedimientos de extracción aproximada de raíces fue notada en Europa sólo a mediados del siglo XVI.

d) La sumación de progresiones aritméticas y geométricas, incluyendo la búsqueda de sumas de la forma $\sum_{a=1}^n a^k$ ($k = 1, 2, 3, 4$). Por ejemplo:

$$\sum_{a=1}^n a^4 = \sum_{a=1}^n a^2 \left[\sum_{a=1}^n a + \frac{\sum_{a=1}^n a - 1}{5} \right]$$

El predominio de la influencia de la parte de cálculo de las matemáticas ejerció influencia en la interpretación de muchas cuestiones teóricas. Especialmente interesante es la cuestión sobre la comprensión de las irracionalidades algebraicas. La tendencia a la realización de operaciones con ellas es característica para todas las matemáticas árabes. Por ejemplo, en las obras de Khuwarizmi (siglo IX) ya se encontraban operaciones sobre irracionalidades cuadráticas. Al-Karkhi (siglo XI) introdujo muchas transformaciones de irracionalidades, entre ellas

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{2}}$$

Al-Baki (alrededor del año 1100), como también Al-Karkhi, comentaron el décimo libro de los "Elementos" de Euclides, aclarando sus teoremas con ejemplos numéricos.

En virtud de tal enfoque y de la frecuente aplicación de los cálculos de las irracionalidades, el límite entre los números racionales e irracionales comienza a borrarse. A la representación del número como colección de unidades se añadieron las representaciones sobre las relaciones entre las magnitudes continuas. Fue establecida la adecuación de la incommensurabilidad geométrica con la irracionalidad aritmética. Estas últimas entraron en la clase de números sobre la base de las reglas de operación definidas para ellos. En las matemáticas en lugar de dos conceptos aislados, números y relaciones, surgió una nueva, más amplia concepción de número real positivo. Ya en el siglo XIII (Nasiredin, 1201—1274) fue constatado este hecho con completa determinación: "Cada una de las relaciones puede ser denominada número, mensurable con la unidad, así como el término anterior de la relación se mide con el término siguiente"¹⁾.

La idea de la creación de una concepción única del número real por medio de la unión de los números racionales y las relaciones, surgida en los matemáticos de la antigüedad avanzada, obtuvo en el Oriente Medio cierto perfeccionamiento.

En Europa semejante idea no apareció durante mucho tiempo. Sólo

¹⁾ Мухаммед Насирэддин Туси. Трактат о полном четырехугольнике. (M. Nasiredin Tusi. Tratado sobre el cuadrilátero completo.)

desde el siglo XVI en relación con el desarrollo vertiginoso de los medios de cálculo los científicos comenzaron a reconocerla. Sin embargo, con un grado semejante de generalidad sólo fue expresada por I. Newton en los años 70 del siglo XVII, y publicada aún más tarde (1707) en su "Aritmética Universal": "Por número entendemos, no tanto el conjunto de unidades como la relación abstracta de cualquier magnitud hacia otra magnitud del mismo género, tomada por nosotros como unidad. Los números los hay de tres tipos: entero, fraccionario e irracional. El número entero es aquello que se mide con unidades; el fraccionario, con partes múltiples de la unidad; los números irracionales no son commensurables con la unidad" ¹⁾. La influencia de la orientación algorítmica de cálculo de las matemáticas árabes se reflejó también en su estructura. En ella, comparativamente rápido, por vez primera en la historia, se separó, en calidad de ciencia matemática independiente, el álgebra. En este hecho encontró su expresión la fusión de los elementos de carácter algebraico de las matemáticas de los diferentes pueblos, por ejemplo: el álgebra geométrica de los griegos antiguos, la agrupación de problemas de un mismo tipo y el esfuerzo por elaborar para cada grupo un algoritmo único en la Babilonia antigua, los problemas de cálculo de los hindúes que conducían a ecuaciones de 1° y 2° grado, etc.

En los trabajos de los matemáticos del Oriente medieval estos elementos algebraicos fueron por vez primera escogidos y agrupados en una parte nueva, específica de las matemáticas, fue formulado el objeto de esta nueva parte de la ciencia y construida una teoría sistemática. En calidad de ejemplo de tal enfoque, citemos la opinión del matemático del Asia Central O. Alkhamayae (alrededor de los años 1040—1123).

"El álgebra es un arte científico. Su objeto son los números absolutos y las magnitudes medibles, las cuales son desconocidas, pero referidas a cualquier cosa conocida de tal manera que puedan ser determinadas; esta cosa conocida es una cantidad o una relación individualmente determinada, y a esta cosa conocida se llega, analizando las condiciones del problema; en este arte se buscan las relaciones que vinculan las magnitudes dadas en el problema con la incógnita, la cual de la forma antes indicada constituye el objeto del álgebra. La perfección de este arte consiste en el conocimiento de los métodos matemáticos, con ayuda de los cuales puede realizarse la determinación mencionada, tanto de las incógnitas numéricas como geométricas. La resolución algebraica, como es bien conocido, se realiza sólo mediante una ecuación, o sea, por la igualación de unas potencias con otras" ¹⁾.

¹⁾ I. Newton. Universal Arithmetic. (I. Newton. Aritmética Universal.)

¹⁾ F. Woepcke. L'algebre d'Omar Alkhamayae. París, 1851, p. 5.

Los científicos europeos comenzaron a conocer el álgebra a principios del siglo XII. La fuente de sus conocimientos sobre el álgebra fue la obra "Hisab al-jabr wa-al-muqabala" de Muhammad abn Musa al Khwarizmi (más adelante, abreviado, Khwarizmi), el cual vivió en la primera mitad del siglo IX. El título traducido significa: libro sobre las operaciones jabr (restablecimiento) y qabala (reducción). La primera de las operaciones cuyo nombre sirvió de denominación para el álgebra, y sirve aún en nuestra época, consiste en el traslado de términos de una ecuación de un lado a otro. La segunda es la operación de reducción de términos semejantes de la ecuación. La resolución de ecuaciones se considera una ciencia independiente. En el libro están contenidas las resoluciones sistemáticas de ecuaciones de 1° y 2° grado de la forma

$$\begin{aligned} ax &= b; & x^2 + bx &= a; \\ ax^2 &= b; & x^2 + a &= bx; \\ ax^2 &= bx; & bx + a &= x^2. \end{aligned}$$

Khwarizmi da tanto la resolución aritmética como geométrica de las ecuaciones citadas. El método de búsqueda de la resolución geométrica

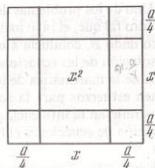


Fig. 28

consiste en la igualación de las áreas especialmente elegidas para la interpretación geométrica de la ecuación. Por ejemplo se da la ecuación $x^2 + ax + b$. En la fig. 28 el área

$$S = x^2 + 4 \left(\frac{a}{4}\right)^2 + 4 \cdot \frac{a}{4} \cdot x = (x^2 + ax) + 4 \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2 = b + \frac{a^2}{4}.$$

Al mismo tiempo

$$S = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2; \quad \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = b + \frac{a^2}{4}.$$

de donde

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$$

El libro de Khwarizmi tuvo gran popularidad. El término "álgebra" se arraigó en las matemáticas. Quedó en esta ciencia también el nombre del autor (Al-Khwarizmi) en forma latinizada: algoritmo. Al principio esta palabra designaba un apellido, después la numeración en un sistema posicional y ahora cada sistema de cálculo, producido por reglas estrictamente determinadas y las cuales conducen a ciencia cierta a la solución del problema propuesto. En el transcurso del desarrollo de la ciencia varió el contenido de los conceptos, incluidos en este término, pero los términos se conservaron. Khwarizmi no se pronunció sobre su prioridad en el álgebra. Al parecer, ambos procedimientos, jabr y qabala, estaban ya ampliamente difundidos en su época.

Los trabajos algebraicos árabes de los siglos IX—XV, además de la resolución de ecuaciones de 1° y 2° grado incluían también las ecuaciones cúbicas. A estas últimas conducían diferentes problemas: a) la división de la esfera por un plano; b) la trisección del ángulo; c) la búsqueda del lado de un polígono regular de 9 lados; d) búsqueda del lado de un polígono regular de 7 lados y otros. Uno de los problemas de óptica: encontrar en una circunferencia dada un punto tal que, el rayo incidente de un punto dado A se reflejaba en otro punto dado B , conducía a una ecuación de 4° grado.

En los métodos de resolución de las ecuaciones cúbicas se reflejó la variedad de medios, propios de la matemática de los científicos árabes. Una serie de tratados contienen esfuerzos para la solución numérica de estas ecuaciones; otros tratados reflejan la influencia antigua. En ellos se construye la teoría de la resolución de ecuaciones cúbicas mediante la intersección de secciones cónicas.

La resolución numérica de estas ecuaciones se desarrolló comenzando desde el método de prueba (Biruni, 972—1048) hasta el método elegante, iterativo, rápidamente convergente de Kashi (alrededor del año 1420). Consideremos el último método detalladamente. En el observatorio de Ulug-Begs en Samarcanda pertrechado de instrumentos perfeccionados se confeccionaron, como indicamos antes, tablas de senos con frecuencia de 1' y con exactitud de hasta la novena cifra. Un papel decisivo en este trabajo jugó, como es conocido, la exactitud en el cálculo de los senos de pequeños arcos, digamos sen 1°. Partiendo del sen 72° y del sen 60°, Kashi encontró el sen 3°. Para la búsqueda a partir de aquí del sen 1° obtuvo

$$\left(\cos \varphi = 4 \cos^3 \frac{\varphi}{3} - 3 \cos \frac{\varphi}{3}\right) \text{ la ecuación cúbica}$$

$$x^3 + 0,785\ 039\ 343\ 364\ 4006 = 45x.$$

Tomemos para comodidad de la aclaración del método la ecuación en forma general:

$$x^3 + D = Px, \text{ o } x = \frac{x^3 + Q}{P}.$$

La primera aproximación, en virtud de la pequeñez de x y por consiguiente de x^3 , se toma $x_1 = \frac{Q}{P} = a$. El resultado se calcula aproximado, con la condición de que el resto en la división R sea de un orden tan pequeño como a^3 .

Segunda etapa: pongamos

$$x = a + y; \quad a + y = \frac{(a + y)^3 + Q}{P}; \quad y = \frac{(a + y)^3 + R}{P}.$$

R es del orden a^3 ; él es grande en comparación con $a^3 y$. La nueva aproximación se obtiene si se desprecia en el numerador los términos que contienen y :

$$y = \frac{a^3 + R}{P} = b + \frac{S}{P}$$

Tercera etapa: $y = b + z$, y las operaciones se repiten en el mismo orden que en la segunda etapa. Por este método se obtienen las siguientes aproximaciones sucesivas:

$$x_1 = a = \frac{Q}{P};$$

$$x_2 = a + b = \frac{a^3 + Q}{P};$$

$$x_3 = a + b + c = \frac{(a + b)^3 + Q}{P};$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_n = \frac{x_{n-1}^3 + Q}{P}.$$

El proceso converge cuando $3x^2 < r < 1$, lo que en el caso dado tiene lugar en virtud de la pequeñez de x .

Con este método fue encontrado sen 1° con 17 cifras exactas en el sistema decimal (el resultado fue inicialmente obtenido en el sistema sexagesimal). Tal grado de exactitud permitió calcular las tablas de funciones trigonométricas con exactitud de hasta nueve cifras. Tal nivel de la técnica de cálculo aproximado en Europa fue alcanzado sólo a fines del siglo XVI.

Otra dirección en la resolución de ecuaciones cúbicas se basaba en la obtención de la imagen geométrica de la raíz positiva por medio de la intersección de secciones cónicas, convenientemente elegidas. En las obras de este tipo los autores, de forma clara, separaban al álgebra como una disciplina matemática particular, clasificaban todos los tipos de ecuaciones de los tres primeros grados según la distribución de los términos en ambos lados del signo de igualdad, encontraron las condiciones de existencia de las raíces positivas de las ecuaciones, en una palabra, crearon los elementos de una teoría general de las ecuaciones. Gran defecto del álgebra de esta época era la ausencia de una simbólica, la descripción con palabras de las operaciones. Esto contuvo el desarrollo del álgebra.

Además de la separación del álgebra el rasgo característico más importante de las matemáticas árabes fue la formación de la trigonometría. También en esta rama tuvo lugar la síntesis de diversos elementos trigonométricos: el cálculo de cuerdas y las correspondientes tablas de los antiguos, en particular los resultados de Ptolomeo y Menelao, las operaciones con las líneas del seno y el coseno de los antiguos hindúes, la acumulación de experiencias de mediciones astronómicas.

Sobre la base de este material heterogéneo los matemáticos de los países del Medio Oriente y el Asia Central introdujeron todas las líneas trigonométricas fundamentales. En relación con los problemas de astronomía, confeccionaron tablas de las funciones trigonométricas con gran frecuencia y alto grado de exactitud. Los datos acumulados fueron tantos que resultó posible estudiar las propiedades de los triángulos planos y esféricos, y los métodos de su resolución. Se obtuvo un sistema de trigonometría armónico, rico en hechos, tanto plana como esférica. Tal sistema lo constituye, por ejemplo, la obra de Nasirreddin (1201—1274) "Tratado sobre el cuadrilátero completo", donde: 1) se desarrolla la teoría de las relaciones; 2) se expone la teoría de las figuras constituidas por cuatro rectas que se intersecan de dos en dos; 3) se agrupan los métodos de resolución de triángulos planos y esféricos; 4) se resuelve el problema de la determinación de los lados de un triángulo esférico por sus tres ángulos.

Junto a la revelación del significado práctico de la trigonometría esta última cambió su aspecto. En ella comenzó a predominar el material sobre las dependencias algebraicas de las funciones trigonométricas y sobre los medios de cálculo y posibilidades de la trigonometría. A causa de la falta de una simbólica cómoda se demoró aún más la construcción puramente analítica de la trigonometría.

Así pues, la trigonometría en las matemáticas del Oriente medieval se convirtió en una ciencia matemática independiente. De un conjunto de medios auxiliares de la astronomía, se convirtió en una ciencia sobre las fun-

ciones trigonométricas en triángulos planos y esféricos y sobre los métodos de resolución de estos triángulos. Los medios de cálculo algorítmico comenzaron a jugar en ella un papel predominante. Quedaba solo un paso: la introducción de una simbólica específica para que la trigonometría adquiriera el aspecto analítico habitual para nosotros. Sin embargo, para este paso se necesitó aún mucho tiempo. En adelante la trigonometría comenzó a desarrollarse desde la segunda mitad del siglo XVI en Europa, en primer término bajo la influencia de las exigencias de la navegación y la astronomía. A finales del siglo XVI comenzó a utilizarse también el nombre de esta ciencia, "trigonometría".

En el presente capítulo dedicamos poca atención a la geometría. Esto es comprensible: no eran los intereses geométricos los principales, los que determinaban el flujo general de los logros matemáticos. Pero las obras matemáticas que han llegado hasta nosotros, de los matemáticos del Asia Central y el Medio Oriente indiscutiblemente evidencian el alto nivel de los conocimientos geométricos. La literatura matemática de esta época es rica en traducciones de las obras de Euclides, Arquímedes, Apolonio y otros autores de la Grecia Antigua y en comentarios de estas obras. En los manuscritos árabes se conservan muchos logros de la antigüedad. Frecuentemente estos manuscritos son la única fuente de muchas informaciones importantes sobre el desarrollo precedente de las matemáticas y sobre los fundamentos científicos de la creación matemática de los científicos europeos del Renacimiento.

Entre la serie de obras geométricas reclaman atención las profundas investigaciones sobre los fundamentos de la geometría. En las obras de Khayyam (siglo XI) y Nasirreddin (siglo XIII) encontramos intentos de demostrar el postulado de Euclides sobre las paralelas, basados en la introducción de posiciones equivalentes a este postulado. Los nombres de estos matemáticos con completo derecho pueden ponerse en la larga serie de predecesores de la geometría no euclidiana, los cuales sometieron a un análisis lógico el sistema de axiomas y postulados de la geometría de Euclides.

Aproximadamente a mediados del siglo XV, el desarrollo de las ciencias matemáticas en las regiones descritas aquí disminuye y se extingue. Las causas de este fenómeno radican en el aislamiento económico que sobrevino en los amplios territorios sobre los que se trató antes.

Los pueblos del Asia Central, el Oriente Medio y el África del Norte en virtud de las condiciones históricas formadas quedaron detenidos en el estadio feudal de desarrollo, vivían en un ambiente de guerras y trifulcas políticas, sometidos a una opresión colonial creciente por los países capitalistas fuertes. El progreso de las ciencias y entre ellas de las matemáticas resultó detenido durante varios siglos.

4.3. Las matemáticas en Europa en la Edad Media y en la época del Renacimiento

En el continente europeo las matemáticas no tienen tan antiguo origen como en muchos países del Medio y Lejano Oriente. Si no se tiene en cuenta las matemáticas de los romanos (sobre la cual no hablaremos especialmente, a causa de falta de lugar, así como de su bajo nivel de desarrollo científico-teórico e influencia en el desarrollo posterior de las matemáticas), la matemática en Europa alcanzó éxitos notorios sólo en la época del Medioevo desarrollado y especialmente en el Renacimiento. La llegada de la Edad Media en Europa o la época del feudalismo se sitúa hacia el siglo V de n. e., hacia la época cuando cae el Imperio Romano de Occidente. Durante los siglos V—X transcurre un largo proceso de establecimiento de las relaciones feudales en Europa desmembrada en un conjunto de posesiones. La economía de estas posesiones tiene carácter natural, el intercambio es muy débil. En los siglos XI—XIV corre la época del florecimiento del feudalismo. En este periodo ocurre la división del trabajo entre la ciudad y el campo, artesanos y agricultores. Crecen las ciudades y se desarrollan las relaciones monetario-mercantiles. En los siglos XII—XV en la lucha y guerras se formaron los estados nacionales. En el siglo XIV el mundo feudal es sacudido por las guerras campesinas en las cuales tras un matiz religioso no es difícil de observar su esencia antifeudal. En los siglos XV—XVIII transcurre la maduración, en las entrañas del feudalismo, de las relaciones capitalistas y la descomposición del régimen feudal. El comienzo de este último periodo, esto es, los siglos XV y XVI, en el desarrollo cultural e ideológico de una serie de países de Europa Occidental y Central se conoce bajo el nombre de Renacimiento.

La técnica de la Europa medieval, al principio primitiva y aislada toma al final de este periodo un carácter masivo, y el nivel de los logros técnicos rápidamente aumenta. He aquí algunos ejemplos. La extracción de minerales y la metalurgia iniciada en el siglo VIII tomó fuerzas a lo largo de cuatro siglos, y en el siglo XII se convirtió en una rama notable de la industria europea. En el mismo siglo fueron descubiertas las propiedades de las agujas magnéticas. Alrededor del año 1000 apareció el vidrio, pero el esmerilado y el amalgamamiento del vidrio para la confección de lentes, espejos, anteojos fueron introducidos sólo en el siglo XIV. Alrededor del año 1100 fue inventado el reloj con ruedas, más tarde con mecanismos de ruedas-resortes y después de 100 años, el reloj con campanadas. El papel comenzó a entrar en uso en Europa desde el siglo XII y la impresión de libros fue ideada solo a mediados del siglo XV. En el periodo de los siglos XIII—XIV comenzó a utilizarse cada vez más ampliamente la pólvora. Estos ejemplos muestran que los logros técnicos de los pueblos europeos, al comienzo débiles y escasos, se acumulan y crean las condiciones para una aceleración

del proceso técnico y para el cambio de todo el sistema de las relaciones y criterios económicos, políticos, científicos y culturales. Un cuadro análogo, al comienzo un desarrollo muy lento, después cada vez más acelerado y finalmente una transformación radical, revolucionaria presentan las ciencias naturales y las matemáticas en la Europa medieval.

En efecto, en los siglos V—XI el nivel de los conocimientos matemáticos en Europa era muy bajo. No se conoce ningún gran descubrimiento u obra matemática. Incluso los individuos instruidos eran escasos. Al parecer los únicos guardianes de los conocimientos matemáticos que superaban las exigencias habituales eran los pocos monjes científicos, que conservaban, estudiaban y copiaban las obras de ciencias naturales y matemáticas de los antiguos. La iglesia dejó la fuerte huella de la escolástica también en este islote del conocimiento.

La premisa organizativa fundamental del desarrollo de las matemáticas en Europa fue la creación de los centros de enseñanza. Uno de los primeros centros de este tipo fue organizado en la ciudad de Reims (Francia) por Gerberto (940—1003) quien más tarde fue papa romano bajo el nombre de Silvestre II.

En la escuela de Gerberto además de otras ciencias enseñaban cálculo con el uso de la pizarra de calcular, el ábaco, perfeccionado por el cambio de las fichas en blanco, cada una de las cuales tenía el valor de la unidad, por fichas con cifras escritas sobre ellas. En esta época existían muchos métodos de cálculo. Entre los partidarios de las diversas tradiciones de cálculo formadas el puesto fundamental lo ocupaban dos partidos enemigos: los abaquistas y los algorítmicos. Los primeros, en lo fundamental se distinguían por la exigencia del uso obligatorio del ábaco y la numeración duodecimal romana. Los algorítmicos utilizaban las notaciones escritas de las cifras hindúes, algunos de ellos introdujeron el signo cero, el cálculo lo realizaban en papel, aplicaban las fracciones sexagesimales. En las discusiones se formaron los sistemas de numeración y los métodos de cálculo aritmético, cada vez más próximos a los sistemas y procedimientos habituales a nosotros.

Al cabo de un siglo, entre los siglos XII—XIII, fueron surgiendo en Europa las primeras universidades, que fueron las italianas en Bolonia, Salerno y otras ciudades. Tras éstas fueron abiertas universidades en Oxford y París (1167), Cambridge (1209), Nápoles (1224), Praga (1347), Viena (1367), etc. Estos eran centros de enseñanza subordinados absolutamente a la iglesia. A la cabeza de las universidades estaban los padres-superiores (rectores), a la cabeza de las facultades estaban los decanos. Los estudiantes inicialmente estudiaban en una facultad preparatoria de artes (artística), después pasaban a una de las facultades fundamentales: de teología, de leyes o de medicina.

Las matemáticas entraban a formar parte en una de las siete artes libres (artis liberales), que se estudiaban en la facultad de artes. Todo el ciclo de estas artes se dividía en dos períodos. El primero lo componía el trivium: gramática, retórica, o sea, el arte de expresar oralmente las ideas, y dialéctica o la habilidad de llevar a cabo las discusiones. El segundo período, el cuadrivium, incluía la aritmética, geometría, astronomía y música, esto es, la teoría de los intervalos armónicos. El nivel de conocimientos matemáticos de los egresados de las universidades era bajo: en muchas universidades europeas incluso hasta el siglo XVI, a los individuos que pretendían el título de magister, de matemática se exigía sólo... el juramento de que conocían seis libros de los "Elementos" de Euclides. Como las universidades estaban subordinadas a los deseos reaccionarios de la iglesia, la ciencia escolar (escolástica) degeneraba en raciocinios y discusiones infructuosas, justificando el sentido que se le adjudica actualmente a la palabra "escolástica". El sistema de instrucción medieval en el transcurso de algunos siglos fue una premisa necesaria pero no suficiente del desarrollo de las ciencias matemáticas.

Ante tal estado de cosas, naturalmente los conocimientos matemáticos no se perfeccionaban en los centros de enseñanza europeos. Ellos eran transportados desde el exterior. Estos eran los restos que se conservaban de las matemáticas romanas o de los estados greco-bizantinos. En la mayor parte los conocimientos científicos se adquirían por la vía de la traducción de las obras del árabe al latín. Por esta vía los europeos conocieron los "Elementos" de Euclides, el "Almagesto" de Ptolomeo y otros trabajos de los matemáticos antiguos, con una serie de obras de los matemáticos del Asia Central y el Medio Oriente. El trabajo de los traductores a veces era muy activo. Así, Gerardo, de Cremona (1114—1187) tradujo del árabe más de 80 obras. Sin embargo, como los libros existían sólo en forma manuscrita en una cantidad limitada de ejemplares, y el número de los individuos suficientemente preparados para su comprensión era insignificante, no conviene sobrevalorar el significado de este trabajo.

Cierta animación en las matemáticas comenzó en el siglo XIII en relación con dos factores: la lucha contra la escolástica y la teología comenzada por Roger Bacon (1214—1294), y los trabajos matemáticos de Leonardo de Pisa (alrededor del año 1200). El primero de ellos en su aguda crítica opuso a los dogmas, basados en la fe, la experiencia como única fuente de conocimiento científico. En el centro de toda la ciencia experimental se encuentran, según Bacon, los conocimientos físico-matemáticos. En general todas las ciencias están basadas en las matemáticas y sus verdades tienen valor sólo por cuanto ellas están expresadas, por números y medidas, esto es, en forma matemática. Las matemáticas, en las ideas filosóficas de Bacon, son el abecedario de toda la filosofía natural, esto es de todas las cien-

cias naturales. El papel de las matemáticas aumentó en relación con el crecimiento de las fuerzas progresistas en la filosofía.

Los méritos de Leonardo en las matemáticas fueron totalmente de otro género. El recibió una buena formación matemática en Argelia, donde vivió su padre, uno de los representantes comerciales de la rica y fuerte ciudad italiana de Pisa. Por asuntos comerciales Leonardo recorrió Siria, el África del Norte, España, Sicilia, complementando sus conocimientos en cada posibilidad. Alrededor del año 1202 escribió el "Libro sobre el ábaco". Este libro es una extensa enciclopedia de los conocimientos matemáticos de los pueblos que vivían en las costas del Mar Mediterráneo. Durante más de 200 años resultó un modelo insuperable de obras matemáticas para los europeos y preparó los nuevos éxitos de las matemáticas en la época del Renacimiento.

En el "Libro sobre el ábaco" hay 15 partes. En las siete primeras están expuestos el cálculo de números enteros según el sistema decimal posicional y operaciones con fracciones comunes. Las partes 8—11 contienen aplicaciones y cálculos comerciales: regla de tres simple y compuesta, división proporcional, problemas sobre la determinación de la calidad de las monedas. Una colección diversa de problemas resolubles mediante la simple y doble posiciones falsas, adición de progresiones aritméticas y de los cuadrados de los números naturales, la búsqueda de soluciones de números enteros de ecuaciones indeterminadas de primer grado constituyen las partes 12 y 13. La penúltima parte, la decimocuarta, está dedicada al cálculo de raíces cuadradas y cúbicas y operaciones con "binomios", esto es, expresiones de la forma $a \pm \sqrt{b}$. Culmina el "Libro sobre el ábaco" con la 15ª parte que contiene una breve exposición del álgebra y las almuqabalas, próxima al álgebra de Khwarizmi, y además, problemas sobre las fracciones numéricas continuas y problemas geométricos que se reducen a la aplicación del teorema de Pitágoras.

Otra obra de Leonardo, "Geometría Práctica", escrita alrededor del año 1220 está dedicada a la medida de las áreas de los polígonos y el volumen de los cuerpos, incluso del volumen de la esfera. Las demostraciones de los teoremas están tomados de los trabajos de Euclides y Arquímedes; se encuentran problemas que evidencian sobre el conocimiento de Leonardo de los elementos de la trigonometría. Se conoce otra obra más de Leonardo sobre teoría de números. En ella se trata sobre las propiedades de los números, sumas de la forma

$$\sum_{k=1}^n k, \quad \sum_{k=1}^n k^2, \quad \sum_{k=0}^n (2k+1),$$

y además, sobre la búsqueda de soluciones racionales de las ecuaciones $y^2 = x^2 + a$; $z^2 = x^2 - a$. Finalmente, se conservan informaciones sobre

la participación de Leonardo en competencias públicas de matemáticas y sobre la resolución por él de problemas difíciles. En nuestros días las sucesiones recurrentes llevan su nombre ¹⁾.

El tiempo transcurrido después de los trabajos de Leonardo hasta la época del Renacimiento (siglos XV—XVI) no introdujo, al parecer, en la historia de la matemática ideas brillantes, grandes descubrimientos, transformaciones radicales. Este periodo no es deseado por los matemáticos, que se detienen muy poco en él. Sin embargo, en estos siglos “auxiliares” en las matemáticas transcurrió un proceso interesante y poco estudiado de acumulación de premisas. Los conocimientos matemáticos se difundían entre círculos cada vez más amplios de científicos. Las ideas y resultados, acumulados en las obras de Leonardo y otros matemáticos, el contenido de los libros de autores antiguos traducidos, la existencia de un gran número de problemas teóricos y prácticos planteados y comprendidos, pero aún no resueltos, todo esto condujo a un nuevo ascenso científico. La opresión espiritual es consecuencia natural de la opresión económica y política. Los gobernantes y príncipes laicos y religiosos, impedían el desarrollo de las tendencias progresistas por todos los medios: amenazas, excomuniones y destrucción física de sus contrarios ideológicos.

En estas condiciones se distinguen dos direcciones fundamentales del desarrollo de las matemáticas, en las cuales la última alcanzó los mayores éxitos. Estas fueron: un perfeccionamiento serio de la simbólica algebraica y la formación de la trigonometría como ciencia particular. Ya el contemporáneo de Leonardo, el general de la orden monástica de los dominicanos Jordano Nemorarius (nace en el año 1237) representaba mediante letras números arbitrarios. Por otra parte, de esto no se obtenía el cálculo literal, ya que el resultado de cualquier operación con dos letras se designaba obligatoriamente con una tercera letra ($a + b = c$, $a \cdot b = d$, etc.).

El profesor de la Universidad de París Nicole Oresme (1328—1382) generalizó el concepto de potencia, introduciendo los exponentes fraccionarios de potencia, las reglas de realización de las operaciones con ellos y una simbólica especial, anticipándose de hecho a la idea de logaritmo. Por ejemplo:

$$\left[\frac{1 \cdot p}{2 \cdot 27} \right] = 27^{\frac{1}{2}}, \quad \left[\frac{1 \cdot p}{3 \cdot 3} \right] = 3^{\frac{1}{3}}, \quad \left[\frac{2 \cdot p}{3 \cdot 8} \right] = 8^{\frac{2}{3}}, \text{ etc.}$$

A propósito, advirtamos que en una de sus obras Oresme introduce el largo y ancho de un rectángulo plano y utiliza las coordenadas rectangula-

¹⁾ Ф.И. Маркушевич. Возвратные последовательности. (A.I. Markushevich. Successions recurrentes.)

res, introducidas de esta forma primitiva, para la representación gráfica de la intensidad de los fenómenos físicos en dependencia del tiempo. Así advirtió que la variación cerca de los extremos es la más lenta.

A finales de siglo XV el bachiller de la Universidad de París N. Chuquet además del exponente fraccionario de una potencia introdujo también los exponentes negativos y el cero, los números negativos y perfeccionó el simbolismo algebraico. En este simbolismo no hay aún un símbolo especial para la incógnita y la mayoría de los símbolos están formados mediante las abreviaturas de palabras (álgebra simbólica sincopada). Por ejemplo: $5^3 \bar{m}$ designa $5x^{-3}$ (m es la abreviatura de la palabra minus), y en general $a^k \bar{m}$ designa ax^{-k} . Como símbolo de la raíz se tiene R_x (de la palabra radix, esto es, raíz), como símbolo de suma, \bar{p} . Así que la expresión $\sqrt[4]{24 + \sqrt{37}} - 20x^{-2}$, tomada al azar en la simbología de Chuquet tendría la forma

$$\bar{R}_x^4 24 \bar{p} \bar{R}_x^2 37 \bar{m} 20^2 \bar{m}.$$

Un gran aporte en el perfeccionamiento formal-simbólico del álgebra fue hecho en los siglos XV y XVI por los cosistas, matemáticos del sur de Alemania, los cuales tomaron estas ideas de Italia. La denominación de los cosistas proviene de la palabra italiana, *cosa*, o sea, objeto, como se designaban las incógnitas en las ecuaciones. Ellos elaboraron algunos sistemas de símbolos, cómodos para la escritura de las operaciones matemáticas, y algunos de ellos expresaron en sus obras ideas próximas al concepto de logaritmo.

Sin embargo, por muy grande que fuera el significado de la tendencia al perfeccionamiento de la forma que se formaba en la edad media, ésta no pudo jugar un papel determinante en el desarrollo posterior del álgebra y en general de las matemáticas. Un nuevo paso estuvo relacionado con los éxitos en la parte algoritmo-operativa, vinculada a la resolución de una nueva clase de ecuaciones algebraicas, las cúbicas, que se tratarán más adelante.

Los éxitos de la trigonometría, que ya hemos mencionado anteriormente, fueron una consecuencia del desarrollo de la astronomía. La trigonometría, en esencia, fue durante casi toda la edad media parte de la astronomía, cultivada no tanto en virtud de su significado para las ciencias naturales, como por la necesidad de confeccionar los horóscopos astrológicos. Los hechos de la trigonometría fueron asimilados, como los demás hechos de las matemáticas, en su mayoría mediante las traducciones de tratados científicos del árabe. Así, los matemáticos europeos tuvieron presente los logros de los astrónomos y matemáticos tanto de la Grecia antigua como de la ciencia árabe posterior.

En el siglo XV, cuando se hicieron posibles las navegaciones lejanas,

cuando el mundo a estudiar se amplió y los conocimientos sobre él rápidamente cambiaron rompiendo las ideas escolásticas, bruscamente creció el interés hacia la astronomía. Esta fue la época inmediatamente anterior al descubrimiento de América (1492), al primer viaje marítimo alrededor de África (1492) y alrededor del mundo (1519), al descubrimiento y demostración de la teoría heliocéntrica de Copérnico (1473—1543). Para la trigonometría llegaron tiempos felices. Y finalmente, en el año 1461, surgió la obra "Cinco Libros sobre triángulos de cualquier género", en la cual por vez primera la trigonometría fue separada de la astronomía y tratada como una parte independiente de las matemáticas. La escribió el matemático alemán Johannes Müller (1436—1476), más conocido por el nombre de Regiomontano (latinización derivada del nombre de la ciudad de Königsberg, donde nació).

En este libro se tratan sistemáticamente todos los problemas sobre la determinación de triángulos planos y esféricos a partir de los elementos dados. Además Regiomontano amplió el concepto de número, incluyendo entre ellos la irracionalidad que surgía en los casos de incommensurabilidad geométrica, y aplicó el álgebra a la resolución de problemas geométricos. De este modo, fue en esencia suprimida la tradición antigua y descubierta una nueva concepción del objeto de la trigonometría y sus problemas.

Regiomontano continuó el trabajo, comenzado por otros científicos, de confección de tablas de las funciones trigonométricas. Su tabla de senos tenía una frecuencia de un minuto y una exactitud de hasta la séptima cifra. Para esto, la magnitud del radio de la circunferencia generatriz la tomó igual a 10^7 , ya que las fracciones decimales aún no se conocían. Introdujo en la práctica las funciones trigonométricas que recibieron en el siglo XVII la denominación de tangente y cotangente, confeccionando las tablas de sus valores.

Hagamos un resumen sin incrementar el número de ejemplos. En el transcurso de los siglos V—XV en Europa se formó gradualmente el sistema de instrucción que incluía las matemáticas, sistema a través del cual regularmente se completaban las capas de individuos instruidos. Los científicos que se interesaban por las matemáticas y los estudiantes de las universidades asimilaban los logros de la Grecia Antigua, de Bizancio, de los pueblos árabes del Medio Oriente y el Asia Central. Se extendió ampliamente la práctica de la traducción de los manuscritos árabes de contenido científico, al latín, idioma universal del medioevo.

Las matemáticas se desarrollaban en relación con las exigencias prácticas de la técnica y la navegación, por esto el ritmo, al principio lento, de la vida científica, al final del período considerado se aceleró sensiblemente. Gran acción estimulante en el desarrollo de las matemáticas ejercieron las tendencias progresistas de la filosofía medieval, la lucha ideológica contra

la tiranía de la iglesia, de los feudales, contra los dogmas escolásticos anquilosados, consagrados por las autoridades y la política de represión laica y eclesástica. La determinación del lugar de las matemáticas en el sistema de las ciencias como el alfabeto de las ciencias naturales, o de la filosofía natural, como llamaban de otra forma a esta última, estabilizó su situación y aceleró el proceso de creación en las matemáticas, la fundamentación de los conocimientos básicos, la acumulación de las premisas para nuevos éxitos. El conjunto de factores que actuaron sobre las matemáticas resultó tal que en ellas se determinaron los mayores éxitos en la creación del aspecto simbólico-formal del álgebra y en la trigonometría. Fue también expresada y puesta en uso científico, especialmente en los siglos XV—XVI, una serie de ideas que tienen gran significado en lo sucesivo: la generalización del concepto de número, la generalización del concepto de potencia, los precursores de los sistemas de logaritmos. Fue necesario un éxito práctico, aunque fuera pequeño, para que toda esta masa de premisas acumuladas entrara en movimiento.

Una línea original de desarrollo de los conocimientos científicos se formó en el territorio de Europa Oriental, en especial en la Rusia medieval. La originalidad consistía en que la herencia científica se asimilaba sobre la base de la ciencia bizantina. A propósito, en las obras sobre historia de la ciencia, esta línea de desarrollo de las matemáticas se enfoca insuficientemente.

Con el término Rusia medieval designaremos aquí todo el complejo de principados rusos en el cual jugaban el papel predominante: La Rusia de Kiev (siglos X—XII), el principado Vladimir-Suzdal (siglos XII—XIII), Novgorod (siglos XIII—XV). El duro destino histórico del pueblo ruso trajo como consecuencia que el número de evidencias directas del estado de la ciencia en esta época en Rusia bruscamente disminuyera. El problema de completar las fuentes de investigación y del estudio detallado de los datos ya obtenidos por los arqueólogos, etnógrafos e historiadores es actual y no resuelto. El material existente permite dar la siguiente característica general de las primeras etapas del desarrollo de las matemáticas en Rusia.

Ya a comienzos del siglo X en Rusia existía la escritura. Las estrechas relaciones con Bizancio contribuyeron a una acelerada adquisición de conocimiento. En particular la instrucción matemática estaba al nivel de la europea. En el palacio del príncipe de Kiev Vladimir Sviatoslavich (nacido en 1015) fue impuesto a sus allegados la obligación del estudio de libros. En los tiempos de Yaroslav el Sabio (978—1054) trabajaba una escuela. De aquella época han llegado a nosotros notables monumentos literarios y de cultura general: "La verdad rusa", "La Novela de los años transitorios", "Cantar de las huestes de Igor", diversas crónicas. Los monumentos arquitectónicos y las excavaciones arqueológicas dan cada vez nuevas confir-

maciones del alto nivel de la técnica y la cultura de los principados rusos.

Los conocimientos y cálculos matemáticos prácticos económico-técnicos se escribían mediante el sistema de numeración decimal alfabético, semejante al sistema alfabético griego. A lo dicho advertimos que esta numeración eslava antigua se utiliza aun en nuestros días en los libros eclesiásticos. Este sistema prácticamente no limitaba la magnitud de los números. En los documentos se encuentran a veces números muy grandes, para los cuales existen nombres especiales. En el cálculo corriente "en magnitudes pequeñas", 10^4 se denominaba misterioso, más tarde, nebuloso, 10^5 , legión, 10^6 , leodro. En el otro sistema, de cálculo "grande", nebuloso se denominaba 10^6 , legión, 10^{12} , leodro, 10^{24} , cuervo, 10^{48} , pila, 10^{96} o 10^{49} , después de esto hay una inscripción simple que expresa: "No hay más que estos números".

Además de los cálculos de carácter práctico muy pronto comienzan a encontrarse cuestiones y problemas teóricos, compuestos por los aficionados a los números. El más antiguo manuscrito, especialmente matemático, que se conserva es la inscripción de Kirik, diácono de Novgorod, la cual data exactamente del año 1134. Ejemplos de tales problemas escogidos de diferentes manuscritos son:

a) cálculo de cuántos meses, semanas, días y horas transcurrió desde la creación del mundo (según las creencias ortodoxas hacia el año 1134 habían transcurrido 6642 años);

b) problemas sobre el cálculo de progresiones, formadas mediante consideraciones sobre la cría progresiva de los rebaños;

c) cálculos de las dimensiones de la Tierra, el Sol y la Luna según las mediciones dadas por Eratóstenes (siglo III a. n. e.) y relacionado con esto, el cálculo aproximado de $\pi = 3,125$;

d) el difícil problema teórico-numérico sobre el cálculo de las fechas de las fiestas religiosas de Pascua. Esta última comienza, como es conocido, en el primer domingo después del plenilunio primaveral. Primavera se considera el plenilunio entre el 21 de marzo y el 18 de abril. El problema consiste en la comparación de las escalas periódicas de los años solares, los meses lunares tomando en cuenta el ciclo de Metón (19 años solares = 235 meses lunares), los periodos de siete días de la semana, los periodos de rotación de la Tierra y la Luna alrededor del Sol. Se obtiene una periodicidad compleja de las fechas de la fiesta y relacionadas con ella de los ayunos, con un periodo de 532 años. No vamos a reflejarlo aquí, pues los interesados pueden leer la obra de L. V. Cherepin, editada en ruso, "Cronología Rusa" (M., ed. del Instituto de Archivos Históricos, 1944).

El curso del desarrollo de la ciencia y la cultura, común a todos los estados, en Rusia fue interrumpido por la fuerza en la primera mitad del siglo XIII debido a la invasión mongola (Bati, en 1240) y de los caballeros de la

Orden Teutónica (en 1242, la batalla en el Lago Peipus). El pueblo ruso derramó sangre pero salvaguardó su independencia estatal y nacional. La batalla en el campo de Kulikov en el año 1380 fue el principio del fin del yugo tártaro-mongol, que fue definitivamente derribado hacia el año 1480. Sin embargo, las agresiones de los intervencionistas extranjeros y el proceso penoso del derribo de la estructura feudal y formación de un estado multilateral en el periodo desde el siglo XVI hasta el siglo XVII, es decir, hasta la época del reinado de Pedro I, todavía frenaban fuertemente el crecimiento de la economía, la cultura y la ciencia. se determinó un gran retraso de Rusia de los países europeos también en el campo de las matemáticas.

A fines de la Edad Media (siglos XV—XVI) en los países de Europa Occidental las matemáticas y las ciencias naturales en general se desarrollaban en una atmósfera de cambios tempestuosos, relacionados en su base económica con la descomposición que comenzaba de la sociedad feudal y el establecimiento de las relaciones burguesas capitalistas. Los cambios transcurrían en la industria, donde surgían las manufacturas con la división del trabajo característica para ellas y la introducción de máquinas y perfeccionamientos técnicos. Un desarrollo no visto anteriormente comenzaron a obtener las relaciones comerciales y la navegación, acompañadas por los grandes descubrimientos geográficos. En el orden político, los cambios fundamentales consistían en que el poder y la influencia de la nobleza feudal fueron quebrados bajo la presión del poder real y con el apoyo de los ciudadanos, y en que se formaron grandes monarquías, en esencia nacionales. Finalmente, el florecimiento de la cultura y el arte en Italia, Francia y otros países, la invención de la imprenta (mediados del siglo XV) determinó un nivel totalmente nuevo de exigencias intelectuales y de las ocupaciones de un grupo cada vez más extenso de individuos.

"También la investigación de la naturaleza se realizaba entonces en un ambiente de revolución general, siendo en sí misma enteramente revolucionaria: en efecto, tenía todavía que conquistar para sí el derecho a la existencia", — advirtió F. Engels ¹⁾. En esta época se determinaron serios éxitos en las matemáticas y la astronomía, más tarde en la mecánica.

Como antes demostramos, los más importantes logros de los matemáticos de la Europa medieval se referían al campo del álgebra, al perfeccionamiento de su aparato y simbolismo. Regiomontano enriqueció además el concepto de número introduciendo los radicales y las operaciones con ellos. Esto permitió plantear el problema de la resolución en radicales de una clase, posiblemente más amplia, de ecuaciones, y precisamente en este campo fueron alcanzados los primeros éxitos, la resolución en radicales de ecuaciones de 3° y 4° grados.

¹⁾ K. Marx y F. Engels. Obras completas, t. 20.

El curso de los acontecimientos, relacionados con este descubrimiento se esclarece en la literatura de forma contradictoria. En lo fundamental fue así: el profesor (desde el año 1496 hasta el año 1526) de la universidad de Bolonia (Italia) Scipión del Ferro encontró una fórmula para la búsqueda de una raíz positiva de las ecuaciones concretas de la forma $x^3 + px = q$ ($p > 0, q > 0$). El la mantuvo en secreto reservándola como arma contra sus contrarios en las disputas científicas. Al final de sus días comunicó este secreto a su pariente y heredero en el cargo Annibal della Nave y a su alumno Fiore.

A comienzos del año 1535 debía realizarse un duelo científico entre Fiore y Nicolo Tartaglia (1500—1557). Este último era un científico talentoso, procedente de una familia pobre, que se ganaba la vida con la enseñanza de las matemáticas y la mecánica en las ciudades del Norte de Italia. Conociendo, que Fiore poseía la fórmula de Ferro, y habiendo preparado a su contrincante problemas sobre la resolución de ecuaciones cúbicas, Tartaglia fue capaz de descubrir nuevamente esta fórmula, la que le permitió la victoria en la disputa celebrada el 12 de febrero del año 1535.

El método de Tartaglia como al parecer también el de Ferro consistía en la elección de la forma adecuada en la irracionalidad algebraica para la expresión de la raíz de las ecuaciones del tipo indicado anteriormente: $x^3 + px = q$ ($p > 0, q > 0$). Suponiendo que $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$, sustituyendo esta expresión en la ecuación y poniendo $p = 3\sqrt[3]{uv}$, él obtuvo el sistema:

$$u - v = q;$$

$$uv = \frac{p^3}{27}$$

Interpretando a u y v como raíces de una ecuación cuadrática, Tartaglia halló

$$u = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2} + \frac{q}{2};$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^2} - \frac{q}{2}.$$

Al poco tiempo Tartaglia pudo resolver la ecuación de la forma $x^3 = px + q$ ($p > 0, q > 0$) con la sustitución $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$. Finalmente comunicó que las ecuaciones de la forma $x^3 + q = px$ se reducen al tipo anterior, pero no dio el método de reducción. Tartaglia durante mucho tiempo no publicó su resultado por dos causas: en primer lugar aquella misma causa que detuvo a Ferro; en segundo lugar, la imposibilidad de resolver el caso

irreducible. Este último consiste en que hay ecuaciones $x^3 = px + q$ que tienen raíces reales positivas independientemente de que tenga lugar la desigualdad $\left(\frac{q}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{p}{3}\right)^2$ o no. Sin embargo, la fórmula de Tartaglia no da

la solución en el segundo caso, ya que no había posibilidad de interpretar correctamente los números imaginarios que se obtenían en este proceso. El caso irreducible surgió en Tartaglia también en las ecuaciones de la forma $x^3 + q = px$.

Sin embargo, el trabajo de Tartaglia no fue en vano. Considerables resultados de las matemáticas, cuando maduran las condiciones necesarias y suficientes para su surgimiento, comienzan literalmente a "sentirse en el aire" y sirven como objeto de los trabajos de muchos científicos. Desde el año 1539 las ecuaciones cúbicas las comienza a estudiar Cardano (1501—1576). Hombre de un destino singular y agitado, repleto de contradicciones y frecuentemente con acciones difíciles de explicar, rico, instruido y talentoso, amaba apasionadamente el trabajo científico. La filosofía y la matemática, la medicina y la astrología constituían los objetos de la pasión desenfrenada de Cardano. Al oír sobre el descubrimiento de Tartaglia, dedicó muchos esfuerzos para arrancar el secreto al cauteloso y desconfiado Tartaglia y engalanar con este resultado el libro que tenía pensado "Ars magna...", esto es "El gran arte o las reglas del álgebra". Al fin y al cabo lo consiguió; después Cardano con esfuerzos propios eliminó la incompletitud de las informaciones comunicadas y el libro vino a la luz en el año 1545.

Esta gran obra (40 capítulos) contiene no sólo las reglas de las operaciones algebraicas y los métodos de búsqueda de ecuaciones de los primeros tres grados, sino también los elementos de la teoría general de las ecuaciones algebraicas. Así, Cardano introdujo un método regular de reducción de la ecuación cúbica general $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ a la forma, en la que falta el término cuadrado de la incógnita, mediante la sustitución $x = x_1 + h$ y lo extendió a la ecuación de 4º. grado. En "Ars magna..." se expresan muchos teoremas sobre la interrelación entre las raíces y los coeficientes: sobre las raíces positivas y negativas ("ficticias"), sobre sus sumas y otros teoremas; por ejemplo: si en la ecuación todos los términos que están en la parte izquierda tienen grado mayor que los grados de los términos de la parte derecha, entonces la ecuación tiene una y sólo una, raíz positiva. Finalmente, Cardano mostró la divisibilidad del polinomio algebraico $P_n(x)$ por $(x - x_1)$, donde x_1 es una raíz de la ecuación $P_n(x) = 0$. Cardano también incluyó en su libro el método de resolución de ecuaciones de 4º. grado mediante la reducción del problema a una resolvente cúbica, descubierta por su alumno L. Ferrari (1522—1565). Aclaremos este método con el ejemplo del problema que resolvió Ferrari. Este fue dado a Cardano por

el matemático italiano D. Colla. El problema decía: "Dividir el número 10 en tres partes tales que constituyan una progresión geométrica y el producto de sus dos primeras partes sea igual a 6". Por las condiciones: $\frac{6}{x} : x =$

$= x : \frac{x^3}{6}, \frac{6}{x} + x + \frac{x^3}{6} = 10$, de donde se obtiene la ecuación $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$. Completamos ambas partes logrando que la parte izquierda sea un cuadrado perfecto: $(x^2 + 6)^2 = 60x + 6x^2$. Adicionando a ambas parte $2(x^2 + 6)t + t^2$, donde t está todavía por determinar. Obtenemos

$$(x^2 + 6 + t)^2 = 60x + 6x^2 + 2(x^2 + 6)t + t^2$$

La condición para que el miembro derecho sea un cuadrado perfecto, como se sabe, es la anulación del discriminante. Esto Ferrari lo escribe así: $30^2 = (2t + 6)(t^2 + 12t)$, reduciendo el problema a la solución de una resolvente cúbica. El método evidentemente es general para las ecuaciones de 4º. grado. Cardano redujo a este tipo una ecuación que no contiene términos de 1º. grado, con la sustitución $x = \frac{k}{y}$.

No nos detendremos en la pesada discusión de Tartaglia y Cardano sobre la prioridad del descubrimiento. Esta discusión ha generado una enorme literatura. Muchos autores hasta en nuestros días regresan a él, nueva y nuevamente presentando las apreciaciones de Tartaglia, Cardano, los detalles del descubrimiento y su relación con un amplio círculo de acontecimientos históricos contemporáneos a ellos. Con esta literatura se relaciona también por entero la observación, hecha antes, sobre la divergencia de las exposiciones de esta cuestión.

Un éxito tan rápido y sorprendente en la búsqueda de la fórmula de la solución de las ecuaciones de 3º. y 4º. grado presentó ante los matemáticos el problema de la búsqueda de la solución de ecuaciones de cualquier grado. Una gran cantidad de intentos, los esfuerzos de los más notables científicos no condujeron al éxito. El problema, con el transcurso del tiempo, se transformó y comenzó a tratarse como el problema de la posibilidad o imposibilidad de la solución de ecuaciones algebraicas de grado $n \geq 5$ en radicales. En las búsquedas de la solución de este problema transcurrió alrededor de 300 años. Sólo en el siglo XIX N. G. Abel demostró que las ecuaciones de grado $n > 4$, hablando en general, no se resuelven en radicales. Galois relacionó con cada ecuación un grupo especial de permutaciones de sus raíces, el grupo de Galois, y redujo el problema a la investigación de la estructura de este grupo, a su resolubilidad. Más adelante nos detendre-

mos más detalladamente en este problema, así como en la formulación más general de los problemas de la teoría de Galois: expresar racionalmente las raíces de una ecuación dada a través de las raíces de otra ecuación más sencilla.

En el camino de la creación de la teoría de las ecuaciones algebraicas y los métodos de su resolución se presentaban aun dos obstáculos: la complejidad, incomodidad de las fórmulas obtenidas y lo inexplicable del caso irreducible. Lo primero constituía una incomodidad puramente práctica. Cardano lo elimina proponiendo encontrar las raíces de la ecuación aproximadamente, mediante la regla de las dos posiciones falsas, conocida ya por los egipcios y en esencia aplicada aún en nuestros días en forma de interpolación simple o lineal. El segundo obstáculo tiene raíces más profundas y los esfuerzos por su superación tuvieron consecuencias muy importantes.

Ya Cardano menciona las raíces imaginarias, denominándolas sofisticadas, muestra con el ejemplo $x + y = 10, xy = 40$, que estas raíces se encuentran por pares, esto es $x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{-15}$, pero resolver tales tipos de ecuaciones lo considera imposible.

Un esfuerzo fructífero y audaz por dominar el caso irreducible pertenece al matemático e ingeniero italiano R. Bombelli de Boloña. En la obra "Algebra" (1572) introdujo formalmente las reglas de operación con números imaginarios y complejos, apoyándose en las reglas: $\pm i \cdot \pm i = -1, \pm i \cdot \mp i = 1$, estableció que todas las expresiones que contienen "menos sofisticados" de Cardano se transforman en la forma $a + bi$. En un ejemplo concreto, $x^3 = 15x + 4$, Bombelli mostró que en el caso irreducible las raíces reales se obtienen como suma de dos números complejos de la forma $a + bi$ y $a - bi$. El método de Bombelli consiste en lo siguiente: sea dada la ecuación $x^3 = ax + b$, y que tiene lugar $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 < 0$, por consiguiente la fórmula:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

no es aplicable. Bombelli partió de que las expresiones del tipo $\sqrt{\alpha \pm \sqrt{\beta}}$, que forman parte de esta fórmula, también pueden ser transformadas a la forma $p + \sqrt{q}$. Poniendo $\sqrt{\alpha \pm \sqrt{\beta}} = p \pm \sqrt{q}$, para la determinación de p y q obtuvo dos ecuaciones:

$$p^3 + 3pq = \alpha; \quad p^2 - q = \sqrt{\alpha^2 - \beta} = \gamma$$

Para la determinación de p de este sistema se obtiene la ecuación $4p^3 =$

$= 3\gamma p + \alpha$. En particular si se pone $\alpha = \frac{b}{2}$, $\beta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3$, entonces

$$\gamma = \frac{a}{3} \text{ y } x = p + \sqrt{q} + p - \sqrt{q} = 2p.$$

Sin embargo, esta explicación de Bombelli es sólo una explicación y no facilita la resolución del caso irreducible, ya que la ecuación $4p^3 = 3\gamma p + \alpha$ es semejante a la ecuación buscada. Pero la introducción para fines particulares de las operaciones generales con números complejos, sitúa al "Álgebra" de Bombelli entre las más cercanas precursoras de los trabajos de Gauss sobre esta cuestión.

El crecimiento del contenido de los conocimientos matemáticos siempre ha estado estrechamente vinculado con el desarrollo del simbolismo matemático. Este último, cuando refleja suficientemente bien la esencia real de las operaciones matemáticas, activamente influye en las matemáticas y ella misma adquiere propiedades operativas. En la historia de las matemáticas, la historia de los símbolos puede compararse con la historia de los instrumentos de trabajo, a través de los cuales es posible reconstruir y comprender mucho.

En la época examinada por nosotros transcurrió un rápido paso del álgebra literal (retórica) al álgebra simbólica por vía de las abreviaturas (sincipado) de las palabras, y después la introducción de símbolos. Ya en las obras de Cardano este cambio es muy notable. Por ejemplo, la raíz de una ecuación "cubus 6 rebus aequalis 20" ($x^3 + 6x = 20$) se encuentra según la fórmula

$$R_x u cu R_x 108 p 10 | m R_x u cu R_x 108 m 10 \\ (\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}).$$

Posiblemente el lector ya ha podido comprender el significado de los símbolos, falta añadir que R_x es el signo de la raíz, $R_x u cu$ es radix universalis cúbica, esto es, la raíz cúbica general de toda la expresión situada hasta la raya vertical o hasta el final de la expresión. Los símbolos hasta ahora son muy diversos, no siempre forman un sistema lógico, incluso dentro de un mismo libro. Pero las exigencias de la matemática obligaron a buscar cada vez un sistema más perfecto de símbolos. Bombelli, por ejemplo, para las sucesivas potencias de la incógnita x utilizó los símbolos: 1, 2, 4, ... S. Stevin (1548—1620), el matemático e ingeniero flamenco, conocido en particular por la introducción en las matemáticas europeas del aparato de las fracciones decimales, con el mismo objetivo que Bombelli, utilizó correspondientemente los signos (1), (2), (3), ..., y en el caso de la segunda y tercera incógnita:

sec (1), sec (2), sec (3), ...

ter (1), ter (2), ter (3), ...

Un sistema único de símbolos algebraicos, consecuentemente organizado, por vez primera lo dio, al parecer, Viète.

El surgimiento del cálculo algebraico literal constituye una de las facetas del fenómeno más general y profundo en la historia de las matemáticas que es el surgimiento del álgebra como una ciencia general sobre las ecuaciones algebraicas. Las obras e ideas de Viète transmiten muy bien este momento crítico.

François Viète (1540—1603) fue un matemático francés, jurista según su instrucción y género de actividad. Durante sus actividades pedagógicas en una familia influyente, se le ocurrió el plan de un nuevo sistema astronómico, que debía sustituir el sistema de Copérnico, incompleto según su opinión. En relación con esta idea Viète dedicó muchos esfuerzos al perfeccionamiento de la trigonometría y alcanzó notables éxitos. Brillantemente instruido, Viète rápidamente ascendió por el escalafón y se hizo un científico consejero y cortesano cercano a los reyes franceses Enrique III y IV. Estando desde el año 1584 hasta el año 1589 separado de los asuntos de la corte como consecuencia de las intrigas políticas de los enemigos, utilizó su ocio en la escritura del trabajo principal de su vida. "Introducción al arte del análisis", que es una obra enorme y desmesuradamente detallada, escrita según la nueva álgebra. Este trabajo se publicó desde el año 1591 por partes, en gran medida después de la muerte del autor y no fue totalmente completado.

La idea de Viète se determinaba por las siguientes consideraciones: los grandes éxitos de los matemáticos italianos en la resolución de las ecuaciones de 3º y 4º grado se apoyaban en la gran efectividad de los métodos algebraicos. Pero el número de diferentes tipos de ecuaciones algebraicas amenazadoramente creció, llegando, por ejemplo, en las obras de Cardano a 66; cada uno de estos tipos exigía un método especial. Era necesario encontrar métodos generales de enfoque a la resolución de ecuaciones algebraicas; estas últimas también se deben considerar en la forma más general posible con coeficientes literales. Además era necesario conjugar la efectividad de los métodos algebraicos con el rigor de las construcciones geométricas antiguas, bien conocidas por Viète y que representaban, según su opinión, modelos de auténtico análisis científico.

El cálculo de Viète se precede por la aritmética, la cual opera con números: *logistica numeralis*. El cálculo con letras recibe el nombre de *logistica speciosa*, de la palabra *species* que es el término de una expresión matemática. El cálculo se divide en *Zeticque*, esto es, el arte de resolver ecuaciones; *Porificque*, es decir, el arte de demostrar la exactitud de las soluciones obtenidas; *Exegeticque*, es decir, la teoría general de las ecuaciones. Todas las magnitudes están designadas por letras: las incógnitas, por vocales, las variables conocidas, por consonantes. Los números



F. Viète (1540—1603)

son sin dimensiones, positivos, racionales (en los casos de irracionalidades Viète pasa al idioma de la geometría), las magnitudes tienen dimensiones. Esta influencia geométrica en la concepción de magnitud se refuerza por una terminología especial: la primera potencia de una magnitud se denomina *latis* (lado), la segunda, *planum* (área), la tercera, *solidum* (cuerpo). A continuación siguen magnitudes plano-planos, plano-volumenes, volumen-volumenes, etc. La suma y resta se realiza con magnitudes unidimensionales. Las últimas, a propósito, se admite compararlas según su dimensión por vía de la multiplicación por la unidad de longitud. La multiplicación y división provocan cambio de dimensión. Estas ideas de Viète en su época reflejaban la existencia de una ruptura aún no determinada entre los números y las magnitudes. Más tarde se ha aclarado que ellos eran los precursores de una serie de cálculos matemáticos: de álgebra vectorial, tensorial, grassmanniana.

La simbología de Viète también está agravada con la carga de los aportes geométricos; es difícil, no siempre comprensible, se alterna con palabras en abreviatura e incluso no abreviadas. Pongamos ejemplos:

- a) *Acubus + Bplanum in A₃ aequatur D sólido* ($A^3 + 3BA = D$, ó $x^3 + 3Bx = D$).
- b) *B parábola in A gradum - A potestate aequatur Z homogenea* ($BA^n - A^{m+n} = Z$).

No obstante, gracias a este simbolismo resultó por vez primera posible la expresión de ecuaciones y sus propiedades, mediante fórmulas generales. Los objetos de las operaciones matemáticas comenzaron a ser no problemas numéricos sino las propias expresiones algebraicas. Precisamente esta idea fue la que introdujo Viète como característica de su cálculo como “arte, que permitía realizar bien los descubrimientos matemáticos”. A propósito, los símbolos de Viète fueron rápidamente perfeccionados por sus contemporáneos más jóvenes, en especial por T. Harriot (1560—1621).

En las obras de Viète se realiza un original resumen de las matemáticas de la época del Renacimiento. De un modo particularmente preciso se manifiesta esta particularidad en sus trabajos algebraicos. En ellos detallada y metódicamente se exponen los conocimientos sobre las ecuaciones del 1º. al 4º. grado. El carácter general de la escritura permite a Viète construir toda la exposición no como una colección de recetas, sino como una teoría general de las ecuaciones. Para esto utiliza el rico arsenal de transformaciones algebraicas, apoyándose en las sustituciones: $x = y + k$ (para eliminar el término que tiene la incógnita del segundo orden según la magnitud del exponente), $x = \frac{y}{k}$ (para la eliminación del término que contiene x), $x = ky$ (con el objeto de eliminar los coeficientes fraccionarios), $x = \frac{a}{b}y$ (para dar al coeficiente con x^{n-1} el valor dado) y otros. De los radicales se liberaba por medio de la separación de uno de los términos y la elevación a cierta potencia de ambos miembros de la ecuación.

Por ejemplo, cada ecuación cúbica la transforma a la forma $x^3 + 3ax = b$ y aplica a continuación la sustitución $a = t^2 + tx$, para llegar a la ecuación

$$x^3 + 3tx^2 + 3t^2x = b.$$

De las dos últimas ecuaciones transformadas a la forma:

$$(x + t)^3 - t^3 = b,$$

$$t^3(t + x)^3 = a^3,$$

obtiene la ecuación cuadrática respecto a t^3 : $(t^3)^2 + bt^3 = a^3$. Puede tam-

bién ponerse $x = \frac{a - t^2}{y}$ directamente en la ecuación para obtener este mismo resultado.

El caso irreducible de la ecuación cúbica Viète lo redujo al problema de la trisección del ángulo. Mostró que cada ecuación irreducible puede ser transformada a la forma $x^3 - 3x = a$. Comparándola con la relación trigonométrica $(2 \cos \varphi)^3 - 3(2 \cos \varphi) = 2 \cos 3\varphi$, Viète demuestra esta suposición. El problema de la trisección del ángulo lo resuelve utilizando el método de inserción conocido por él de las antiguas fuentes.

En la resolución de las ecuaciones Viète busca las raíces positivas. Con ayuda de la transformación $x = -y$ trata el problema de la búsqueda de raíces negativas. Desarrollando los resultados de Cardano, Viète enuncia una serie de teoremas sobre la interrelación de las raíces de las ecuaciones y sus coeficientes, incluyendo los casos particulares del teorema, conocido actualmente con su nombre. En relación con esto considera, en los límites indicados antes, la formación de ecuaciones por medio de productos de bi-

nomios: $P_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k) (n < 5, x_k < 0)$. La proposición completa

sobre la dependencia de los coeficiente y las raíces de las ecuaciones fue formulado por Harriot y A. Girard y publicado por el último en el año 1629.

El álgebra de Viète era aún imperfecta y tenía grandes insuficiencias. La hacía muy engorrosa el tratamiento específico de las magnitudes, las cuales tenían dimensión. En ella no hay un tratamiento general de las potencias, todas las potencias eran naturales. La división de principio entre los números y las magnitudes algebraicas no le permitió utilizar los radicales para las magnitudes, sino sólo para los números, etc. Fue opacada rápidamente por el álgebra de Descartes, de la cual se hablará más adelante. Sin embargo, se sabe, que, por ejemplo, Fermat estudiando el álgebra de Viète se atuvo a su forma cuando construyó la geometría analítica. Además nos parece justificada la proposición de que el paralelismo entre las propiedades de las ecuaciones y las construcciones geométricas, regularmente llevadas a cabo por Viète, jugó su papel en la formación de las ideas de la geometría analítica en el siglo XVII. Aquello que representaba un rudimento geométrico en el álgebra en formación de Viète y otros matemáticos del siglo XVI sirvió de punto de partida al desarrollo de una nueva ciencia, la geometría analítica, en manos de los científicos del siglo XVII.

La comparación de los problemas algebraicos y trigonométricos, señalada en la resolución de la ecuación cúbica no fue para Viète un hallazgo casual, un episodio. Viète, como se ha dicho, despertó el interés hacia el álgebra precisamente en virtud de su utilidad e incluso necesidad para los

problemas de la trigonometría y la astronomía. En lo sucesivo los trabajos y resultados trigonométricos y algebraicos se suceden simultáneamente, frecuentemente entrelazándose. Viète no se limitó a la determinación de todos los elementos de un triángulo plano o esférico dados tres de sus elementos. A él pertenecen los desarrollos de las funciones trigonométricas de arcos múltiples mediante la aplicación sucesiva de las fórmulas para el seno y coseno de la suma de dos ángulos.

$$\cos m\alpha = \cos^m \alpha - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos^{m-2} \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \dots$$

$$\sin m\alpha = m \cos^{m-1} \alpha \cdot \sin \alpha - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{m-3} \alpha \cdot \sin^3 \alpha + \dots$$

Después de la muerte de Viète se conocieron muchas de sus fórmulas recorrentes

$$\cos m\alpha = 2 \cos \alpha \cdot \cos (m-1)\alpha - \cos (m-2)\alpha,$$

$$\sin m\alpha = 2 \cos \alpha \cdot \sin (m-1)\alpha - \sin (m-2)\alpha,$$

$$\sin m\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos (m-1)\alpha + \sin (m-2)\alpha,$$

$$\cos m\alpha = -2 \sin \alpha \cdot \sin (m-1)\alpha + \cos (m-2)\alpha.$$

Una sensación extraña produce el hecho que semejantes resultados importantes de la goniometría fueron logrados con una definición no lo suficientemente general de las funciones trigonométricas, como relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo, sin alusión a la introducción de la circunferencia generatriz. Sin embargo, así sucede frecuentemente en la historia; los resultados primero surgen y después se asimilan y reciben un tratamiento lo suficientemente general.

Un logro significativo de Viète lo constituye la introducción por él, por vez primera en la matemática del problema sobre la búsqueda del producto infinito. Si alrededor de un polígono regular de n lados de área S_n se circunscribe un círculo de radio r y se inscribe en él un círculo de radio ρ_n , entonces cuando se duplica el número de lados de este polígono obtenemos $S_n : S_{2n} = \rho_n : r = \cos \frac{\pi}{n}$. Comencemos desde el cuadrado inscrito: $n = 4$, $S_4 = 2r^2$. Poniendo sucesivamente $n = 4, 8, 18, \dots$, obtenemos:

$$S_4 : S_8 = \cos \frac{\pi}{4},$$

$$S_8 : S_{16} = \cos \frac{\pi}{8},$$

.....

Ahora Viète "pasa al límite". El dice que cuando $n = \infty$ se obtiene un círculo, el área del cual es $S_{\infty} = 2\pi r^2$. Multiplicando toda la cadena de igualdades, encuentra:

$$\frac{2}{\pi} = \cos \frac{90^\circ}{2} \cdot \cos \frac{90^\circ}{4} \cdot \cos \frac{90^\circ}{8} \dots,$$

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)} \times \\ \times \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)} \dots$$

Naturalmente, Viète no demuestra la convergencia del producto infinito obtenido, estando intuitivamente convencido en la veracidad de su afirmación límite.

En el ejemplo de los trabajos de Viète hemos mostrado que en la matemática europea del siglo XVI se formó el álgebra como la ciencia de solución de ecuaciones. Esta última contenía una reserva completa de métodos de solución de ecuaciones de los primeros cuatro grados. Los algebristas perfeccionaron la formulación simbólica de su ciencia y trataron de formular y resolver problemas de la teoría general de las ecuaciones algebraicas. La trigonometría se separó de la astronomía, sus resultados recibieron un grado suficiente de generalidad. La herencia geométrica de los antiguos fue totalmente asimilada por los científicos. La matemática de las magnitudes constantes al final del siglo XVI concluyó el ciclo de su formación.

4.4. Desarrollo ulterior de las matemáticas elementales

La matemática se desarrolla en un frente amplio. Además sufren cambios todos los elementos de su estructura: se desarrollan nuevas teorías, se proponen y comprueban nuevas hipótesis, se acumulan hechos, que completan la estructura de las ciencias matemáticas ya formadas, se amplía la esfera de aplicación de los métodos matemáticos, cambian las ideas generales sobre la naturaleza de la matemática y sus posibilidades. El proceso de cambio abarca no sólo aquellas partes de la matemática las cuales en el período histórico dado constituyen la cúspide de los logros creadores. Se desarrolla y cambia de forma también, aquella parte, la cual se acostumbra a denominar matemática elemental, término que aún no ha encontrado definición y tratamiento único, y el cual juega tan gran papel en el sistema de la formación y actividad práctica masiva de los hombres. La división de la

matemática en superior y elemental que se utiliza en nuestra época tiene un carácter condicional históricamente limitado y no puede pretender ser científico. Entre la matemática elemental y superior no hay delimitación determinada: las ideas matemático-elementales se transforman en las ramas superiores de la matemática; a su vez la matemática elemental se completa con nuevos hechos e ideas de la llamada matemática superior.

Citemos algunos ejemplos que ilustran estas particularidades del desarrollo de la matemática. Los matemáticos del siglo XVI y comienzos del XVII experimentaron enormes dificultades de carácter práctico-computacional. Ante todo, estas dificultades se concentraban alrededor de los problemas de confección de tablas de las funciones trigonométricas y también relacionada con este problema la determinación del valor de π . Otro problema lo constituía la búsqueda de algoritmos simples y confiables de determinación de las raíces de las ecuaciones con coeficientes numéricos dados. Los recursos aritméticos de cálculo se limitaban a las operaciones con números enteros y fracciones simples, las fracciones decimales sólo comenzaban a abrirse camino. Ellas fueron introducidas por vez primera en Europa en el año 1585 por S. Stevin en la obra "La Disme" (La décima)". Los cálculos se realizaban sólo a mano.

La confección de tablas trigonométricas jugó en aquella época un gran papel. Por esto a finales del siglo XVI y a comienzos del XVII con los esfuerzos heroicos de los científicos fueron confeccionadas y editadas algunas de tales tablas. En los cálculos de las tablas trabajaron, por ejemplo, Copérnico (1473—1543), Kepler (1571—1630) y sus alumnos y ayudantes. 20 años después de la muerte de Reticus (1514—1576), alumno de Copérnico, aparecieron las grandes tablas "Opus Palatinum" terminadas por la tercera generación de calculistas, donde las magnitudes de las seis funciones trigonométricas fueron calculadas con una frecuencia de $10''$ para una circunferencia generatriz con radio 10^{10} . Viète dejó amplias tablas en su enorme obra "Canonus mathematicus", Bürgi, colaborador de Kepler, dedicó muchos años a la confección de tablas de senos de los arcos cada $2''$. La cantidad de ejemplos podría multiplicarse. Los navegantes, astrónomos y los constructores de todos los países necesitaban imperiosamente estas tablas y ellas surgieron en diferentes países y en diferentes variantes.

Una particularidad de las tablas fue la enorme magnitud del radio de la circunferencia generatriz elegida para el cálculo. Esto se explica por la ausencia de las fracciones decimales, por lo que era necesario obtener los resultados en números enteros, y la necesidad de asegurar una exactitud suficientemente grande de los cálculos. Las preocupaciones fundamentales provocaba la determinación con exactitud particularmente alta de los senos (o cuerdas) de arcos pequeños, para que en los cálculos no se reflejara la acumulación de errores. Para esto utilizaban el método, heredado de los

antiguos, de duplicación sucesiva de los lados de un polígono regular inscrito. Viète, por ejemplo, para la determinación del $\text{sen } 1'$ llevó los cálculos hasta la búsqueda del lado del polígono regular inscrito de $3 \cdot 2^{11}$ lados y el circunscrito de $3 \cdot 2^{12}$ lados. Además, en calidad de resultado adicional se buscaban valores aproximados del número π con gran exactitud. Así, en esta época el matemático y fortificador holandés Ludolph Van Ceulen (1539—1610) determinó primero 20 y después 35 cifras decimales del número π , el primero en superar los resultados del matemático del Asia Central Kashi. A propósito, la precisión posterior de este número incluso, hasta el cálculo de Shenks que buscó más de 700 cifras decimales de π , no era reclamada por las exigencias prácticas. El móvil de ellas, al parecer, fue o la tendencia vanidosa de demostrar su maestría en el cálculo o el esfuerzo ingenioso de “agarrar por los cuernos”, con cálculos directos, el problema de la determinación de la naturaleza aritmética del número π .

Para hacer más fáciles los cálculos de tablas los matemáticos inventaron procedimientos particulares en los que el papel principal lo jugaban algunas relaciones trigonométricas particulares, como también las diferencias de distintos órdenes. Su objetivo fundamental era la reducción, según las posibilidades, de los cálculos a operaciones más simples, adición y sustracción. Este mismo objetivo perseguían también en el cálculo con funciones trigonométricas utilizando las tablas. Los calculadores, naturalmente, tendían a evitar la multiplicación y división directa de números de varias cifras, reduciéndolos a procedimientos de adición y sustracción, del tipo de:

$$\text{sen } x \cdot \text{sen } y = \frac{1}{2} [\cos (x - y) - \cos (x + y)],$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos (x - y) + \cos (x + y)].$$

Semejantes métodos se utilizaban tan frecuentemente que recibieron una denominación especial “prostaféreticos” (de la unión de las dos palabras griegas: prótesis—adición, aféresis—cálculo). Ellos fueron utilizados por los matemáticos del Oriente Medio, Viète, Tycho Brahe, Wittich, Bürgi y otros muchos. Estos métodos encontraron aplicación incluso, un tiempo después que fueron inventados los logaritmos y entró en uso el camino inverso de reducción de las expresiones trigonométricas, a la forma cómoda para la logaritmación.

Los logaritmos fueron inventados a comienzos del siglo XVII. Sus fundamentos teóricos comenzaron a formarse mucho tiempo atrás. Se trata de la idea de la comparación de dos progresiones: aritmética y geométrica, y a la generalización suficiente del concepto de potencia. Aún en las obras de

Arquímedes en “El Arenario”, se encuentra la escritura de las potencias sucesivas de una base: $a^0, a^1, a^2, a^3, \dots$, con motivo de lo que se expresó la afirmación equivalente: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Ideas análogas fueron expresadas por Diofanto. Oresme partió de la idea de la comparación de una progresión geométrica y aritmética, cuando colocó en la última los números fraccionarios entre los naturales y generalizó asimismo el concepto de exponente de una potencia a magnitudes fraccionarias. Stifel comparó sistemáticamente las operaciones sobre los términos de ambas progresiones confrontadas e introdujo las potencias con exponentes fraccionarios y negativos.

Para utilizar estas ideas con el objetivo de reducir las operaciones a más simples sólo era necesario confeccionar tablas, donde se comparan las sucesiones de potencias de los números con la sucesión de sus exponentes. Para que las tablas fueran suficientemente compactas su base única convenía elegir próxima a la unidad. Semejantes tablas, a comienzos del siglo XVII ya existían. Habían sido confeccionadas por Stevin.

Estas eran tablas de por ciento complejos, o sea, el valor de los números $(1+r)^n$ con diferentes tasas de por ciento r : $r = 0,05, r = 0,04$, etc. Cuanto menor es r , tanto menor es la desproporción entre los valores obtenidos. Una tabla análoga fue el fundamento de una de las primeras tablas de logaritmos confeccionada por I. Bürgi.

I. Bürgi (1552—1632) nació en Suiza. Era maestro en reparaciones de relojes y de instrumentos astronómicos; inicialmente trabajó en Cassel y después en Praga en el observatorio astronómico con I. Kepler y lo ayudó en las observaciones y cálculos. Aquí, para la simplificación de cálculos, durante ocho años (1603—1611) confeccionó su tabla de logaritmos sobre la base de una tabla del tipo de Stevin: $a(1+r)^n$.

Para obtener un paso lo suficientemente pequeño en la tabla, Bürgi tomó $r = \frac{1}{10^4}$. La tendencia de no encontrarse en lo posible con fracciones lo obligó a introducir un factor complementario $a = 10^8$. Los valores de la progresión geométrica obtenida $g_k = 10^8 \left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^k$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$)

Bürgi los puso en correspondencia con los términos de la progresión geométrica: 0, 10, 20, 30, ... Obtuvo dos series de valores:

$$\begin{array}{cccc} 10^8, & 10^8(1+10^{-4}), & 10^8(1+10^{-4})^2, & 10^8(1+10^{-4})^3, \dots \\ 0, & 10, & 20, & 30 \end{array}$$

Los números de la serie de abajo fueron impresos en pintura roja y se denominaban rojos; los números de la serie de arriba, en pintura negra, se denominaban negros. De esta forma, en la tabla de Bürgi los números rojos constituían los logaritmos de los negros divididos entre 10^8 con base



J. Neper (1550—1617)

$\sqrt[10]{1,0001}$. Ya que Bürgi orienta su tabla a los números rojos, ella es en esencia una tabla de antilogaritmos, lo que no cambia la esencia de la cuestión. Los cálculos (gracias a la presencia del factor 10^8) de los números negros se llevaba a cabo hasta la novena cifra. Fueron llevados hasta el llamado número negro completo, igual a 10^9 . El correspondiente número rojo completo fue hallado con la aplicación de la interpolación y resultó igual a 230 270 022, esto es $1,0001^{230\ 270\ 022} \cdot 10^8 = 10^9$. De aquí es evidente la enorme cantidad de cálculos sucesivos que tuvo que realizar Bürgi para la confección de su tabla, empleando en este trabajo, como se dijo antes, alrededor de ocho años.

Bürgi por largo tiempo no se decidió a publicar las tablas, a pesar de su evidente utilidad para los cálculos. Sólo en el año 1620 a instancias de Kepler editó el libro "Tabla de la progresión aritmética y geométrica con la instrucción detallada de cómo utilizarla para todo género de cálculos". El

original de estas tablas junto a otros materiales del archivo de Kepler se conserva en la URSS en el observatorio de Pulkovo "La instrucción detallada", no publicada en su época junto con las tablas, fue encontrada más tarde y vio la luz en el año 1856.

La lentitud de Bürgi le costó la prioridad. En el año 1614, 6 años antes que su libro, apareció en Inglaterra "Descripción de las extraordinarias tablas de logaritmos" ("Canonis mirifici logarithmorum descriptio"). El autor de esta obra fue John Neper (1550—1617), barón holandés, que se ocupaba de diferentes ciencias, en particular la astronomía y la matemática, y las tablas eran tablas de logaritmos de las funciones trigonométricas con 8 cifras para valores de los argumentos desde 0 hasta 90° cada $1'$.

El principio de formación de estas tablas, el cual al parecer dominaba Neper (como puede deducirse de su correspondencia), desde el año 1594, era para su época nuevo. El método de comparación de progresiones, como ha sido mostrado, produce una sucesión de valores discretos. Ellos pueden ser concentrados, no presentando esto grandes dificultades, pero su carácter discreto no varía. Parte inseparable de este método es la interpolación. Neper, al contrario, partió de la dependencia funcional logarítmica, expresándola en forma de dos escalas continuas. Su idea consistía en lo siguiente.

Supongamos que desde los puntos A y A_1 (fig. 29) simultáneamente en la dirección indicada por las flechas, comienzan a moverse dos puntos M y m pasando sucesivamente por las posiciones respectivas $M_0, M_1, M_2,$

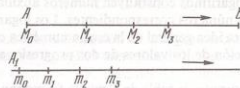


Fig. 29

$M_3 \dots$ y $m_0, m_1, m_2, m_3, \dots$ La velocidad inicial de ambos puntos es idéntica (para simplificar pongamos $v_0 = 1$). El punto m se mueve con velocidad constante $v_m = \text{const}$ y el punto M se mueve retardadamente; su velocidad es proporcional a la distancia restante hasta el punto B (para simplificar pongamos $AB = 1$). Tal definición (si se designa $A_1 m_k = x, M_k B = y$) en su traducción al lenguaje contemporáneo es equivalente a la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -y$, de donde $x = -\ln y$, ó $x = \log_1 y$. El sistema Nepe-

rario de logaritmos resultó un sistema con base $1/e$. La introducción de la función logarítmica conservó en sí objetivamente grandes posibilidades para su aplicación futura en el sistema del análisis matemático. Pero Neper

aún no dominaba en el año 1614 la idea de función logarítmica. El necesitaba las tablas. Por esto dividió AB en 10^7 etapas de recorrido transitado en 10^7 instantes de tiempo. Entonces en el primer momento de tiempo la velocidad es $= 1$, y sucesivamente:

$$BM_1 = 1 - \frac{1}{10^7}; M_1 M_2 = \frac{1}{10^7} \left(1 - \frac{1}{10^7}\right); M_2 B = M_1 B - M_1 M_2 = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right) - \frac{1}{10^7} \left(1 - \frac{1}{10^7}\right) = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^2; \dots \text{etc.}$$

Formando dos sucesiones de valores:

$$\begin{array}{l|l} M_k B & 1 \quad 1 - \frac{1}{10^7} \quad \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^2 \quad \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^3 \quad \dots \\ A_1 m_k & 0 \quad \frac{1}{10^7} \quad \frac{2}{10^7} \quad \frac{3}{10^7} \quad \dots \end{array}$$

Neper eludió fácilmente las operaciones con fracciones tomando $AB = 10^7$, y no $AB = 1$, como hicimos aquí; no cambiaba la esencia del asunto el que la velocidad inicial fuera $v_0 \neq 1$. Los números inferiores en la tabla Neper los denominó logaritmos de los superiores lo que significaba literalmente “números de relación” (de la unión de las palabras griegas: $\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ — relación, $\alpha\rho\iota\theta\mu\omicron\varsigma$ — número). Esta denominación la eligió, para subrayar que los logaritmos constituyen números auxiliares que miden las relaciones entre los números correspondientes. Los logaritmos de Neper, a pesar de la fructífera idea general de la escala numérica continua, aún eran tablas de comparación de los valores de dos progresiones: aritmética y geométrica.

Como ya fue indicado, la tabla de Neper la formaban, los logaritmos de las funciones trigonométricas. Ante todo, una columna aparte la formaban los logaritmos de los senos de los ángulos del primer cuadrante, elegidos con intervalos de $1'$. Ellos daban, de esta manera, también los valores de los logaritmos de los cosenos (como senos de los ángulos complementarios). Para eludir las fracciones se toma sen $90^\circ = 10^8$. En una columna especial, bajo la denominación de “diferencia” (differentiae) se ponían las diferencias de los logaritmos de los senos de los ángulos complementarios, esto es, los logaritmos de las tangentes. Neper conocía que los logaritmos de las funciones trigonométricas inversas se obtenían simplemente por un cambio de signo. Omitiremos los detalles técnicos del cálculo aritmético de estas tablas. Las reglas de logaritmación según Neper, se diferencian de las usuales. Son más engorrosas, ya que en ellas se tiene $\log 1 \neq 0$ (se convenía que $\log 10^8 = 1$). Por ejemplo, consideremos la

regla de logaritmación del producto $y = ab$. Reescribámosla en la forma $\frac{y}{a} = \frac{b}{1}$. La igualdad de las relaciones implica la igualdad de las diferencias de “los números de relaciones” (logaritmos):

$$\log y - \log a = \log b - \log 1; \log y = \log a + \log b - \log 1.$$

Además de que en todas las reglas de Neper está presente $\log 1 = x$, el cual se determina de la igualdad $1 = v_0 \left(1 - \frac{1}{v_0}\right)^x$; una complicación

esencial en los cálculos introduce el hecho que $\log 10 \neq 1$. Por esto se requiere de nuevo calcular la mantisa y la característica de los logaritmos de los números que se diferencian entre sí sólo en el factor 10^{*k} (k es un número natural). Estas dificultades condujeron a Neper a la idea de logaritmos decimales, es decir, a suponer primeramente $\log 1 = 0$, $\log 10 = 10^{10}$.

Esta misma idea del sistema decimal le surgió, después del conocimiento de la tabla de Neper, al profesor del colegio de Londres Henry Briggs (1561—1630), desde el año 1619 profesor de matemática en Oxford y después en Londres. Dos veces viajó adonde Neper a Escocia, hizo amistad con él y en trabajos conjuntos elaboraron un nuevo, prácticamente, más cómodo sistema decimal, basado en la comparación de las progresiones:

$$\begin{array}{l} \dots 0,01 \quad 0,1 \quad 1 \quad 10 \quad 100 \quad \dots \\ \dots -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \end{array}$$

Briggs se dedicó a la elaboración de una gran tabla de logaritmos decimales. Ya en el año 1617 publicó una tabla de logaritmos con 8 cifras de los números desde el 1 hasta el 10^3 . Después de 7 años, en 1624, Briggs pudo editar “La aritmética logarítmica”, la cual contenía tablas de logaritmos de 14 cifras para los números del 1 al 20 000 y del 90 000 al 100 000. Para la propaganda del nuevo medio de cálculo publicó algunos artículos aclarando el método de cálculo de las tablas y la utilización de los logaritmos. Uno de los métodos de Briggs tiene un interés particularmente grande.

Briggs parte de que si de cualquier número, por ejemplo, de 10 se extrae sucesivamente la raíz cuadrada, entonces después de un número suficiente grande de extracciones ($m = 2^n$) se obtiene un resultado suficientemente próximo a la unidad. En tal caso el resultado de la extracción siguiente de la raíz cuadrada puede escribirse: $2^{n+1}\sqrt{10} = 1 + \alpha$, donde α es pequeño. Elevemos ambas partes de la igualdad al cuadrado: $2^{2n+2}\sqrt{10} = 1 + 2\alpha + \alpha^2$. Para n suficientemente grande α^2 es tal que puede despreciarse y esto no influye en la exactitud dada de los cálculos.

$$2^{n+1} \sqrt[n+1]{10} - 1 \approx \frac{2^n \sqrt[n]{10} - 1}{2}$$

Multiplicando ambos miembros por 2^{n+1} .

$$2^{n+1} (2^{n+1} \sqrt[n+1]{10} - 1) \approx 2^n (2^n \sqrt[n]{10} - 1),$$

es decir, la expresión prácticamente no cambia cuando n sigue creciendo. Si se designa:

$$\sqrt[n]{10} = x, \text{ entonces } \log_{10} x = \frac{1}{2^n} \text{ y } 2^n (\sqrt[n]{10} - 1) =$$

$$= \frac{x - 1}{\log_{10} x} (A).$$

Este mismo valor de x puede obtenerse colocando en lugar de 10 cualquier otro número finito: $\sqrt[n]{a} \approx x$. Entonces $\log_{10} x = \frac{\log_{10} a}{2^n}$. La sustitución en (A) da:

$$2^n (\sqrt[n]{10} - 1) \approx \frac{2^n (\sqrt[n]{a} - 1)}{\log_{10} a},$$

de donde

$$\log_{10} a \approx \frac{2^n (\sqrt[n]{a} - 1)}{2^n (\sqrt[n]{10} - 1)}.$$

El cálculo del logaritmo decimal de cualquier número se reduce de esta manera a la extracción sucesiva de las raíces cuadradas de este número. Los valores de las potencias de 2 y las sucesivas extracciones de las raíces cuadradas de 10 se calculan previamente. Para eliminar la acumulación de errores, Briggs efectuó la extracción de la raíz cuadrada de orden 54 con exactitud de hasta 32 cifras decimales:

$$\sqrt[54]{10} = 1,000\,000\,000\,000\,000\,127\,819\,149\,320\,032\,35.$$

Los trabajos de Neper y Briggs sobre cuya dificultad de cómputo hemos podido dar sólo una idea incompleta debido a su voluminosidad fueron superados. Los logaritmos entraron en la práctica de los cálculos y rápidamente se extendieron por todo el mundo. En el año 1628 el holandés A. Vlacq, de profesión vendedor de libros, terminó el trabajo de Briggs, conformó y editó tablas de logaritmos decimales con 10 cifras de los números del 1 al 10^5 . Completó hasta el final las tablas de logaritmos decimales con

10 cifras de las funciones trigonométricas con una frecuencia de cada $10''$. El hielo fue quebrado. El profesor de matemáticas inglés John Speidell calculó hacia el año 1620 las tablas de los logaritmos naturales los que inmediatamente conquistaron una enorme popularidad. Al mismo tiempo (1620) el profesor de Londres Edmund Gunter elaboró una escala logarítmica, que fue la primera variante de la hoy ampliamente difundida regla de cálculo. El mismo y además Kepler y otros científicos conformaron tablas de logaritmos de los números y de las funciones trigonométricas, tanto decimales como naturales y las utilizaron ampliamente en Astronomía.

Las tablas de logaritmos rápidamente, en el transcurso de menos de un siglo, se difundieron por todo el mundo y se convirtieron en un instrumento auxiliar insustituible en los cálculos. En el año 1650 fueron llevadas a China por los jesuitas-misioneros. En Rusia, las ediciones regulares de tablas de logaritmos datan del año 1703 cuando aparecieron las tablas de Vlacq. La escala logarítmica fue descrita en la literatura científica y escolar, en Rusia, por vez primera en el año 1730 bajo la denominación de gunteriana (por el nombre del ya antes mencionado profesor E. Gunter).

Ya advertimos que en el proceso de resolución de los problemas puramente de cálculo de la confección de las tablas surgieron elementos del análisis de las magnitudes variables. Estos fueron: la idea de función logarítmica expresada por Neper y la eliminación de cantidades pequeñas despreciables, por ejemplo, en las obras de Briggs. Se puede suponer que el último método fue la causa de que Kepler comenzara a ocuparse del cálculo de los infinitesimales actuales.

A su vez la aplicación de los elementos del análisis infinitesimal dio una manera nueva, más cómoda para el cálculo de los logaritmos. Fue elaborada en el año 1667 por el miembro de la Real Sociedad Londinense el holsteiniano Kauffman (1620—1687) conocido bajo el nombre de N. Mercator. Este último partió de la notable relación demostrada en 1647 por Saint-

Vincent: si las abscisas de los puntos A y B en la hipérbola $y = \frac{1}{x}$ (fig. 30)

son respectivamente proporcionales a las abscisas de los puntos A_1 y B_1 en la misma curva, entonces el área de los cuadriláteros curvilíneos situados bajo los segmentos AB y A_1B_1 , son iguales.

Una proposición equivalente a ella es: el área S bajo la hipérbola $y = \frac{1}{x}$ sobre el segmento $(1, x)$ del eje de las abscisas es igual a $\ln x$ en el sistema cuya base es el número e tal que $S(1, e) = 1$.

Mercator trasladó el eje de ordenadas a la derecha en una unidad. La ecuación de la hipérbola se convirtió en $y = \frac{1}{1+x}$. El área rayada es

$S(0, x) = \ln(1 + x)$. Descomponiendo $y = \frac{1}{1+x}$ en serie, obtuvo $y = 1 - x + x^2 - x^3 = \dots$ El resto cuando $|x| < 1$ puede ser hecho tan pequeño como se quiera prolongando suficientemente la serie.

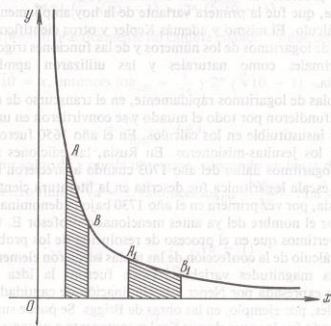


Fig. 30

Más adelante Mercator utiliza el método de cuadrilación de las áreas acotadas por curvas de la forma $y = x^n$, la abscisa y dos ordenadas. Estos primeros métodos de integración estaban en aquella época ya bien elaborados por Cavalieri, Fermat, Pascal y otros. La integración da:

$$S(0, x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \pm \frac{x^n}{n},$$

es decir, la posibilidad de calcular los valores de la función $\ln(1 + x)$ mediante una serie de potencias. La teoría de las funciones logarítmicas obtuvo su culminación en los trabajos de L. Euler. A él pertenece la definición general de las funciones logarítmica y exponencial como recíprocamente inversas, la extensión del concepto de logaritmo al caso de argumento complejo, la introducción del símbolo e para la base de los logaritmos naturales, etc. (ver su "Introducción al análisis infinitesimal", t. I).

Los científicos-matemáticos del siglo XVII buscaron además otras vías

para la superación de las dificultades de cálculo. En diferentes ciudades de Europa comenzaron a surgir máquinas de cálculo. Al parecer la primera máquina fue la máquina del profesor alemán Wilhelm Schickard (1623), que enseñaba matemática y astronomía en la ciudad de Tübinga. Noticias acerca de esta máquina aparecieron sólo en el año 1958. Su esquema y explicación de este esquema fueron encontrados en el archivo de Kepler y después en los fondos de archivos de la biblioteca de Stuttgart.

La máquina de W. Schickard constaba de tres partes: instrumento sumador, instrumento multiplicador y mecanismo para la escritura de los resultados intermedios. El primero de ellos representaba una variedad primitiva del aritmómetro, construido según el principio de utilización de transmisión por engranajes. En ejes paralelos (eran seis) se colocaban un engranaje de diez dientes y otro de uno. El último servía para transmitir al engranaje la siguiente carga de golpes, la cual la rotaba en 0,1 vuelta, después de que el engranaje anterior realizaba una vuelta completa. La forma técnica de la máquina permitía ver en ventanillas qué número se había elegido como primer sumando (o minuendo) y los resultados siguientes, incluso hasta el final. El cálculo no presentaba dificultades. Para la división se recomendaba la sucesiva sustracción del divisor al dividendo.

De manera original fue resuelto en la máquina de Schickard el problema de la multiplicación de los números. En ejes paralelos (también eran 6) se ponían cilindros en cada uno de los cuales se atornillaba una tabla de multiplicar. En la figura 31 se muestra esta tabla en forma desarrollada.

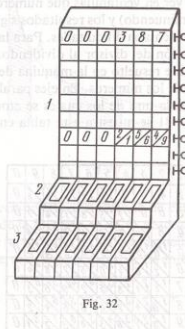
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	4	0	8	1	2	3	4	5	6
3	0	6	9	3	8	7	4	2	0
4	8	1	6	0	4	2	5	2	6
5	0	5	0	0	0	0	0	0	0
6	1	8	4	5	2	6	1	8	4
7	1	2	1	6	3	5	0	3	6
8	1	6	4	3	4	6	8	3	6
9	0	2	7	2	4	0	2	7	0

Fig. 31

Ante los cilindros se coloca un panel con nueve series de ventanillas (6 en cada fila, según el número de cilindros): cada fila se abre y cierra con un cerrojo especial adornado. Supongamos que hay que calcular a qué es igual el producto $387 \cdot 27$. Todos los cilindros se colocan por rotación en una po-

sición tal que en la fila superior de ventanillas aparezca el multiplicando: 000 387. El producto parcial 387 · 7 se obtiene por una simple apertura de las ventanillas de la séptima fila; en ellas aparece 000 2 / 15 / 64 / 9, que significa después de un cálculo mental no complejo: 2709 (00021 56 49). El segundo producto parcial (387 · 20) se obtiene abriendo la segunda fila de ventanillas, lo que da 000 61 / 61 / 4 ó 774, al cual a la derecha se le agrega un cero. Ambos productos parciales 2709 y 7740 se suman en el instrumento sumador. Este último en sus ventanillas muestra la suma 10 449.

La tercera parte de la máquina consta de seis tambores con la aplicación en ellos de las cifras: 1, 2, ..., 9, 0 y respectivamente de paneles con seis ventanillas. Girando los tambores en las ventanillas se fija el número que el calculador necesita recordar. La solución constructiva de la máquina de Schickard está representada en la figura 32 (1, es el dispositivo multiplicador, 2, el sumador, 3, el dispositivo registrador para la memoria).



La máquina de Schickard fue ideada y construida en el año 1623. Sobre ella nadie sabía nada, al parecer, salvo Kepler y un estrecho círculo de amigos del inventor. Por eso hasta los últimos tiempos se consideraba que el primer aritmómetro fue inventado en el año 1642 por Blas Pascal (1623—1662). El aritmómetro de Pascal está construido según el principio de transmisión de engranajes con diez piñones y más tarde (1673—1674) fue

perfeccionado por Leibniz. Los dispositivos de cálculo fueron aún durante mucho tiempo imperfectos y no tuvieron amplia difusión y aplicación práctica hasta el año 1874 cuando el ingeniero Odner (Petersburgo) inventó un dispositivo de ajuste especial, la rueda de Odner, que se utiliza en las más simples máquinas computadoras de nuestro tiempo.

Muchos métodos de cálculo fueron elaborados en relación con la solución numérica de ecuaciones algebraicas, entrelazados con ella. Con particular fuerza esta relación se reveló en las obras de I. Newton y sus antecesores y contemporáneos. Aún en su juventud (alrededor del año 1676), Newton elaboró el método de búsqueda aproximada de las raíces de las ecuaciones aplicado hasta el presente. En nuestros días se continúa la investigación del polígono de Newton, ideado por él para el desarrollo en serie de potencias fraccionarias del argumento x de la solución y de la ecuación $f(x, y) = 0$. En relación con los problemas de carácter computacional, Newton dedujo la fórmula del binomio y la extendió para el caso del exponente del binomio fraccionario y negativo.

En los años 1673—1683 Newton dictó conferencias sobre álgebra en la universidad de Cambridge. Su sucesor en la cátedra editó en el año 1707 estas conferencias bajo el título "Aritmética Universal". Ellas son notorias como un resumen especial del desarrollo del álgebra del siglo XVII, como ejemplo de la indisolubilidad del álgebra y la aritmética en aquel tiempo y del papel director en el álgebra de los métodos de cálculo: "Todas las operaciones de la aritmética son tan necesarias en el álgebra que ellas sólo conjuntamente forman una ciencia completa de cálculos y por esto expondré ambas conjuntamente", escribió Newton¹.

El aparato preparatorio del álgebra, los conceptos fundamentales y reglas de cálculo, contiene apartados dedicados a las operaciones con fracciones aritméticas. Los métodos geométricos de construcción de las raíces de las ecuaciones se tratan como auxiliares para la estimación aproximada de la magnitud de las raíces. El material de la teoría general de las ecuaciones también está subordinado al problema de la solución numérica de problemas que se reducen a ecuaciones algebraicas.

Los objetivos prácticos propuestos ante los matemáticos del siglo XVII condujeron a la ampliación del arsenal de medios de cálculo y métodos de solución numérica de los problemas. Los logros principales en este plano fueron: la invención de los logaritmos y los métodos de cálculo exacto o aproximado (si el exacto resultaba imposible) de las raíces de ecuaciones algebraicas. Todas estas innovaciones enriquecieron la matemática elemen-

¹ I. Newton. Aritmética Universal (Ediciones de la A.C. de la URSS, 1948, en ruso).

tal. Al mismo tiempo, cada uno de estos descubrimientos llevaba en sí los elementos que obtendrían desarrollo en sus partes no elementales: en el análisis matemático y en el álgebra superior. En esto se reveló la particularidad del desarrollo masivo indivisible de todo el contenido de la matemática y la relatividad, artificialidad de su división en elemental y superior, en diferentes disciplinas, etc. No debe nunca olvidarse que la separación de una de las facetas, de las ramas de la matemática aunque facilita su estudio, empobrece y entorpece el cuadro general del desarrollo de la totalidad de los conocimientos matemáticos. La cuestión sobre las relaciones e interacciones tanto dentro como fuera de la matemática queda como una cuestión principal de toda la matemática, especialmente en los casos cuando se trata sobre su estructura lógica o sobre su historia.

PROCESO DE CREACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS DE LAS VARIABLES

5.1. Comienzo del periodo de las matemáticas de las variables

En la historia de la ciencia las matemáticas del siglo XVII ocupan un lugar especial, muy significativo. El siglo XVII abre un nuevo periodo, el periodo de las matemáticas de las magnitudes.

A finales del siglo anterior, el XVI, el álgebra, la trigonometría, la geometría y además los métodos de cálculo acumularon suficiente cantidad de hechos y alcanzaron un estado tal que se convirtieron en parte esencial del progreso técnico y científico general. En el transcurso del siglo XVII los métodos matemáticos continuaron introduciéndose muy enérgicamente en las ciencias naturales, ante todo en la mecánica. Así en los años 1632 y 1638 Galileo dio la expresión matemática de las leyes de la caída de los cuerpos, algo antes (1609—1619) Kepler descubrió y formuló matemáticamente sus famosas leyes del movimiento de los planetas. Hacia el año 1686 Newton pudo formular y demostrar convincentemente la ley de la gravitación universal: las leyes del movimiento de los planetas se explican por la atracción de ellos hacia el Sol con fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia y directamente proporcional a sus masas. Las leyes de atracción resultaron universales para cualesquiera cuerpos, la masa de los cuales puede suponerse concentrada en el centro. La mayoría de los científicos trabajaban en numerosas ramas de la ciencia, estudiaban con curiosidad la naturaleza, buscaban sus leyes y no se preocupaban especialmente sobre las delimitaciones de las ciencias.

Los éxitos en la revelación y formulación matemática de tan numerosas leyes de las ciencias naturales condujo a la creación de un sistema de ciencias sobre la naturaleza, las ciencias exactas. Estas últimas se presentaban en forma de una ciencia general, la cual explicaba fenómenos particulares con la efectividad de las leyes generales de la naturaleza, formuladas matemáticamente. La idea filosófica de la universalidad del método matemático, la cual reflejaba el rápido desarrollo de la técnica y de la matemática agobió las mentes de los más grandes científicos y filósofos del siglo XVII (Descartes, Spinoza, Leibniz, Newton).

Cada nuevo éxito de las ciencias exactas provocaba un brusco aumento de la demanda de las aplicaciones de la teoría matemática. Las matemáticas en todos los tiempos se ha desarrollado bajo la influencia determinante

de la práctica y en última instancia del progreso técnico, material. En el siglo XVII la creatividad matemática de los científicos transcurrió en una atmósfera de gran presión de las circunstancias prácticas.

En el transcurso de este siglo cambió la forma de existencia de las matemáticas. En sustitución de los solitarios entusiastas aparecieron las organizaciones científicas. Desde el año 1662 comenzó su actividad la Royal Society de Londres la cual también actualmente juega el papel de Academia de Ciencias Nacional. En el año 1666 fue organizada la Academia de París. Así se dio comienzo a la época de la organización de las instituciones y sociedades científicas, que se convirtieron en una forma fructífera de trabajo colectivo de los científicos, con la protección estatal a la ciencia.

La correspondencia de los científicos y la rara aparición de libros no satisfacía las exigencias del intercambio científico. En el siglo XVII comenzaron su aparición las publicaciones periódicas. Desde el año 1665, en Londres, sale a la luz el "Philosophical Transactions"; simultáneamente en París surgió el "Journal des Savans" (existió hasta el año 1792); en el año 1682 en Leipzig fue fundada por Leibniz la revista "Acta Eruditorum" (existió hasta el año 1731).

El cambio en la situación práctica, en las bases ideológicas y en la estructura organizativa y el papel de las matemáticas transcurrió junto a profundos cambios cualitativos en su contenido. El estudio de los números, las magnitudes constantes, las figuras se complementa con el estudio de los movimientos y transformaciones, las dependencias funcionales. Cambia el contenido interno de las matemáticas, el cual adquiere cada vez más el aspecto de matemáticas de las variables. Sobre este viraje en la matemática F. Engels dijo: "El punto de viraje de las matemáticas fue la *variable* de Descartes. Gracias a esto se introdujo en las matemáticas el *movimiento* y con él la *dialéctica*, merced a lo cual surgió la *inmediata necesidad del cálculo diferencial e integral*, que comienza, inmediatamente, a partir de ahora y que Newton y Leibniz en general, perfeccionaron, pero no inventaron".

En el siglo XVII toman su comienzo todas o casi todas las disciplinas matemáticas, incluidas actualmente en el fondo clásico de la instrucción matemática superior contemporánea. En los trabajos de Descartes y Fermat comenzó a formarse la geometría analítica como un método de expresión de las relaciones numéricas de las dimensiones, formas y propiedades de los objetos geométricos, utilizando esencialmente el método de coordenadas. En formas diversas comenzó a surgir el análisis matemático. Inicialmente este fue el cálculo diferencial e integral, el cual tomó en los años 1665—1666 en las obras de I. Newton (publicadas, no obstante, sólo en el siglo XVIII) la forma de la teoría de las fluxiones y en las obras de Leibniz (publicadas en los años 1682—1686 y posteriormente) la forma de cálculo

de los diferenciales. Inmediatamente después del surgimiento del Análisis Matemático, los problemas mecánicos y físicos comenzaron a escribirse en forma de ecuaciones diferenciales, la resolución de las cuales se convirtió desde este momento, en uno de los más importantes problemas de toda la matemática. Casi en la misma época en el Análisis Matemático surgieron los primeros problemas que conducen a sus ramas superiores. En particular, se trata de los problemas variacionales, cuyos esfuerzos por resolverlos condujeron posteriormente al surgimiento del cálculo variacional, la parte más antigua del Análisis Funcional.

En relación insoluble con el análisis, se formaban en una rama independiente de las matemáticas, sus aplicaciones geométricas. Aún a comienzos del siglo, en el año 1604, Kepler dedujo la fórmula del radio de curvatura. Posteriormente, en el año 1673 Huygens dio la expresión matemática de la evoluta y evolvente. Muchos hechos geométrico-diferenciales, descubiertos y demostrados en el siglo XVII sirvieron de base sólida para la separación y fundamentación de la nueva rama de las matemáticas, la geometría diferencial.

En el siglo XVII comenzó el estudio de la perspectiva y la geometría proyectiva en las obras de G. Desargues (1593—1662) y B. Pascal (1623—1662). La teoría de las probabilidades tomó su primera forma científica, especialmente gracias al descubrimiento de J. Bernoulli (1654—1705) de la forma más simple de la ley de los grandes números. Finalmente, la matemática elemental tomó una forma acabada gracias a la sustitución del álgebra retórica por la simbólica y además, la invención de los logaritmos.

Un siglo en la vida de la ciencia es un gran plazo en el transcurso del cual ocurren una multitud de acontecimientos. Como en todas partes, en este libro, trataremos de destacar las líneas principales del desarrollo y señalar las regularidades. Precisamente, nos esforzaremos por mostrar cómo en el siglo XVII las matemáticas se transformaron, convirtiéndose fundamentalmente en las matemáticas de las variables, cómo ocurrió la ampliación del objeto de las matemáticas a cuenta de la inclusión en él del movimiento y la elaboración de nuevos medios de su transformación matemática.

5.2. Surgimiento de la geometría analítica

Hicimos notar la idea profunda de Engels acerca de que el punto de viraje en la matemática del siglo XVII fue la variable de Descartes. Veamos más detalladamente esta idea. René Descartes (1586—1650) fue un eminente sabio francés: filósofo, físico, matemático, fisiólogo. Recibió educación en un colegio de jesuitas, célebre por la organización de su enseñanza. Toda la vida Descartes continuó perfeccionándose en las ciencias. El objetivo



R. Descartes (1596—1650)

de Descartes en las ciencias naturales era la elaboración de un método general matemático-deductivo de estudio de todas las cuestiones de las ciencias naturales. Para esto, según la justa observación de C. Marx, Descartes aisló completamente este género de sus operaciones de los razonamientos metafísicos de carácter idealista. En los límites de la física de Descartes, la única substancia, la única base de la existencia y el conocimiento es la materia.

El racionalismo de las ideas de Descartes, que reconoce ante todo la razón, la deducción rigurosa, estuvo dirigido contra la escolástica eclesiástica. Las tensas relaciones con la iglesia católica lo obligaron en 1629 a emigrar a Holanda. Las relaciones enemistosas con los sacerdotes protestantes indujeron a Descartes en 1649 a emprender nuevamente un traslado a Suecia, donde después de un año falleció.

En nuestra tarea no entra el análisis de las ideas filosóficas de Descar-

tes. Las utilizaremos sólo en la medida que esto pueda ayudar a comprender sus ideas y resultados matemáticos. Se trata, ante todo, del lugar de las matemáticas en sus trabajos sobre ciencias naturales.

La naturaleza de la materia, afirmaba Descartes, es su voluminosidad tridimensional; sus más importantes propiedades son la divisibilidad y movilidad. Estas mismas propiedades de la materia deben ser reflejadas por las matemáticas. Esta última no debe ser bien numérica o bien geométrica. Debe ser una ciencia universal en la cual se incluya todo lo relacionado con el orden y la medida. Todo el contenido de las matemáticas debe ser considerado desde posiciones únicas, estudiarse por un método único; el mismo nombre de Ciencia debe reflejar esta generalidad. Descartes propuso denominarla matemática universal (*Mathesis universalis*).

Estas ideas generales obtuvieron una interpretación concreta hacia el año 1637 cuando salió a la luz el famoso “Discurso del Método” de Descartes. En esta obra, junto a la característica general del método de investigación de las ciencias naturales, se destacan en apartados independientes la aplicación de este método a la dióptrica, la meteorología y a las matemáticas. La última parte, la cual Descartes denominaba “Geometría”, presenta para nosotros el mayor interés.

La relación del álgebra literal con las curvas geométricas, necesaria para las matemáticas universales de Descartes, fue advertida inmediatamente apenas fue establecido el isomorfismo entre el campo de los números reales y el campo de los segmentos de recta. Se requería sólo definir las operaciones con segmentos de modo tal que los segmentos en realidad constituyeran un campo. La suma y diferencia de segmentos, evidentemente son

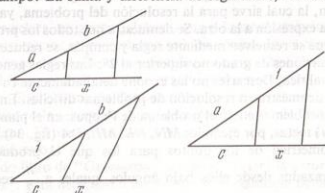


Fig. 33

segmentos, es decir, elementos del campo de segmentos. La dificultad con la multiplicación y división de segmentos que obligó a Viète a introducir el álgebra de las formas, fue superada por Descartes mediante la introducción

del segmento unidad y la construcción del cuarto segmento proporcional. Esto último Descartes lo realizaba de la misma forma que se hace actualmente, mediante la ubicación correspondiente de los segmentos en los lados de un ángulo arbitrario (ver fig. 33) y el trazado de cortes paralelos.

Los modelos geométricos de las raíces algebraicas lo constituyen la construcción de 1, 2, ... medios proporcionales. Aún más consecuentemente que en la "Geometría", esta idea aparece en la pequeña obra "El Cálculo del señor Descartes".

En los fundamentos de toda la "Geometría" de Descartes se sitúan dos ideas: la introducción de la magnitud variable y la utilización de las coordenadas rectangulares (cartesianas). De acuerdo a su tendencia unificadora, la magnitud variable se introduce en forma dual: en forma de la coordenada variable de un punto, que se mueve a lo largo de una curva y en la forma de un elemento variable del conjunto de números, el cual corresponde a los puntos de un segmento coordenado dado.

La "Geometría" consta de tres libros. El primer libro "Sobre los problemas que pueden construirse utilizando sólo círculos y líneas rectas" comienza con una aclaración corta de los principios generales expuestos antes. A continuación siguen las reglas de formación de las ecuaciones de curvas geométricas.

Para resolver cualquier problema, es necesario inicialmente considerarlo como si estuviera resuelto y designar con letras todo, tanto los datos como las líneas buscadas. Después, no haciendo ninguna diferencia entre los datos y las líneas buscadas es necesario advertir la relación entre ellas para obtener dos expresiones para una misma magnitud; esto conduce a una ecuación, la cual sirve para la resolución del problema, ya que puede igualarse una expresión a la otra. Se demuestra que todos los problemas geométricos, que se resuelven mediante regla y compás, se reducen a la resolución de ecuaciones de grado no superior al 2°. Las reglas generales de su geometría analítica, Descartes no las expone detalladamente en forma global, sino las demuestra en resolución de problemas difíciles. En calidad de uno de tales problemas eligió el problema de Pappus: en el plano están dadas ciertas (n) rectas, por ejemplo: MN, NK, ML, DA (fig. 34). Encontrar el lugar geométrico de los puntos para los que el producto de los segmentos trazados desde ellos bajo ángulos iguales a $\frac{n}{2}$ rectas se en-

cuentre en la relación dada con respecto al producto de los segmentos trazados del mismo modo a la otra mitad de las rectas. Por ejemplo,

$$\frac{CB \cdot CD}{CF \cdot CH} = \frac{1}{2}$$

Una de las líneas dadas (ML) y una de las buscadas (BC) se toman co-

mo principales. Denotemos $AB = x$ y $BC = y$. Como los ángulos del triángulo $\triangle ABR$ son conocidos, entonces también se conoce la relación de los lados: $\frac{BR}{x} = \frac{b}{n}$ y $CR = y + \frac{bx}{n}$. Razonando igual respecto al $\triangle DRC$ y

considerando $CR : CD = n : c$, obtenemos $CD = CR \cdot \frac{c}{n} = \frac{cy}{n} + \frac{bcx}{n^2}$. De la misma manera expresamos mediante x y y las líneas CF, CH , pongamos en la condición $CF \cdot CH = 2BC \cdot CD$ y obtenemos la ecuación del lugar geométrico buscado $F(x, y) = 0$.

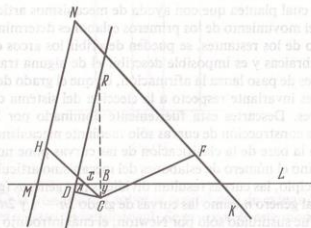


Fig. 34

Descartes aclara, en pocas palabras, que el lugar geométrico en el caso de tres y cuatro rectas representa una sección cónica. En el caso cuando el número de rectas $n > 4$, Descartes establece que para $2n$ ó $2n - 1$ rectas la ecuación del lugar geométrico tiene grado igual a n respecto a las dos variables x e y . El problema de Pappus respecto a cinco rectas resulta resoluble mediante regla y compás o según la terminología de Descartes es un problema plano. El mismo problema resulta para seis rectas, pero Descartes no advirtió esto.

El segundo libro de "Geometría" se llama: "Sobre la naturaleza de las líneas curvas". Está dedicado a un estudio más detallado de las curvas de diferentes órdenes, su clasificación y la revelación de sus propiedades. Descartes divide todas las curvas en dos clases en dependencia de que sea o no posible llevar a cabo su investigación con los recursos de que él disponía. En correspondencia con esto, en las matemáticas resultaban posibles sólo aquellas curvas, las cuales se describían por un movimiento continuo (con regla o compás) o con varios de tales movimientos sucesivos, de los cuales

los siguientes se determinan completamente por los anteriores. Las restantes curvas recibieron la denominación de mecánicas (más tarde, en las obras de Leibniz, de trascendentes) y fueron excluidas de la clase de las curvas admisibles. Sus propiedades pueden ser descubiertas sólo casualmente, gracias a procedimientos específicos que no tienen un carácter sistemático.

Todas las curvas admisibles, de esta manera, pueden ser construidas con ayuda de cierto mecanismo articulado. Respecto a ellas, sin demostración, se enuncia la afirmación de que son expresables mediante ecuaciones algebraicas. Así mismo Descartes anticipó uno de los teoremas fundamentales de la cinemática de los mecanismos (demostrado en el año 1876 por Kempe), el cual plantea que con ayuda de mecanismos articulados planos, en los que el movimiento de los primeros eslabones determina totalmente el movimiento de los restantes, se pueden describir los arcos de cualesquiera curvas algebraicas y es imposible describir el de alguna trascendente.

Descartes de paso lanza la afirmación, de que el grado de la ecuación de una curva es invariante respecto a la elección del sistema de coordenadas rectangulares. Descartes está fuertemente dominado por la hipnosis del principio de construcción de curvas sólo mediante mecanismos articulados. Por esto en la base de la clasificación de las curvas pone no el grado de la ecuación, sino el número de eslabones del mecanismo articulado. En virtud de este principio, las curvas resultan divididas por géneros (*genre*), además, pertenecen al género n -ésimo las curvas de grado $2n - 1$ y $2n$. Este principio incómodo fue sustituido sólo por Newton, el cual introdujo la clasificación de las curvas por el grado de las ecuaciones.

Descartes aún no podía construir una teoría general de las curvas de género $n \geq 2$. Pero para demostrar la fuerza y la universalidad de su método nuevamente regresa al problema de Pappus, investigando sus casos particulares. Por ejemplo, sea el problema de Pappus propuesto para cinco rectas (ver fig. 35): cuatro son paralelas (FG, DE, BA, HJ), la quinta es perpendicular a ellas (GA). Encontrar C tal que $CF \cdot CD \cdot CH = CB \cdot CM \cdot AJ$.

$$\begin{aligned} \text{Pongamos: } CM &= x; & \text{entonces } CF &= 2a - y, \\ CB &= y; & CD &= a - y, \\ AE = EG = AJ &= a; & CH &= a + y. \end{aligned}$$

La ecuación del lugar geométrico buscado es

$$(2a - y)(a - y)(a + y) = axy \quad \text{ó} \quad y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy.$$

Descartes aplica para la construcción efectiva de la curva dada un procedimiento especial, considerando los puntos de intersección de una parábola y una recta móviles.

Una parte considerable del segundo libro la constituyen los teoremas sobre el trazado de normales y tangentes a curvas algebraicas. Su método ("método de las normales") Descartes lo extendió a las secciones cónicas y a los llamados óvalos cartesianos. El subrayó el significado para la óptica de los teoremas enunciados. Veremos este "método de las normales" más adelante.

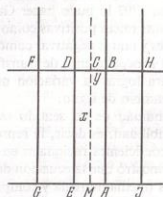


Fig. 35

El libro toca la proposición sobre la posibilidad de extensión del método de Descartes al caso tridimensional. Se expresa de este modo, la idea de la representación espacial de una curva mediante su proyección sobre dos planos mutuamente perpendiculares, cuya recta común es uno de los ejes coordenados. Sin embargo, esta idea en las obras de Descartes resultó aislada, no desarrollada; además en sus razonamientos se encubría un error. El, en esta única proposición de geometría analítica en el espacio, afirma que las proyecciones de la normal a una curva espacial son normales a la proyección de la curva, lo cual no es cierto incluso para la curva plana, no refiriéndonos ya a la existencia en el caso general de todo un plano normal. No aparecen en las obras de Descartes tampoco ideas sobre las tres coordenadas de un punto en el espacio y sobre las ecuaciones de las superficies.

El objetivo del tercer libro: "Sobre la construcción de sólidos o más que sólidos", es la construcción de la teoría general de resolución de ecuaciones y la utilización para esto, junto a los recursos algebraicos, de los lugares geométricos. La simbología algebraica de Descartes ya no se diferencia esencialmente de la actual. Cada ecuación se supone reducida a la forma $P_n(x) = 0$, donde $P_n(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros distribuidos según las potencias decrecientes de x . De la consideración del problema de la divisibilidad de $P_n(x)$ por $x - a$, donde a es raíz de la

ecuación. Descartes llega a la profunda conclusión, de que el número de raíces de una ecuación es igual al número de unidades en el exponente mayor de la potencia de x ¹⁾. Aquí Descartes tiene en cuenta las raíces reales (positivas), falsas (negativas) y aquellas que pueden ser imaginadas (imaginarias y complejas). La demostración de esta conclusión no la puede dar aún. Durante muchos años otros científicos tampoco pudieron dar la demostración. Sólo en el año 1797 lo pudo hacer Gauss. Descartes mostró que una ecuación tiene tantas raíces positivas como cambios de signos hay en la serie de los coeficientes y tantas negativas como repeticiones de un signo. El dedujo, además, el procedimiento de transformación de los coeficientes de la ecuación para lograr la variación necesaria de sus raíces: aumento, disminución o cambio de signo.

Notable por la profundidad de su sentido es el planteamiento del problema sobre la irreducibilidad, es decir, la representación de una función racional entera con coeficientes racionales en forma de producto de tales funciones. Descartes mostró que la ecuación de tercer grado se resuelve en radicales cuadráticos (mediante regla y compás) sólo si es reducible. La cuestión sobre la reducibilidad de una ecuación de 4.º grado la redujo a la cuestión sobre la reducibilidad de su resolvente cúbica. Si se da la ecuación $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, entonces ella puede ser escrita en la forma

$$\left(x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}\right) \times \\ \times \left(x^2 + yx - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}\right) = 0,$$

donde la variable auxiliar y se determina de la ecuación $y^6 + 2py^4 + (p^2 - 4r)y^2 - q^2 = 0$, cúbica respecto a y^2 .

Descartes no da demostración a esta afirmación. De los comentarios a la "Geometría" hechos por F. de Schooten (1615—1660), profesor de matemáticas de Leiden apasionado partidario de Descartes, puede sacarse la conclusión que para esto se aplicaba el método de los coeficientes indeterminados. Schooten considera la ecuación $x^4 - px^2 - qx + r = 0$ y la escribe en la forma $(x^2 + yx + z)(x^2 - yx + v) = 0$. Igualando los coeficientes de iguales potencias de x , para la determinación de y, z, v obtiene

las ecuaciones

$$z - y^2 + v = -p;$$

$$-zy + vy = -q;$$

$$vz = r;$$

$$y^6 - 2py^4 + (p^2 - 4r)y^2 - q^2 = 0.$$

La resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grado con medios geométricos en la obra de Descartes se reduce al problema de la construcción (inserción) de dos medias proporcionales y de la trisección del ángulo. Semejante a los matemáticos árabes, pero, al parecer, totalmente independiente, Descartes prácticamente resuelve estas ecuaciones con ayuda de la intersección de dos secciones cónicas. A continuación extendió este método a las ecuaciones de tercer género (5.º y 6.º grado), eligiendo la intersección de una circunferencia y una curva seleccionada la cual se mueve de manera especial. Las observaciones de Descartes sobre la resolución con semejante método de las ecuaciones de grado $n > 6$ no resultaron lo suficientemente claras como para hablar sobre ellas con precisión.

Tal es el contenido de la "Geometría" de Descartes, la primera obra sobre geometría analítica, la cual jugó un gigantesco papel en el desarrollo ulterior de la matemática del siglo XVII. La geometría analítica de Descartes tenía aún muchas insuficiencias. Ante todo, el dominio de esta ciencia estaba enormemente restringido por las exigencias apriorísticas, derivadas más bien de las fuentes filosóficas que de las exigencias del método, se limitaba sólo a las curvas algebraicas. Resultó desacertada la clasificación de las curvas algebraicas por sus géneros y no por los grados de las ecuaciones que las representaban. Descartes no culminó la penetración en la geometría del aparato algebraico, no extendió su método al estudio de las propiedades de las curvas a través de las propiedades de sus correspondientes ecuaciones. Los ejes coordenados en la "Geometría" aún no tenían iguales derechos; se traza sólo un eje y la otra coordenada se establece en la medida de la necesidad. El comportamiento de la curva se estudia sólo en el primer cuadrante, los otros cuadrantes no se consideran. Sin embargo, la "Geometría" de Descartes significó un paso de importancia cardinal en la edificación de las matemáticas, lo que convirtió a esta obra en clásica.

El viraje en la interrelación del álgebra y la geometría y la penetración mutua de sus métodos con ayuda del método de coordenadas representó en las matemáticas un fenómeno revolucionario. Semejantes virajes en la historia nunca los realiza un individuo solo. Así pues, el surgimiento de la geometría analítica no fue el mérito sólo de Descartes. Se trata no sólo de aquellos contemporáneos, cuyos trabajos en forma no desarrollada contenían unas u otras de las ideas mantenidas y elaboradas por Descartes.

¹⁾ A. Girard expresó ideas análogas, antes que Descartes, en la obra "Invention nouvelle en l'Algebre". Amsterdam, 1629.

Tales contemporáneos fueron muchos. Tenemos en cuenta que, simultáneamente con Descartes, el matemático francés P. Fermat (1601—1665) desarrolló un sistema análogo de ideas en una obra especial.

Fermat procedía de una familia de comerciantes que vivían en el sur de Francia. Terminó la Universidad en la ciudad de Toulouse, en la facultad de ciencias jurídicas. Desde el año 1631 hasta el final de su vida se ocupó en Toulouse de actividades jurídicas siendo consejero de los órganos locales de dirección. Se ocupaba de las matemáticas en su tiempo libre. Fue un conocedor de las matemáticas contemporáneas y de las obras clásicas de los antiguos. Obtuvo notables resultados en la teoría de números, en geometría, en los métodos de operación con infinitesimales, en óptica. Fermat no gustaba de publicar sus obras y comunicaba sus resultados en la correspondencia científica y en el contacto personal y discusiones con muchos científicos notables. Por eso, una mayoría abrumadora de los trabajos de Fermat fueron publicados sólo después de su muerte en el año 1679 y posteriormente.

Las ideas de la geometría analítica, esto es, la introducción de coordenadas rectangulares y la aplicación a la geometría de los métodos algebraicos, se concentran en una pequeña obra de Fermat "Introducción a la teoría de los lugares planos y espaciales", que fue conocida desde el año 1636, pero publicada junto con otras obras en 1679. El punto de partida de este trabajo eran las obras de los antiguos, especialmente de Apolonio, sobre el estudio de los lugares geométricos. Aquellos lugares geométricos, los cuales se representaban por rectas o circunferencias se denominaban planos y los representados por secciones cónicas, espaciales. La tarea de Fermat era mostrar que las ecuaciones de 1.º grado corresponden a rectas, y a las secciones cónicas, las ecuaciones de 2.º grado.

El método de coordenadas se introduce al igual que en las obras de Descartes: se da un eje, el eje de las abscisas, en él se sitúan desde un origen de los segmentos, los respectivos valores de una de las variables. Los valores de la otra variable, también representados con segmentos se reproducen desde el final del primer segmento según un ángulo elegido para el problema dado (frecuentemente recto). A continuación Fermat deduce las ecuaciones de la recta, la circunferencia y de todas las secciones cónicas.

Primeramente Fermat demuestra que la ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas tendrá la forma $ax = by$. A continuación se deduce sucesivamente: la ecuación de la circunferencia en coordenadas rectangulares con centro en el origen de coordenadas; las hipérbolas referidas a las asíntotas; las parábolas referidas al diámetro y la tangente en su extremo; la elipse (hipérbola) en el caso cuando los ejes son diámetros conjugados.

Es notable que Fermat considera el problema también desde otro punto



P. Fermat (1601—1665)

de vista. El investiga la forma general de las ecuaciones de 1.º y 2.º grado, mediante transformaciones de coordenadas (traslado del origen y rotación de ejes) las reduce a sus formas canónicas simplificando así su tratamiento geométrico. Por ejemplo, sea dada la ecuación $2x^2 + 2xy + y^2 = a^2$. Reescribámosla en la forma $(x + y)^2 + x^2 = a^2$. Elijamos nuevos ejes: $x + y = 0$, $x = 0$. Las nuevas coordenadas serán $x_1 = x\sqrt{2}$; $y_1 = x + y$. La nueva ecuación $\frac{2a^2 - x_1^2}{y_1^2} = 2$. Según Apolonio, hace notar Fermat, esta curva es una elipse, referida a los diámetros conjugados.

La extensión de la geometría analítica al estudio de los lugares geométricos espaciales, Fermat lo realiza por la vía del estudio de la intersección de las superficies por planos. Sin embargo, las coordenadas espaciales también en él están ausentes y la geometría analítica del espacio queda sin culminar.

La "Introducción" de Fermat muestra que, al parecer, él, más consecuentemente que Descartes, introdujo el método de coordenadas, especialmente los métodos de transformación de coordenadas y no estaba restringido por consideraciones apriorísticas, que limitaran las posibilidades de sus métodos. Sin embargo, esta obra no ejerció en las matemáticas tan significativa influencia como la "Geometría" de Descartes. Las causas de esto fueron dos. En primer lugar, la "Introducción" fue editada muy tarde y hasta este momento era conocida sólo por un estrecho círculo de los correspondientes de Fermat. En segundo lugar, estaba expuesta en un lenguaje engorroso, difícil para la comprensión, del álgebra de Viète.

Fermat comprendía que se encontraba sólo en el comienzo de las investigaciones de una nueva disciplina matemática. Pero agregaba: "Así y todo no nos arrepentimos de la escritura de esta obra prematura y no completamente madura. En realidad, para la ciencia representa cierto interés no ocultar de las futuras generaciones los frutos, aún no formados, de la razón; y gracias a los nuevos descubrimientos de las ciencias las ideas, inicialmente burdas y simples, se refuerzan y se multiplican. Y en interés de los mismos que estudian se hace una representación completa tanto de los caminos simplificados del entendimiento, como del arte desarrollado espontáneamente"¹⁾.

El desarrollo ulterior de la geometría analítica mostró que las ideas de Descartes sobre un único método en el cual se unieran los métodos del álgebra y la geometría se realizó no como él se lo imaginaba. La geometría analítica entró en el sistema de las disciplinas matemáticas no absorbiendo al álgebra. Esta última continuó su desarrollo independiente, transformándose en la teoría general de las ecuaciones. En lo que respecta a la geometría analítica, en los primeros 50—70 años después de su aparición, sólo atravesó el período de afirmación y reconocimiento en un ambiente de vivas discusiones sobre la legitimidad, comodidades y posibilidades de sus métodos. Los hechos de esta ciencia al comienzo se acumularon lentamente. Hacia el año 1658 fue resuelta la cuestión sobre la parábola semicúbica en la que tomó parte W. Neil (1637—1670), G. Von Heiraet (nació en 1633) y Fermat. En el año 1679 F. de Lahire (1640—1718) encontró por vez primera la manera de escribir las ecuaciones de las superficies. No obstante, sólo hacia 1700 A. Paron (1666-1716) pudo deducir la ecuación de la superficie esférica y el plano tangente a ella. En forma sistemática utilizó y desarrolló algo la geometría analítica I. Newton en la obra "Enumeración de las curvas de 3^{er} orden" (1704).

¹⁾ P. Fermat. Introducción al estudio de los lugares planos y espaciales. En el libro: R. Descartes. Geometría. (Editado en la URSS, en 1938).

L. Euler dio a la geometría analítica un aspecto próximo al actual, dedicando a esto el segundo tomo de "Introducción al análisis" (1748). Le precedió sólo Clairaut (1713—1765) que extendió la geometría analítica al espacio tridimensional mediante la introducción de un sistema de tres ejes coordenados rectangulares. La denominación geometría analítica fue introducida por vez primera por el matemático francés académico S. F. Lacroix (1764—1848), a finales del siglo XVIII.

El surgimiento en las matemáticas de la geometría analítica aligeró sustancialmente la formación del análisis infinitesimal. Por otra parte, se convirtió en un instrumento imprescindible de la construcción de la mecánica en Newton, Lagrange y Euler, muy efectivo en la resolución de numerosos problemas de las ciencias exactas. En las matemáticas del siglo XVII, el surgimiento de la geometría analítica significó la aparición de las posibilidades para la creación del análisis de las variables. Esta posibilidad enseñada fue realizada, ya que los problemas más importantes (como veremos más adelante) eran tales que provocaban una aguda necesidad del paso urgente al descubrimiento de los métodos y las teorías generales del análisis matemático.

5.3. Acumulación de los métodos integrales y diferenciales

La aparición del análisis infinitesimal fue la culminación de un largo proceso, cuya esencia matemática interna consistió en la acumulación y asimilación teórica de los elementos del cálculo diferencial e integral y la teoría de las series. Para el desarrollo de este proceso se habían formado hacia el siglo XVII las premisas esenciales: existencia del álgebra ya formada y de la técnica de cálculo, introducción en las matemáticas de la variable y el método de coordenadas; asimilación de las ideas infinitesimales de los antiguos, especialmente de Arquímedes; acumulación de métodos de resolución de problemas del cálculo de cuadraturas, curvaturas, determinación de centros de gravedad, búsqueda de tangentes, extremales, etc.

Las causas que motivaron este proceso fueron en primer término las exigencias de la mecánica, la astronomía y la física. Estas ciencias no sólo planteaban a las matemáticas las exigencias de la resolución de una u otra clase de problemas. Ellas enriquecían sus representaciones acerca de las magnitudes continuas y movimientos continuos, acerca de la esencia y forma de las dependencias funcionales. En una estrecha interacción de las matemáticas y las ciencias contiguas se elaboraron los métodos infinitesimales que son la base de las matemáticas de las variables.

En la resolución de los problemas de este género, en las búsquedas de métodos generales de su resolución, y consecuentemente en la creación del



J. Kepler (1571–1630)

análisis infinitesimal tomaron parte muchos científicos: Kepler, Galileo, Cavalieri, Torricelli, Pascal, Wallis, Roberval, Fermat, Descartes, Barrow y otros muchos. La creación de los elementos del análisis matemático constituyó un trabajo creador multifacético de un gran número de científicos.

Para hacer el estudio de este proceso complejo más cómodo dividimos los métodos que contienen las semillas del análisis infinitesimal en dos grupos: inicialmente consideraremos aquellos en los cuales se revelan elementos del futuro cálculo integral; los llamaremos integrales. A continuación trataremos sobre los métodos diferenciales, esto es, los métodos de resolución de problemas sobre la determinación de tangentes y similares, aquellos que se resolvieron posteriormente con recursos del cálculo diferencial. El descubrimiento de las relaciones entre los métodos integrales y diferenciales resultó una etapa decisiva después de la cual comenzó la formación del análisis matemático.

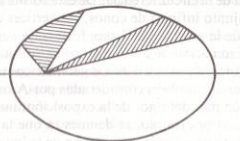


Fig. 36

Métodos integrales. Al comienzo estos métodos se elaboraban, acumulaban e independizaban en el transcurso de la resolución de problemas sobre el cálculo de volúmenes, áreas, centros de gravedad, etc. Los problemas de Arquímedes se reconsideraban una y otra vez, se estudiaban sus métodos infinitesimales, se aclaraban sus posibilidades matemáticas. Los métodos integrales se formaban en aquella época como métodos de integración definida. El proceso de formación e introducción en las matemáticas de estos métodos fue muy agitado y rápido; ya al cabo de 50—60 años desde la aparición del primer trabajo este proceso condujo a la formación del cálculo integral.

El primer método de este tipo, según orden cronológico de publicación, fue el de operaciones directas con infinitesimales actuales. Apareció en el año 1615 en las obras de Kepler.

Johann Kepler (1571—1630), originario de Wurtemberg, uno de los numerosos estados alemanes de aquella época, fue un eminente astrónomo y matemático. El dedicó prácticamente toda su vida al estudio, desarrollo y propaganda del sistema heliocéntrico de Copérnico. Analizando un enorme material de las observaciones astronómicas, en los años 1609—1619 descubrió las leyes del movimiento de los planetas que llevan su nombre: 1) los planetas se mueven según elipses; el Sol se encuentra en uno de sus focos; 2) los radiovectores de los planetas “barren” sectores de áreas iguales en intervalos de tiempo iguales (véase fig. 36); 3) los cuadrados de los tiempos de rotación de los planetas alrededor del Sol están en la misma relación que los cubos de sus distancias medias hasta el Sol.

La formulación de estas leyes muestra que para la demostración matemática de su veracidad es insuficiente el dominio de la técnica de cálculo conocida en aquella época, el conocimiento de las secciones cónicas y los recursos algebraicos. El problema del cálculo de las áreas de los sectores exigía el arte de utilizar las magnitudes infinitesimales. Este arte lo exigían también otros problemas de carácter práctico. Fue con motivo de uno de

tales problemas prácticos que Kepler expuso su método de utilización de las magnitudes infinitesimales.

Se trata de la búsqueda de la forma más racional de los toneles y sobre los métodos de medición de su capacidad. La obra, dedicada a este problema, se llama así: 'Nueva estereometría de los toneles de vino, preferentemente los austriacos, que tienen la forma más ventajosa y la excepcionalmente cómoda utilización para ellos de la regla cúbica con la anexión de un complemento a la estereometría arquimediana' (Linz, 1615). Esta obra consta, no considerando las observaciones previas, de tres partes: la parte teórica, la estereométrica especial de los toneles austriacos, las reglas para la medición de la capacidad de los toneles. Para nosotros, el mayor interés lo tiene la parte teórica. Ella comienza con la "Estereometría de los cuerpos curvos regulares". Esta es un simple recuento de la obra de Arquímedes "Sobre la esfera y el cilindro". Kepler toma el antiguo método de exhaustión, el cual utilizó Arquímedes, lo denomina profundo, pero elimina la fase final de la reducción al absurdo. El quiere comprender la idea de Arquímedes, la cual lo llevó a la obtención de resultados tan notables, liberarla de su estratificación, provocada por las exigencias formales de rigor. Esta idea, según la opinión de Kepler, consiste en que cualquier figura o cuerpo se representa en la forma de una suma de un conjunto de partes infinitamente pequeños. Por ejemplo, un círculo consta de un número infinitamente grande de sectores infinitamente estrechos, cada uno de los cuales puede considerarse como un triángulo isósceles. Todos los triángulos tienen idéntica altura (el radio del círculo) y la suma de sus bases es igual a la longitud de la circunferencia. De esta forma la esfera resulta compuesta de un conjunto infinito de conos, los vértices de los cuales convergen en el centro de la esfera y las bases forman la superficie de la esfera.

El método de sumación de los actualmente infinitesimos, Kepler lo extiende también a otras figuras y cuerpos geométricos no complejos (cono y cilindros) y sus partes, también consideradas por Arquímedes. En algunos casos se aparta aún más del rigor de la exposición, introduciendo consideraciones intuitivas. Por ejemplo, se demuestra que la superficie lateral de un cono inscrito está en relación con el área de la base (círculo máximo de la esfera) como $\sqrt{2}:1$; esta superficie es la mitad de la superficie lateral del cono circunscrito. Y de repente Kepler escribe: "Es bastante verosímil que la superficie de la semiesfera es la media proporcional entre las superficies (lateral. — K.R.) de ambos conos"*). Para ser más justos advertimos que en la mayoría de los enunciados sobre la verosimilitud intuitiva de los resultados u otros razonamientos, Kepler cita a Arquímedes, el cual "lo demuestra con todo rigor".

*1. Kepler. Estereometría de toneles de vino. (En ruso).

De los cuerpos curvos regulares de Arquímedes, Kepler pasa al estudio de los cuerpos formados por la rotación de un círculo alrededor de una recta que no pasa por su centro, y también por la rotación de otras secciones cónicas (fig. 37). En total consideró 92 tipos de cuerpos de revolución, denominándolos según su forma exterior, limones, manzanas, guindas, turbantes turcos, etc. e incluso en general excrecencias.

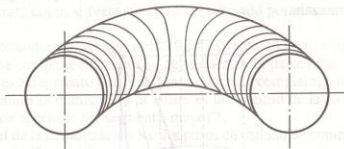


Fig. 37

El método de cálculo de los volúmenes de los cuerpos de revolución y sus partes era en las obras de Kepler único. Primeramente, el cuerpo estudiado se dividía en un número infinito de unidades, "rebanadas", ocupando posiciones equitativas en el cuerpo. Estas partes se reagrupaban formando otro cuerpo, cuyo volumen podía calcularse. Si resultaba imposible llevar a cabo la sumación directa, entonces estas previamente se sustituían por otras partes equivalentes a las dadas. Aclaremos este método con dos ejemplos.

En el teorema 18, Kepler demuestra que cada anillo de una sección circular o elíptica es equivalente a un cilindro cuya altura es igual a la longitud de la circunferencia descrita por el centro de la sección y la base es la sección del anillo. Método de demostración: el anillo (toro) se divide en partes por planos que pasan a través del centro del toro perpendicularmente a la superficie. Cada rebanada de altura diferente se sustituye por un cilindrito con la misma base y altura igual a la media aritmética de las alturas máximas y mínimas. La columna de estos cilindritos da una demostración evidente del teorema. Después Kepler discute las posibles generalizaciones relacionadas con la forma de la sección del anillo, llegando a la conclusión de que el teorema es cierto para todas las secciones simétricas respecto a la vertical trazada a través del centro de la sección.

El segundo ejemplo es más complejo. Se trata en él de la determinación del volumen de una manzana, esto es, el cuerpo producido por la rotación alrededor de la cuerda de un segmento mayor que un semicírculo, y además de las partes de una manzana.

Kepler representa una manzana que consta de partes formadas por secciones meridionales y que tienen un segmento común MN (fig. 38). Situado el ecuador de la manzana en la recta DS , Kepler redistribuye las rebanadas, deformándolas sin variación del volumen. Se forma un cuerpo cilíndrico $MNSD$, el cual se puede representar seccionado del cilindro cuya base es el círculo que genera la manzana y la altura es igual a la longitud de la circunferencia de radio AD . El volumen de este cuerpo es igual al volumen de la manzana.



Fig. 38

Este mismo resultado se obtiene si la manzana se representa dividida no en partes meridionales elementales, sino en capas cilíndricas concéntricas, las cuales tienen como eje MN , especie de "virutas". Desarrollando cada viruta perpendicularmente al plano DMN , Kepler obtuvo un conjunto de rectángulos infinitesimalmente finos, los cuales constituyen el cuerpo cilíndrico mencionado (por ejemplo, el rectángulo $JKad$).

Ahora puede pasarse a la determinación del volumen del cinturón de la manzana, es decir aquella parte de ella, la cual queda después de extraerle el corazón, esto es, la parte cilíndrica que tiene a MN como su eje. Si el cin-

turón está formado, por ejemplo, por el segmento JKD , entonces es equivalente a la parte $LSDO$ del cuerpo cilíndrico. Esta parte a su vez, consta de dos partes: el segmento cilíndrico $VTDO$ y el cuerpo $VLST$. Este último, Kepler lo considera como la diferencia de dos cuerpos $VLST = GLST - GLV$.

Ya que el punto G es el centro del círculo, el cuerpo $GLST$ resulta equivalente a la esfera del mismo radio que el dado. Por esto el cuerpo $VLST$ se trata como si fuera un cinturón formado por el mismo segmento JKD .

Estas consideraciones son la base del teorema 20 "El cinturón de una manzana se compone del cinturón de la esfera y la parte recta del cilindro cuya base es el segmento que falta (para el círculo completo) a la figura que rota formando la manzana, y la altura es la longitud de la circunferencia descrita por el centro del segmento mayor".

Al final de la demostración Kepler puso, en calidad de complemento, la regla para el cálculo del volumen de una manzana y su cinturón esférico. Los métodos de Kepler para la determinación de los volúmenes de los cuerpos de revolución, está claro, no eran rigurosos. Esto resultaba claro incluso a él y sus contemporáneos. Alrededor de la sumación de los infinitesimales actuales de Kepler se produjeron disputas. Como en todas las épocas, no faltaron críticas rigurosas. El alumno de Viète, el escocés A. Anderson editó incluso una obra especial "En defensa de Arquímedes" (1616, después de un año de la publicación de la obra de Kepler que examinamos), donde culpaba a Kepler de ofensa a la memoria de Arquímedes.

No obstante, la fecundidad de la sumación de elementos, que Kepler leyó en las obras de Arquímedes, era evidente. El primer intento de crear un algoritmo regular de operabilidad con los infinitesimales se convirtió en muy popular. Muchos científicos dedicaron sus trabajos al perfeccionamiento del lado operativo de esta empresa y a la explicación racional de los conceptos que surgían sobre esto. La mayor fama la adquirió la geometría de los indivisibles, creada por Cavalieri.

Bonaventura Cavalieri (1598–1647), alumno de G. Galilei procedía de una familia noble. La carrera monástica se combinó en su vida con la actividad científica y profesional en matemática. Desde el año 1629 por recomendación de Galilei, ocupó la cátedra de matemática en Boloña, siendo a la vez superior del monasterio católico de la orden de San Jerónimo.

Siendo un conocedor brillante de los autores antiguos al mismo tiempo, estudiaba profundamente las ideas expresadas por Galilei y Kepler de la creación del cálculo de los indivisibles. Cavalieri escribió una serie de obras sobre astronomía, técnica de cálculos, secciones cónicas y trigonometría. En el año 1632 publicó tablas de 11 cifras de los logaritmos de las funciones trigonométricas. Pero la actividad de su vida que tuvo mayor significado



B. Cavalieri (1598—1647)

Monumento a Cavalieri erigido en Milán en el año 1844 en conmemoración del bicentenario de la publicación de su "Geometría de los indivisibles".

para el desarrollo de las matemáticas fue el método de los indivisibles, pensado como un método universal de la geometría.

La idea del método general de los indivisibles fue por vez primera expresada por B. Cavalieri en el año 1621. En un manuscrito presentado por él para ocupar el cargo de profesor en 1629 ya tiene lugar una aplicación sistemática de los indivisibles.

Un resumen del perfeccionamiento durante muchos años del método de los indivisibles fue el libro "La Geometría, expuesta por el nuevo método, con ayuda de los indivisibles del continuo" (1635, 2.ª edición, 1653). A este mismo objetivo dedicó Cavalieri el libro "Seis experimentos geométricos" (1647).

El método de los indivisibles fue ideado para la determinación de las medidas de las figuras planas y cuerpos. Tanto las figuras como los cuerpos se representaban como compuestos de elementos, los cuales tenían dimensión en una unidad menos. Así, las figuras constan de segmentos de rectas trazadas paralelamente a cierta recta directriz denominada reguladora. Estos segmentos figurados eran infinitos. Estaban comprendidos entre dos tangentes que tenían el nombre de pares. Las tangentes eran paralelas a la reguladora; como reguladora puede tomarse una de ellas.

En los cuerpos geométricos los indivisibles son planos paralelos a cierto plano, elegido en calidad de regulador. También éstos son infinitos; como límites de su conjunto sirven dos planos tangentes pares, paralelos al regulador. Frecuentemente uno de ellos se toma en calidad de regulador.

La idea de su método, Cavalieri la expresaba metafóricamente, proponiendo al lector imaginar una araña, tejiendo continuamente la geometría de los indivisibles.

La totalidad de todos los indivisibles, introducida por Cavalieri, en esencia introduce el concepto de integral definida. Sin embargo, las dificultades lógicas, relacionadas con la comprensión del indivisible, la composición de las áreas de líneas que no tienen anchura y los cuerpos de planos infinitamente finos, etc., no da aún la posibilidad de juzgar sobre la totalidad de los indivisibles. Por esto Cavalieri se vio obligado a considerar las relaciones de los cuerpos y figuras, limitándose a los casos cuando las relaciones entre los indivisibles son constantes. De esta manera, la esencia de la geometría de los indivisibles de Cavalieri puede ser formulada así: las figuras planas y los cuerpos se relacionan entre sí como todos sus indivisibles tomados en conjunto; si los indivisibles se encuentran en una misma relación uno con otro, entonces la relación entre las áreas de las figuras correspondientes (o los volúmenes de los cuerpos) es igual a esta relación.

Estas afirmaciones son prácticamente equivalentes a los razonamientos actuales del tipo: se dan dos figuras limitadas en nuestro dibujo (fig. 39) por el eje x , las rectas $x = a$ y $x = b$ y respectivamente $y_1 = f_1(x)$ y $y_2 = f_2(x)$. La relación entre las áreas

$$S_1 = \sum_{k=1}^n y_{1k} = \int_a^b f_1(x) dx$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^n y_{2k} = \int_a^b f_2(x) dx$$

Si $y_{1k} = a = \text{const}$ para cualquier k , entonces también $\frac{S_1}{S_2} = k$.

Cavalieri consideró también las relaciones entre las potencias de los indivisibles. Por ejemplo, él introdujo el conjunto de los cuadrados de los indivisibles y demostró el teorema: la suma de los cuadrados de indivisibles del paralelogramo es tres veces mayor que la suma de los cuadrados de los

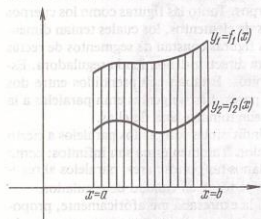


Fig. 39

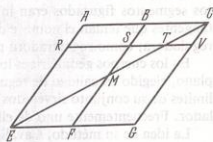


Fig. 40

indivisibles del triángulo, formado como resultado del trazado de la diagonal. Introduzcamos, para abreviar, la notación: $AC = a$, $RT = x$, $TV = y$, $RS = \frac{a}{2} = b$, $ST = z$. Entonces $x = b + z$, $y = b - z$ y la suma de los cuadrados de las partes indivisibles $x^2 + y^2 = 2b^2 + 2z^2$. Sumemos todos los indivisibles, designando la suma de los cuadrados de los indivisibles por el símbolo $[]$ (Fig. 40).

$$[AEC] + [CGE] = 2[ABFE] + 2[BCM] + 2[FEM].$$

Advertimos que:

$$[AEC] = [CGE][ABFE] = \frac{1}{4} [ACGF];$$

$$[BCM] = [FEM] = \frac{1}{8} [ACE],$$

lo que no es difícil de comprender, imaginando sobre cada elemento lineal un cuadrado y considerando su totalidad. Por consiguiente,

$$[ACE] = \frac{1}{4} [ACGE] + \frac{1}{8} [ACE] + \frac{1}{8} [ACE]$$

$$[ACE] = \frac{1}{3} [ACGE].$$

En la traducción al lenguaje del cálculo integral Cavalieri demostró que:

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{1}{3} \int_0^a a^2 dx$$

o de otra forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)}{na^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

Este teorema Cavalieri pudo generalizarlo al caso de sumación de mayores potencias de los indivisibles incluso hasta la novena, resolviendo de este modo un grupo de problemas equivalentes al cálculo de las integrales

definidas de forma $\int_0^a x^n dx$ para $n = 1, \dots, 9$. El que Cavalieri considere

no las expresiones equivalentes a las integrales, sino sus relaciones no cambia, esencialmente, la cuestión. Es suficiente elegir en calidad de denominador único la integral correspondiente a la suma de los indivisibles.

Otra generalización del método lo constituyó la introducción de indivisibles curvilíneas.

El método de los indivisibles permitió resolver un conjunto de problemas difíciles que antes no podían ser resueltos. Le surgieron ardientes adeptos. Uno de ellos, E. Torricelli, escribió que la nueva geometría de los indivisibles pasa de mano de unos científicos a otros, como una maravilla de la ciencia; según la opinión de Torricelli, convenció al mundo que el siglo de Arquímedes y Euclides fueron los años de la infancia de la actualmente adulta ciencia geométrica. Torricelli, trabajando activamente con los métodos de Cavalieri, fue el primero que pudo determinar el volumen de un cuerpo formado por la rotación de una rama de la hipérbola alrededor de uno de sus ejes.

Sin embargo, este método tenía sus deficiencias. Primeramente, no era adecuado para la medición de las longitudes de curvas, ya que los correspondientes indivisibles (los puntos) resultaban sin dimensiones. En segundo lugar la inexplicabilidad del concepto de indivisible, la imposibilidad de su explicación racional creaba para toda la teoría una atmósfera de ausencia de fundamentos. En tercer lugar, el desarrollo del método se frenaba fuertemente debido a que Cavalieri, en correspondencia con las ideas formadas en aquella época sobre el rigor científico, evadía la utilización del simbolismo y los métodos del álgebra.

No obstante, la integración definida en forma de cuadraturas geométricas adquirió fama en la primera mitad del siglo XVII. Todos los esfuerzos,

desde entonces, fueron dirigidos a su precisión y al logro de resultados lo más generales posibles.

Pascal (1623—1662), por ejemplo, consideró las cuadraturas en forma próxima a como la utiliza Cavalieri. Su esfuerzo en la precisión consistió en que la suma de todos los indivisibles las consideró como suma de áreas elementales, formadas por ordenadas, infinitamente próximas unas de otras, acotadas por un segmento del eje y la curva (esto es, una suma de la forma $\sum y \Delta x$). En una serie de problemas introdujo la suma de todos los senos, definiéndola como la suma del producto de las ordenadas por los elementos del arco ($\sum y ds$), la cual en el caso de la circunferencia de radio unidad justifica su denominación ($\sum \sin \varphi d\varphi$). Con ayuda de este equivalente geométrico de la integración definida, Pascal pudo resolver muchos problemas sobre la determinación de áreas, volúmenes, momentos estáticos, etc.

En el caso cuando se trata sobre la suma de senos, Pascal expresó una idea que jugó en lo sucesivo un papel importante en la historia de las matemáticas. Introdujo un triángulo auxiliar *EKE* semejante al $\triangle ADI$ (fig. 41),

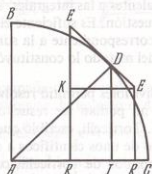


Fig. 41

y lo conservó en sus razonamientos incluso cuando la distancia entre dos ordenadas vecinas es infinitamente pequeña.

$$\triangle EKE \sim \triangle ADI;$$

$$\frac{EE}{KE} = \frac{AD}{ID};$$

$$DI \cdot EE = AD \cdot KE,$$

o utilizando notaciones más usuales para nosotros: $y ds = r dx$. El siguiente teorema de Pascal: la suma de los senos de cualquier arco de un cuarto de círculo es igual al segmento de la base entre dos senos extremos, multiplicado por el radio, fácilmente se traduce al lenguaje del cálculo in-

tegral. En efecto: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} y ds = r \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$. Como $y = r \cos \varphi$,

$$x = r \sin \varphi, \quad s = r\varphi,$$

entonces

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos \varphi d(r\varphi) = r \int_0^{\frac{\pi}{2}} d(r \sin \varphi),$$

o

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d(\sin \varphi) = \sin \varphi.$$

Según reconoció Leibniz, el triángulo de Pascal le sirvió de imagen del triángulo diferencial compuesto por las diferenciales dx, dy, ds .

Un perfeccionamiento importante de las cuadraturas geométricas fue realizado por Fermat, el cual introdujo la división del área cuadrable por ordenadas las cuales distan unas de otras distancias desiguales. Esto le dio la posibilidad de extender los métodos de cálculo de expresiones, equiva-

lentes a $\int_0^a x^n dx$, al caso cuando n es fraccionario o negativo.

Sea, por ejemplo, que se trate del cálculo de la integral $\int_0^x x^p dx$, donde

$p > 0, q > 0$. En la formulación de Fermat se habla de la cuadración del área formada por el segmento del eje de las abscisas $[0, x]$, dos ordenadas extremas y la curva cuya ecuación es $x^q = y^q$. El intervalo de integración se divide en segmentos mediante puntos de coordenadas: $x, \alpha x, \alpha^2 x, \dots$, donde $\alpha < 1$. Las operaciones siguientes consisten en el cálculo sucesivo de: $\Delta x, y, y \Delta x, \Sigma y \Delta x$ y el paso al caso cuando el ancho de las franjas disminuye infinitamente. Escribimos estos cálculos en forma de tabla:

Δx	$(1 - \alpha)x,$	$\alpha(1 - \alpha)x,$	$\alpha^2(1 - \alpha)x,$
y	$x^q,$	$\alpha^q x^q,$	$\alpha^{2q} x^q,$
$y \Delta x$	$(1 - \alpha)x^q,$	$(1 - \alpha)\alpha^q x^q,$	$(1 - \alpha)\alpha^{2q} x^q,$

La sumación, como vemos, se redujo a la sumación de una progresión geométrica, cuya suma es

$$\Sigma y \Delta x = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha^q} x^q.$$

Para evitar que el coeficiente de $x^{\frac{p+q}{q}}$ se haga indeterminado cuando las franjas disminuyen, Fermat realiza la sustitución $\alpha = \beta^q$. Entonces:

$$\frac{1 - \alpha}{1 - \alpha^{\frac{p+q}{q}}} = \frac{1 - \beta^q}{1 - \beta^{p+q}} = \frac{(1 - \beta)(1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^{q-1})}{(1 - \beta)(1 + \beta + \beta^2 + \dots + \beta^{p+q-1})}$$

En el caso límite se tiene que $\alpha = 1$, consiguientemente $\beta = 1$ y $\Sigma y \Delta x = \frac{q}{p+q} x^{\frac{p+q}{q}}$.

Cálculos análogos permiten obtener $\int_1^\alpha x^{-n} dx$. Fermat divide el intervalo de integración por puntos con abscisas $x, \alpha x, \alpha^2 x, \dots$, donde $\alpha > 1$. Calculando sucesivamente según el modelo dado antes, $\Delta x, y, y \Delta x, \Sigma y \Delta x$ y pasando al caso límite, cuando $\alpha = 1$, Fermat obtiene el resultado:

$$\sum_{(n=1)} y \Delta x = \frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$$

Al parecer, Fermat ideó este método bajo la influencia de las obras de Neper, ya que él mismo lo denominó logarítmico.

Los matemáticos de la primera mitad del siglo XVII con gran asombro y entusiasmo se convencían de la gran cantidad de problemas de geometría y mecánica, aparentemente diferentes, que conducían a las cuadraturas. Cada año, cada nuevo resultado revelaba la generalidad de las operaciones, las cuales era necesario aplicar en la resolución de estos problemas. El equivalente geométrico de la integración definida surgió como un método específico de la geometría, parcialmente tomado de Arquímedes, poco a poco adquirió los caracteres de un método general de las matemáticas. En él cada vez mayor peso adquirieron los métodos numéricos y los elementos del futuro análisis infinitesimal.

En esta dirección, son un ejemplo característico los trabajos de J. Wallis (1616—1703), matemático inglés, profesor de la universidad de Oxford (desde el año 1649), uno de los fundadores (desde el año 1663) de la Royal Society de Londres. En el año 1655 editó "La aritmética del infinito". Utilizando el método de Cavalieri, tradujo al lenguaje aritmético las relaciones entre las sumas de indivisibles. Así, la relación de potencias de los indivisibles, la cual interpretamos como integración de la función potencial $\int x^n dx$, la representó como relación entre las sumas de números. La relación entre la suma de los indivisibles del triángulo y la suma de los

indivisibles del paralelogramo con la misma base y altura se reduce según Wallis a la relación $\frac{0+1+2+\dots+n}{n+n+n+\dots+n}$, la cual para n creciente indefinidamente es igual a $\frac{1}{3}$. La relación entre las sumas de las 2, 3, ..., m potencias de los indivisibles se trata como

$$\frac{0^k+1^k+2^k+\dots+n^k}{n^k+n^k+n^k+\dots+n^k}$$

($k = 2, 3, \dots, m$) para n creciente indefinidamente. El valor de estas relaciones hasta $k = 9$ fueron obtenidas por Cavalieri; son iguales a $\frac{1}{k+1}$.

Wallis, utilizando la inducción matemática incompleta, extiende este resultado al caso de cualquier entero k . Así él obtuvo la fórmula equivalente a

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$$

Wallis conocía de las obras de Arquímedes que el área de un segmento parabólico es igual a $\frac{2}{3}$ del área del paralelogramo circunscrito. Esto también lo tradujo al lenguaje de las relaciones de las sumas indicadas arriba; la relación

$$\frac{\sqrt{0} + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n} + \sqrt{n} + \dots + \sqrt{n}}$$

cuando n crece indefinidamente, es igual a $\frac{2}{3}$. Esta misma inducción incompleta condujo a Wallis a la generalización de este resultado para todas las potencias de exponentes fraccionarios y a continuación negativas.

Las ideas que incluyen elementos de integración definida se difundieron ampliamente entre los matemáticos de los países de Europa Occidental. Los métodos de integración abarcaban, hacia los años 60 del siglo XVII amplias clases de funciones algebraicas y trigonométricas. Fueron resueltos un enorme número de problemas que es imposible aclarar en el presente libro. Era necesario sólo un impulso, la consideración de la totalidad de métodos desde un punto de vista único, para cambiar radicalmente toda la problemática de integración y crear el cálculo integral.

Métodos diferenciales. En las matemáticas del siglo XVII, junto a los métodos integrales se formaron también los métodos diferenciales. Con los

métodos diferenciales relacionamos, siguiendo el modelo de la definición de métodos integrales, aquellos en los cuales están contenidos elementos del futuro cálculo diferencial. Se elaboran estos elementos durante la resolución de problemas, los cuales en la actualidad se resuelven con ayuda de la diferenciación. Tales problemas eran en aquella época de tres tipos: determinación de las tangentes a las curvas, búsqueda de máximos y mínimos de las funciones y búsqueda de las condiciones de existencia de raíces múltiples de las ecuaciones algebraicas. Con este grupo lindan las exigencias de la mecánica que surgen de la necesidad de determinar la velocidad en cualquier punto de la trayectoria en el caso de movimientos no uniformes, sin hablar de problemas más complejos.

La herencia científica de los antiguos y de los autores medievales en esta rama no era determinada y significativa como en el caso de los métodos integrales. Los problemas sobre la tangente se consideraban no sistemáticamente, no se habían elaborado procedimientos uniformes. Lo general, al parecer, era la tendencia a considerar la tangente como la recta que tenía con la curva un solo punto común y la cual tenía la propiedad de unilateralidad local. En los dominios de los problemas extremales juntos a los hechos elementales de isoperimetría existían sólo diorismos, es decir, restricciones impuestas sobre las condiciones del problema, de modo que esta tuviera solución en el campo de los números racionales y reales o los segmentos geométricos. Los diorismos frecuentemente contienen indicaciones sobre valores extremales. Por ejemplo, cuando una ecuación algebraica tiene raíces múltiples, las curvas, con cuya intersección se resuelve la ecuación, no se intersectan, sino son tangentes unas a otras. De esta manera, ya se había advertido cierta interrelación entre los problemas diferenciales en el siglo XVII.

En el transcurso del siglo XVII los problemas diferenciales aún se resolvían por los métodos más diversos. Como siempre en la ciencia, junto a lo nuevo existe lo viejo. Así sucedió en la rama considerada por nosotros. Las construcciones geométricas en el espíritu de los matemáticos antiguos, las consideraciones mecánicas, las investigaciones en el espíritu de la entonces nueva geometría analítica de Descartes, las consideraciones infinitesimales en su entrelazamiento estrecho maduraron el cálculo diferencial. Citemos ejemplos los cuales caracterizan este proceso.

Ya en la escuela de Galilei para la búsqueda de tangentes y normales a las curvas se aplicaban sistemáticamente los métodos cinemáticos. En ellos la tangente surgía como la diagonal del paralelogramo, cuyos lados eran las componentes horizontal y vertical de la velocidad. Por ejemplo, sea un punto material pesado arrojado con cierta velocidad inicial horizontal (fig. 42). Los desplazamientos del punto según el eje x serán proporcionales a los intervalos de tiempo $x = nt$, según el eje y (vertical), a los cuadra-

dos de dichos intervalos $y = \frac{g}{2} t^2$. La trayectoria es una parábola, cuyo parámetro fue determinado por Galilei como un cuarto de la altura de caída que sería necesaria para comunicar al punto una velocidad igual a la velocidad horizontal inicial $y = \frac{1}{2} \frac{g}{u^2} x^2$. Designando el parámetro $2 \frac{u^2}{g}$ como

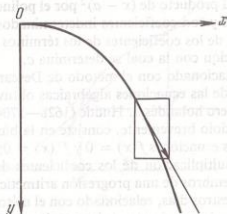


Fig. 42

$2p$, Torricelli encontró que la relación entre las componentes verticales de la velocidad gt y la horizontal u es igual a $\frac{2y}{x}$ ó $\frac{x}{p}$. De donde Torricelli concluyó que la tangente intercepta al eje de la parábola en un punto situado en el segmento $2y$ más arriba que el punto dado o en y más arriba que el vértice de la parábola.

Este método cinemático dio comienzo a la consideración de diferentes lanzamientos y movimientos complejos y a la determinación de la tangente en cualquier punto de la trayectoria. La exposición sistemática del método y sus aplicaciones más importantes las dio en el año 1640 Roberval. A pesar de su importancia el método cinemático era muy incómodo, ya que partía de particularidades individuales de las curvas, y por eso no era lo suficiente algorítmico. Por esto en aquella época representaba mayores perspectivas para la determinación de tangentes y normales el método de las normales de Descartes, contenido en el segundo libro de su "Geometría".

Supongamos que es necesario trazar la normal a una curva algebraica en el punto (a, b) y supongamos que esto está hecho. La normal intercepta al eje de las abscisas en un punto con coordenadas $(c, 0)$. La familia de circunferencias concéntricas con centro en $(c, 0)$ contiene una circunferencia de radio $R = \sqrt{(a-c)^2 + b^2}$, la cual tiene con la curva dos puntos comu-

nes fundidos en uno, precisamente el punto (a, b) . Una de las dos incógnitas, por ejemplo y , puede ser excluida de la ecuación de la curva dada y de la circunferencia. Ya que $x = a$ es una raíz doble, entonces según esto debe obtenerse una ecuación de la forma $(x - a)^2 P(x) = 0$. Esto da la posibilidad de determinar la magnitud c con ayuda del método de los coeficientes indeterminados. Para esto Descartes iguala la parte izquierda de la ecuación obtenida al producto de $(x - a)^2$ por el polinomio con grado menor en dos unidades y con coeficientes indeterminados.

La comparación de los coeficientes de los términos con idénticas exponentes da una ecuación con la cual se determina c .

El problema, relacionado con el método de Descartes de búsqueda de las raíces múltiples de las ecuaciones algebraicas obtuvo desarrollo con el matemático e ingeniero holandés J. Hudde (1628—1704). La regla para esto último, expresándolo brevemente, consiste en la búsqueda del máximo común divisor de las ecuaciones $f(x) = 0$ y $f'(x) = 0$; la última ecuación fue obtenida por multiplicación de los coeficientes de la ecuación dada $f(x) = 0$ por los miembros de una progresión aritmética arbitraria. El método aplicado en nuestros días, relacionado con el método algebraico de la formación de las sucesivas derivadas de la parte izquierda de la ecuación algebraica, surgió, al parecer, por vez primera en Rolle a finales del siglo XVII. Sin embargo, regresemos a los métodos diferenciales.

La acumulación de los métodos del cálculo diferencial adquirió su forma más clara en Fermat. En el año 1638 comunicó en carta a Descartes que había resuelto el problema de la determinación de los valores extremales de una función $f(x)$. Fermat obtuvo la ecuación

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0 \text{ y des-}$$

pués de la transformación en el miembro izquierdo puso $h = 0$. A pesar de las opiniones de los investigadores posteriores, los cuales vieron en esta idea el cálculo infinitesimal, en realidad Fermat encontró esta condición y la

análoga $\left. \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right|_{y=x} = 0$ también por caminos algebraicos.

Los razonamientos aquí son aproximadamente así: $f(x) = 0$; encontrar el extremo.

Supongamos que para cierto x la función alcanza el máximo. Entonces $f(x \pm h) < f(x)$, $f(x) \pm Ph + Qh^2 \pm \dots < f(x)$. Restemos en ambos miembros $f(x)$ y dividamos por h : $\pm P \pm Qh \pm \dots < 0$. Ya que h puede elegirse tan pequeño como se quiera, el término P será mayor en valor absoluto que la suma de los restantes términos. La desigualdad es por esto posible sólo cuando $P = 0$, lo que da la condición de Fermat. En el caso del mínimo los razonamientos son análogos. Fermat conocía, además, que el signo de Q determine el carácter del extremo.

También está próximo al cálculo diferencial el método de Fermat de búsqueda de las tangentes a las curvas algebraicas.

En un pequeño arco MN de una curva algebraica $f(x) = 0$ (fig. 43) por medio del trazado de la secante SMN se construye el triángulo característico MNP . $\triangle MNP \sim \triangle MRS$. De donde $SR = \frac{MR \cdot MP}{PN}$, o en

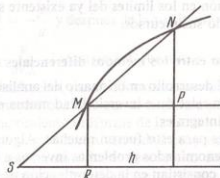


Fig. 43

una simbología más usual para nosotros $SR = \frac{f(x) \cdot h}{f(x+h) - f(x)}$. A continuación Fermat pasa de la secante a la tangente, poniendo $h = 0$, obteniendo así mismo $S_t = \frac{y}{y'}$.

Más tarde Fermat extendió este método a la determinación de la tangente en el caso de una función implícita $f(x, y) = 0$. La expresión obtenida por él se traduce fácilmente a nuestro simbolismo.

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Todas las funciones de Fermat son algebraicas polinomiales. En los casos en que en las funciones investigadas aparecían irracionalidades, se liberaba de ellas elevando ambas partes de la ecuación a una potencia. Por otra parte, en esta clase de funciones, relativamente estrecha, el método de Fermat para la determinación de las tangentes y valores extremales es general, el simbolismo es uniforme. Lamentablemente, Fermat no se esforzaba por publicar sus trabajos, además utilizaba los recursos algebraicos de Viète difíciles para la comprensión, con su simbolismo engorroso. Evidentemente, por esto no realizó el último paso, ya pequeño, en el camino hacia la creación del cálculo diferencial.

Hacia mediados del siglo XVII se acumuló una reserva lo suficientemente grande de recursos de resolución de problemas, actualmente solubles

mediante la diferenciación. Sin embargo, no habían sido aún separados la operación específica de diferenciación y los conceptos equivalentes a los de derivada y diferencial. No estaba clara la relación entre los métodos diferenciales e integrales. El análisis matemático se formaba en los dominios y en los términos del álgebra, la geometría, la mecánica, formadas ya entonces como ciencias. Así, cada nuevo cálculo matemático siempre atraviesa un periodo de formación en los límites del ya existente sistema de ciencias matemáticas, utilizando sus recursos.

Sobre la relación entre los métodos diferenciales e integrales.

La última etapa del desarrollo embrionario del análisis infinitesimal fue el establecimiento de la relación e inversibilidad mutua entre las investigaciones diferenciales e integrales.

Las causas motrices para esto fueron muchas. Algunas de las más importantes fueron los denominados problemas inversos a las tangentes. Los problemas de este tipo consistían en la determinación de las curvas a partir de una propiedad dada común a todas las tangentes a ellas. No se trata de la búsqueda de la familia envolvente de rectas, sino de las propiedades de las tangentes, las cuales dependen de la posición del punto de tangencia. En términos generales los problemas de este tipo pueden formularse así: encontrar $y = f(x)$ de la condición $f_1(x, y, y') = 0$. De esta manera, se trata de la necesidad de resolver una ecuación diferencial de primer orden con dos incógnitas.

Los problemas inversos a las tangentes surgieron como resultado de las exigencias de la práctica. Por ejemplo, los navegantes, ya en la época de los grandes descubrimientos geográficos, prestaron atención a la curva del curso verdadero constante de la nave, es decir la loxodroma. Esta es una curva cuyas tangentes interceptan a los meridianos, trazados en los puntos de tangencia, bajo un ángulo constante. Diferentes problemas inversos sobre tangentes fueron propuestos también en óptica geométrica y en cinemática.

Los métodos gráficos aproximados no podían considerarse recursos satisfactorios de solución de estos problemas. El primero que hizo tentativas de dar un método general fue Descartes. El propuso clasificar todas las curvas algebraicas (las curvas no algebraicas, como se ha expresado, él no las consideró), situarlas en sucesión, buscar sus tangentes y comprobar si satisfacen o no la propiedad dada. Claro está, el primer intento de utilizar este método de pruebas, propuesto por Descartes para la resolución del problema de Debeaune, demostró su inutilidad práctica.

El problema de Debeaune consistía en el requerimiento de cuadrar una curva con la propiedad $\frac{y}{S_t} = \frac{x-y}{a}$, donde S_t es la subtangente. Descartes

utilizó las curvas de la forma $y^n = ax^2 + bx + c$ ($n = 1, 2, \dots, 1000$) pero sin éxito. Entonces eligió otra vía: cambió el sistema de coordenadas por uno oblicuángulo, eligiendo en vez del eje x la recta $y = x - a$. En este sistema la subtangente resultaba constante ($= a\sqrt{2}$).

En efecto, la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{a}$ con la sustitución $y_1 = y + a - x$ se transforma en $\frac{dy_1}{dx} = -\frac{y_1}{a}$ y después de la sustitución $x_1 = x\sqrt{2}$ se obtiene la ecuación $\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{y_1}{a\sqrt{2}}$. La curva de Debeaune resultó no algebraica. Des-

cartes demostró este hecho, para nosotros casi evidente, cinemáticamente. Precisamente, él mostró que esta curva se genera por dos movimientos independientes: el movimiento uniforme de la recta $x = 0$ y el movimiento de la recta $y_1 = 0$ ó $y = x - a$ con velocidad proporcional a la distancia recorrida. La curva representa el lugar geométrico de los puntos de intersección de estas dos rectas móviles. Como se ha expresado, Descartes ubicó tales curvas en el grupo de las mecánicas y las eliminaba de su sistema matemático.

El problema de Debeaune, así como otros problemas inversos de tangentes, indicaba sobre la inversibilidad mutua de los problemas sobre el trazado de tangentes y otros. La esencia de estos otros problemas consistía en la resolución hablando en términos actuales, de ecuaciones diferenciales. Especialmente tenían éxito los problemas que podían ser reducidos,

a integración $\left(\frac{dy}{dx} = f(x)\right)$. Resultados parciales fueron logrados aquí por el escocés D. Gregori (1638—1675) y el inglés J. Wallis (1616—1703). No demoró en surgir también el resultado general, aunque formulado en términos geométricos, sobre la dependencia mutuamente inversa de los problemas sobre cuadratura y trazado de tangentes. Este resultado pertenece a I. Barrow (1630—1677), profesor de la universidad de Cambridge, alumno de Wallis y amigo de I. Newton, y fue publicado en el año 1669 en las "Conferencias sobre geometría y óptica". Consiste en lo siguiente: Están dadas dos curvas OF y OE (fig. 44). Los puntos F y E tienen una abscisa común. Las curvas están relacionadas por la condición: $DF \cdot R = S_{ODE}$, o en

nuestros símbolos: $R \cdot y = \int v dx$. Entonces la subtangente

$$DT = R \cdot \frac{DF}{DE}, \text{ o } R \frac{DF}{DT} = DE; \text{ esto es, } R \frac{dy}{dx} = v.$$

De este teorema Barrow dio dos demostraciones.

a) Cinemática. Supongamos que la curva OF sea la trayectoria de un punto móvil F . La ley del movimiento: la proyección de F sobre el eje x es constante, es decir, el punto D se mueve con velocidad constante R , la velocidad del crecimiento de la ordenada DF se representa geoméricamente

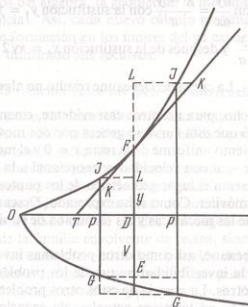


Fig. 44

mediante el segmento DE , o v . Más brevemente, $\frac{dx}{dt} = R$, $\frac{dy}{dt} = v$. La tangente es la diagonal del rectángulo compuesto por estas velocidades. Entonces, la subtangente $\frac{dy}{dx} = \frac{v}{R}$, o $v = R \frac{dy}{dx}$. Según Galilei, el camino recorrido por el punto F en un movimiento uniformemente acelerado es igual a $\int_0^x V dx = R \cdot y$.

b) Más rigurosamente, según el método de los antiguos. Se traza la recta FT , determinada por la condición $DT = R \frac{DF}{DE}$. Es necesario demostrar que esta es la tangente, o sea, la recta soporte, cuyos puntos localmente están a un mismo lado de la curva.

Tracemos en el punto I de la curva las rectas LIK y IKL , paralelas al eje Ox . Por las propiedades de las curvas, el área $S_{PDEG} = R \cdot LF$. Del dibujo

$\frac{LK}{LF} = \frac{DT}{DF} = \frac{R}{DE}$ de donde $LK \cdot DE = R \cdot LF = S_{PDEG}$. Pero en virtud de la monotonicidad de la curva OE

$$S_{PDEG} \approx IL \cdot DE$$

en dependencia de que se encuentre el punto I a la derecha o izquierda del punto F . De aquí, correspondientemente, $LK \geq IL$, lo que demuestra la ubicación de la recta a un lado de la curva, esto es, que ella es tangente.

Apoyándose en este resultado, Barrow resolvió un gran número de problemas inversos sobre las tangentes. Sus obras fueron conocidas por muchos científicos, entre ellos Newton y Leibniz.

Así, a mediados del siglo XVII las matemáticas se encontraban en los umbrales del descubrimiento del cálculo diferencial e integral. Más precisamente dicho, este descubrimiento se había efectuado.

5.4. Surgimiento del análisis infinitesimal

La primera etapa de la existencia del análisis fue la formación del cálculo diferencial e integral. Este último surgió como una parte independiente de las matemáticas casi simultáneamente en dos formas diferentes: en la forma de teoría de las fluxiones en los trabajos de I. Newton y sus sucesores ingleses y en la forma del cálculo de los diferenciales de G. W. Leibniz, el cual obtuvo difusión ante todo en el continente europeo.

El desarrollo de los cálculos matemáticos porta un carácter dialéctico expresado claramente. En los dominios de los cálculos ya existentes transcurre el proceso de acumulación de premisas, elementos y partes componentes del nuevo cálculo. A continuación llega el momento cuando ocurre el viraje en el método. Surgen trabajos matemáticos, en los cuales los hechos acumulados en un dominio dado se reconsideran desde un nuevo punto de vista único. El centro de atención pasa de los esfuerzos por resolver problemas independientes al método mismo o grupos de métodos, los cuales se formulan explícitamente, se perfeccionan y se aplican. El campo de aplicación del cálculo surgido de tal manera, como regla, resulta más amplio que el campo de origen. Los trabajos de I. Newton y G. W. Leibniz sobre el análisis infinitesimal reflejan precisamente este punto de viraje en la historia del análisis matemático.

Teoría de las fluxiones. La primera forma del análisis es la teoría de las fluxiones, el descubrimiento de la cual pertenece a I. Newton.

Isaac Newton (1642—1727) nació en una familia de granjeros en la región de Woolsthorpe cerca de la ciudad de Cambridge (Inglaterra). En el año 1665 terminó la universidad de Cambridge con el grado de bachiller. Su maestro fue I. Barrow. En el año 1668 I. Newton obtuvo el grado de maestro y después de un año en 1669 Barrow, estando aún en el floreci-



I. Newton (1642—1727)

miento de sus fuerzas cedió a Newton su cátedra en señal de reconocimiento al talento y logros científicos de su alumno. Newton fue profesor en Cambridge hasta el año 1701. En 1672 fue elegido miembro y en 1703 presidente de la Royal Society Londinense. Los trabajos de más significación en matemáticas Newton los escribió en la época de su estancia en Cambridge.

Las direcciones fundamentales de la actividad científica de Newton fueron la física, la mecánica, la astronomía y la matemática. A él pertenecen logros de primer rango en estos campos de la ciencia, entre ellos: la deducción y formulación de las leyes fundamentales de la mecánica clásica, el descubrimiento de la ley de la gravitación universal, las leyes de descomposición espectral de la luz, la elaboración del cálculo diferencial e integral en la forma del método de fluxiones. Las matemáticas, en el sistema de ideas científicas de Newton, era una parte de la ciencia general sobre la naturaleza, la filosofía natural, y un arma de las investigaciones físicas. Como apa-

rato matemático de la mecánica que debería considerar el movimiento y abarcar los conceptos de velocidad y aceleración, vinculados con él, Newton elaboró el método denominado por él método o teoría de las fluxiones.

En el método de las fluxiones se estudian las magnitudes variables, introducidas como abstracción de las diferentes formas del movimiento mecánico continuo. Se denominan fluentes. Todos los fluentes son variables dependientes y tienen un argumento común, el tiempo. Más precisamente, se trata de la abstracción matemática análoga al tiempo, cierta magnitud independiente imaginaria abstracta que fluye uniformemente y con la que se relacionan todos los fluentes. Esto, claro está, no complica el problema de Newton, ya que no dificulta la correlación de las variables en los problemas.

Después se introducen las velocidades de la corriente de los fluentes, esto es, las derivadas con relación al tiempo. Ellas se denominan fluxiones. Ya que la fluxión constituye una variable, entonces se puede encontrar las fluxiones de las fluxiones, etc. Los símbolos de la primera, segunda, etc. fluxiones, si el fluente se designa por y , serán: \dot{y} , \ddot{y} , etc. Para el cálculo de las velocidades instantáneas, es decir, de las fluxiones, se exigían variaciones infinitesimales de los fluentes, denominadas por Newton momentos. El símbolo del momento de tiempo es $0y$; el momento del fluente y se escribe, por consiguiente: $0\dot{y}$, esto es, el producto de la velocidad instantánea por el momento de tiempo. En esencia, el momento del fluente es su diferencial. A veces, cuando los razonamientos parten de una fluxión dada, designada, supongamos, por y , se introducen símbolos especiales del fluente: $\square y$ (símbolo que indica la cuadratura). Los símbolos de Newton no son tan cómodos como los símbolos de los diferenciales que tienen su origen en Leibniz y están difundidos en nuestra época. Sin embargo, ellos aún se conservan, por ejemplo, en la mecánica.

En la teoría de las fluxiones se resuelven dos problemas principales, formulados, tanto en términos mecánicos como en términos matemáticos:

1. — determinación de la velocidad de movimiento en un momento de tiempo dado según un camino dado. De otro modo: determinación de la relación entre las fluxiones dada la relación entre los fluentes;
2. — dada la velocidad de movimiento determinar el camino recorrido en un tiempo dado. En términos matemáticos: determinar la relación entre los fluentes dada la relación entre las fluxiones.

El primer problema, llamado problema directo de la teoría de fluxiones, representa el problema de la diferenciación implícita de funciones, en el caso general, y obtención de la ecuación diferencial que expresa las leyes fundamentales de la naturaleza. El segundo, un problema inverso de la teoría de fluxiones, es el problema de la integración de las ecuaciones diferenciales presentadas en su forma más general. En particular, en este

problema se trata de la búsqueda de funciones primitivas. De esta manera, la integración en la teoría de las fluxiones, se introduce inicialmente en forma de integración indefinida.

Para el problema directo, Newton introdujo una regla uniforme: el algoritmo de diferenciación de funciones. Aclaremos este algoritmo, tal como procedía Newton, con un ejemplo. Se da la relación entre los fluyentes: $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Formemos la misma relación para los fluyentes después de experimentar una variación instantánea, esto es, cuando en cada fluyente se añade su momento:

$$(x + \dot{x})^3 - a(x + \dot{x})^2 + a(x + \dot{x})(y + \dot{y}) - (y + \dot{y})^3 = 0$$

En forma desarrollada según la fórmula del binomio:

$$\left. \begin{aligned} &x^3 + 3\dot{x}^2 \cdot x + 3x \cdot \dot{x}\dot{x} + \dot{x}^3 - \\ &- ax^2 - 2ax \cdot \dot{x} - a\dot{x}^2 + 0 + \\ &+ axy + ax\dot{y} + a\dot{x}y + a\dot{x} \cdot \dot{y} - \\ &- y^3 - 3y^2\dot{y} - 3y\dot{y}\dot{y} - \dot{y}^3 \end{aligned} \right\} = 0.$$

La primera columna es igual a cero según la condición; los miembros restantes los dividimos por 0 y eliminamos, como infinitesimales, todos aquellos términos en los cuales se conserva, después de esto, el momento infinitesimal de tiempo 0. Obtendremos la relación entre las fluxiones:

$$3x^2\dot{x} - 2ax \cdot \dot{x} + ay \cdot \dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0.$$

Este método lo formula Newton en forma de regla:

1. — distribuye las variables por potencias;
2. — multiplica por los términos de progresión geométrica y por $\frac{\dot{x}}{x}$ o $\frac{\dot{y}}{y}$ respectivamente;

3. — la suma de los productos da la relación entre las fluxiones.

$$1. \left. \begin{array}{l} x^3 - ax^2 + axy - y^2 \\ -y^3 + 0 + axy - ax^2 + x^3 \end{array} \right|$$

$$2. \left. \begin{array}{l} \frac{3\dot{x}}{x}, \frac{2\dot{x}}{x}, \frac{\dot{x}}{x}, 0 \\ \frac{3\dot{y}}{y}, 0, \frac{\dot{y}}{y}, 0 \end{array} \right|$$

$$3. \underline{3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} + ax\dot{y}}$$

Los términos de la progresión geométrica se pueden sustituir por los términos de otra progresión de la forma $3 + m, 2 + m, 1 + m$ para enteros m .

El ulterior perfeccionamiento del cálculo diferencial: diferenciación de funciones no polinomiales, búsqueda de los extremos de las funciones, aplicaciones geométricas y mecánicas no presentaban, para Newton, gran-

des dificultades. Las fluxiones de las funciones irracionales se obtienen mediante la regla de diferenciación de una función compuesta: por ejemplo, si

$$z = \sqrt{ax - y^2}, \text{ entonces } z^2 = ax - y^2, 2z\dot{z} = a\dot{x} - 2y\dot{y};$$

$$\dot{z} = \frac{a\dot{x} - 2y\dot{y}}{2z} = \frac{a\dot{x} - 2y\dot{y}}{2\sqrt{ax - y^2}}.$$

En casos más complejos, Newton acudía a la representación de las funciones en series de potencias y a las operaciones con estas series. La clase de funciones de que disponía Newton era aún comparativamente limitada; en ella no provocaba dudas semejante representación de las funciones. No obstante, las ideas sobre la convergencia de la serie y sobre la legitimidad de la representación de una u otra función por una serie, constantemente estuvo en el campo visual de Newton.

El problema inverso de la teoría de las fluxiones: la búsqueda de la relación entre los fluyentes, conocida la relación entre las fluxiones, por su presentación es extraordinariamente general. Ella es, como ya indicamos, equivalente al problema general sobre la integración de cualesquiera ecuaciones diferenciales. Los enfoques de Newton para la solución de un problema tan general y los procedimientos de su resolución se construyeron gradualmente.

Ante todo, la simple inversión de los resultados de búsqueda de fluxiones le dio una enorme cantidad de cuadraturas. Con el tiempo advirtió la necesidad de agregar, en esta inversión, una constante aditiva. Después resultó que la operación de inversión, incluso de ecuaciones comparativamente sencillas de la forma $M\dot{x} + N\dot{y} = 0$, obtenidas en el cálculo de las fluxiones, no siempre era posible y no da la función original. Newton advirtió esto, considerando aquellos casos donde $M = M(x, y)$ y $N = N(x, y)$ eran racionales enteras.

Cuando la inversión inmediata del método directo no conduce al éxito, Newton acude al desarrollo de funciones en series de potencias como método universal de la teoría de las fluxiones. La ecuación dada la resuelve, por ejemplo, respecto a $\frac{\dot{y}}{x}$ ó (poniendo $x = 1$) respecto a \dot{y} y desarrolla la función situada en el miembro derecho en serie de potencias y a continuación esta serie la integra término a término.

Para el desarrollo de las funciones en series de potencias, Newton utilizó todos los resultados de sus antecesores y acopió un gran arsenal de métodos. Entre ellos los que más frecuentemente se aplicaban, son:

- a) generalización del teorema (inductivo) sobre las potencias del binomio $(a + b)^n$ en caso de exponente fraccionario y negativo;
- b) división (directa) del numerador, de las funciones racionales fraccionarias, entre el denominador;

c) el método de los coeficientes indeterminados en diferentes variantes. Por ejemplo, en la ecuación $y = 1 - 3x + y + x^2 + xy$ es necesario encontrar el desarrollo de y en serie de potencias de x , colocar esta serie en el miembro derecho en lugar de y y resolver, a continuación, la ecuación, integrando término a término. Los miembros del desarrollo los buscaremos sucesivamente: $y = x + \dots$. Colocamos en el miembro derecho y obtenemos $y = 1 - 2x + \dots$, de donde $y = x - x^2 + \dots$. Colocamos de nuevo los dos miembros del desarrollo de y en el miembro derecho de la ecuación

$$\dot{y} = 1 - 2x - x^2 + \dots,$$

de donde

$$y = x - x^2 + \frac{x^3}{3} + \dots$$

El cálculo según el método de los coeficientes indeterminados, Newton los disponía en una tabla:

y	$1 - 3x + y + x^2 + xy$
	$1 - 3x + x^2$
y	$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \dots$
xy	$x^2 - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \dots$

Suma	$1 - 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{30}x^5 + \dots$
------	--

y	$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6 + \dots$
-----	---

d) cambio de variables, en virtud del cual en la serie no se descompone la función y , sino una función de y convenientemente elegida y además el cambio de sistema de coordenadas;

e) inversión de series, lo cual es mejor, evidentemente, aclarar en un ejemplo. Calculando la longitud de la circunferencia ($R = 1$, el centro en el origen de coordenadas), Newton obtuvo el elemento de arco, en la traducción al simbolismo usual, $ds = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; ($s = \text{arc sen } x$), o utilizando el

teorema del binomio $\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \right]$ en la forma de serie:

$$ds = dx \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \dots \right).$$

Integramos término a término:

$$S = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen } x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots$$

El problema consiste en encontrar la serie para la función inversa, es decir, $\text{sen } x$.

La inversión, Newton la realiza mediante las siguientes etapas: Interrumpe la serie:

$$S = x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 \left[+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \dots \right]. \quad (1)$$

Pone $x = s + p$. De donde

$$0 = p + \frac{1}{6}(s^3 + 3s^2p + \dots) + \frac{3}{40}(s^5 + \dots). \quad (2)$$

Prueba: $p = A, As, As^2$. Evidentemente $A = 0$ en estos casos. Finalmente el intento $p = Bs^3$ da

$$B + \frac{1}{6} = 0, \quad B = -\frac{1}{6}.$$

Es decir,

$$x = s - \frac{1}{6}s^3.$$

El paso siguiente: $p = -\frac{1}{6}s^3 + q$. La sustitución en (2) da

$$0 = q + \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2}s^5 + \dots \right) + \frac{3}{40}(s^5 + \dots),$$

de donde

$$q = \left(\frac{1}{12} - \frac{3}{40} \right) s^5 = \frac{1}{120} s^5.$$

Es decir,

$$x = s - \frac{1}{6}s^3 + \frac{1}{120}s^5$$

etc. La ley de formación de los coeficiente se advierte fácilmente:

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

De la serie invertida se obtiene la serie para $\cos x$ ($\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

El aparato de representación de funciones mediante series de potencias, en el cual se incluían muchos otros métodos, además de los mencionados, es la base operativa de la teoría newtoniana de las fluxiones. Este permite diferenciar e integrar una amplia clase de funciones analíticas, calcular los extremos de las funciones, obtener muchos ejemplos de aplicación de los métodos de la teoría de fluxiones a la geometría, la mecánica y otras ciencias. Cuán lejos llegó Newton en los más difíciles problemas de la teoría de las fluxiones lo muestra en una de sus cartas, del año 1676, en la cual comunica sobre las condiciones para la integrabilidad del binomio diferencial.

Este último: $y = az^q(e + fz)^n$ se integra si $\frac{\partial + 1}{\eta} \delta \frac{\partial + 1}{\eta} + \lambda$ es un entero positivo.

Newton obtuvo la mayoría de los resultados de la teoría de fluxiones en el transcurso de los años 60—70 del siglo XVII. Sin embargo, no se apuró para publicar los trabajos escritos por él sobre este tema. De mala gana daba su conformidad para la publicación, incluso cuando estallaron las discusiones sobre la prioridad en el descubrimiento del cálculo diferencial e integral por él o por Leibniz. Además, sus famosos “Elementos matemáticos de la filosofía natural” aparecidos en los años 1686—1687, estaban escritos sin la aplicación de los métodos de la teoría de fluxiones, aunque muchos de los resultados, citados en este libro, fueron obtenidos inicialmente mediante los recursos de esta teoría.

La causa de esta situación fue, junto a la imperfección de los métodos de solución de los problemas inversos, la insuficiente fundamentación lógica de la teoría de las fluxiones. La introducción en la matemática de magnitudes variables, las operaciones con los infinitésimos conduce a la necesidad de una explicación racional de un gran número de conceptos básicos y problemas relacionados entre sí. Newton comprendió bien esto, sin embargo, no pudo vencer estas dificultades.

Las ideas de Newton sobre la teoría de las fluxiones cambiaban. Antes advertimos que el punto de partida de la teoría de las fluxiones se encontraba en la mecánica. Esto permite pasar a la mecánica las contradicciones, surgidas durante el tratamiento de los conceptos fundamentales de esta teoría. Sin embargo, el lado operativo del asunto presupone la eliminación de los infinitesimales. Demostrar la legitimidad de esta operación, aclarar la esencia misteriosa de estas magnitudes que no son cero, ni magnitudes finitas, este problema no se resolvía con los medios de que disponía Newton.

En búsqueda de la salida, Newton creó el método de las primeras y últimas relaciones que es una de las primeras formas de la teoría de los límites. El la expuso en los “Elementos matemáticos de la filosofía natural”, cuya primera parte del primer libro se llama así: “Sobre el método de las primeras y últimas relaciones, mediante el cual se demuestra lo que sigue”.

El método consiste en la consideración de las relaciones límites de las magnitudes “casi-casi nacientes” (primeras relaciones) o “casi-casi en desaparición” (últimas relaciones). A pesar de la terminología inadecuada, Newton pudo exponer los teoremas fundamentales sobre los límites y magnitudes infinitesimales que aparecen como base de los cursos de análisis matemático. Así, fueron demostrados por él los teoremas sobre los límites de las relaciones entre la longitud del arco de una curva continua y suave, por una parte, y la cuerda y la tangente, por la otra.

El concepto de límite, en cualquier forma que aparezca, es un concepto no algorítmico. Con él es imposible relacionar una sucesión de operaciones que conduzcan efectivamente a su encuentro. Del tratamiento estimativo-condicional del límite (se daado $\varepsilon > 0$), entonces encontraremos un $\delta > 0$ tal que, etc.) Newton también estaba muy alejado; éste tuvo derecho a ciudadanía sólo a finales del siglo XIX. La ruptura entre el lado operativo-algorítmico de la teoría de las fluxiones y sus fundamentos lógicos quedó sin solución. La teoría de las fluxiones señaló la etapa del desarrollo del análisis infinitesimal cuando, según expresión de K. Marx, él “existe, y a continuación se aclara”, pero sus fundamentos son “misticamente” misteriosos. El destino ulterior de la teoría de las fluxiones está relacionada con una lucha encarnizada que estalló inmediatamente después de la aparición de esta teoría, precisamente en torno a sus fundamentos.

Cálculo de los diferenciales. Como fue dicho antes, el análisis infinitesimal surgió casi simultáneamente en dos formas diferentes e independientes. La primera creación, en el tiempo, fue la teoría newtoniana de las fluxiones. Sin embargo, las primeras publicaciones sobre análisis matemático fueron dedicadas a otro tipo de cálculos, el cálculo de las diferenciales.

El autor del nuevo cálculo, G. W. Leibniz (1646—1716), nació en Leipzig en la familia de un profesor de filosofía y moral de la universidad del lugar. Su instrucción la recibió en las universidades de Leipzig y Jena. Toda la vida estuvo al servicio de los gobernantes germanos: del príncipe elector de Maguncia y a continuación, del duque de Hannover. Cumpliendo misiones diplomáticas, Leibniz visitó París y Londres, donde entró en contacto científico con los más notables científicos. Por sus méritos científicos fue elegido miembro de la Royal Society de Londres (1673) y la Academia de Ciencias de París (1700). Leibniz fundó la Sociedad de Ciencias de Berlín (luego Real Academia Prusiana) y, además, ejerció una positiva influencia en el desarrollo de la ciencia en Rusia: conoció a Pedro I, se



G. W. Leibniz (1646—1716)

escribió y conversó con él, discutió el proyecto de organización de la Academia de Ciencias de Petersburgo, el desenvolvimiento de las investigaciones científicas en Rusia.

La actividad de Leibniz fue muy variada: fue un eminente diplomático, político y científico. También son diversos sus intereses científicos: las ciencias naturales, la física, la filosofía, el derecho, la literatura, la lingüística y las matemáticas fueron objetos de sus investigaciones, frecuentemente muy notables y que anticipaban muchos descubrimientos posteriores.

Los trabajos matemáticos de Leibniz que nos interesan en primer término están vinculados estrechamente con sus ideas filosóficas. No tenemos posibilidades de describir detalladamente las posiciones filosóficas de Leibniz y su evolución desde la simpatía por el materialismo mecanicista hasta una singular variedad de idealismo objetivo metafísico. Advirtamos sólo que, en todas sus ocupaciones matemáticas, diferentes por su contenido, él

se regía sólo por un objetivo. Este objetivo es filosófico: la creación de un método universal de conocimiento científico, según la terminología de Leibniz — la característica universal.

La característica universal deberá sustituir todos los razonamientos lógicos con los cálculos, realizados sobre las palabras y otros símbolos que reflejen unívocamente el concepto. Ella, de esta manera, se considera como cierto aparato de juicio lógico-matemático general. Así, las matemáticas adquieren un tratamiento ampliado, como ciencia sobre las representaciones de todas las posibles relaciones y dependencias de los elementos más simples. Las matemáticas contemporáneas a Leibniz debían, según su criterio, entrar en las futuras matemáticas generales. El vio el ideal, según sus palabras, en “la subordinación del álgebra al arte combinatorio, o del álgebra literal a la ciencia general de las letras, o a la ciencia sobre fórmulas que expresan en general orden, semejanza, relación, etc., o de la ciencia general sobre las cantidades a la ciencia general sobre las cualidades, así que nuestras matemáticas literales se convierten sólo en un notable modelo de arte combinatorio o de ciencia literal general”.

El establecimiento de la característica universal y el descubrimiento de las leyes de las nuevas matemáticas resuelven el problema de la demostración científica y elimina los desacuerdos, ya que en lugar de discusiones se requiere sólo producir cálculos.

Los gérmenes de las nuevas matemáticas se conservan en la vieja. Esta última es necesario estudiarla, seleccionar y proponer problemas, los cuales se relacionen con la elaboración de procesos infinitos y con los que el álgebra no puede operar, crear nuevos algoritmos. A estos algoritmos es necesario dar, en lo posible, un simbolismo perfeccionado que refleje la esencia de los conceptos y operaciones. A la elección del simbolismo Leibniz le daba una enorme importancia. El indicaba que era necesario elegir designaciones cómodas para los descubrimientos, o sea, es necesario que las denominaciones brevemente expresaran la esencia de las cosas. Entonces se simplifica el trabajo de la mente. El significado operativo de los nuevos algoritmos crece si ellos son mecanizados. Tales eran, en lo fundamental, las directrices iniciales de Leibniz. Ellas determinaron la dirección y el carácter de sus actividades matemáticas, las cuales condujeron al descubrimiento del cálculo diferencial e integral.

Hasta el año 1673, antes de su estancia en París, Leibniz se ocupó mucho de los problemas de combinatoria viendo en ellos la base matemática de la lógica. En París se encontró con Huygens y este lo introdujo en el curso de los problemas infinitesimales de las matemáticas. Huygens inmediatamente propuso a Leibniz una serie de problemas que relacionaban esas cuestiones con la combinatoria. Resolviendo uno de los problemas de Huygens sobre la búsqueda de sumas de los números de la forma

$\frac{1}{k(k+1)}$, Leibniz encontró además las sumas de ciertas series. Para esto utilizó ampliamente el triángulo aritmético de Pascal y las diferencias finitas de orden superior. En este período preparatorio estudió profundamente las obras de Descartes, Cavalieri, Wallis, Pascal, Huygens y otros.

Aproximadamente desde esta época en los papeles de Leibniz se encuentra, cada vez más frecuentemente, la aplicación del triángulo característico de Pascal para la resolución de problemas sobre el trazado de una tangente a la curva. Con esto gradualmente va llegando a la idea sobre la posibilidad de sumar las diferencias (dx y dy), que generan los lados del triángulo característico. A las sumas de estas pequeñas diferencias conducen también los problemas sobre cuadraturas. Leibniz, percibiendo esta situación, enunció la proposición de que la resolución de los problemas inversos de tangentes totalmente o en su mayor parte se pueden reducir a cuadraturas. De esta manera, no conociendo los trabajos de Barrow y Newton, pero como ellos, partiendo de los problemas inversos de las tangentes, Leibniz descubrió la relación mutuamente inversa entre los métodos de trazado de tangentes (en adelante, operación de diferenciación) y las cuadraturas (más tarde integración). Entonces Leibniz expresó la idea de que el cúmulo de resultados de diferenciación por medio de una transformación simple podía ser útil en la integración de funciones (ideas equivalentes utilizó también Newton).

Así en el plano puramente matemático el cálculo de Leibniz se formaba en rasgos generales de las siguientes premisas:

- problemas de la suma de series (desde el año 1673) y la utilización de los sistemas de diferencias finitas;
- resolución de los problemas sobre tangentes, el triángulo característico de Pascal y el paso gradual de las relaciones entre elementos finitos a arbitrarios y después infinitesimales;
- problemas inversos de tangentes, suma de diferencias infinitamente pequeñas, descubrimiento de la inversibilidad mutua entre los problemas diferenciales e integrales (aproximadamente hacia el año 1676).

Todos estos años Leibniz hizo numerosas tentativas de crear un simbolismo cómodo. El llega a la idea sobre el símbolo " d " (abreviatura de la palabra *differentia*, o sea, diferencia) para la designación de diferencias infinitesimales. Tras Cavalieri y Pascal, Leibniz representó la integral como suma de "todas" las ordenadas, que son una cantidad infinita y la escribió con el símbolo *omny* o más frecuentemente *omnl*. Más tarde sustituyó *omn* por \int , partiendo de la letra inicial de la palabra *Summa*. Leibniz también se esforzó por reflejar la inversibilidad mutua de los problemas en los símbolos: si $\int l = ax$, entonces $l = \frac{ax}{a}$. Enseguida llegó a la idea de que es

mejor escribir $d(ax)$; en efecto " dx " es lo mismo que $\frac{x}{d}$, es decir, la diferencia entre x próximos. Pero de $\int (ax) = l$ se obtiene que el diferencial $d(ax)$ es como si fuera igual a la magnitud finita l . Así, gradualmente se aclaró la necesidad de perfeccionar el símbolo de integral, incluyendo en él el símbolo de diferencial del argumento: $\int y dx$.

Con ayuda de Oldenburg (1615—1677) secretario de la Royal Society de Londres, Leibniz se carteo (1676—1677) con Newton. En las cartas le comunicaba sus resultados y se esforzaba por conocer más sobre los métodos y resultados de Newton. En lo fundamental, se trataba de los métodos de desarrollo de funciones en series y sobre la resolución de los problemas inversos de las tangentes. Los correspondientes se comprendían bien uno a otro, reconocían la proximidad de sus ideas y deducciones. Sin gran trabajo ellos adivinaban la esencia de los métodos, aplicados por el rival. Lamentablemente, muy pronto se suspendió la correspondencia, ya que Newton dejó de contestar las cartas.

Parecería que esta correspondencia debería acelerar la publicación del nuevo cálculo. Sin embargo Leibniz, así como Newton, no se apresuró a esto. Trabajó en el perfeccionamiento de los métodos de cálculo y en su fundamentación, esforzándose por justificar su surgimiento o la deducción rigurosamente lógica, o bien la suficiente cantidad de resultados nuevos y los logros prácticos. Sólo en el año 1684 en la revista de Leipzig "Acta Eruditorum", Leibniz publicó la primera memoria sobre el análisis infinitesimal "Nuevo método de los máximos, mínimos y también de las tangentes, para el cual no son obstáculo las magnitudes fraccionarias ni irracionales y un nuevo tipo, especial para esto, de cálculo".

Esta memoria no es grande, menos de 10 páginas. En ella no hay demostraciones. Pero en ella por vez primera, en las páginas de una revista científica surge el cálculo diferencial como objeto de investigación matemática en forma que recuerda mucho su estructura actual.

El diferencial del argumento dx se toma como una magnitud completamente arbitraria. El diferencial de la función dy está definido por la igualdad $dy = \frac{y dx}{S}$, donde S , es la subtangente a la curva en el punto (x, y) . Se introducen los símbolos dx y dy . Se formulan las reglas de diferenciación de una magnitud constante, de la suma de funciones, la diferencia, producto, cociente, potencia y raíz. Se hace notar la invariación de la forma del primer diferencial de la elección del argumento. Los diferenciales se interpretan inicialmente como magnitudes, proporcionales al incremento instantáneo de la magnitud. Verdaderamente, más tarde los diferenciales de nuevo se definen como diferencias infinitesimales.

La memoria del año 1684 fue un tratado sobre cálculo diferencial. Después de dos años, en 1686, vio la luz otra obra de Leibniz "Sobre la geometría profunda", en la cual se concentran las reglas de integración de muchas funciones elementales. Para la designación de la operación de integración se introduce el símbolo \int , tratado como la suma de diferenciales, y además se subraya su inversibilidad mutua con la operación de diferenciación. En ese mismo año Leibniz elabora los fundamentos de la teoría de contacto de las curvas, introduce el círculo contiguo y lo aplica a la medición de la curvatura. En esto cometió un error suponiendo que en el caso general este círculo y la curva tiene cuatro puntos coincidentes. Este error lo corrigió en el año 1692 su sucesor Jacob Bernoulli, demostrando que en el caso general tales puntos son sólo tres.

El análisis infinitesimal salió, así, del estadio de formación y se declaró como una nueva ciencia matemática, demostrando inmediatamente su carácter extraordinariamente fructífero. La activa propaganda del nuevo cálculo por Leibniz y sus alumnos y sucesores, entre los cuales inmediatamente se destacaron los hermanos Bernoulli: Jacob (1654—1705) y Johann (1667—1748), posibilitó además su difusión tempestuosa. Y el flujo de nuevos descubrimientos de Leibniz no se detuvo.

En el año 1693 extendió el nuevo cálculo a las funciones trascendentes por la vía del desarrollo de éstas en series con ayuda del método de coeficientes indeterminados. Este grupo de resultados Leibniz los expuso en un artículo con un largo título, como era característico para las publicaciones de los siglos XVII y XVIII: "Complemento a la geometría práctica el cual se extiende a los problemas trascendentes con ayuda del nuevo método general de series infinitas".

En los trabajos posteriores de Leibniz se abarca, en esencia, todas las partes iniciales del cálculo diferencial e integral. Así en el año 1695 publicó la regla de diferenciación de la función exponencial general y la fórmula de diferenciación múltiple del producto.

$$d^m(xy) = d^m x \cdot d^0 y + \frac{m}{1} d^{m-1} x \cdot d^1 y + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} d^{m-2} x \cdot d^2 y + \dots$$

En esa misma época logró generalizar el concepto de diferencial al caso de exponente negativo y fraccionario. En el transcurso de los años 1702—1703 fueron elaborados métodos de integración de fracciones racionales.

Mediante el nuevo cálculo los matemáticos de finales del siglo XVII y comienzos del XVIII lograron resolver un número, que crecía rápidamente, de importantes problemas difíciles y prácticos. Leibniz también en este género de actividad trazó un camino. En el año 1691, por ejemplo, estableció la forma que debe tomar un hilo homogéneo pesado y elástico colgado

de sus extremos e introdujo la ecuación de la catenaria. Desde el año 1696 se ocupa de nuevos problemas, los variacionales. Resolvió el problema sobre la braquistócrona, es decir, la curva del descenso más corto, encontró el método de resolución de los problemas sobre las líneas geodésicas.

El simbolismo y los términos de Leibniz resultaron muy bien pensados, no eran complejos y reflejaban la esencia del asunto, contribuían a la comprensión y permitían operar con ellos según reglas relativamente simples. Muchos de ellos llegaron hasta nuestros días. Leibniz introdujo los términos: diferencial, cálculo diferencial, función, coordenadas, ecuación diferencial, algoritmo (en un sentido análogo a su significado actual) y muchos otros, como también la mayor parte de los símbolos.

Los éxitos prácticos y la elaboración del cálculo alcanzaron tal nivel que a finales del siglo (1696) apareció el primer manual de cálculo diferencial y sus aplicaciones a la geometría: "Análisis Infinitesimal" de G. F. L'Hospital.

El valor práctico del cálculo de Leibniz, su sencillez operativa atrajeron la atención de los científicos. Rápidamente se convirtió en el centro de todas las matemáticas, en el arma fundamental de investigación en manos de los científicos. Pero en este cálculo había un lugar débil: quedaba sin aclarar qué explicación racional se puede dar a los conceptos fundamentales que se apoyaban en la proximidad infinita, pequeñez infinita, o proceso infinitamente ilimitado. En los manuscritos y artículos Leibniz constantemente retorna al problema no resuelto de la fundamentación del análisis infinitesimal. El realizó muchos esfuerzos desde diferentes posiciones iniciales. En sus obras pueden encontrarse: tratamiento de los infinitesimales como magnitudes no arquimedianas; utilización de la apreciación intuitiva de un infinitesimal potencial; referencias al método antiguo de exhaustión y la introducción de todas sus dificultades; la postulación de la posibilidad de la sustitución de las relaciones entre infinitesimales por relaciones entre magnitudes finitas; ideas sobre límites no desarrolladas, tendencia hacia ella; introducción en los razonamientos, en calidad de apoyo, de la continuidad, como si fuera intrínseca a la naturaleza de todas las cosas.

Sin embargo, el problema de la fundamentación del análisis infinitesimal no pudo ser resuelto por Leibniz, como tampoco por Newton. Los fundamentos de esta parte importante de las matemáticas, en la cual se sucedían uno tras otro los logros notables, quedaban sin aclaración, en misterio. En el dominio de la fundamentación, el nuevo análisis, en el transcurso del siglo XVII y gran parte del siglo XVIII, vivió un periodo "místico", según acertada expresión de C. Marx.

Un lugar extenso en las obras sobre historia de las matemáticas de esta época ocupan las discusiones entre los sucesores de I. Newton y

G. W. Leibniz sobre la prioridad en el descubrimiento del cálculo diferencial e integral. En su época así fue, la discusión adquirió un carácter tenso, sobrecreció hasta las dimensiones de rivalidad y riña nacionales, atrajo una enorme cantidad de científicos e incluso de políticos. Pero no todas, incluso las más acaloradas discusiones, las teorías más de moda, defendidas por los más fanáticos adeptos, subsistieron largo tiempo en la historia y tienen un significado imperecedero. Las leyes de la historia reflejan inflexiblemente precisamente el lado de contenido de la ciencia, su correspondencia con la estructura económica de la sociedad humana, las relaciones esenciales. Por esto estamos en el derecho de dedicar a las discusiones mencionadas sobre la prioridad sólo algunas frases.

Al parecer, Newton y Leibniz descubrieron sus formas del cálculo independientemente uno del otro. Ambos se apoyaron en la experiencia de los numerosos predecesores, en los cuales se acumuló una suficiente cantidad de premisas para sus descubrimientos. Ambos reflejaron, partiendo de puntos diferentes, la exigencia general de la ciencia en el análisis infinitesimal. Newton, parece ser que alcanzó el éxito antes, Leibniz, algo después. Sin embargo, la prioridad en la publicación, la superioridad en la comodidad de los algoritmos y símbolos, los méritos en la propaganda activa del nuevo cálculo pertenecen a Leibniz.

El surgimiento de la geometría analítica y el análisis infinitesimal creó a finales del siglo XVII una nueva situación en las matemáticas. Estas nuevas ramas atrajeron el mayor interés y precisamente en ellas fueron alcanzados rápidamente resultados muy importantes. El papel de estas ramas, en especial el análisis infinitesimal, se hizo tan significativo que las matemáticas de este período pueden denominarse, las matemáticas de las magnitudes variables.

Sin embargo, siempre es preciso recordar que la consideración de lo principal, lo determinante, no agota todo el contenido de la ciencia; en ella hay aún muchas facetas, muchas líneas de desarrollo, que no fueron en aquella época las principales, pero que en lo sucesivo resultaron muy importantes. Por esto es necesario hacer algunas observaciones sobre las matemáticas del siglo XVII.

El álgebra en este siglo se liberaba cada vez más de los elementos geométricos. En ella se fortaleció el aparato simbólico literal. Se definió la problemática científica fundamental; la teoría general de las ecuaciones. En esta rama puede advertirse:

a) Presentación y cierto desarrollo del problema a la reductibilidad de ecuaciones algebraicas, esto es, la representación de funciones racionales enteras con coeficientes racionales en forma de producto de dos o más funciones análogas (ver, por ejemplo, I. Newton. "Aritmética Universal").

b) Introducción por Leibniz en el año 1693 de los elementos de la teoría de los determinantes y la regla, conocida actualmente, como "regla de Cramer". Advirtamos que el término "determinante" se observa sólo desde el año 1815 (en las obras de Cauchy) y el símbolo de determinante, desde 1841 (en las obras de Cayley).

c) Los ininterrumpidos (aunque se sobreentiende, infructuosos) intentos de encontrar solución en los radicales de las ecuaciones de grado superior al cuarto.

d) Los esfuerzos por demostrar el teorema fundamental del álgebra sobre el número de raíces de una ecuación algebraica.

La geometría amplió sustancialmente su composición. En ella entró, como se mostró antes, la nueva geometría analítica, que la relacionó con el álgebra. Las aplicaciones geométricas del análisis, gradualmente se forman en una futura disciplina matemática independiente, la geometría diferencial. Finalmente, en el siglo XVII se echan las bases de la geometría proyectiva. En el año 1636 J. Desargues (1593—1662), ingeniero y arquitecto francés, elaborando la teoría de las perspectivas, desarrolló un sistema completo de ideas geométrico-proyectivas: objetos infinitamente alejados, involuciones, etc. Las ideas proyectivas las introdujeron en la teoría de las secciones cónicas además de Desargues, B. Pascal (1640), F. La Hire (1685).

La teoría de los números se enriqueció con las famosas investigaciones de Fermat, que determinaron su desarrollo posterior. En particular, a él pertenecen dos teoremas formulados sin demostración:

a) El gran teorema de Fermat; la ecuación diofántica $x^n + y^n = z^n$, $n > 2$ entero, no tiene solución en los números naturales. Hasta el momento, está demostrado sólo para n no grande, una demostración general aún no existe.

b) El pequeño teorema de Fermat: si p es primo y a es un entero, que no se divide por p , entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, o sea $a^{p-1} - 1$ se divide por p . El primero que dio la demostración de este teorema, situado en la base de la teoría de las congruencias, fue L. Euler.

En el año 1665, B. Pascal por vez primera formuló el principio de inducción matemática. El mismo y, además, P. Fermat y G. W. Leibniz, a quienes se mencionó antes, elaboraron en una serie de artículos los conceptos fundamentales de la combinatoria.

La teoría de las probabilidades, en relación con los problemas con los que se tomaban las investigaciones combinatorias, a mediados del siglo XVII entró en el estadio de formación como ciencia. Las consideraciones probabilísticas, en las cuales las ideas intuitivas sobre el grado de posibilidad lógica se complementaba con los cálculos de frecuencia teórica, comen-

zaron a aparecer en el siglo XVI, pero sólo en las obras de Pascal, Fermat y Huygens comenzó a entrar en uso en relación con el problema de la repartición de los sueldos, el concepto de esperanza matemática. Al parecer, en el mismo final del siglo XVII Jo. Bernoulli descubrió la forma más simple de la ley de los números generales (publicado en el año 1713), concluyendo la primera etapa, según la clasificación de A. N. Kolmogórov, en la historia de la teoría de las probabilidades.

Del material del presente capítulo puede hacerse la conclusión general que las disciplinas matemáticas, las cuales en nuestros días forman la base clásica de la instrucción superior, comenzaron a formarse precisamente en los albores de los siglos XVII y XVIII.

DESARROLLO DE LAS PARTES FUNDAMENTALES DE LAS MATEMÁTICAS EN EL SIGLO XVIII

6.1. Sobre las condiciones y particularidades del desarrollo de las matemáticas en el siglo XVIII

El proceso de desarrollo de las matemáticas en el transcurso de su historia se hace cada vez más y más complejo. En el período considerado en el presente capítulo, esta complejidad y multilateralidad alcanzó un alto grado.

La elaboración científica de los problemas matemáticos casi enteramente se concentró en los países de Europa. En el plano económico la historia de Europa del siglo XVIII se caracteriza por la victoria decisiva del modo capitalista de producción. La segunda mitad del siglo XVIII, en los países de Europa, en lo fundamental puede ser remontada a la época del capitalismo industrial. El desarrollo de la vida económica y social de los individuos, relacionada con el establecimiento de la nueva formación capitalista, comenzó a conducir en esta época a la reestructuración de las concepciones sociales, científicas, culturales y otras concepciones ideológicas.

El ritmo del desarrollo de la ciencia en esta época aumenta rápidamente. La revolución industrial, la formación de un mercado mundial, las necesidades, relacionadas con esto, de la navegación, la construcción de naves, la técnica militar, la termodinámica, la hidroenergética, etc., las necesidades prácticas de la sociedad presentan ante la ciencia problemas que rápidamente se complican. Junto a los problemas de la mecánica y astronomía, ante el complejo de ciencias físico-matemáticas se situaron los problemas de la creación del aparato matemático de investigación de los fenómenos electromagnéticos y térmicos.

La solución de problemas científicos-técnicos e incluso simplemente científicos se convierte en asunto de importancia estatal. Las tablas de las posiciones de la Luna, el Sol, las estrellas, el problema de la invención del cronómetro de alta precisión, cuyas indicaciones no dependieran del balanceo del barco, la búsqueda de métodos de transformación de la esfera en el plano, como parte importantísima de la cartografía y otros adquieren actualidad y urgencia excepcional. Al mismo tiempo el dominio de los recursos del nuevo análisis crea un ambiente de *posibilidad* de resolución de semejantes problemas, de su accesibilidad a los esfuerzos de los científicos.

Para las investigaciones científicas, en las ciudades más grandes de Europa, se crean instituciones especiales, las Academias de Ciencia, subsi-

diadas por el Estado. Gradualmente crece el papel de los centros superiores de enseñanza, haciéndose particularmente notable hacia finales del siglo XVIII, en la época de la Gran Revolución Burguesa Francesa. En la sociedad surge una notable capa de científicos-profesionales, entre ellos los profesionales-matemáticos, cuyo principal asunto vital es la investigación científica y la enseñanza. En relación con esto transcurre una democratización notable de la composición de los científicos. En efecto, por ejemplo, el más notable matemático del siglo XVIII, L. Euler era hijo de un pastor campesino, J. L. Lagrange procedía de la familia de un oficial, P. S. Laplace y M. V. Lomonósov son de procedencia campesina, J. D'Alembert no tuvo familia de origen. El número de semejantes ejemplos puede aumentarse significativamente.

A comienzos del siglo, los matemáticos en sus investigaciones podían partir de un material muy significativo y concreto. Su base y la parte más actual constituyó el análisis infinitesimal surgido en Inglaterra en forma del cálculo de las fluxiones de Newton y en el continente europeo en forma del cálculo de los diferenciales de Leibniz. Su generalidad, y en muchas partes también coincidencia, fueron ya reconocidos. El conjunto de los métodos de resolución de los problemas directos de estos cálculos, los que componen actualmente la parte principal del cálculo diferencial, estaba en lo fundamental creado. El cálculo diferencial ocupó el lugar de una de las partes clásicas del análisis matemático. Surgieron los primeros textos que sistemáticamente exponían sus métodos y resultados.

En el campo de los problemas inversos, es decir, del cálculo integral, el momento de la conformación de resúmenes aún no había llegado, ya que todavía no se había hecho mucho. En el campo de la integración indefinida continuaba la elaboración de métodos de integración en términos de funciones elementales. Así, por ejemplo, la idea de integración de las funciones racionales fraccionarias mediante su descomposición en fracciones simples estuvo expresada por Leibniz sólo a comienzos del siglo XVIII (1702—1703). Acerca de la reestructuración del cálculo integral sobre la base del concepto de integral definida aún no podía ni hablarse.

En la medida que se acumulaban los procedimientos de integración, se intensificaba la necesidad en la investigación de las funciones trascendentes más simples y el enriquecimiento de esta clase. Los métodos geométricos de investigación, basados en el estudio de las áreas y abscisas dependientes una de otra de forma determinada, resultaban insuficientes, inflexibles. Ellos se complementaban con los métodos de representación de funciones por series de potencias y el perfeccionamiento de la forma simbólica de sus expresiones.

Junto a la formación de los fundamentos del análisis matemático — el cálculo diferencial e integral — hacia comienzos del siglo surgieron resul-

tados también en sus ramas superiores: la teoría de las ecuaciones diferenciales, el cálculo de variaciones. La integración de las primeras ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, a las cuales conducían los problemas de las ciencias naturales con aplicación matemática, se intentó realizarla con ayuda sólo de funciones elementales y algebraicas trascendentes. Se lograron resultados aislados. Sin embargo, enseguida los matemáticos se convencieron que por tal camino no era posible resolver cualquier círculo amplio de ecuaciones. El problema fue transformado, y la resolución de las ecuaciones diferenciales comenzó a buscarse en cuadraturas.

El arsenal de procedimientos de integración de ecuaciones diferenciales era aún pequeño. En él se incluían: separación de variables, casos particulares de búsqueda de factor integrante, resolución de la ecuación homogénea de primer orden con la sustitución $y = xt$. Johann Bernoulli, en el año 1697, integró la ecuación que lleva ahora su nombre,

$$dy + P(x)y dx = Q(x)y^n dx,$$

transformándola en la ecuación diferencial lineal de primer orden con ayuda de la sustitución $y = v \frac{1}{1-x}$. Este método fue, a propósito, conocido

además por Leibniz y Jacobo Bernoulli. En el comienzo del siglo Johann Bernoulli pudo dar solución a la ecuación diferencial lineal homogénea de n -ésimo orden.

$$Qx^n \frac{d^n y}{dx^n} + \dots + Bx^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + Ax \frac{dy}{dx} + y = 0$$

disminuyendo su orden mediante un factor integrante de la forma x^p . Aún no había ninguna elaboración sistemática de la teoría de ecuaciones diferenciales, pero este problema se situaba como inmediato.

En el campo del cálculo variacional, los matemáticos lograron acumular ciertas reservas de problemas de un tipo especial-variacional: reconocer sus particularidades, encontrar las soluciones de una serie de problemas elementales. El problema de la creación de un método general se presentaba en el primer plano también en esta parte del análisis matemático.

A través de un trabajo enérgico en diferentes ramas de las ciencias exactas creció rápidamente el número de problemas resolubles por el método, entonces todavía nuevo, del análisis infinitesimal. Se reafirmó la convicción que las ecuaciones diferenciales reflejan, si no todas, al menos las más importantes leyes de la naturaleza. La resolución de ecuaciones diferenciales se consideraba por muchos científicos como un método universal del conocimiento. Sin embargo, este potente arsenal de métodos llevaba, en sus fundamentos, una contradicción no resuelta entre los crecientes éxitos prácticos y la inconsecuencia lógica, la no fundamentación de los procedimientos y operaciones con las magnitudes infinitesimales y particularmente

en la no fundamentación de su eliminación. Esta contradicción estaba predestinada a revelarse en un futuro próximo y además de forma ostensible.

El álgebra sobre la cual se apoyaba el nuevo análisis hacia finales del siglo XVII obtuvo suficiente perfección en el aparato simbólico literal. Sus posibilidades prácticas, además de la resolución en radicales de las ecuaciones de los primeros cuatro grados y ciertos métodos aproximados, se amplió esencialmente debido al establecimiento de muchos resultados de la teoría general de las ecuaciones algebraicas y los elementos de la teoría de determinantes. El problema central del álgebra se convirtió en el problema de la búsqueda de un método general de resolución de ecuaciones algebraicas de cualquier grado. El concepto de solución de tales ecuaciones en gran medida aún se vinculaba con el problema de la representación de las raíces de las ecuaciones mediante una u otra combinación de radicales.

Los métodos de cálculo aritmético en esta época se enriquecieron con la utilización de los logaritmos y las numerosas tablas correspondientes. Comenzaron a aparecer los instrumentos auxiliares de cálculo, entre los cuales los más perfeccionados eran los aritmómetros de Schickard, Pascal, Leibniz y otros y las escalas logarítmicas. El abigarramiento y diversidad, la no uniformidad del desarrollo, siempre presentes en la ciencia en cualquier época, en la aritmética se revelaron en el retardado del concepto de número negativo e incluso de la situación desigual de las fracciones decimales comparativamente con las ordinarias.

En la composición de la geometría, junto a las partes elementales y la trigonometría los científicos del siglo XVII podían utilizar la geometría analítica, aún no muy acabada, creada en los años 30 del siglo XVII por Descartes y Fermat. A ella se añadió una colección de aplicaciones geométricas del cálculo diferencial, posteriormente constituida en una forma especial de geometría, la geometría diferencial.

Hacia comienzos del siglo XVIII se había acumulado una considerable reserva de ideas de carácter teórico-probabilístico aún comparativamente elementales. Las consideraciones iniciales de una serie de científicos, por ejemplo, de Cardano y Tartaglia, sobre el número de formas de obtención de la cantidad de tantos deseados en el juego de dados, y de Lucas Paciolí relativo a los problemas de la división de las tarifas, permitieron prever la posibilidad del estudio matemático de los fenómenos aleatorios. En lo sucesivo Pascal, Fermat, Ja. Bernoulli y otros encontraron en el caos de los sucesos aleatorios una cantidad determinada de regularidades, de las cuales la más importante fue la forma más simple de la ley de los grandes números. La obligatoria estrechez del material concreto (juegos de azar, tablas aisladas con resultados de observaciones) y lo elemental de los métodos (aritmético-combinatorios) se consideraban un obstáculo temporal y superable.

El volumen de los conocimientos matemáticos que debía poseer un matemático calificado de finales del siglo XVII — principios del siglo XVIII era, de esta manera, bastante grande. Al parecer, en virtud precisamente de esta circunstancia a partir de la segunda mitad del siglo XVII comenzaron a aparecer obras de varios tomos, que tenían por objetivo abarcar todas las matemáticas, exponerlas en su totalidad, sistemáticamente. Por ejemplo en el año 1661 en Würzburg se publicó en un tomo el "Curso de matemáticas o Enciclopedia completa de todas las disciplinas matemáticas" ("Cursus mathematicus sive absoluta omnium mathematicarum disciplinarum Encyclopaedia") de C. Schotte. Trece años después, en 1674, el "Curso o Mundo de las matemáticas" ("Cursus seu mundus mathematicus") del lyonés Dechales exigía ya tres tomos. 20 años después, en 1693, el "Curso de Matemáticas" ("Cours des mathématiques", París) de Ozanam apareció en cinco tomos.

La tendencia a crear un sistema único de las matemáticas no se debilitaría en los siglos sucesivos, constituyendo un acompañante inseparable del posterior desarrollo de las matemáticas. En nuestros días un exponente de semejantes tendencias es, por ejemplo, la obra en muchos tomos (aún no terminada) "Elementos de las matemáticas", cuyo colectivo de autores (un grupo de matemáticos, fundamentalmente franceses) aparece bajo el seudónimo común de Nicolás Bourbaki. En el transcurso del siglo XVIII varió esencialmente la estructura de las matemáticas, su composición.

Los mayores, más radicales, cambios ocurrieron en el análisis matemático. Aumentó en muchas veces la cantidad de hechos incluidos en él. Por su contenido, el análisis se transformó. De un método, ideado para la resolución de una clase determinada de problemas, se transformó en el análisis de funciones, adquirió una estructura, próxima a la actual. En el transcurso del siglo XVIII del análisis clásico se despendieron gradualmente una serie de disciplinas, que obtuvieron desarrollo independiente. En primer término adquirió independencia la teoría de las ecuaciones diferenciales, la más intensamente elaborada, en virtud de su valor práctico. La teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias obtuvo un desarrollo sistemático, comenzando con los trabajos de Jo. Bernoulli y especialmente J. Ricatti. Al mismo tiempo, una serie de problemas prácticos promovió el problema de la resolución de ecuaciones en derivadas parciales. Los primeros éxitos fueron alcanzados en la resolución de problemas sobre las vibraciones de la cuerda, membrana, columna de aire en un tubo, etc. Por eso los primeros éxitos teóricos son los relativos al método de integración de ecuaciones de tipo hiperbólico.

Sobre la base de la ampliación del concepto de función al campo complejo, de la amplia aplicación del desarrollo de funciones en serie co-

menzó a crearse la teoría de funciones de variable compleja. En ella fueron descubiertos una serie de hechos entre ellos la fórmula de Moivre y Euler. El descubrimiento y aplicación de la transformación conforme hizo avanzar esencialmente esta rama del análisis y aun más subrayó su particularidad.

Las aplicaciones geométricas del análisis también se separaron en una disciplina independiente, la geometría diferencial. Los más eminentes científicos de la época, Euler, Clairaut, Monge, Ménier y otros, trabajaron en esta rama, esforzándose en crear una teoría geométrico-diferencial general, capaz de investigar los objetos espaciales: curvas y superficies en el espacio.

Del conjunto de métodos de resolución de la clase de los problemas variacionales se formó un cálculo especial, el variacional. Inicialmente lo componían sólo los así llamados métodos directos, creados por Euler. En la segunda mitad del siglo fue descubierto el cálculo, basado en la introducción de un nuevo concepto, la variación.

Además de estas grandes direcciones en el análisis recibieron un serio impulso: la teoría de series, el cálculo de las diferencias finitas, la teoría de las funciones especiales y otras.

La estructura de la matemática, evidentemente, no se agotaba en aquella época por el análisis infinitesimal con todas sus ramificaciones. Los perseverantes esfuerzos de investigación de la teoría general de las ecuaciones algebraicas condujeron a la elaboración de la teoría de los determinantes, la teoría de la divisibilidad de polinomios, el álgebra lineal y otros. Al final del siglo, en el año 1799, apareció el notable libro de Ruffini "Teoría general de las ecuaciones, en la cual se demuestra la imposibilidad de la resolución algebraica de las ecuaciones generales de grado superior al cuarto". La demostración no era completamente rigurosa, pero en ella había nuevas ideas, las cuales conllevaban al álgebra contemporánea a nosotros. Ruffini introdujo, en particular, el concepto de grupo de operaciones y realmente vinculó ciertas propiedades de los grupos con el problema de la resolución de ecuaciones en radicales.

Muy substancialmente se completó el conjunto de las disciplinas geométricas. En ella ya estaba incluida la geometría analítica, la cual había tomado a mediados de siglo aspecto muy próximo al actual, tanto por la simbología como por el volumen. Junto al estudio de la perspectiva, se formaba, a finales de siglo, la geometría descriptiva, convertida inmediatamente en parte importantísima de la formación superior técnica y matemática. Atrajeron el interés de una serie de científicos las ideas geométrico-proyectivas de Desargues, lo que preparó el terreno para las investigaciones de Poncelet, el cual a comienzos del siglo XIX creó el armonioso edificio de la geometría proyectiva. Investigaciones sumamente interesantes se realiza-

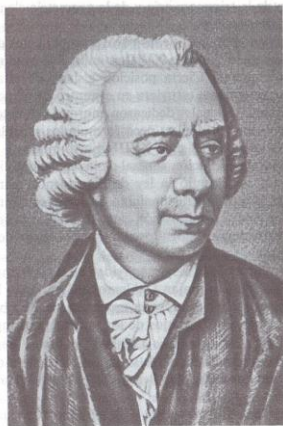
ron en el campo de la trigonometría y de la geometría elemental, o mejor dicho, de la geometría sintética.

En la presente enumeración de las partes componentes del complejo de las ciencias matemáticas del siglo XVIII es imposible evadir con el silencio la teoría de los números. Cierta posición aislada de esta disciplina no impedía que constantemente estuviera en el centro de atención de los más eminentes científicos, los cuales dedicaron enormes esfuerzos para la resolución de sus problemas, difíciles, pero formulados sencillamente. Como mostraremos más adelante, el siglo XVIII aportó mucho a la teoría de los números: se encontró la solución general de las ecuaciones indeterminadas de segundo grado, se formuló la ley de dependencia para los residuos cuadráticos, se demostró la irracionalidad de π y e , etc. Finalmente, en el siglo XVIII fue iniciada la elaboración científica de los problemas teórico-probabilísticos, estrechamente ligados con los problemas del análisis combinatorio elemental.

De los estados europeos la mayor actividad en las matemáticas la observamos en Francia, donde trabajan D'Alembert, Lagrange, Laplace, Monge, Legendre y otros muchos eminentes matemáticos. También nos remitiremos frecuentemente a los trabajos de los matemáticos ingleses: Taylor, Maclaurin, Stirling, los alemanes: Lambert, Gauss y otros. Un lugar prominente en las matemáticas del siglo XVIII ocupó también Rusia gracias a la actividad de Euler, D. Bernoulli y otros académicos petersburgueses.

Para Rusia el comienzo del siglo XVIII fue una época de superación energética del multiseclar atraso condicionado históricamente. Las reformas de Pedro I estaban dirigidas a la reorganización del ejército y la flota, la creación de la industria, la renovación del aparato estatal y la instauración del sistema de preparación de los especialistas necesarios. Estas reformas se introdujeron rápida y energicamente en la vida social. Así, por ejemplo, en el año 1701, se inauguró la escuela de navegación, en los años 1711—1712, la escuela de artillería. Desde el año 1714 en muchas ciudades importantes de Rusia fueron organizadas las llamadas "escuelas de cifras", las cuales tenían como objetivo inculcar a los alumnos la instrucción elemental matemática. En el año siguiente, 1715, comenzó a trabajar la Academia Naval.

La primera institución científica de Rusia, la Academia de Ciencias de Petersburgo, fue fundada en el año 1725. Como parte integrante de la Academia existían el gimnasio y la universidad, los cuales preparaban los cuadros muy necesarios para el país. Para llevar a cabo el trabajo científico y la preparación de los especialistas del país fueron invitados de otros países jóvenes y talentosos profesores. A Petersburgo llegaron también matemáticos: los hijos de Jo. Bernoulli, Daniel y Nicolás, (este último



L. Euler (1707—1783)

falleció muy pronto, en el año 1726), el alumno de Ja. Bernoulli, J. Hermann que había sido antes profesor en Padua y después en Frankfurt del Oder. Algún tiempo después llegó el joven L. Euler, originario de Suiza, el cual encontró en Rusia su segunda patria.

La joven Academia rápidamente adquirió reconocimiento internacional. En el primer número de la revista científica "Comentarios de la Academia de Ciencias de Petersburgo" (del año 1726; fue publicado en el año 1728), contenía importantes artículos sobre integración de ecuaciones diferenciales. Desde el segundo tomo, comenzó Euler a publicar en los "Comentarios" sus trabajos. En el tercer tomo fue publicada una importante memoria de D. Bernoulli sobre la vibración de la cuerda, en la cual la solución fue dada en forma de serie trigonométrica. En los 15 tomos de esta revista científica de la Academia de Ciencias, publicados en el período de 1728—1802 y en otras de sus ediciones de esta época fueron publicados más de 700 artículos científicos y libros sobre cuestiones teóricas y aplicadas de

la matemática. Muchos de estos trabajos ejercieron gran influencia en el desarrollo de la ciencia. "No puedo explicar suficientemente a Ud., con qué avidez preguntan en todas partes por las memorias de Petersburgo", escribió a Euler en el año 1734 D. Bernoulli, el cual en aquella época ya había regresado a su patria.

Sin embargo, la arbitrariedad de los favoritos y de los zares, las intrigas y enemistad entre los cortesanos influyó negativamente en la Academia. Dentro de ella se llevó a cabo una lucha dura y desigual por la educación de cuadros científicos nacionales conducida por M. V. Lomonósov (1711—1765). Fueron cerrados el gimnasio y la Universidad adjuntos a la Academia. Grandes dificultades sufrió también la Universidad de Moscú, fundada en el año 1755 por iniciativa de Lomonósov.

La gloria y orgullo de la ciencia rusa en el campo de las matemáticas de aquella época es L. Euler. El publicó una cantidad enorme de libros y artículos, educó un gran número de alumnos, los cuales posteriormente llegaron a ser académicos. Su importancia en la historia de las matemáticas es excepcionalmente grande.

Leonard Euler (1707—1783) es originario de la ciudad de Basilea (Suiza). Su padre, Paul Euler, fue un pastor pobre. En su juventud se apasionó por las matemáticas y las estudió bajo la guía de Ja. Bernoulli. A su hijo también quiso destinarlo a la carrera eclesiástica. Sin embargo, en la Universidad de Basilea Leonard se apasionó por las matemáticas, siguió las conferencias de Jo. Bernoulli y regularmente trabajó con él. Terminó brillantemente la Universidad, obtuvo el grado científico de maestro, pero no pudo encontrar trabajo.

Sus amigos, los hijos de Jo. Bernoulli, Daniel y Nicolás, emigraron en el año 1725 a Petersburgo. Por recomendación de ellos recibió invitación para trabajar en la Academia de Ciencias de Petersburgo también L. Euler. La vacante, es cierto, era en la cátedra de fisiología, pero esto no desconcertó al joven científico. ¡A pesar de todo era un trabajo!. En mayo del año 1727 viajó a Rusia y vivió aquí 14 años (hasta 1741).

Euler no llegó a ocuparse de la fisiología, y le propusieron la posibilidad de realizar investigaciones en el campo de las ciencias físico-matemáticas. Se dedicó con ahínco al trabajo científico y pedagógico. Durante este tiempo publicó más de 50 y preparó para publicar 80 trabajos científicos sobre análisis, teoría de números, ecuaciones diferenciales, astronomía. Entre ellos aparecieron en el año 1736 la "Mecánica" en dos tomos, incluyendo la mecánica de un punto. Euler cumplió numerosas tareas estatales. En el año 1738, en época de un intenso trabajo sobre la realización de un mapa geográfico de Rusia, perdió parcialmente la vista. Pero su actividad científica crecía. Le aparecieron alumnos talentosos: Kotlińnikov, Rumovski, Fuss, Golovín, Safrónov y otros. La autoridad de Euler

creció rápidamente, aumentó también la autoridad de la Academia de Petersburgo.

Sin embargo, en Petersburgo trabajar era intranquilo. El ambiente político alarmante que mencionamos antes, asustó a Euler. En el año 1741 aceptó la proposición de trasladarse a Berlín a la recién organizada Academia de Ciencias. En Berlín trabajó hasta el año 1766 en el cargo de Vicepresidente y director de la sección de matemáticas. Durante este tiempo escribió alrededor de 300 trabajos científicos, libros y artículos. Aproximadamente la mitad de ellos los mandó a publicar a Petersburgo, donde, como antes, se consideraba académico honorario y de donde recibía dinero. A Euler lo atraía de nuevo Petersburgo. Mantuvo una animada correspondencia con Rusia, apoyó a Lomonósov, recibía en su casa y enseñó a jóvenes científicos que llegaban de Petersburgo, compraba instrumentos científicos, daba dictámenes.

Junto a la enorme cantidad de artículos L. Euler, en el período berlinés de su vida escribió una serie de monografías, en las cuales en forma sistemática expuso el estado actual de las ciencias matemáticas. En el año 1744 escribió un tratado sobre cálculo variacional, la nueva rama de la matemática descubierta por él. En el año 1748 salió a la luz la "Introducción al Análisis infinitesimal" y en el año 1755 el "Cálculo diferencial". Así fue iniciado el enorme trabajo de Euler para constituir en un sistema el análisis matemático que crecía en forma excepcional. Como una prologación de la "Mecánica" escrita en Petersburgo en el año 1765 se publicó la "Mecánica" dedicada al movimiento del cuerpo sólido.

Finalmente, Euler superó la resistencia del rey prusiano, superó la resistencia de Chumajer, el todopoderoso en aquella época secretario de la Academia de Petersburgo, y el grupo situado tras él, y en el año 1766 con toda su familia se trasladó a Petersburgo. Aquí fue rodeado de honores y pudo, según parecía, vivir tranquilamente y trabajar en calma. Además, la edad avanzada y la casi completa pérdida de la vista obligaban, al notable matemático, al reposo.

Pero la excepcional actividad científica de Euler continuó. En su segundo período peterburgués presentó en la Academia 416 libros y artículos más, dictándolos a sus alumnos. A la Academia no le daba tiempo a publicar los trabajos de Euler. Ellos se imprimieron en las ediciones de la Academia en el transcurso de 80 años después de su muerte (hasta el año 1862). Entre los trabajos de este período son particularmente numerosas las monografías, en las cuales se tratan como un sistema las diferentes ramas de las matemáticas y las disciplinas contiguas. En el curso de los años 1768—1770 salieron a la luz tres tomos del "Cálculo Integral", el cual incluía además de los métodos de integración de funciones la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales y además el cál-

culo variacional. En esos mismos años surgieron: un tratado en dos tomos sobre álgebra, una obra en tres tomos con carácter filosófico-naturalista, escrito en forma de "Cartas sobre diferentes materias físicas, y filosóficas, escritas a cierta princesa alemana". El segundo período peterburgués de la vida de Euler dio a la ciencia también otras grandes obras: la dióptrica en tres tomos, la nueva teoría del cálculo de la órbita de la luna (1772), la teoría de la construcción naval y navegación (1778) y otras.

La herencia científica de Euler es enorme. Por él fueron escritas más de 850 obras entre las cuales más de 40 son grandes monografías, frecuentemente en varios tomos. En la patria de Euler, en Suiza, se decidió en el año 1909 editar la colección completa de sus obras. Fue calculado que ello debía abarcar 72 enormes tomos de formato grande. Sin embargo, en el curso de 50 años salieron 42 tomos, y el material destinado a la publicación disminuyó apenas a la mitad. Además, en Leningrado, Berlín y en otras ciudades se conservan más de tres mil cartas de la correspondencia científica de Euler; muchas cartas son, en esencia, trabajos científicos. Ha sido publicado sólo una pequeña parte de esta correspondencia.

Los trabajos científicos de Euler abarcan prácticamente todas las matemáticas contemporáneas a él. En todas las ramas de las matemáticas hizo descubrimientos notables, que lo situaron en el primer lugar en el mundo. Euler fue capaz de comprender las matemáticas como un todo único, aunque enorme, en el cual llevó a un sistema las ramas más importantes y ante todo el Análisis con todas sus ramificaciones. Laplace indicó que Euler fue el maestro común de todos los matemáticos de la segunda mitad del siglo XVIII.

La actividad científica de Euler, en lo fundamental tuvo una orientación algorítmica. A la construcción de la teoría general llegaba partiendo de problemas concretos, los cuales tenían importancia práctica. En su herencia científica la práctica tiene un peso específico excepcionalmente grande. Aproximadamente el 40% de sus trabajos están dedicados a la matemática aplicada, la física, la mecánica, entre ella la mecánica celeste, la hidromecánica, la teoría de la elasticidad, la balística, la construcción naval, la teoría de máquinas, la óptica y otras. Los rasgos algorítmicos son propios aún de sus trabajos de apariencia puramente teórica. Particularmente esto se advierte en los trabajos sobre análisis infinitesimal, el cual en esencia se construye como el aparato matemático de la mecánica clásica y la física.

No hay posibilidad de enumerar, aunque sea los descubrimientos principales y los logros científicos de Euler. Ellos son demasiados. Caracterizarlos significaría prácticamente caracterizar toda la matemática del siglo XVIII. En los trabajos de Euler están contenidas una serie de ideas profundas, las cuales obtuvieron desarrollo ulterior sólo después de algunas decenas de años. Por ejemplo, parcialmente se adelantó a las investigaciones de

K. F. Gauss sobre la geometría interior de las superficies. En el año 1758 demostró el teorema sobre la característica topológica (euleriana) de los poliedros, iniciando la acumulación de hechos de topología. A él pertenece la primera utilización de los métodos del análisis en la resolución de problemas teórico-numéricos y la creación de la teoría analítica de los números. Los teoremas y fórmulas, los métodos y símbolos, que llevan el nombre de Euler frecuentemente se encuentran en la matemática también en nuestros días, ocupando en ella un lugar importante.

Muchos descubrimientos de Euler se redescubrieron después de su muerte por otros científicos. Especialmente numerosos son los redescubrimientos que se encuentran en la teoría de las ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, el problema sobre las vibraciones de una membrana circular Euler lo redujo, ya en el año 1766, a una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes variables. Ahora esta ecuación lleva el nombre de Bessel, matemático y astrónomo alemán del siglo XIX. A propósito, la solución dada por Euler a esta ecuación es una serie infinita que expresa funciones cilíndricas de primer género y cualquier orden (las funciones cilíndricas de orden cero aparecieron en las memorias de D. Bernoulli sobre las vibraciones de un hilo flexible fijo en un extremo). Ejemplos de tal tipo de redescubrimientos pueden citarse muchos.

Los méritos científicos de Euler y sus discípulos promovieron a la Academia de Ciencias de Petersburgo a uno de los primeros lugares del mundo. Rusia se convirtió en uno de los centros de las investigaciones matemáticas. La actividad pedagógica de Euler, de sus discípulos, la preparación de nuevos cuadros en las universidades: la Academia de Petersburgo (existió hasta el año 1783) y en especial en la de Moscú (organizada en el año 1755) crearon condiciones para una amplia ramificación de la red de los centros superiores de enseñanza en Rusia y el crecimiento de cuadros matemáticamente preparados en el siglo siguiente, XIX.

Pasemos a las características del desarrollo de las ciencias matemáticas por separado.

6.2. Transformación de los fundamentos del análisis infinitesimal

Aun en vida de I. Newton y G. W. Leibniz resultó evidente que los recién descubiertos cálculos de las fluxiones y diferenciales eran sólo el umbral de una nueva rama de las matemáticas, su parte elemental. El contenido del análisis infinitesimal (como se comenzó a llamar esta rama de las matemáticas) se completó de nuevos hechos de forma fantásticamente rápida. Las operaciones de diferenciación e integración resultaron aplicables a una clase cada vez más amplia de funciones. Correspondientemente se ampliaron las posibilidades de aplicación del análisis infinitesimal. A su

vez las exigencias prácticas obligaron a extender las operaciones del análisis a una clase rápidamente creciente de funciones. En esencia la dificultad más importante en el desarrollo del análisis infinitesimal era la necesidad de una idea de dependencias funcionales la cual permitiera aplicar a ellas las operaciones del nuevo cálculo. Por ello resultaba cada vez más necesario investigar el significado del concepto de función, dar la clasificación de todas las funciones conocidas y encontrar los medios de operar con ellas. El problema de la creación de la teoría de las funciones se convirtió en el primer problema o problema preliminar del análisis infinitesimal. Euler escribió que todo el análisis infinitesimal gira alrededor de las magnitudes variables y sus funciones.

Las monografías del siglo XVIII, dedicadas a la exposición sistemática del análisis reflejaron brillantemente esta particularidad de su desarrollo. En ellas, como regla, al cálculo diferencial e integral le antecedían introducciones especiales o incluso libros que contenían el análisis de funciones. El modelo típico y más acabado que siguieron los matemáticos del siglo XVIII es la serie de libros de L. Euler.

La vieja idea de la exposición sistemática de todas las matemáticas contemporáneas, que permitiera su asimilación como ciencia única, encontró en L. Euler su sucesor. Este comprendió que el crecimiento gigantesco de las matemáticas ya no permitía realizar esta idea en una obra. Por esto L. Euler escribió una serie de monografías las cuales reflejaban el estado actual de las diversas partes de las matemáticas. Al análisis infinitesimal le dedicó los siguientes libros: a) "Introducción al análisis infinitesimal", 2 tomos, editados en 1748; b) "Cálculo diferencial", 2 tomos, editados en 1755; c) "Cálculo integral", 3 tomos, editados en 1767—1770 (un cuarto tomo publicado en 1794 después de la muerte de L. Euler fue compuesto de una serie de sus trabajos).

Estas obras clásicas, sin ninguna sobrevaloración, reflejan el estado del análisis en el siglo XVIII y sirvieron de modelo para trabajos sucesivos análogos durante algunos decenios, prácticamente hasta comienzos del siglo siguiente XIX. El primer tomo de la "Introducción al análisis ..." Euler lo dedicó al estudio de las funciones, a su clasificación, propiedades, métodos de desarrollo de funciones en series y productos infinitos, en fracciones continuas y en suma de fracciones simples.

Análisis funcional. El concepto de función tiene dos aspectos: la función como correspondencia y como expresión analítica. La apreciación intuitiva de dependencia funcional como revelación de la relación causal de los fenómenos en diferentes modificaciones fue apropiada por la humanidad desde épocas remotas. Una gran historia tienen también los intentos por expresar estas dependencias con los recursos de las matemáticas. Uno de los primeros intentos fue el estudio por los antiguos matemáticos de los

lugares geométricos y la conformación de numerosas tablas. En lo sucesivo el conjunto de medios de expresión matemática de las funciones se fue enriqueciendo. En él se incluyó el aparato simbólico del análisis diofantino, las funciones algebraicas y trigonométricas, los logaritmos, y otros datos concretos sobre unas u otras funciones o clases de funciones.

La idea general de función como correspondencia de una naturaleza relativamente amplia fue recalcada por Descartes. Sin embargo, la posibilidad de operar con funciones inevitablemente se relacionaba con sus expresiones concretas: con los medios de la geometría o las expresiones analíticas simbólicas. I. Newton a esto añadió el tratamiento mecánico de la función en su teoría de las fluxiones. La parte operativa de esta teoría se basada, como se conoce, en los desarrollos de las funciones en series de potencias. A su vez, Leibniz expresó la idea general de dependencia funcional, introduciendo el término "función" y el símbolo correspondiente para todos los segmentos relacionados con la curva y tales que su longitud depende de la posición del punto sobre la curva (ordenadas, segmentos de tangentes, sub-tangentes, normales, subnormales).

Los éxitos prácticos del análisis infinitesimal impulsaron a los científicos a poner más atención a este tratamiento del concepto de función, el cual permitía la operabilidad con funciones concretas. Esta tendencia la expresó muy claramente en el año 1718 Jo. Bernoulli proponiendo considerar que una función es sencillamente una expresión analítica. En esta misma posición, predominante en aquella época, se situó también Euler, dando la siguiente definición de función: "Una función de una cantidad variable es una expresión analítica, compuesta de alguna manera por esta cantidad variable y números o cantidades constantes"¹⁾.

Para dar a esta definición la mayor posibilidad de generalidad, Euler admitía tanto valores reales como imaginarios del argumento. Una función conceptuada simplemente como una expresión analítica, se forma, según Euler, mediante una clase de operaciones admisibles en la cual entran las operaciones aritméticas, las potencias, raíces y soluciones de ecuaciones algebraicas. A ellas Euler adjuntó las funciones trascendentes elementales: e^z , $\ln z$ y las funciones trigonométricas. Finalmente, en la clase de operaciones admisibles fue incluida la integración.

La clasificación de las funciones se realiza en correspondencia con la definición de este concepto en lo fundamental por la forma de sus expresiones simbólicas (ver fig. 45). Euler complementó este principio de clasificación de las funciones según sus propiedades. Así introdujo las funciones

¹⁾ Л. Эйлер. Введение в анализ бесконечно малых, т. 1. М., Физматгиз, 1961, стр. 5. (L. Euler. Introducción al análisis infinitesimal).

unívocas y multiformes, pares e impares y mostró cuáles eran los criterios simbólicos de la presencia o ausencia de una u otra propiedad, formuló el criterio de determinación de cuáles de las propiedades de las funciones se conservan durante la realización de una y otra operación y cuáles no se

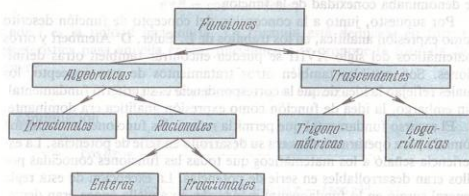


Fig. 45

conservan. La clasificación de las funciones de Euler significó una nueva etapa en la asimilación de este concepto, distinguiéndose por su generalidad comparativamente grande. Sin embargo, el relegar a un segundo plano el concepto general de función como correspondencia, apoyándose únicamente en la práctica analítico-operativa determinaron la limitación en la comprensión del concepto de función incluso por Euler.

Todas las funciones las considera como representadas por una serie de potencias:

$$f(z) \sim a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \dots$$

(donde z , en términos generales, es complejo). Consecuentemente, la representación sobre todas las funciones estaba en esencia limitada a la clase de las funciones analíticas. Tal equívoco es totalmente explicable. Mucho más tarde se aclaró que por cuanto al argumento se aplican sólo operaciones de la clase indicada antes, entonces como resultado también se obtendrán solamente funciones analíticas en todas partes, excepto, pudiera ser, en puntos singulares aislados, además el carácter analítico se conserva también en el entorno tan pequeño como se quiera de estos puntos donde la función admite un desarrollo en serie de potencias generalizadas. El comportamiento de una función en una pequeña región determina, según Euler, su comportamiento global, lo cual evidencia la existencia en él, en aquel entonces, de la idea de prolongación analítica.

De esta misma definición de función como expresión analítica, surgió una definición especial de continuidad. Una función se consideraba conti-

na si se daba en todo su dominio de existencia por una única expresión analítica. Así, resultaban continuas las funciones $y = \frac{1}{x}$, $y = \operatorname{tg}x$, etc. La propiedad de continuidad de una función en el sentido usual para nosotros se denominaba conexidad de la función.

Por supuesto, junto a la concepción del concepto de función descrito como expresión analítica, en los trabajos de L. Euler, D' Alembert y otros matemáticos del siglo XVIII se pueden encontrar también otras definiciones. Son posibles también otros tratamientos de este concepto, los cuales reflejan la idea de que la correspondencia es su criterio fundamental. Sin embargo, la idea de función como expresión analítica era dominante.

El recurso fundamental que permitía reducir las funciones a una forma cómoda para operar con ellas era su desarrollo en serie de potencias. La experiencia señaló a los matemáticos que todas las funciones conocidas por ellos eran desarrollables en serie de potencias. La excepción de esta regla general surgió en lo fundamental más tarde; en aquella época eran demasiado poco numerosas para cambiar la idea formada y esencialmente influir en la estructura de la teoría de las funciones. Por eso, después de la clasificación de funciones y la introducción de los conceptos fundamentales en la teoría de las funciones del siglo XVIII, inmediatamente siguen los apartados de carácter operativo, donde se incluyen los métodos de desarrollo de funciones en series y las propiedades de las últimas.

En su "Introducción al análisis" Euler elaboró un aparato multifacético de estudio de las funciones con ayuda de las series de potencias. Ahí, él estudió sucesivamente las clases de funciones: racionales, racionales fraccionales, irracionales, donde es particularmente interesante el sistema de sustituciones ingeniosas que eliminan la irracionalidad. A continuación siguen los métodos de desarrollo en serie de las funciones exponenciales y logarítmicas. Aquí se introduce por vez primera y se aclara totalmente la definición de logaritmo de un número positivo como el exponente al cual hay que elevar la potencia cuya base es la elegida para que dé el número prefijado: si $a^x = N$, entonces $x = \log_a N$. A continuación se deduce la fórmula:

$$e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i,$$

la cual en un simbolismo posterior se escribe

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

(aquí, según Euler, i es un número infinitamente grande. El símbolo i es la letra inicial de la palabra infinite).

Las funciones trigonométricas también se introducen analíticamente. Sus definiciones ya no se relacionan tan estrechamente con la forma geométrica del círculo. Como resultado de la investigación de sus propiedades se deduce la fórmula de Euler

$$e^{\pm iv} = \cos v \pm i \operatorname{sen} v,$$

donde i es la unidad imaginaria. La fórmula está deducida en forma característica para aquella época: inicialmente se propone la fórmula de Moivre:

$$(\cos z \pm i \operatorname{sen} z)^n = \cos nz \pm i \operatorname{sen} nz,$$

y a continuación

$$\begin{aligned} \cos nz &= \frac{(\cos z + i \operatorname{sen} z)^n + (\cos z - i \operatorname{sen} z)^n}{2}, \\ \operatorname{sen} nz &= \frac{(\cos z + i \operatorname{sen} z)^n - (\cos z - i \operatorname{sen} z)^n}{2i}. \end{aligned}$$

Tomando z como infinitesimal, n como infinitamente grande, además, las relaciones entre z y n son tales que su producto es finito: $nz = v$ y además, que

$$\cos z \rightarrow 1, \operatorname{sen} z \rightarrow z = \frac{v}{n},$$

Euler encuentra

$$\begin{aligned} \cos v &= \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2}, \\ \operatorname{sen} v &= \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i}. \end{aligned}$$

De donde se deduce la fórmula buscada:

$$e^{iv} = \cos v + i \operatorname{sen} v.$$

Además, del desarrollo de funciones en serie, Euler elaboró el método de representación de funciones en productos infinitos como, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= z \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right) \dots \\ \operatorname{cos} z &= z \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{4z^2}{9\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{4z^2}{25\pi^2}\right) \dots \end{aligned}$$

Estos desarrollos fueron utilizados para la simplificación de los cálculos de los logaritmos de las funciones trigonométricas.

Para las necesidades del cálculo integral en la teoría de funciones fueron coleccionados métodos de representación de funciones en forma de suma de fracciones elementales. Finalmente, para el estudio de las propiedades de las funciones Euler aplicó el aparato de las fracciones continuas. Fueron descubiertos también muchos hechos útiles para la futura teoría de funciones de variable compleja. Por ejemplo, D'Alembert y Euler en trabajos sobre hidrodinámica mostraron que estas funciones tienen la forma $w = u + iv$ y que las partes real e imaginaria de tales funciones satisfacen las condiciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

D'Alembert en el año 1752 y Euler en 1755 mostraron que estas condiciones son suficientes para el carácter analítico de la función w . Más tarde (en el año 1777) Euler demostró también la necesidad de estas condiciones, actualmente en algunos libros erróneamente llevan el nombre de condiciones de Cauchy—Riemann.

En el transcurso de los años 30—40 del siglo XVIII, en lo fundamental gracias a Euler, fue elaborada y sistematizada la teoría de las funciones elementales analíticas. Ella inmediatamente arrastró consigo un flujo de descubrimientos, acompañados de grandes y apasionadas discusiones. Especialmente numerosas discusiones provocó el tratamiento de las funciones de argumento complejo.

Gran significado tuvo en este plan la discusión sobre la naturaleza de los logaritmos de los números complejos, comenzada ya con Leibniz y Jo. Bernoulli. El primero afirmaba que estos números son imaginarios, mientras que Jo. Bernoulli mantenía la afirmación que estos números eran reales. En el año 1749 Euler resolvió correctamente esta cuestión. Euler advirtió que los valores de $y = \ln x$ se determinan de la igualdad

$$x = e^y = \left(1 + \frac{y}{i}\right)^i, \quad i = \infty.$$

De aquí

$$x^i = 1 + \frac{y}{i}; \quad y = i(x^i - 1),$$

lo que en notaciones contemporáneas corresponde a:

$$y = \ln x = \lim_{n \rightarrow \infty} n(x^{1/n} - 1)$$

Ya que x^n , esto es, "una raíz con índice infinitamente grande", continúa Euler, tiene infinitos valores diferentes, en general imaginarios, entonces el logaritmo tiene un infinito número de valores, en general imaginarios. Sin embargo, las discusiones no se aplacaron, ya que no estaba claro su fundamento: la esencia del concepto de número complejo. Regresaremos a esta cuestión otra vez con la exposición de la historia de la teoría de funciones de variable compleja.

La incertidumbre existía también en la cuestión sobre la correlación del volumen de las clases de funciones analíticas y expresables analíticamente. Euler, como se dijo antes, las consideraba equivalentes; cada expresión analítica es representable por una serie. Esta convicción la compartían la aplastante mayoría de matemáticos del siglo XVIII. Incluso en el año 1797 Lagrange intentó construir la teoría de las funciones analíticas, apoyándose en la afirmación de que cada función para todos los valores del argumento, excepto quizás para valores aislados del argumento, puede representarse por una serie de Taylor.

La reserva acopiada de ideas sobre las formas de expresión de las dependencias funcionales comenzó a entrar, sin embargo, en contradicción con esta concepción. Euler se vio obligado a considerar también clases de funciones más generales, como se indicó antes. Así, a él pertenece la idea de considerar funciones expresadas geoméricamente mediante líneas dibujadas por un movimiento libre de la mano. Entonces resultó inevitable el problema sobre la correlación del volumen de la clase dada y la clase de las funciones continuas (en el sentido de Euler). Euler consideraba que la última clase aparentemente era más pobre, ya que la existencia de una fórmula analítica determinaría una prolongación analítica unívoca. Las funciones formadas por un movimiento libre de la mano no tienen esta condición limitadora.

Como impulso para la consideración de los problemas señalados sirvieron los problemas de la física-matemática, en especial el problema sobre la vibración de la cuerda. A este problema, en principio importante, prestaron gran atención aún en el siglo XVII muchos científicos: Galilei, Mersenne, Descartes, Huygens y otros.

En el año 1715 Taylor dedujo las ecuaciones de la oscilación de una cuerda a partir de la condición de que la aceleración de un punto de la cuerda, o sea, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, es inversamente proporcional al radio de curvatura.

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

Para pequeñas oscilaciones esto da

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Taylor impuso al problema una condición más de que todos los puntos de la cuerda vibrante regresan simultáneamente al eje de las abscisas. Esto le dio la posibilidad de afirmar que $\rho = \frac{b^2}{y}$. Entonces

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -b^2 y; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -(ab)^2 y.$$

Tomando, además, el eje de abscisas como posición inicial de la cuerda, los extremos de la cual están fijos, Taylor encontró la solución de la ecuación en la forma

$$y = A \text{ sen } bx \cdot \text{sen } abt.$$

En el año 1747 D'Alembert encontró la integral general de esta ecuación. Sea dada la ecuación:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Después de sustituir $at = \tau$ toma la forma

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

ó

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial y}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right),$$

es decir,

$$\frac{\partial y}{\partial x} d\tau + \frac{\partial y}{\partial \tau} dx = du$$

es una diferencial total.

Denotemos

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = p, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = q.$$

Entonces

$$du = qd\tau + pdx, \\ dy = pd\tau + qdx,$$

de donde

$$d(y + u) = (p + q)d(\tau + x),$$

$$d(y - u) = (p - q)d(\tau - x).$$

Y, por consiguiente,

$$y + u = 2\varphi(at + x),$$

$$y - u = 2\psi(at - x),$$

$$y = \varphi(at + x) + \psi(at - x).$$

Aquí φ y ψ son funciones arbitrarias determinadas sólo por las condiciones iniciales.

De la condición de fijación de los extremos $y|_{x=0} = 0 = D'Alembert$ dedujo:

$$y = \varphi(at + x) - \varphi(at - x);$$

$$\varphi(z + 2l) = \varphi(z).$$

Con ello, consideró como sobreentendido que la función era continua en el sentido del siglo XVIII, esto es, analítica y, por lo tanto, diferenciable.

Un año después del trabajo de D'Alembert (publicado en el año 1750), Euler introdujo la idea de que la posición de una cuerda vibrante finita en cualquier instante de tiempo t_0 está determinada si se da su posición inicial $y|_{t=0} = f(x)$ y la distribución inicial de velocidades $\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x)$. Entonces la función $\varphi(x)$ introducida en la resolución dada por D'Alembert, se expresa a través de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Precisamente

$$\varphi(x) - \varphi(-x) = f(x),$$

$$\varphi(x) + \varphi(-x) = \frac{1}{a} \int g(x) dx$$

(para obtener esta expresión, en la condición

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a\varphi'(at + x) - a\varphi'(at - x) = g(x)$$

ponemos $t = 0$ e integramos ambas partes de la igualdad).

Pero como advierte Euler, las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en general no son continuas, sino de enlace. Esto está condicionado por las exigencias de continuidad de la cuerda. Por consiguiente, la función arbitraria $y = \varphi(x)$ introducida por D'Alembert no es, en general, continua.

Alrededor del problema de la determinación de la naturaleza de la función $\varphi(x)$ se encendieron las discusiones que se extendieron alrededor de 50

años. Estas atrajeron a muchos grandes científicos del siglo XVIII. La discusión, como ocurre frecuentemente, sobrepasó sus propias fronteras. Se convirtió en discusión sobre la naturaleza de las funciones que entran en la composición de las integrales de las ecuaciones en derivadas parciales y a continuación, en general, sobre la correlación entre las propiedades internas de las funciones y el carácter del aparato analítico que las expresa. Entre el conjunto de problemas surgidos en relación con éste, permaneció durante largo tiempo no resuelto un viejo problema: son o no las líneas de enlace, trazadas por un movimiento libre de la mano, continuas, más exactamente, expresables analíticamente.

Resolver este problema resultó posible, sólo enriqueciendo los medios de expresión analítica de las funciones. Estos caminos ya se advertían en el siglo XVIII como resultado de la introducción en las matemáticas del aparato de las series trigonométricas. En uno de sus 15 artículos dedicados al problema de la vibración de la cuerda, Euler le dio solución a uno de los casos particulares en la forma de serie trigonométrica. Cinco años después, en 1753 D. Bernoulli propuso la solución general en forma análoga, partiendo de las consideraciones físicas, que el sonido producido por una cuerda vibrante es la suma de un tono fundamental y un conjunto infinito de otros tonos. Más precisamente:

$$y = \alpha \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} + \beta \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{l} + \gamma \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{l} + \dots$$

(l es la longitud de la cuerda, $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, $\gamma = \gamma(t)$, ...).

Sin embargo, Euler se expresó contra tal tratamiento de la solución general, ya que según su criterio, la función propuesta por D. Bernoulli no era lo suficientemente general. En realidad, es continua, impar, periódica. Por eso, según Euler, ella podía sólo expresar una solución particular, y en caso extremo, una clase de soluciones particulares. La discusión surgida condujo al problema: aclarar el contenido de la clase de las funciones representables mediante series trigonométricas.

El ulterior desarrollo del concepto de función, la composición de la teoría de funciones y su lugar en el sistema del análisis matemático sale de los marcos del siglo XVIII. Sin embargo, para no regresar a esto más adelante, expongamos en rasgos fundamentales su historia posterior.

En el año 1807 (publicado en 1822) Fourier en los trabajos sobre teoría analítica del calor demostró que las líneas de enlace dadas en segmentos finitos por ecuaciones diferentes son representadas en cualquiera de estos segmentos por una serie

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx),$$

donde los coeficientes son expresiones que obtuvieron posteriormente la denominación de coeficientes de Fourier:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx.$$

Todas las curvas eulerianas de enlace trazadas por un movimiento libre de la mano, resultaron abarcales por el aparato analítico de las series trigonométricas. La disparidad de las ideas generales sobre dependencia funcional y los limitados recursos analíticos de su expresión resultó suavizada. Se crearon las condiciones para el tratamiento de las funciones como correspondencia de tipo muy general. Enseguida tales tratamientos se convirtieron en predominantes. Así, en el año 1810, Lacroix escribió: "Cada cantidad, el valor de la cual depende de uno a varias cantidades, se denomina función de estas últimas independientemente de que sepamos o no por qué operaciones es necesario atravesar para pasar de estas últimas a la primera"¹⁾.

Una definición análoga está dada en "La teoría analítica del calor" de Fourier: "La función $f(x)$ designa una función completamente arbitraria, es decir, una sucesión de valores dados subordinados o no a una ley general y correspondientemente a todos los valores de x , comprendidos entre cero y cualquier magnitud x "²⁾. Lobachevski en el año 1834 afirmó: "El concepto general exige llamar función de x a un número, el cual se da para cada x y paulatinamente varía junto con x . El valor de la función puede estar dado o por una expresión analítica, o por una condición, la cual ofrece el medio de expresar todos los números y elegir a uno de ellos o, por último, la dependencia puede existir y quedarse desconocida... Una mirada amplia a la teoría advierte la existencia de dependencia sólo en el sentido de que los números relacionados unos con otros sean comprendidos como dados conjuntamente"³⁾. Un tratamiento análogo del concepto de función dieron en 1837 Dirichlet y otros científicos, convirtiéndose en el aceptado por todos.

¹⁾ S. F. Lacroix. *Traité du calcul différentielle et du calcul integral*, t. I, Paris, 1810, p. 1.

²⁾ J. B. Fourier. *Théorie analytique de chaleur*, Paris, 1835, p. 5.

³⁾ Н.И. Лобачевский. Об именовании тригонометрических строк. *Собр. соч.* М.—Л. Гостехиздат, 1951, стр. 43. (N.I. Lobachevski. Sobre la desaparición de líneas trigonométricas.)

Sin embargo, enseguida se advirtió que tampoco las series de Fourier son el aparato universal de representación de funciones. En todos los casos la convergencia de las series de Fourier, relativas a las funciones continuas, además de la continuidad, exigía el cumplimiento de condiciones complementarias: finitud de la derivada, acotación de la variación de la función, monotonía a trozos, existencia de cierta integral, cumplimiento de una desigualdad, etc. P. Du Bois-Reymond en 1876 mostró que era imposible liberarse de las condiciones complementarias y limitarse sólo a la prioridad de continuidad de la función. Así construyó un ejemplo de función continua, cuya serie de Fourier diverge en algunos puntos.

En la construcción de este ejemplo Du Bois-Reymond utilizó el método de acumulación de las singularidades en la construcción de la función, método conocido desde Bolzano. La aplicación sistemática de este método mostró que podía construirse una función continua $\Phi(x)$, periódica en el segmento $[0, 2\pi]$, con acumulación de las singularidades en cualquier punto. Correspondientemente la serie de Fourier divergerá en cualquier punto del segmento indicado. Nuevamente se formó una ruptura entre el arsenal de los recursos de expresión analítica de las funciones y el tratamiento general del concepto de función¹⁾. Hablando en términos generales, de nuevo resultaron más curvas que fórmulas.

La cuestión se complicó aún más hacia finales del siglo XIX cuando el concepto de curva adquirió más abstracción y generalidad que antes. En los años 70 del siglo XIX, G. Cantor construyó el concepto general de curva con los recursos de la teoría de conjuntos²⁾. Una curva plana fue definida por Cantor como un conjunto de puntos del plano, conexo, o sea, sin puntos aislados, enteramente, es decir, cerrado (conteniendo todos sus puntos límites), y por todas partes denso en sí (cualquiera de sus puntos es límite). Sin embargo, esto era un conjunto nunca denso en el plano (no tiene puntos interiores). La construcción de Cantor, naturalmente, fue críticamente recibida por algunos matemáticos, ya que desviaba hacia un lado la posibilidad de utilizar el aparato analítico en formación.

¹⁾ La teoría de las series de Fourier y en general de las series trigonométricas a su vez recibió potentes estímulos de desarrollo, los cuales la condujeron a su estado actual. Se incluyeron los criterios generales de convergencia (comenzando desde los trabajos de Dirichlet, 1837), los conceptos de carácter teórico-conjuntista (G. Cantor desde 1872), de medida e integral (Riemann y en especial Lebesgue, 1902—1906). En el primer cuarto del siglo XX se incluyeron los grandiosos resultados de Danjoi, Luzin, Menshov, Bari y otros. La historia de esta disciplina matemática es muy rica en hechos, pero contiene todavía muchos problemas no resueltos.

²⁾ A la construcción de la teoría de conjuntos, Cantor llegó partiendo precisamente de las investigaciones relativas a la representación de funciones en series trigonométricas.

Esta insuficiencia parecía eliminarse con la definición de curva de C. Jordan, dada en el año 1882: una curva plana es el conjunto de puntos del plano, cuyas coordenadas están dadas por las ecuaciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, la parte derecha de las cuales son funciones continuas del parámetro t en cierto segmento $[t_0, T]$. Las curvas de Jordan resultaron muy heterogéneas y frecuentemente muy complejas. La aplicación de los algoritmos de cálculo a las curvas de esta clase se dificultó aún más cuando en el año 1890 Peano descubrió que existen curvas de Jordan, las cuales pueden llenar totalmente todos los puntos interiores de cierto cuadrado. Sólo clases particulares de estas curvas tienen una estructura comparativamente simple. Por ejemplo, cuando existen las derivadas continuas $x'(t)$ y $y'(t)$, entonces, la curva es una línea que tiene longitud

$$l = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

No obstante la posibilidad para operar algorítmicamente con las funciones, incluso de naturaleza tan general, como resultó, se conservaban. Sólo ahora ellas se apoyaban en la idea general de aproximación de las funciones de su reproducción aproximada. Los métodos de aproximación, como es conocido, son disímiles. El papel determinante en el establecimiento de esta idea lo jugaron los resultados de Weierstrass. Este demostró en el año 1855 que cualquier función $f(x)$, continua en $[a, b]$, es expresable analíticamente en él como la suma de una serie uniformemente convergente

$$\text{de polinomios algebraicos enteros: } \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x).$$

El análisis matemático del siglo XVIII, en particular aquella parte que denominamos análisis de funciones, sirvió de fuente a muchas ideas de la actual teoría de funciones. En ella fueron creadas las premisas para la teoría de funciones de variable compleja. Como veremos más adelante, la clase de los problemas variacionales condujo a la creación del cálculo de variaciones y el surgimiento de una serie de elementos del análisis funcional contemporáneo. La aclaración del amplio sentido del concepto de función como correspondencia causal de naturaleza general se desarrolló en lo sucesivo en la concepción teórico-conjuntista de este concepto. El análisis de todas las posibles clases de funciones y sus propiedades resultó una condición necesaria para el surgimiento de la actual teoría constructiva de funciones.

La historia antes expuesta del desarrollo del concepto de función en el siglo XVIII y posteriormente, estaría incompleta si no señaláramos que en este periodo, junto al enriquecimiento del análisis de funciones, cambió su papel utilitario. De introducción al análisis, se transformó en una de sus ra-

mas superiores, la teoría de funciones. Las propiedades de las funciones elementales entraron a formar parte en los cálculos operativos, diferencial e integral. El lugar introductorio en el análisis lo ocupó la teoría del número real y la teoría de límites.

Problema de la fundamentación del análisis infinitesimal. Los trabajos sobre las cuestiones de la fundamentación del análisis, surgidos en el transcurso del siglo XVIII son tan numerosos que constituyen una gran rama independiente de la literatura matemática en general.

Uno de los rasgos más característicos del análisis infinitesimal en el siglo XVIII era la poca claridad de sus conceptos primarios, la imposibilidad de explicar racionalmente la validez de las operaciones introducidas. Las ideas de los creadores del análisis en esta materia no se distinguían ni por su constancia ni por su determinación. Tanto Newton como Leibniz llevaron a cabo un conjunto de intentos de explicar sus cálculos, sin lograr éxito. Sus más cercanos seguidores sólo aumentaron la confusión. Los éxitos prácticos del análisis infinitesimal, aumentaron la contradicción con los poco claros e inestables fundamentos. El análisis infinitesimal sobrevivió, según definición de K. Marx, un período místico de su desarrollo.

La vulnerabilidad de tal situación enseguida se dio a conocer. Al análisis infinitesimal le surgieron enemigos, los cuales pusieron en duda o negaron sus métodos, resultados y en especial el tratamiento de sus conceptos fundamentales. Los partidarios podían contraponer a estas objeciones sólo la acumulación de importantes resultados prácticos. K. Marx al respecto, escribió: "Así, ellos mismos creían en el carácter misterioso del cálculo recién descubierto, el cual daba resultados correctos (y, además, sorprendentes en su aplicación geométrica) y matemáticamente positivos por una vía incorrecta. De este modo, ellos mismos se mistificaban y cuanto más valoraban el nuevo descubrimiento, tanto más enfurecían la multitud de viejos matemáticos ortodoxos, y provocaban por parte de ellos gritos enemistosos, obteniendo repercusión incluso en el mundo de los no especialistas, lo que era necesario para el trazado del camino hacia lo nuevo".¹⁾

Un papel notable en las intervenciones enemistosas contra el análisis infinitesimal perteneció al obispo irlandés, eminente filósofo-idealista G. Berkeley, el cual se preocupaba por el fortalecimiento de las posiciones de la religión, quebrantada bajo la influencia de los éxitos grandiosos de las ciencias naturales. Junto a otras obras de carácter filosófico, donde defendía las posiciones del idealismo subjetivo, Berkeley editó en el año 1734 el tratado "El analista o el razonamiento dirigido a un matemático no creyente" en el cual se esforzaba en demostrar que el análisis (como

¹⁾ К. Маркс. Математическое рукописи. М., «Наука», 1968, стр. 169. (K. Marx. Manuscripts matemáticas.)

todas las ramas de la ciencia) tiene una fundamentación no mayor que los dogmas de la teología.

Los argumentos críticos de Berkeley fueron característicos para el idealista subjetivo. Ellos constaban de afirmaciones sobre la inconsistencia sensorial-intuitiva, la incomprensibilidad del concepto de flujiones y los métodos de su constitución sucesiva y, además, sobre las contradicciones lógicas en las proposiciones de Newton relativas a los fundamentos del análisis.

Surgió una viva polémica capaz de, en última instancia, aclarar las cuestiones en discusión. Esta no entraba en los cálculos de Berkeley y enseñanza se separó de este tema específico, sin cambiar sus concepciones generales. Sin embargo, la reconsideración crítica del problema de la fundamentación del análisis infinitesimal continuó en el ámbito de los matemáticos con gran intensidad. Era algo agudamente necesario.

La primera reacción de los matemáticos ingleses (Jurin, Robins, Pimberton, Maclaurin y otros) fue la defensa de la teoría de las flujiones y la autoridad de Newton. Ellos comentaron sus trabajos e introdujeron perfeccionamientos parciales. Además, fueron expresadas no pocas ideas útiles. Así, por ejemplo, se dedicó atención a un tratamiento correcto del concepto de límite de una magnitud variable. Sin embargo, este camino resultó, como era de esperar, históricamente infructuoso.

Los más notables matemáticos, que se ocuparon a mediados del siglo XVIII del problema de la fundamentación del análisis infinitesimal, veían su objetivo, por ahora, sólo en la racionalización de sus fundamentos, en la eliminación de las lagunas, la falta de claridad, los matices místicos. Entre los numerosos esfuerzos de este período, el cual K. Marx denominó racional, se destacan especialmente las teorías de Euler y D'Alembert.

Para Euler y sus continuadores (Torelli y otros) el cálculo diferencial de Leibniz no debía tratarse como cálculo de diferenciales, acompañado de la eliminación de los infinitesimales. Según Euler el cálculo diferencial es un método de determinación de la razón de incrementos esfumantes que son obtenidos por las funciones, cuando a sus argumentos se les da un incremento esfumante. El concepto fundamental aquí no es el diferencial, sino la derivada. En lo que se refiere a los infinitesimales o diferenciales, ellos son simplemente ceros exactos. Las derivadas, por consiguiente, tienen la forma $\frac{0}{0}$; se requiere sólo elegir aquel valor al cual tiende (se aproxima)

la razón entre las diferencias finitas $\Delta y = y_1 - y$ y $\Delta x = x_1 - x$, al ir disminuyéndolas cada una hasta cero.

La teoría de los ceros de Euler no pudo ser reconocida como satisfactoria. Ella sólo enmascaraba los pasos reales al límite, los cuales prácticamente se llevaban a cabo en la diferenciación de funciones. Además de es-

to, los diferenciales declarados como nulos aparecieron enseguida en el mismo Euler en forma de partes lineales principales del incremento de las funciones. Sin ellos resultaba imposible continuar.

La teoría de D'Alembert también surgió en el terreno de la reconsideración crítica de la herencia de Newton y Leibniz para la revelación de su esencia racional. Esta reconsideración obligó a D'Alembert a dar preferencia al método de las primeras y últimas relaciones de Newton. Este método D'Alembert lo desarrolló dándole la forma de método de los límites. Este consideró que una magnitud es el límite de otra magnitud, si la segunda puede estar más próxima a la primera que cualquier magnitud dada, por pequeña que sea esta última, además, la magnitud aproximante no puede nunca superar a la magnitud que se aproxima.

De aquí se ve que las variables, según D'Alembert, son monótonas y el límite unilateral. Además, para evitar las operaciones con ceros, D'Alembert introdujo la exigencia de que los límites no coincidan con ningún valor de la variable.

El cálculo de derivadas, según D'Alembert, consta de las siguientes operaciones: al argumento variable x se le da un incremento finito Δx ; la función $y = f(x)$ recibe como consecuencia de esto un incremento finito Δy ; se realiza la relación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y se simplifica; finalmente se pone $\Delta x = 0$. Semejante método se fundamenta de hecho en la suposición de que el desarrollo $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ en serie según potencias de Δx es ya conocido, lo que en esencia es equivalente a la afirmación que se ha encontrado la propia derivada y a ella sólo resta liberarla de lo circundante, según expresión de K. Marx.

La teoría de los límites tuvo muchos continuadores. En el año 1786 el suizo L'Huilier venció en un concurso convocado por la Academia de Ciencias de Berlín (el presidente de la cual era Lagrange) sobre el tema referente a la claridad y exactitud de la teoría de las magnitudes matemáticas infinitamente grandes e infinitamente pequeñas. Su obra "Exposición elemental de los principios de los cálculos superiores" estaba construida sobre la base de la teoría de los límites. En ella la derivada $\frac{dy}{dx}$ se introducía como

un símbolo de la expresión $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Apasionados partidarios y propagandistas del método de los límites fue el académico peterburgués S. E. Guriev y sus seguidores P. A. Rajmánov y el académico V. I. Viskóvátov.

Sin embargo, la teoría de los límites del siglo XVIII no obtuvo el reconocimiento de la mayoría de sus contemporáneos. La causa principal de es-

to fue el carácter no algorítmico inherente orgánicamente al concepto de límite. "Al método de los límites — escribía en el año 1797 L. Carnot — es propia una seria dificultad, que no tiene lugar en el análisis infinitesimal: precisamente, en él es imposible, como en este último, separar las cantidades infinitesimales unas de otras y como las cantidades en él siempre están relacionadas unas con otras, entonces no es posible ni utilizar en los cálculos las propiedades pertenecientes a cada una de ellas por separado ni someter las ecuaciones en las cuales ellas se encuentran a transformaciones capaces de excluirlas"¹⁾. La definición de límite como el límite unilateral no alcanzable de una sucesión monótona era insuficiente, no desarrollada. Ella aun debía desarrollarse en el concepto de límite de una función, liberándose de semejantes limitaciones. Finalmente, la teoría de los límites aun no incluía el concepto de convergencia de sucesiones y lo que aún es más importante, el criterio de esta convergencia, introducido sólo en la primera mitad del siglo XIX por Cauchy y Bolzano. En resumidas cuentas, esta teoría, para convertirse en generalmente reconocida y utilizada debía aparte del rigor para aclarar el sentido de los conceptos fundamentales del análisis, adquirir un aparato algorítmico.

Por eso no es asombroso que hacia la segunda mitad del siglo XVIII apareciera otra concepción más para fundamentar el análisis, denominada por K. Marx algebraica. Su esencia consistía en situar en la base del análisis el concepto de derivada, cuya definición incluiría un método efectivo para su búsqueda, el cual no se apoyaría en los conceptos nebulosos de infinitesimales, límites, etc. La operación de diferenciación, según esta concepción, se debería sustituir por el método algebraico o cualquier otro algoritmo especial.

Por lo visto, los primeros trabajos en el campo del cálculo diferencial algebraico surgieron en Inglaterra. En el año 1748 se publicó el "Estudio sobre las últimas relaciones" de John Kirkby, sin éxito e inmediatamente olvidado. Al cabo de varios años John Landen desarrolló en dos trabajos (1758—1764) el "análisis residual". En el último se consideran las expresiones de la forma $\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$. El valor de tal expresión cuando $x_1 = x$ Landen lo denominó "valor especial" o "relación residual" e introdujo para éste el símbolo $[x/y]$. La búsqueda del "valor especial" para las funciones algebraicas elementales en el "análisis residual" se apoyaba en el

¹⁾ Л. Карно. Размышления о физике бесконечно малых. М., ГТТИ, 1933, стр. 199. (L. Carnot. Reflexiones acerca de la física de las infinitesimales.)

teorema

$$\frac{x^{m/n} - v^{m/n}}{x - v} = x^{m/n-1} + \frac{v}{x} + \left(\frac{v}{x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{v}{x}\right)^{m-1}$$

$$1 + \left(\frac{v}{x}\right)^{\frac{m}{n}} + \left(\frac{v}{x}\right)^{\frac{2m}{n}} + \dots + \left(\frac{v}{x}\right)^{(n-1)\frac{m}{n}}$$

Cuando $v = x$ se obtiene el valor de la derivada para $y = x^{\frac{m}{n}}$:

$$y' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

Los razonamientos de Landen, así como de otros partidarios de la fundamentación algebraica del análisis, en esencia se apoyaban en la evidencia del desarrollo de funciones en serie. Sus métodos algebraicos eran adecuados realmente sólo para las funciones polinomiales. La extensión de estos métodos, incluso a la clase de funciones analíticas está vinculada con dificultades, que sus autores no pudieron superar (extensión a las series infinitas de las propiedades de las sumas finitas, representación de funciones mediante series de potencias, etc.).

El trabajo más serio, que reveló la posibilidad total del cálculo diferencial algebraico y que determinó su destino, fue el gran trabajo de Lagrange "Teoría de las funciones analíticas, que contiene los principios del cálculo diferencial, liberados de cualquier consideración de infinitesimales o límites que desaparecen y de fluxiones, reducidos al análisis algebraico de las cantidades infinitas" (1797). Su punto de partida y central fue el esfuerzo por demostrar el teorema de que cada función $y = f(x + h)$ casi en todas partes (posiblemente con excepción de valores aislados del argumento) es desarrollable en serie de potencias

$$f(x + h) = f(x) + ph + qh^2 + rh^3 + \dots$$

Lagrange construyó la demostración de tal forma que exceptuó todos los casos singulares (posibilidad de aparición de términos del desarrollo con potencias negativas o fraccionarias de h , etc.). Así mismo, eligió para la investigación la clase de las funciones analíticas, dejando las restantes funciones como excepciones. Esto fue advertido más tarde por Weierstrass, según iniciativa del cual para las funciones representables por series de potencias se conservó la denominación de *analíticas*. Las series de potencias Lagrange las utilizó para la aproximación de funciones por polinomios, apoyándose en que para todos h suficientemente pequeños cada término del desarrollo será mayor que la suma de los que le siguen. Además



J. L. Lagrange (1736—1813)

dedujo, para funciones concretas, la fórmula del resto e hizo uso del teorema del valor medio.

Las derivadas sucesivas fueron definidas por Lagrange como los coeficientes de las potencias sucesivas de h con exactitud hasta de coeficientes numéricos correspondientes. La exposición sucesiva del cálculo diferencial fue realizada por Lagrange en esta misma obra.

De esta forma, el cálculo diferencial, según idea de Lagrange, debería ser una parte del álgebra, diferenciada sólo por los algoritmos específicos. "El álgebra no es otra cosa que la teoría de funciones. En el álgebra las cantidades buscadas deben ser funciones de cantidades dadas, es decir, expresiones representadas por diferentes operaciones, las cuales es necesario realizar con estas cantidades para obtener los valores buscados. En el álgebra, en el sentido propio de la palabra, se consideran sólo funciones elementales, procedentes de las operaciones algebraicas usuales; esta es la primera rama de la teoría de funciones. En la segunda rama se consideran las

derivadas de las funciones y esta es la rama que llamamos simplemente "Teoría de las funciones analíticas" y la cual contiene todo lo relativo al nuevo cálculo¹⁾, así aclaraba su idea Lagrange.

Sin embargo, enseguida se aclaró (y Cauchy jugó en esto el papel principal) que la teoría de Lagrange no era correcta. El teorema fundamental sobre el desarrollo de funciones en serie, en esencia, se apoyaba en la proposición implícita que cada función es desarrollable en serie de Taylor. Este círculo vicioso resultó inevitable. Además, Lagrange no pudo evitar la apelación implícita a los infinitesimales y al paso al límite. Las operaciones con series también resultaron sin fundamentación, ya que ellas se realizan sin la investigación de la convergencia de la serie.

En un ambiente de lucha encarnizada se advertía la inconsistencia de, uno tras otro, casi todos los métodos de fundamentación del análisis matemático. Sólo con relación al concepto de límite la crítica condujo no a la negación de las concepciones en que se basaba, sino a su precisión. Pero este concepto durante mucho tiempo y en forma difícil era parte del análisis, ya que cada vez aparecían dificultades relacionadas con la cuestión de la existencia del límite y de los métodos de su hallazgo efectivo. Semejantes dificultades existieron durante mucho tiempo hasta fines del siglo XIX, cuando fue creado el "aparato ε, δ " de la teoría de límites.

Ideas de K. Marx sobre las vías de desarrollo del análisis matemático.

En la exposición del problema de los fundamentos del análisis infinitesimal en el siglo XVIII múltiples de veces nos hemos referido a una serie de ideas de K. Marx, contenidas en sus manuscritos matemáticos. En el párrafo anterior partimos enteramente de estas ideas; las investigaciones de Marx tienen para nuestra ciencia carácter fundamental. Daremos aquí un corto resumen de ellas, en ningún modo pretendiendo un análisis completo del contenido de todos los manuscritos matemáticos de Marx.

Las matemáticas Marx comenzó a estudiarlas a finales de los años 50 del siglo pasado en relación con el trabajo sobre el "Capital" y no cesó estos estudios hasta los últimos días de su vida. Trabajando de forma autodidacta, paralelamente con la aplicación de las matemáticas a las investigaciones de problemas económicos, pasó a ocuparse sistemáticamente del análisis matemático. Aquí se propuso el problema de quitar el velo del misterio que rodeaba los conceptos y métodos fundamentales del cálculo diferencial desde la época de Newton y Leibniz. La difícilísima tarea de la fundamentación del análisis infinitesimal se convirtió para Marx en piedra de prueba de la aplicación del método de la dialéctica materialista a las mate-

máticas. Para la resolución de este problema Marx realizó un gran trabajo previo. Estudió y comparó críticamente los numerosos textos de análisis matemático para las escuelas superiores de Inglaterra y Francia y estudió algunas obras clásicas de Newton, Euler, Maclaurin y otros.

En el curso de este trabajo K. Marx se convenció de lo insatisfactorio de casi todos los esfuerzos de fundamentación del análisis, excepto la teoría de los límites, cuyo representante más importante fue Cauchy. A finales de los años 70 Marx emprendió el estudio de la teoría de los límites y de la elaboración y exposición sistemática de su punto de vista propio que ya se formaba. La muerte (14 de marzo de 1883) interrumpió la tarea. Las investigaciones quedaron inconclusas. Los manuscritos matemáticos de K. Marx, en aquella parte que están relacionados con el análisis matemático, reflejan este gran trabajo.

Para K. Marx el análisis infinitesimal no es una rama aislada, separada de las matemáticas. Para él esta es una nueva etapa, surgida necesariamente en el desarrollo histórico de las matemáticas. Por eso el problema de la aclaración de la estructura lógica del análisis en su mayor parte se reduce al análisis de su historia. Esta historia comienza con la acumulación de las formas no desarrolladas, prototipos de los conceptos y operaciones del análisis, los cuales llevan del álgebra de lo finito al álgebra de lo infinito, incluyendo las series infinitas y los métodos integrales y diferenciales. El surgimiento propiamente del cálculo diferencial e integral está relacionado ya con la creación de algoritmos específicos.

Trabajando en la aclaración del paso dialéctico del álgebra al análisis infinitesimal, K. Marx prestó atención a que los creadores del cálculo diferencial e integral, así como los científicos de épocas posteriores, actuaron desde el comienzo en el terreno del cálculo y no buscaron sus fuentes algebraicas.

Newton "estuvo demasiado absorto en la elaboración de las operaciones diferenciales mismas, las cuales Taylor y Maclaurin suponían existentes y conocidas. Además, como evidencian sus primeras fórmulas elementales de cálculo Newton llegó explícitamente a ellas primeramente partiendo de puntos iniciales mecánicos y no pertenecientes al análisis puro. Por otra parte, en lo que se refiere a Taylor y Maclaurin, desde el mismo comienzo de su trabajo operan en el terreno del propio cálculo diferencial y por esto nada los incitaba a buscar los posiblemente más sencillos puntos de partida algebraicos de este cálculo, sobre todo porque las discusiones entre los continuadores de Newton y Leibniz giraban alrededor de formas definidas, ya preparadas del cálculo, las que desde el momento de su descubrimiento conformaban una disciplina matemática completamente especial de la cual el álgebra usual estaba tan distante como hasta una estrella celeste... Las interrelaciones verdaderas y, en virtud de ello, más sencillas de lo nuevo

¹⁾ J. L. Lagrange. *Théorie des fonctions analytiques...* Oeuvres de Lagrange, t. IX, París, 1881, p. 16.

con lo viejo se descubren siempre sólo cuando lo nuevo mismo adquiere una forma acabada¹⁾.

En la historia de la fundamentación del cálculo diferencial en el siglo XVIII, K. Marx distinguía los siguientes períodos:

1. *Cálculo diferencial místico.* En virtud de que los fundadores del análisis infinitesimal, en primer término Newton y Leibniz, desde el comienzo identificaron el incremento con la diferencial, ellos pudieron obtener resultados correctos, sólo despreciando los infinitesimales de orden superior. Esto inevitablemente condujo a que a las diferenciales se les adjudicaran algo particular, propiedades misteriosas, que los infinitesimales se consideraran como ciertas magnitudes místicas: nulas y no nulas al mismo tiempo. K. Marx no vio en esto categóricamente ninguna dialéctica y consideró semejante tratamiento incorrecto. Al mismo tiempo, valoró altamente el descubrimiento del cálculo diferencial e integral y subrayó la circunstancia de que la lucha de ideas desarrollada alrededor de este descubrimiento era necesaria para abrir el camino hacia lo nuevo.

2. *El cálculo diferencial racional* rectifica los métodos de Newton y Leibniz. Sus más notables representantes fueron Euler y D'Alembert. Como aclaramos antes, la definición de derivada, según D'Alembert, se realiza más rigurosamente, pero no se pone de manifiesto el método real (efectivo) de hallazgo de la derivada. Más aún, la formación de la relación $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y las operaciones subsiguientes se basan en la proposición que el desarrollo de $f(x + \Delta x)$ en series en potencias de Δx ya ha sido encontrado, lo cual es equivalente al hallazgo de la derivada buscada, a la cual sólo resta "liberarla de lo circundante".

3. *Cálculo diferencial algebraico.* Lagrange, el principal representante de esta corriente, parte ya de forma explícita del desarrollo de la función $f(x + h)$ en serie de potencias de h y define la derivada como el coeficiente de aquel término de la serie que contiene al incremento h a la primera potencia. La cuestión sobre un algoritmo de búsqueda de la derivada para una u otra clase de funciones queda, de esta manera, abierta. Además, Lagrange así no llega hasta el cálculo diferencial propio. Los símbolos diferenciales para él son sólo "cuestión de nomenclatura, lo cual es lo único que queda del cálculo diferencial propio"²⁾. K. Marx además señaló que en las aplicaciones de su teoría analítica de las funciones Lagrange mismo constantemente utiliza una u otra de las ideas "metafísicas" rechazadas por él: las fluxiones newtonianas, los infinitesimales de Leibniz, los valores

límites de las relaciones entre las magnitudes que desaparecen, de D'Alembert, y, además, el simbolismo específico para el cálculo diferencial.

Detengámonos aun en algunas otras ideas de K. Marx en el campo de los fundamentos del análisis matemático. El problema que él se planteó consistía, para empezar, en la aclaración de la esencia del cálculo diferencial como tal, esto es, como un cálculo matemático específico, el cual opera con símbolos característicos para él. En concordancia con esto, K. Marx ante todo mostró la esencia real del proceso de diferenciación. Según K. Marx, la derivada $f'(x)$ de la función $y = f(x)$ se obtiene del modo siguiente: se forma (si esto es posible) una derivada "previa", esto es la función

$$\Phi(x, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}.$$

El valor de esta función para $x_1 = x$ (si existe) es la derivada de la función dada. K. Marx buscó algoritmos que permitieran (en casos sencillos) encontrar directamente, según la expresión de la función, su derivada. Así en el caso de la función potencial $y = x^n$

$$\Phi(x, x_1) = \frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} = x_1^{n-1} + x \cdot x_1^{n-2} + x^2 x_1^{n-3} + \dots + x^{n-2} x_1 + x^{n-1},$$

que cuando $x_1 = x$ da

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

A tal género de métodos de búsqueda directa de la derivada K. Marx lo llamó diferenciación algebraica. El término "algebraico" lo utilizó en el mismo sentido que muchos matemáticos del siglo XIX: como que no exige el uso del concepto de magnitud infinitesimal.

La diferenciación algebraica de K. Marx admite la transformación simbólica a la forma comúnmente aceptada en aquel tiempo.

Designando

$$x_1 - x = \Delta x, \quad y_1 - y = \Delta y,$$

además $\Delta x \neq 0$, K. Marx obtenía para la derivada previa la expresión simbólica $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Correspondientemente la notación para la derivada $f'(x)$ será

$\frac{dy}{dx}$. Este símbolo, el cual K. Marx (en correspondencia con la terminología utilizada entonces) lo denominó "coeficiente diferencial simbólico" tiene sentido directo sólo en general. Sin embargo, en virtud del método de for-

¹⁾ K. Маркс. Математические рукописи, стр. 199. (K. Marx. Manuscritos matemáticos.)

²⁾ K. Маркс. Математические рукописи, стр. 177. (K. Marx. Manuscritos matemáticos.)

mación de la derivada se puede considerar la expresión:

$$f'(x) dx = dy.$$

Esta fórmula es cierta también para la diferenciación de la función compuesta. En tal caso se utiliza como fórmula operativa, que permite (con suposiciones suficientemente amplias) reducir la búsqueda de la derivada de una función

$$F(t) = f[\varphi(t)]$$

a la búsqueda de las derivadas $f'(x)$ y $\varphi'(x)$. Para esto es suficiente en la fórmula para la diferencial colocar

$$x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t) dt.$$

Pero, de esta manera, transcurre la inversión del método. No partimos del proceso matemático real de formación de la derivada hacia su expresión simbólica, sino al revés, apoyándose en la forma simbólica encontramos la expresión para la derivada. El primer ejemplo no trivial de tal inversión del método es la diferenciación del producto $y = uz$. Recurriendo a la deducción de la fórmula

$$\frac{d(uz)}{dx} = u \frac{dz}{dx} + z \frac{du}{dx},$$

K. Marx indicó que "el coeficiente diferencial simbólico se convierte, de esta manera, en *punto de partida independiente*, cuyo equivalente real debe ser hallado... Pero así mismo el cálculo diferencial actúa como cierto cálculo específico, el cual opera ya independientemente, en terreno propio, ya que los puntos de partida de su $\frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}$ son en esencia sólo magnitudes matemáticas que le pertenecen y lo caracterizan. Esta inversión del método se obtuvo aquí como resultado de la diferenciación algebraica de uz . El método algebraico, de esta manera, se transforma así mismo en el opuesto al método diferencial... Pero así mismo los coeficientes diferenciales simbólicos $\frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}$ se transforman en *símbolos operativos*, en símbolos de

los procesos, los cuales deben ser cumplidos. Surgió primeramente como expresión simbólica de la "derivada", esto es, ya realizadas las operaciones de diferenciación, el coeficiente diferencial simbólico ahora juega el papel de símbolo de aquellas operaciones de diferenciación, las cuales aun resta por realizar"¹⁾. K. Marx no se limitó al concepto de diferencial como

símbolo operativo. En la aplicación a la cuestión de la expresión aproximada del incremento de la función utilizó el concepto de diferencial como parte principal lineal del incremento. El concepto de diferencial como símbolo operativo, por vez primera descubierto por K. Marx, y la diferencia de ambos conceptos de diferencial adquieren, como fue demostrado por el matemático soviético V. I. Glivenko, un significado especialmente importante en las generalizaciones contemporáneas del concepto de diferencial al análisis funcional.

En el curso de sus trabajos sobre matemática K. Marx se interesó por un amplio círculo de problemas. Entre ellos: la aplicación de la matemática a las investigaciones económicas, los métodos matemáticos de representación del movimiento y otros muchos. A pesar de su incompletitud los manuscritos matemáticos de K. Marx tienen gran significado científico.

6.3. Desarrollo del aparato del análisis matemático

La restructuración de los fundamentos del análisis matemático transcurrió en un ambiente, cuando este último se desarrollaba rápida y exitosamente. Muchos investigadores de épocas posteriores, refiriéndose a los matemáticos del siglo XVIII, les reprochaban que por la persecución de resultados prácticos permanecían como si fueran indiferentes hacia sus fundamentos. En el capítulo anterior mostramos que esto no fue, por supuesto, así.

En la parte operativa al análisis también fue transformado de la manera más radical. Fue elaborado un aparato cómodo, operativo, desarrollado de cálculo. A comienzos del siglo XVIII el análisis se dividía sólo en dos partes: cálculo diferencial e integral. El primero incluía, en particular, toda la teoría de las series. En la segunda estaban concentrados los métodos de solución de los denominados problemas inversos del análisis infinitesimal. De esta manera, en el cálculo integral, junto a los métodos de integración de funciones se incluía toda la teoría de las ecuaciones diferenciales, tanto las ordinarias como en derivadas parciales y, además, el cálculo variacional.

Un ejemplo brillante de indivisibilidad de la estructura del análisis matemático es la serie de monografías de Euler antes consideradas. La riqueza real del análisis, acumulada en el transcurso del siglo XVIII, es inmensa. Es enormemente grande para dar un resumen sistemático en el marco del presente texto. Además, no hay necesidad de eso. Indiquemos sólo ciertas particularidades, las más características, del desarrollo del cálculo diferencial e integral y la teoría de las ecuaciones diferenciales.

Cálculo diferencial. Enseguida después del surgimiento de los primeros trabajos de G. W. Leibniz se aclaró que su cálculo de diferenciales y el simbolismo tenían mayores ventajas respecto al cálculo de fluxiones y el co-

¹⁾ K. Marx. Manuscritos matemáticos.

respondiente sistema de símbolos. Ellos reflejaban mejor la esencia de las operaciones del análisis y este último, naturalmente, tomó la forma, en lo fundamental, predicha por Leibniz. Sin embargo, en calidad de concepto fundamental de las matemáticas del siglo XVIII, a diferencia de Leibniz, tomaron no la diferencial, sino la derivada como menos vulnerable lógicamente. La formulación del problema del cálculo diferencial cambió. Tras Euler, comenzó a tratarse por la mayoría de los matemáticos como un método de determinación de la relación de incrementos esfumantes recibidos por las funciones cuando a la cantidad variable, de la cual ellas son función, se da un incremento esfumante.

En el transcurso de un largo tiempo el cálculo diferencial conservó una estrecha relación con el cálculo en diferencias finitas. Esta relación era, en la época considerada por nosotros, tan estrecha, que ambos cálculos realmente se unían en un cálculo para funciones tanto continuas como de argumento discreto. Además de las consideraciones usuales, en las cuales se tiene en cuenta "la juventud" e inseparabilidad del análisis, tal situación se explicaba, naturalmente, por el gran significado práctico del cálculo en diferencias finitas para los métodos de interpolación, la diferenciación e integración numérica y la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales. Con ello no jugaron un último papel las consideraciones vinculadas con las demostraciones por analogía. La consideración conjunta de ambos cálculos creaba mayores posibilidades para semejantes analogías.

Los matemáticos de los siglos XVII y XVIII prestaron mucha atención al desarrollo del cálculo en diferencias finitas. En los trabajos de P. Fermat, J. Barrow, J. Wallis, I. Newton y otros se formó esta rama de las matemáticas. Los creadores del análisis infinitesimal introdujeron numerosas analogías entre las diferencias finitas y las diferenciales, utilizándolas para el desarrollo ulterior del cálculo diferencial. He aquí uno de los ejemplos.

En el año 1711, Newton introdujo la fórmula de interpolación¹⁾

$$f(a + n\Delta x) = f(a) + n\Delta f(a) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 f(a) + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 f(a) + \dots + \Delta^n f(a),$$

donde n es un número entero positivo,

$$\Delta f(a), \Delta^2 f(a), \Delta^3 f(a), \dots$$

las diferencias finitas sucesivas de la función $f(x)$ cuando $x = a$:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x + \Delta x) - \Delta f(x),$$

$$\Delta^3 f(x) = \Delta^2 f(x + \Delta x) - \Delta^2 f(x),$$

Esta fórmula de Newton, Taylor la extendió al caso de un número infinito de términos, donde Δx tiende a cero, pero, de manera tal que $n \cdot \Delta x = h$ sea finito. Entonces

$$f(a + h) = f(a) + h \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} + \frac{h(h - \Delta x)}{1 \cdot 2} \frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2} + \\ + \frac{h(h - \Delta x)(h - 2\Delta x)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\Delta^3 f(a)}{\Delta x^3} + \dots$$

se convertía en

$$f(x + h) = f(x) + h \frac{df(x)}{dx} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \dots$$

Semejante utilización de la analogía y desarrollo paralelo del cálculo diferencial y el cálculo en diferencias finitas fue característico para el análisis del siglo XVIII. Una propagación singular de este rasgo fue obtenida a mediados de siglo, lo que demuestra brillantemente, por ejemplo, Euler en su "Cálculo diferencial" (1755). Euler dedicó, en particular, los dos primeros capítulos sistemáticamente a la exposición de la teoría de diferencias finitas, en un volumen que supera su posterior aplicación, en la presente obra, a la interpolación de series, la transformación de ellas para mejorar la convergencia y cuestiones semejantes.

El aparato fundamental del cálculo diferencial era el desarrollo de funciones en series de potencias. El arsenal, comparativamente rico, de recursos acumulados por los predecesores, a comienzos del siglo, se enriqueció con el teorema de Taylor. Este lo encontró, como mostramos antes, utilizando la analogía con el cálculo en diferencias finitas, extrapolando al cálculo de diferenciales la fórmula de interpolación de Newton. En el año 1712, Taylor ya había comunicado su teorema en una carta. Publicándola en "Methodus incrementorum directa et inversa" (1715), Taylor completó su deducción para el caso particular, denominado serie de Maclaurin. Este último dio una nueva deducción de este teorema en 1742.

La aplicación regular de la serie de Taylor y Maclaurin se convirtió en particularidad característica del cálculo diferencial. Su significado resultó tan grande que cuando en el año 1784, Condorcet adjudicó a estas series el

¹⁾ I. Newton. Diferencias finitas. En el libro: И. Ньютон. Математические работы. М., ОНТИ, 1937, стр. 210—217. (I. Newton. Trabajos matemáticos).

nombre de sus descubridores, esto se tomó como un hecho que se sobrentendía por sí solo. El problema de desarrollar en serie, por vías elementales, todas las funciones conocidas y así mismo asegurar la efectividad de las operaciones del cálculo diferencial se convirtió no sólo en un problema actual, sino que parecía realizable. En esta dirección fueron logrados grandes éxitos. Todas las funciones conocidas por los matemáticos del siglo XVIII (y al parecer todas las posibles) tenían la propiedad de ser desarrollables, en serie de potencias, productos infinitos, etc. y con ellas resultaba posible operar. El enorme aumento de los hechos del cálculo diferencial, que parecía insignificante junto a la necesidad de un estudio más profundo de las propiedades de las series crearon precedentes para una valoración incorrecta de la creatividad de los matemáticos del siglo XVIII en el campo del análisis matemático. Con diverso grado de determinación diferentes autores escriben sobre el formalismo y despreocupación en estas cuestiones.

Sim embargo, esto no concuerda con la realidad. Las primeras dificultades promovieron el problema de la convergencia de series. Ya en el año 1715 P. Varignon respecto al desarrollo binomial formuló una serie de exigencias, cuya esencia se reducía a que los términos del desarrollo disminuyeran indefinidamente igual que el resto de la serie. Los esfuerzos dirigidos a sustituir los confusos razonamientos metafísicos por una definición exacta de convergencia continuaron a lo largo de todo el siglo. En esto el mérito fundamental de los matemáticos del siglo XVIII puede formularse así: deducción e investigación de las diferentes formas del término residual de una serie; transformación de series con el objetivo de obtener una serie convergente a ciencia cierta; la asimilación creadora de la operabilidad con series divergentes.

En el año 1754 D'Alembert durante la deducción de la serie de Taylor expresó la idea que se reducía a la representación del término residual por una integral múltiple. Euler se esforzó por encontrar otros criterios de convergencia, considerando los módulos de las diferencias de las sumas de los términos de la serie tomadas en número finito. En los años 60, la idea de la diferenciación de las series convergentes y divergentes penetró en los textos, por ejemplo, en los textos de Kestner (1760 y 1761). En el año 1768 D'Alembert pudo demostrar rigurosamente una serie de teoremas relativos a la convergencia del desarrollo del número π en forma de fracción continua. A finales de siglo, en 1797, Lagrange representó el resto de la serie de Taylor, inicialmente en forma integral y a continuación en la forma en que hoy se conoce bajo su nombre. Los esfuerzos de los matemáticos del siglo XVIII por comprender correctamente el problema de la convergencia (así como sus errores) crearon a comienzos del siglo XIX las condiciones para un riguroso acercamiento a su solución. Una nueva etapa en la teoría

de las series, caracterizada por estimaciones regulares y rigurosas de los términos residuales y el carácter de la convergencia comienza en los primeros decenios del siglo XIX y está relacionada en primer término con los trabajos de Cauchy.

Los trabajos sobre el mejoramiento de la convergencia de las series evidencian la gran atención puesta en problema de la convergencia. Muchas transformaciones de las series para obtener series convergentes pertenecen a Euler. Por ejemplo: dada la serie

$$S = ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + \dots$$

se realiza el cambio de variables

$$x = \frac{y}{1-y} = y + y^2 + \dots,$$

$$S = a(y + y^2 + \dots) - (y + y^2 + \dots)^2 + c(y + y^2 + \dots)^3 - \dots,$$

$$S' = ay + (a-b)y^2 + (a-2b+c)y^3 + \dots = ay + \Delta a \cdot y^2 + \Delta^2 a \cdot y^2 + \dots$$

A continuación el nuevo cambio de variables $y = \frac{x}{1+x}$ conduce a

$$S' = a \frac{x}{1+x} + \Delta a \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 + \Delta^2 a \left(\frac{x}{1+x} \right)^3 + \dots$$

Si la serie S converge, entonces la serie S' converge a la misma suma. Sin embargo, existen valores de x tales que la serie S converge y la serie S' diverge.

Las operaciones con series fuera del campo de convergencia conducían a resultados paradójicos. Sin embargo, Euler encontró los medios para obtener importantes resultados del análisis, precisamente, con ayuda de las series divergentes. En general Euler operó frecuentemente con series divergentes, viendo el fundamento para esto en la extensión inductiva a las series infinitas de las operaciones aplicadas a las funciones polinomiales. La justificación de la validez para operar con series divergentes para Euler era la obtención de resultados correctos. Para evitar absurdos, es necesario, dice él, definir correctamente el concepto de suma de una serie divergente. Para esto es necesario renunciar a las ideas habituales relativas a la palabra "suma" considerar que la suma de la serie es una expresión finita, del desarrollo de la cual esta serie surge. Por ejemplo, la suma de la serie

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

será $\frac{1}{1-x}$, porque la serie dada se obtiene del desarrollo de la última expresión. Tal definición resulta más general y se anticipa a muchas ideas importantes de épocas posteriores, por ejemplo, la idea de prolongación analítica, no hablando de la posibilidad de utilizar el importante aparato de las series divergentes.

Junto a las series de potencias en el análisis matemático se incluyeron nuevos tipos de desarrollo de funciones. D. I. Stirling (1730) y Euler (1732) aplicaron, por ejemplo, desarrollos en series asintóticas. En el año 1748, Euler introdujo las series trigonométricas para la resolución de problemas de la física-matemática. Este recurso obtuvo aplicación no sólo en los trabajos de Euler, sino también en las obras de otros matemáticos: D. Bernoulli (1753) en ecuaciones de la física-matemática (por ejemplo, la resolución de la ecuación de oscilación de una cuerda), D'Alémbert (1754) y a la vez Clairaut en mecánica celeste. Hacia finales del siglo XVIII, Laplace (en el año 1782, publicado en 1785) y Legendre (1783, publicado en 1786) resolvieron el problema sobre la atracción de un cuerpo elipsoidal, introduciendo los desarrollos en series según funciones esféricas.

El análisis matemático en el siglo XVIII se enriqueció con el potente y variado aparato del desarrollo de funciones en series de diferentes tipos. Este aparato fue creado bajo la influencia directa de los problemas de la física-matemática. En el curso de su elaboración gradualmente fueron presentados los problemas del estudio de las propiedades generales de las series, principalmente su convergencia. Sin esto la utilización sistemática del aparato creado hubiera sido difícil. La construcción de una teoría de series lo suficientemente general y rigurosa se convirtió hacia finales de siglo en un problema de primera línea, de cuya solución dependían los éxitos prácticos del análisis matemático. Las reglas de diferenciación en su gran mayoría fueron elaboradas ya en los trabajos de Leibniz y los hermanos Bernoulli. La ampliación de estas reglas en relación con la ampliación de la clase de funciones investigadas no presentaba dificultades importantes. Así, tras la expresión analítica de las funciones trigonométricas, exponenciales y otras clases de funciones, fueron inmediatamente obtenidas las expresiones analíticas de sus derivadas.

La acumulación de resultados del cálculo diferencial transcurrió rápidamente. En el "Cálculo diferencial" (1755) de Euler, este cálculo se presenta ya en forma muy completa. Por ejemplo, el teorema sobre la independencia de los valores de las derivadas parciales del orden de diferenciación era conocido ya a comienzos de siglo. Euler le dio su demostración, extendiéndola a las derivadas parciales de orden superior. En la teoría de la diferencial total, Euler demostró que en

$$df(x, y) = Pdx + Qdy$$

las derivadas parciales deben satisfacer la condición

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Los símbolos $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, no obstante, fueron introducidos más tarde, alrededor del año 1786 por Legendre. La necesidad y, después, la suficiencia de la condición dada para que la expresión $Pdx + Qdy$ sea una diferencial total fue demostrada por Euler. El también, considerando las funciones de tres variables $f(x, y, z)$ y sus diferenciales totales de la forma $Pdx + Qdy + Rdz$ introdujo las condiciones

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Con el nombre de Euler se denominan además las fórmulas de la diferenciación de funciones compuestas, el teorema sobre las funciones homogéneas y otros muchos resultados.

Las reglas para la determinación de los extremos de las funciones de una variable $y = f(x)$ fueron dados por Maclaurin. Euler elaboró esta cuestión para las funciones de dos variables. Lagrange mostró (1789) cómo distinguir la forma de un extremo condicionado para funciones de varias variables y a continuación (1797) aplicó para su investigación el método de los multiplicadores indeterminados que lleva su nombre. Mencionemos, finalmente, la cuestión sobre la investigación de las indeterminaciones de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, 0∞ , $\infty - \infty$ las cuales realizó Euler.

El cálculo diferencial en el transcurso del siglo XVIII acumuló casi todos los resultados que caracterizan su estructura actual. Fue elaborado el potente aparato de representación de funciones por series. Este aparato adquirió una forma analítica suficientemente desarrollada. Además de los problemas generales del tratamiento racional de sus conceptos fundamentales relacionados con la insuficiente claridad del concepto de cantidad infinitesimal y los conceptos considerados en el capítulo anterior, ante ellos se presentaban nuevos problemas de la fundamentación. Estos problemas se relacionaban con la suma de series, el desarrollo de funciones en series de diferentes tipos, las condiciones de existencia de integrales de diferenciales totales dados, etc.

Cálculo integral. Los creadores del análisis infinitesimal introdujeron el cálculo diferencial, considerando los problemas inversos de sus cálculos. En la teoría de las fluxiones de Newton la mutua inversibilidad de los problemas del cálculo de fluxiones y fluentes se evidenciaba claramente. Para Leibniz el problema era más complejo: la integral surgía inicialmente

como definida, como suma de un número infinito de diferenciales infinitesimales. No obstante, la integración se reducía prácticamente a la búsqueda de funciones primitivas. La idea de la integración indefinida fue inicialmente la dominante.

Los problemas inversos fueron propuestos en forma más general. El cálculo integral incluía además de la integración de funciones, los problemas y la teoría de ecuaciones diferenciales, el cálculo variacional, la teoría de las funciones especiales, etc. Estas ramas del análisis matemático sólo gradualmente se separaron del cálculo integral en el transcurso del siglo XVIII. El cálculo integral en tal formulación general creció inusualmente rápido. Euler necesitó en los años 1768—1770 tres grandes tomos para dar una exposición sistemática de él. El primer tomo de este trabajo colosal incluía en su primera parte propiamente la integración de funciones; las ecuaciones diferenciales ordinarias ocupaban la segunda parte del primer y todo el segundo tomo; el tercer tomo estaba dedicado a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y el cálculo variacional. No obstante, todo este material se consideraba, así y todo, como un único cálculo integral.

Según Euler, el cual expresaba el punto de vista comúnmente aceptado, el cálculo integral constituía un método de búsqueda, dada la relación entre los diferenciales o la relación entre las propias cantidades. La operación con lo que esto se obtenía se denominaba integración. El concepto primario de tal cálculo, por supuesto, era la integral indefinida. El propio cálculo tenía el objetivo de elaborar métodos de búsqueda de las funciones primitivas para funciones de una clase lo más amplia posible.

El problema de la construcción del cálculo en lo fundamental fue resuelto en el transcurso de la primera mitad del siglo XVIII. Los logros principales en esta dirección inicialmente pertenecieron a J. Bernoulli, quien escribió el primer curso sistemático de cálculo integral (1742), después, a Euler. El aporte de este último en el cálculo integral fue inusitadamente grande. Según la justa observación de N. N. Lusin sobre Euler, la integración llevada por él hasta sus últimas consecuencias y las cuadraturas por él encontradas, todavía constituyen actualmente el marco de todos los cursos y tratados modernos sobre cálculo integral; las matemáticas durante 150 años después de la muerte de Euler no pudieron abrir una brecha en el anillo de la integración que fue forjado por Euler y de esta forma lograr nuevas cuadraturas. En relación al cálculo integral los textos actuales son sólo modificaciones del tratado de Euler, sólo renovaciones de este trabajo en lo relativo al lenguaje. Una valoración semejante la dio el académico A. N. Krylov.

A pesar de la aparente categoricidad desmesurada de estos juicios, ellos se confirman con la revisión concreta del famoso "Cálculo integral" de Euler y su comparación con los textos actuales. Los métodos de integración

indefinida alcanzaron prácticamente el nivel actual en la segunda mitad del siglo XVIII.

La formación del conjunto de métodos de búsqueda de funciones primitivas se acompañaba de la elaboración de los conceptos generales del cálculo y del correspondiente simbolismo cómodo. Euler, partiendo del concepto de integral indefinida como básico, introdujo un sistema completo de definiciones. La integral, junto con una constante de integración aditiva arbitraria, la denominó total. La fijación de una constante arbitraria conducía a una integral parcial. El valor de esta última, para cierto valor determinado del argumento, daba el equivalente a la integral definida.

Esta sucesión armoniosa resultó imposible de mantener en las cuestiones aplicadas (en el caso cuando la primitiva no es una función elemental) y en los respectivos cálculos aproximados la integración definida se introdujo como adición en un sentido análogo al actual. El necesario cambio del símbolo de Leibniz

$$\int f(x) dx$$

para el caso de la integración definida no fue tampoco encontrado inmediatamente. El símbolo de Euler

$$\int f(x) dx = \begin{cases} abx = a \\ adx = b \end{cases}$$

(donde en lugar de $f(x)$ estaba p) obtuvo desde el año 1779, según proposición de Laplace, el correspondiente término "integral definida". El símbolo al que estamos acostumbrados (y que parece tan natural)

$$\int_a^b f(x) dx$$

fue introducido por Fourier sólo en los años 1819—1822.

Paralelamente al desarrollo del cálculo integral surgieron las generalizaciones de la operación de integración. En el año 1743, Clairaut introdujo la integral curvilínea

$$\int P dx + Q dy$$

tomada a lo largo de una curva, en el libro "Teoría de la figura de la tierra, basada en los elementos de la hidroestática" (salió una traducción en ruso en el año 1947). En el año 1770, Euler en relación con problemas prácticos, elaboró e introdujo la integración doble. Dos años después (en 1772), Lagrange, considerando el problema de la atracción del elipsoide de revolución (publicada en 1775), introdujo en las matemáticas las integrales triples.

En el curso del desarrollo del cálculo integral surgieron una serie de problemas de carácter especial. Los esfuerzos en su resolución condujeron a la elaboración de nuevas ramas del análisis matemático. Estas últimas tarde o temprano se separaron de su fuente inicial, el cálculo integral del siglo XVIII.

Ante todo es preciso mencionar la teoría de ecuaciones diferenciales y el cálculo variacional. Los consideraremos más adelante especialmente de acuerdo al significado que estas partes tuvieron para el desarrollo de las matemáticas.

El cálculo de integrales de tipos especiales ya a comienzos de siglo conllevó al descubrimiento de una serie de resultados de la teoría de las funciones especiales. Uno de los primeros fue el descubrimiento de las integrales eulerianas de primero y segundo género, o sea, respectivamente, la función beta

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

(1730—1731) y la función gamma

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx$$

(1729—1730).

La integración por partes aplicada a la función gamma, da

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \quad a > 0.$$

Si a es natural, entonces

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) = \dots = a!\Gamma(1) = a!$$

Esto dio a Euler base para la definición generalizada de factorial

$$n! = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx.$$

En el caso de la función beta, para a y b naturales

$$B(a, b) = \frac{1}{b C_{a+b-1}^{a-1}}$$

semejantes consideraciones permiten generalizar (como el concepto de factorial) el concepto de coeficiente binomial al caso de argumentos de variación continua. La demostración de la convergencia absoluta para $a > 0$, $b > 0$, naturalmente, aún no podía darse, así como la consideración de estas funciones para valores complejos del argumento.

Entre las muchas integrales especiales se puede señalar el “logaritmo integral”

$$\text{li}(x) = \int_0^x \frac{dx}{\ln x} = \int_{-\infty}^{\ln x} \frac{e^t dt}{t},$$

la cual adquirió junto con la función $\zeta(x)$ un gran significado en la teoría analítica de los números, por ejemplo, en la investigación del problema de la distribución de los números primos en la sucesión natural.

Euler desarrolló la integral del logaritmo $\text{li}(e^{-x})$ en serie:

$$\text{li}(e^{-x}) = c + \ln x - \frac{x}{1 \cdot 1!} + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \dots,$$

donde c es la constante de Euler;

$$c = 0,577215\dots,$$

cuya naturaleza aritmética no ha sido aclarada aún en nuestro tiempo. La clase de funciones especiales o trascendentes incluía además las funciones elípticas, surgidas cuando se invierten las integrales elípticas, es decir, integrales de la forma

$$\int R(x, \sqrt{P_n(x)}) dx$$

(donde R es el símbolo de fracción racional, $n = 3$ ó $n = 4$ y el polinomio $P_n(x)$ no tiene raíces múltiples). Estas integrales obtuvieron su denominación debido a que a través de una de ellas

$$\int_0^{\alpha} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha$$

(integral de segundo género en la forma normal de Legendre) se expresa la longitud del arco de la elipse:

$$u = a \sin \alpha, \quad v = b \cos \alpha \quad (a < b)$$

$$L = \int_0^{\alpha} \sqrt{\left(\frac{du}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dv}{d\alpha}\right)^2} d\alpha =$$

$$= \int_0^{\alpha} \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha} d\alpha = a \int_0^{\alpha} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha.$$

Las integrales de este tipo fueron aplicadas por muchos matemáticos del siglo XVIII para el cálculo de la longitud de arcos de diferentes curvas.

En el año 1761, Euler descubrió el teorema de la composición de integrales elípticas, y la idea de su inversión fue por vez primera expresada a finales del siglo XVIII por Gauss. La teoría de las funciones elípticas, en lo fundamental, fue construida en el siglo XIX en los trabajos de Abel, Jacobi, Liouville y otros matemáticos.

Como ya fue expresado, las funciones indicadas son uno de los tipos de funciones especiales, es decir trascendentes. Ellas tienen una fuente común, las integrales que no se expresan mediante funciones elementales. Otra clase fundamental de funciones especiales surge, como se sabe, en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes variables (funciones de Bessel, Lamé, cilíndricas, etc.).

En el cálculo de una serie de integrales difíciles fue aplicado también el método de las sustituciones complejas, las cuales como consecuencia relacionaron el cálculo integral con la teoría de las funciones de variable compleja. Por ejemplo, ya D'Alembert y Euler afirmaron que si

$$\varphi(x + iy) = M + iN$$

ya a la vez

$$\varphi(x - iy) = M - iN.$$

Entonces

$$P + iQ = \int (M + iN) (dx + idy),$$

$$P - iQ = \int (M - iN) (dx - idy),$$

de donde

$$P = \int M dx - N dy, \quad Q = \int N dx + M dy.$$

De que las expresiones bajo las integrales sean diferenciales totales de las funciones P y Q , se obtienen las conocidas condiciones de D'Alembert — Euler

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}; \quad \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

Por ejemplo para la función gamma

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx$$

Euler (1781, publicado en 1794) realiza el cambio $x = ky$.

Entonces

$$\Gamma(n) = k \int_0^{\infty} e^{-ky} y^{n-1} dy.$$

Poniendo a continuación

$$k = p + iq = r(\cos \alpha \pm i \sin \alpha),$$

encuentra

$$\int_0^{\infty} e^{-py} y^{n-1} \cos qy dy = \frac{\Gamma(n) \cos n\alpha}{r^n}$$

y

$$\int_0^{\infty} e^{-py} y^{n-1} \sin qy dy = \frac{\Gamma(n) \sin n\alpha}{r^n},$$

de donde en calidad de resultado particular (para $n = \frac{1}{2}$, $p = 0$, $q = 1$) obtuvo las integrales, conocidas ahora como integrales de Frenel

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\varphi}} d\varphi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\varphi}} d\varphi = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(Euler tuvo en cuenta que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}).$$

Otro resultado particular obtuvo Euler, poniendo en la segunda ecuación $n \rightarrow \infty$, de donde

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-px} \sin qx dx}{x} = \alpha = \arctg \frac{q}{p}$$

y a continuación ($p = 0$, $q = 1$)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

El objetivo de semejantes sustituciones es el esfuerzo por obtener integrales de funciones de una variable. Con ello, a veces en calidad de integral inicial se toma tal integral cuyo valor ya es conocido para obtener integrales nuevas más complicadas. Así, Euler en uno de sus trabajos aplicó un

método semejante a la integral

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsen z$$

y obtuvo dos nuevas integrales

$$P = \int \frac{\cos(\theta + \omega) dv}{vs}; \quad Q = \int \frac{\sen(\theta + \omega) dv}{vs},$$

donde

$$\theta = \text{const};$$

$$\text{tg } 2\omega = \frac{v^2 \text{sen } 2\theta}{1 - v^2 \cos 2\theta};$$

$$s = \sqrt{1 + 2v^2 \cos 2\theta + v^4}; \quad \theta = \text{const.}$$

Laplace consideró las integrales con límites imaginarios.

Esta rama del cálculo integral jugó un papel importante en la creación de la teoría de funciones de variable compleja como una de sus fuentes. Así, en el transcurso del siglo XVIII se formó en el cálculo integral un conjunto de métodos, próximo a su actual contenido y nivel. Este cálculo, además, dio comienzo a nuevas ramas del análisis matemático, como, por ejemplo, la teoría de las funciones especiales. De él se separaron y transformaron en campos matemáticos independientes la teoría de ecuaciones diferenciales y el cálculo variacional. El cálculo integral sirvió, finalmente, como una de las fuentes de la teoría de funciones analíticas.

Ecuaciones diferenciales. Ante los creadores del análisis, el problema de la integración de ecuaciones diferenciales, en su inicio, se presentaba como parte de un problema más general: el problema inverso del análisis infinitesimal. Naturalmente, la atención, al inicio, se concentraba en las diferentes ecuaciones de primer orden. Su solución se buscaba en forma de funciones algebraicas o trascendentes elementales, con ayuda de métodos más o menos exitosamente elegidos. Para reducir este problema a la operación de búsqueda de funciones primitivas los creadores del análisis y sus discípulos tendían en cada ecuación diferencial a separar las variables. Este método con el que actualmente comenzaron los textos sistemáticos de los cursos de la teoría de ecuaciones diferenciales, resultó, al parecer, históricamente el primero.

Alrededor del año 1692, Jo. Bernoulli encontró otro método, utilizado en una serie de problemas, la multiplicación por un factor integrante. Este mismo método lo aplicó exitosamente en el año 1720 Bernoulli. Gradualmente se aclaró que el método del factor integrante, al parecer, se puede considerar como un método general de integración de ecuaciones de la for-

ma

$$M(x, y) dx = N(x, y) dy = 0, \quad \forall x, y$$

es difícil, no obstante, realizarlo debido a la elección de este factor. El arsenal de los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales, incluía también el de cambio de variables. Leibniz (1693) y después Jo. Bernoulli con ayuda de la sustitución $y = xt$ resolvieron las ecuaciones homogéneas de primer orden. La ecuación de la Bernoulli

$$ady = y^p dx + by^n q dx$$

($a = \text{const}$, $b = \text{const}$, $p = p(x)$, $q = q(x)$) fue transformada mediante la sustitución $y^{1-n} = v$ (por Leibniz en el año 1693, por Jo. Bernoulli en el año 1697) en una ecuación diferencial lineal de primer orden. En la resolución de esta ecuación Jo. Bernoulli anticipó el método de variación de las constantes introducido en el año 1775 por Lagrange. Finalmente hacia el año 1700 Jo. Bernoulli logró resolver la ecuación diferencial lineal de orden n

$$\sum_{k=n}^1 A_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} + y = 0$$

introduciendo un factor integrante de la forma x^p y disminuyendo con su ayuda sucesivamente el orden de la ecuación.

Sin embargo, este y algunos otros métodos eran incompletos y la cantidad de problemas que conducían a ecuaciones diferenciales creció colosalmente y seguía creciendo. En esencia, todos los problemas aplicados del análisis conocidos entonces, exigían la resolución de numerosas y diversas ecuaciones diferenciales. Cada una de estas ecuaciones fue dictada por un problema concreto de las ciencias exactas y su solución prometía el descubrimiento de importantes secretos de la naturaleza o perfeccionamientos técnicos.

Las cuestiones de la teoría general de las ecuaciones diferenciales a comienzos del siglo XVIII, naturalmente, no podían ser propuestas. Era sumamente débil el aparato adecuado para la resolución de ecuaciones diferenciales, no se habían separado clases particulares de ecuaciones, no estaban estudiadas sus particularidades. Quedaba una vía única, la de un trabajo perseverante y metódico en la resolución de clases de ecuaciones lo más amplias posible. En este camino se situaron todos los grandes matemáticos de aquella época. Demasiado importante y urgente era la tarea. La cantidad de obras y resultados concretos obtenidos por ellos es enorme. Podemos aquí sólo señalar algunas tendencias del desarrollo e indicar los resultados más importantes.

Resultados notables de este trabajo ya comenzaron a advertirse en los años 20 del siglo XVIII. En el año 1724 el matemático italiano J. Ricatti publicó una investigación multilateral de la ecuación, denominada por proposición de D'Alembert (1769), ecuación de Ricatti. Se trata de la integrabilidad en funciones elementales de una ecuación diferencial no lineal

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^{\alpha}$$

(α , a , b son constantes). Ricatti consideró inicialmente esta ecuación en forma más compleja

$$x^n \frac{dq}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{q},$$

donde y y q son funciones cualesquiera de x . No obstante, se vio obligado a simplificar el problema poniendo $q = x^n$.

La investigación de la ecuación de Ricatti fue ocupación de muchos matemáticos: G. Leibniz, Ch. Goldbach, Jo. Bernoulli, N. Bernoulli, D. Bernoulli y otros. D. Bernoulli estableció (1724) que esta ecuación se integra mediante funciones elementales si

$$\alpha = -2 \quad \text{ó} \quad \alpha = \frac{4k}{2k-1},$$

(k es un número entero). En el año 1738, Euler aplicó a la resolución de esta ecuación la teoría de las series. Al mismo tiempo él comienza a considerar la ecuación general de Ricatti

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

($P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ son funciones continuas), formas particulares de la cual son sólo la ecuación especial de Ricatti, sino también la ecuación de Bernoulli (cuando $R(x) = 0$) y la ecuación diferencial lineal (cuando $P(x) = 0$). Euler en los años 60 del siglo XVIII descubrió que cuando existen dos soluciones particulares de la integración de la ecuación de Ricatti se reduce a cuadraturas. Si se conoce una integral particular v , entonces ella puede ser transformada en una ecuación diferencial lineal por la sustitución

$$y = v + \frac{1}{z}.$$

Ya a finales de los años 30 del siglo XVIII, Euler elaboró un algoritmo de resolución de ecuaciones diferenciales lineales, con coeficientes constantes,

basado en la reducción del orden de ciertas ecuaciones homogéneas con ayuda de la función exponencial. En el año 1743 en uno de los trabajos de Euler fue publicado el método de resolución de una ecuación diferencial lineal homogénea de cualquier orden con coeficientes constantes con ayuda de la sustitución

$$y = e^{kx},$$

y en el caso de raíces reales múltiples de la ecuación característica, con ayuda de la sustitución

$$y = ue^{kx}.$$

En el caso de la existencia de un par de raíces complejas $\alpha \pm \beta i$, la sustitución de la misma forma

$$y = ue^{\alpha x}$$

reduce el problema a la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \beta^2 u = 0$$

la forma trigonométrica de cuya solución era conocida por Euler desde el año 1740.

Después de algunos años (en 1753) para reducir el orden de una ecuación

$$Ay + B \frac{dy}{dx} + C \frac{d^2y}{dx^2} = X.$$

Euler aplicó el factor e^{mx} . A continuación supuso que la solución de la nueva ecuación tiene la forma

$$e^{mx} \left(A_1 y + B_1 \frac{dy}{dx} \right) = \int X e^{mx} dx,$$

donde A_1 y B_1 son coeficientes indeterminados. Estos coeficientes y también m los encontró mediante la diferenciación de ambos miembros de esta ecuación y la comparación término a término.

D'Alembert (en el año 1766) encontró que la solución general de una ecuación no homogénea lineal es igual a la suma de cierta solución particular y la solución general de la correspondiente ecuación homogénea.

Muchos científicos (en especial Clairaut y Euler) intensivamente elaboraron el método del factor integrante. Junto a la búsqueda de tipos especiales de factores integrantes para clases aisladas de ecuaciones fueron propuestos problemas más generales. Así, en los años 1768—1769, Euler investigó las clases de ecuaciones diferenciales de primer orden que tienen factor integrante del tipo dado e intento de extender estas investigaciones a ecuaciones de orden superior.

Por iniciativa de Euler en los años 30, se formó y fortaleció el convencimiento que para la integración de ecuaciones diferenciales, incluso de las clases, al parecer, sencillas, los conjuntos de funciones elementales, incluyendo las trascendentes más sencillas, son insuficientes.

Con este objetivo dentro de la teoría de ecuaciones diferenciales era necesario limitarse a expresar las soluciones en cuadraturas; los métodos propiamente de cálculo de integrales, que aquí se obtenían, estaban incluidos en el cálculo integral propio.

Junto a las ecuaciones diferenciales ordinarias fueron encontradas las soluciones de ciertas ecuaciones en derivadas parciales. Ya alrededor del año 1735 Euler, estudiando diferentes problemas sobre trayectorias, llegó a las ecuaciones "modulares" o "paramétricas".

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y),$$

como también

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F(x, y, z),$$

denominada así porque se trata de una familia de curvas en cuyas ecuaciones entra a formar parte un parámetro variable o, según la terminología de la época, un módulo. La aplicación del factor integrante R a la segunda ecuación dio a Euler condición de integrabilidad en la forma

$$\frac{\partial R}{\partial x} = F \frac{\partial R}{\partial z} + R \frac{\partial F}{\partial z}$$

de donde Euler encontró la expresión para el factor integrante

$$\ln R = \int \frac{\partial F}{\partial z} dx.$$

Algunas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales las resolvió D'Alembert, entre ellas la ecuación de la cuerda oscilante de la que se habló antes.

De esta manera en el dominio de la resolución de ecuaciones diferenciales en la primera mitad del siglo XVIII el trabajo consistía en la solución de ecuaciones particulares específicas. En este período fueron elaboradas las premisas para la creación de las primeras formas de la teoría general, entre ellas una serie de conceptos fundamentales.

En el año 1743 surgieron los conceptos de integrales particular y general, encontradas por Euler ya en el año 1739. Ellos fueron publicados en la memoria donde se trata de un único algoritmo de resolución de ecuaciones diferenciales lineales de orden n con coeficiente constantes. En los trabajos

de estos años Euler consideró también las soluciones singulares de una serie de ecuaciones diferenciales, las cuales ya eran conocidas del "Methodus incrementorum etc." de Taylor (1715).

Taylor advirtió una solución singular considerando la ecuación

$$4x^3 - 4x^2 = (1 + z^2)^2 \left(\frac{dx}{dz}\right)^2. \quad (1)$$

Mediante la sustitución

$$x = \frac{v}{y^2}, \quad v = 1 + z^2$$

transformó (1) en la ecuación

$$y^2 - 2zyy' + vy'^2 = 1. \quad (2)$$

Diferenciado

$$2yy''(vy' - zy) = 0$$

y a continuación igualando a cero

$$vy'' - zy = 0$$

y sustituyendo en la ecuación (2)

$$y' = \frac{zy}{v},$$

Taylor obtuvo la expresión

$$y^2 = v, \quad x = 1,$$

la cual denominó "cierta solución singular del problema".

La no claridad de este tipo de solución, no contenida en la solución general, y que motivó a Taylor a denominarla "singular", se conservó en las obras de Clairaut, el cual consideró (en el año 1736) la solución singular de la ecuación

$$y = (x+1) \frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Euler, no obstante, ya en el año 1736 advirtió que si se encuentra un factor integrante $\mu(x, y)$ de la ecuación diferencial, entonces $\frac{1}{\mu} = 0$ puede dar una solución singular. Por ejemplo,

$$x dx + y dy = \sqrt{x^2 + y^2 - r^2} dy$$

tiene como factor integrante

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}$$

y la solución singular será

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

Sólo en los años 1774—1776, Lagrange logró aclarar detalladamente como obtener las soluciones singulares: o bien directamente de la ecuación diferencial, o bien de la solución general diferenciando a partir de la constante. El dio así mismo la interpretación geométrica de la solución singular cómo la familia envolvente de las curvas integrales. Una exposición sistemática y unificada de todos los resultados sobre las soluciones singulares de las ecuaciones diferenciales la dio Lagrange en el año 1801 en las "Lecciones sobre el cálculo de funciones".

Podemos señalar que los éxitos prácticos alcanzados por los más grandes científicos del siglo XVIII en la resolución de ecuaciones diferenciales resultaron en los años 60 tan significativos que se creó la posibilidad objetiva para la construcción de la teoría general de las ecuaciones diferenciales.

Esta teoría general fue por vez primera expuesta por Euler en su famosa obra "Cálculo integral". Ella, como ya indicamos, consta de tres tomos que vieron la luz sucesivamente en los años 1768, 1769 y 1770, y culmina la serie de libros de Euler dedicados a la exposición sistemática del análisis contemporáneo a él, y sus aplicaciones. La teoría de las ecuaciones diferenciales, ordinarias y en derivadas parciales, constituye el contenido fundamental de este trabajo. Sólo es precedida por la integración de funciones, la cual ocupa la primera mitad del primer tomo. Tras ella sigue sólo el cálculo diferencial que constituye un apéndice al tercer tomo.

Las ecuaciones diferenciales se encontraban en estos años en un estado de la más enérgica elaboración y búsqueda de métodos de solución de nuevos y nuevos tipos de ecuaciones. Euler por primera vez en el "Cálculo integral" dio una clasificación rigurosa y precisa de todas las ecuaciones conocidas y expuso sistemáticamente los métodos de su resolución hasta los resultados más actuales, "no hace mucho encontrados", según su expresión. Una enorme cantidad de estos últimos resultados fueron hallados por el propio Euler. De esta manera, la teoría se construyó como un conjunto de métodos de resolución de ecuaciones y estas últimas se consideraban en relación a los problemas físicos que las generaban. Ante tal situación, la teoría de las ecuaciones diferenciales aún no tenía necesidad de proponer el problema sobre los teoremas de existencia y unicidad, tan característicos para el período posterior.

Al parecer, es inoportuno describir el contenido de este enorme trabajo de Euler, saturado por un conjunto de métodos y resultados concretos. Además, esta obra fue editada totalmente en una traducción al ruso. Por ello pasemos a la caracterización de las direcciones fundamentales en la teoría de ecuaciones diferenciales que se formaba en la segunda mitad del siglo XVIII.

Más evidentemente, estas direcciones fundamentales surgieron en el campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Estas direcciones, se formaban, comúnmente como resultado de las exigencias en la resolución de problemas aplicados o grupos de ellos. Alrededor de éstos se concentraban la mayor cantidad de trabajos.

La primera dirección consistía en el desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales, principalmente las de segundo orden, y sus sistemas tanto con coeficientes constantes como variables. A tal género de ecuaciones conducían los problemas sobre las pequeñas oscilaciones de los puntos materiales y sus sistemas con un número finito de grados de libertad. Ejemplo de tales problemas son los relacionados con la construcción de relojes de péndulos y la aplicación de aparatos con péndulos para las investigaciones gravimétricas. A esta clase se vinculan también los problemas sobre los movimientos oscilatorios resortes de reloj, surgidos después de que quedó clara la limitación de los relojes de péndulo. El paso de las oscilaciones de un punto a las oscilaciones de un sistema de puntos trajo consigo la ampliación del problema al caso de un número infinito de grados de libertad: oscilaciones de una columna de aire, una membrana, etc.

Los problemas de la dinámica analítica de un punto y un sistema de puntos promovió, en calidad de otra dirección principal de la teoría de ecuaciones diferenciales, el desarrollo de los métodos de resolución de las ecuaciones no lineales de primero y segundo orden y sus sistemas.

El movimiento de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo se expresa mediante un sistema no lineal de tres ecuaciones de segundo orden respecto de $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\theta(t)$, los llamados ángulos de Euler, expresados como funciones del tiempo. El movimiento del centro de gravedad del planeta en el sistema solar se expresa mediante la solución de un sistema cuasilineal

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + R^2 \frac{x_i}{\left(\sum_i x_i^2\right)^{3/2}} = 0 \quad (i = 1, 2, 3; k = \text{const}).$$

Las ecuaciones de Euler también resultan, en el caso general, cuasilineales, surgidas en el cálculo variacional durante la resolución del problema sobre el extremo del funcional

$$\int_a^b F(x, y, y') dx.$$

La ecuación no lineal de segundo orden se obtiene, en particular, en el problema sobre la búsqueda de las geodésicas sobre las superficies. A ecuaciones del mismo tipo conduce la resolución de la ecuación del movimiento de un punto en un medio resistente.

La complejidad del problema de resolución de las ecuaciones y la imposibilidad de integrarla en forma finita sirvió de causa fundamental para el surgimiento de una tercera gran dirección. Se trata de la elaboración de métodos aproximados de solución de ecuaciones diferenciales. El método clásico de quebradas, actualmente ampliamente utilizado en los teoremas de existencia y unicidad de la solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

con las condiciones iniciales $x = x_0, y = y_0$ fue hallado y publicado en el año 1768 por Euler. Los problemas de la mecánica celeste en cuya formulación se tienen en cuenta las fuerzas de perturbación constituyó el primer objeto de aplicación de los métodos de integración aproximada. Considerando la comparativa pequeñez de las excentricidades de las órbitas de los planetas y las fuerzas de perturbación, la solución queda, en primera aproximación, en la forma de una órbita circular, la cual posteriormente se corrige.

Las aplicaciones geométricas de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, constituida en una rama especial de las matemáticas, la geometría diferencial dejó huellas también en la teoría de las propias ecuaciones. La teoría de las soluciones singulares constituyó una dirección notable en la teoría general de las ecuaciones diferenciales. El estudio de las familias de curvas integrales y la solución de los problemas sobre la búsqueda de las trayectorias envolventes e isogonales, la extensión de los resultados a las familias de superficies, tal es la vía de investigación en esta cuarta dirección. Su significado creció cuando el problema de la existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones diferenciales pasó a un primer plano.

Las investigaciones en la rama de la creación de la teoría de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, a pesar de su multiplicidad, no daba aún la posibilidad de separar claramente las direcciones fundamentales. El problema era todavía demasiado complicado. Y aunque un gran número de problemas de física, de mecánica y de la teoría de superficies era reducido a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, la resolución de ellas progresaba lentamente.

El trabajo sistemático en esta dirección comenzó a desarrollarse sólo en los años 60. A Euler le pertenece la primera monografía, donde se hace un intento de construcción de la teoría de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Se trata del tercer tomo del "Cálculo integral", publicado en el año 1770. Junto a Euler trabajaron en la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales D'Alembert, Lagrange, Laplace, Monge y otros muchos científicos.

Una de las ideas principales, relativamente, con bastante rapidez reafirmada, en la teoría de las ecuaciones de primer orden, fue la idea de la reducción de su integración a la integración de ecuaciones ordinarias o sus sistemas. Esto fue utilizado por D'Alembert (1768) en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Métodos análogos fueron desarrollados por Euler. El método de reducción de la ecuación diferencial lineal general

a la integración del sistema $Pp + Qq = R$

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R},$$

elaborado en el año 1776 por Laplace y Lagrange está incluido en los textos actuales. Cuando un poco más tarde (en los años 1781, 1787) Lagrange extendió este método a las ecuaciones lineales con un número arbitrario de variables, expresó abiertamente que la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales depende del arte de su reducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias.

En la resolución de ecuaciones no lineales de primer orden Euler (1770) mostró que una ecuación diferencial con tres incógnitas siempre puede reducirse a una ecuación lineal con cuatro incógnitas. Este resultado fue desarrollado en los trabajos de Lagrange (1774), Monge (1787), Sharpi (1784). Este último llevó hasta el final la resolución de la ecuación no lineal de primer orden con dos variables independientes. La idea del método consistía en que junto a la ecuación

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

se elige otra ecuación,

$$u(x, y, z, p, q) = a,$$

de modo que este sistema de dos ecuaciones sea totalmente integrable. Las funciones, determinadas a partir del sistema de ecuaciones,

$$p = p(x, y, z, a), \quad q = q(x, y, z, a)$$

conducen, como ahora sabemos a la ecuación de Pfaff

$$dz = p(x, y, z, a)dx + q(x, y, z, a)dy.$$

La integral de esta ecuación

$$\Phi(x, y, z, a, b) = 0,$$

donde a y b son constantes arbitrarias, será la integral total de la ecuación

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Sin embargo, este método se conoció sólo en el año 1814, y fue dado a conocer por el académico francés Lacroix, ya que Sharpí, inmediatamente después de la presentación de su memoria en la Academia de París, falleció. Sharpí no pudo extender su método a las ecuaciones con un número grande de variables. Esta dificultad fue superada en el siglo XIX en los trabajos de K. Jacobi y Pfaff.

En el curso de la elaboración de los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden se aclararon las formas de sus soluciones, la interrelación entre ellas y fue introducida la terminología que se conserva actualmente. Lagrange realizó un resumen de este proceso en trabajos de los años 1774 y 1776. Así la solución dependiente de dos constantes arbitrarias recibió la denominación de completa. Si en la solución completa

$$z = \varphi(x, y, a, b)$$

se pone

$$b = \psi(a),$$

donde $\psi(a)$ es una función arbitraria y de las ecuaciones

$$z = \varphi(x, y, a, \psi(a)) \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial a} = 0$$

se elimina a , entonces se obtiene la solución denominada general. Finalmente, la eliminación de a y b de las ecuaciones

$$z = \varphi(x, y, a, b), \quad \frac{\partial z}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial b} = 0$$

daba la solución que recibió la denominación de especial y posteriormente singular. Ya que la resolución de ecuaciones diferenciales no siempre se reduce a cuadraturas, Lagrange introdujo diferentes términos: solución de la ecuación y su integral.

Junto a los métodos analítico-computacionales de resolución de ecuaciones se desarrollaba también la teoría geométrica de sus soluciones. En general, la teoría de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales resultó estrechamente vinculada a los problemas y conceptos de la geometría (teoría de superficies y curvas en el espacio). Esta dirección fue desarrollada en una serie de admirables trabajos de G. Monge. Este grupo de cuestiones lo veremos más adelante en el capítulo dedicado al desarrollo de la geometría en el siglo XVIII.

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden surgieron preferentemente en el curso de resolución de problemas físicos. De ellos, ante todo, debe indicarse el problema sobre la oscilación de la

cuerda que conduce a la ecuación

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

sobre la que se habló en el capítulo anterior. Alrededor del año 1760, Euler, trabajando en problemas de hidrodinámica introdujo la ecuación de la expansión volumétrica de los líquidos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Para esta ecuación Euler encontró una solución particular y en un caso (cuando el movimiento se realiza en dirección a un centro fijo y las velocidades en las superficies de las esferas correspondientes son idénticas), la integral general. El problema de la oscilación de una membrana Euler lo redujo, en los años 60 del siglo XVIII, a la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Su solución la halló en la forma de serie para una función trascendente, la cual ahora denominamos cilíndrica o (lo que no está en absoluto fundamentado) de Bessel, por el apellido del astrónomo alemán F. V. Bessel.

Los problemas sobre la oscilación de un gas en un tubo con diferentes secciones, la teoría del potencial y otros conducían también a ecuaciones de segundo orden. Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales constituían una clase singular y numerosa de ecuaciones del siglo XVIII.

En lo que se refiere a ecuaciones de orden mayor, se investigaron sólo en forma episódica.

Las investigaciones sobre las ecuaciones de segundo orden fueron numerosas, pero la creación de la teoría general se tropezaba con dificultades insuperables en aquella época. Los primeros éxitos se advierten hacia el año 1770, cuando Euler aplicó las transformaciones de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden a la forma canónica. Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

mediante las sustituciones

$$t = x + ay, \quad u = x - ay$$

se reduce a la forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial t} = 0.$$

La integral general de esta ecuación tiene la forma

$$z = f(t) + \varphi(u) = f(x + ay) + \varphi(x - ay).$$

Por tal vía se comenzó la formación de los tipos canónicos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden.

La ecuación diferencial lineal general en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \beta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial z}{\partial x} + \delta \frac{\partial z}{\partial y} + \lambda z + T = 0,$$

donde los coeficientes y el término independiente son ciertas funciones de x y y , fue examinada por Laplace (1777), creando para su resolución un método único, que recibió la denominación de "método de las cascadas".

La esencia de este método, así como el elaborado para la ecuación diferencial lineal general en derivadas parciales de primer orden

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \varphi(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + \psi(x, y, z) = 0,$$

el cual resolvió Laplace, consiste en un cambio de variables. Introduciendo dos nuevas variables s y s_1 , Laplace llega a la ecuación que actualmente lleva su nombre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial s_1} + m \frac{\partial u}{\partial s} + n \frac{\partial u}{\partial s_1} + lu + T = 0$$

ó, brevemente, $D(u) = 0$.

Si $\varphi(s)$ y $\psi(s)$ son dos funciones arbitrarias y si hacemos

$$\varphi_1(s) = \int \varphi(s) ds, \quad \varphi_2(s) = \int \varphi_1(s) ds, \dots$$

$$\psi_1(s_1) = \int \psi(s_1) ds_1, \quad \psi_2(s_1) = \int \psi_1(s_1) ds_1, \dots,$$

entonces la solución puede escribirse en la forma de la serie

$$u = A_0 \varphi_1(s) + A_1 \varphi_2(s) + A_2 \varphi_3(s) + \dots + B_0 \psi_1(s_1) + B_1 \psi_2(s_1) + B_2 \psi_3(s_1) + \dots$$

La situación de esta expresión en la ecuación $D(u) = 0$ da para la determinación de los coeficientes $A_0, A_1, \dots, B_0, B_1, \dots$ ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial A_0}{\partial s_1} + mA_0 = 0; \quad \frac{\partial B_0}{\partial s} + nB_0 = 0;$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial s_1} + mA_1 + D(A_0) = 0; \quad \frac{\partial B_1}{\partial s} + nB_1 + D(B_0) = 0;$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial s_1} + mA_2 + D(A_1) = 0; \quad \frac{\partial B_2}{\partial s} + nB_2 + D(B_1) = 0;$$

Si la serie para u se interrumpe, o sea, si para cierto k tuviera lugar $A_k = 0, B_k = 0$, entonces la integral general se expresa en forma finita. Cuando esto no tiene lugar, Laplace representa la solución no mediante una serie, sino con ayuda de integrales definidas. Así él mostró que en este caso

$$u = \int_0^s p \varphi(z) dz + \int_0^{s_1} p_1 \psi(z) dz,$$

donde p y p_1 son integrales parciales, $D(u) = 0$,

$$p = \int_0^s \Gamma(s-z) \varphi(z) dz, \quad p_1 = \int_0^{s_1} \Pi(s-z) \psi(z) dz,$$

y en estas integrales

$$\Gamma(s-z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{k-1} \frac{(s-z)^{k+1}}{(k-1)!};$$

$$\Pi(s-z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{k-1} \frac{(s-z)^{k+1}}{(k-1)!}.$$

Laplace mostró que su método resulta más general que todos los demás. En el caso, por ejemplo, cuando l, m, n son constantes en la ecuación $D(u) = 0$

$$T = 0, \quad m = \frac{f}{s + s_1}, \quad n = \frac{g}{s + s_1}, \quad l = \frac{h}{s + s_1}$$

se obtiene un caso particular de integración de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Los perfeccionamientos posteriores introducidos en el método, de las cascadas por Lagrange y Laplace elevaron este método a su forma actual.

Resumamos. El aparato del análisis matemático en el transcurso del siglo XVIII se desarrolló con rapidez extraordinaria tomando una forma y un volumen próximo al actual. La diferenciación y también la integración mediante funciones elementales fueron, en lo fundamental, concluidas. Las ecuaciones diferenciales tanto las ordinarias como en derivadas parciales, poco a poco se convirtieron en una parte importantísima del análisis matemático, en su tratamiento algorítmico-operativo. Junto a la elaboración de los métodos de resolución de clases independientes de ecuaciones se formaron los elementos de la teoría general.

práctico. El surgimiento del cálculo de variaciones y su separación como disciplina matemática independiente, la cual elabora los métodos generales de determinación de los extremos de las funcionales, estuvo condicionado por la necesidad de solucionar una clase especial de problemas extremales geométricos, mecánicos y físicos de carácter práctico, denominados problemas variacionales.

Problemas de variaciones. En la historia de las matemáticas los problemas de este tipo fueron propuestos e investigados hace mucho. Como ejemplo pueden citarse la teoría antigua de los isoperimétricos y numerosos problemas extremales en la física (mecánica y óptica). No obstante, no los consideraremos aquí, ya que los procedimientos de resolución de estos problemas extremales eran aún individuales y en esencia no podían constituir un cálculo especial. Hacia finales del siglo XVIII se acumularon y fueron aislados en una clase particular los problemas extremales de un género singular, los cuales no admitían solución con los medios del recientemente aparecido análisis infinitesimal.

Este fue, en primer lugar, el problema de Newton propuesto y resuelto por él en los "Elementos matemáticos de la filosofía natural" (1687). En él se requería hallar una curva que pasara por dos puntos dados y tal que al girar en torno a un eje dado generara un cuerpo de revolución, el cual experimentara la menor resistencia en el movimiento a lo largo del eje. Otros problemas de variaciones fueron el problema de la braquistócrona (1696); el problema isoperimétrico (1697); el problema de las líneas geodésicas sobre las superficies (1697). En esencia ya en tiempos tan tempranos fueron trabajados todos los tipos fundamentales de problemas de variaciones.

Las resoluciones de los problemas indicados fueron halladas a finales del siglo XVII, principios del XVIII. Newton dio para su problema el equivalente de una ecuación diferencial en forma de proporción geométrica. El problema de la braquistócrona fue resuelto por Jo. Bernoulli, y a continuación por Newton, Leibniz y Ja. Bernoulli. El problema isoperimétrico y el problema de las líneas geodésicas fueron resueltos también simultáneamente por varios científicos. Los métodos de resolución eran insuficientemente generales, especiales, pero en ellos cada vez más claramente se revelaban rasgos generales. Se creaban las posibilidades para la elaboración de un método general.

El primer método general de resolución de problemas de variaciones fue elaborado en una serie de trabajos de Euler en los años 1726—1744. Inicialmente Euler, considerando los métodos de resolución del problema de la braquistócrona, propuso (1726) este mismo problema en condiciones de resistencia ejercida por el medio. A continuación (1728) dedujo la ecuación diferencial de la línea geodésica sobre una superficie. La poca generalidad e insuficiencia de los procedimientos aplicados en la resolución

de problemas de la clase ya reconocidos por su particularidad no satisfacía a Euler. Así comenzó a buscar un método general y hacia el año 1732 lo encontró. En el artículo de Euler "Solución general del problema isoperimétrico presentado en un sentido más amplio", encontramos la primera formulación general de un problema de variaciones unidimensional.

Este trabajo de Euler es interesante especialmente porque marca el inicio del viraje dialéctico, característico para el desarrollo de los cálculos matemáticos, cuando las resoluciones de problemas independientes comienzan a considerarse como aplicaciones de un método general. Este último, el método, se convierte en objeto del cálculo.

Euler clasifica los problemas donde se buscan, según su expresión, curvas que gozan de una propiedad extremal. En estos, en calidad de extremal, se elige la propiedad de las integrales de tipo particular, tomadas a lo largo de la curva, de tomar valores maximales o minimales. La clasificación de Euler es la siguiente: a) de todas las curvas en general determinar aquella que tiene la propiedad extremal A ; b) de una familia de curvas con una propiedad común A , elegir la extremal respecto a la propiedad B ; c) del conjunto de curvas que satisfacen las dos propiedades A y B , elegir la extremal respecto a la propiedad C , etc.

Las propiedades, o como decimos ahora, las funcionales para Euler eran integrales. Casi todas ellas tienen la forma

$$\int f(x, y, y') dx.$$

El método se basa en: a) la idea de la conservación del valor extremal de la propiedad cuando el elemento de la extremal se sustituye por el elemento de otra curva próxima, b) principio de Leibniz — Ja. Bernoulli de que la extremal conserva sus propiedades extremales en cualquiera de sus partes. El método consiste en variar una, dos, etc. (en dependencia del tipo de problemas) ordenadas y en igualar los valores de las propiedades del elemento correspondiente de la extremal antes y después de la variación.

Cuatro años después (en 1736, publicado en 1741) Euler generalizó este método en los integrales de la forma

$$\int_a^b Q(x, y, x', y', y'') dx,$$

donde

$$s = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Finalmente, hacia el año 1744, el método de Euler adquirió una generalidad tan grande que se convirtió en un cálculo especial, expuesto sistemáticamente por Euler en el libro "Método de búsqueda de líneas curvas con

propiedades de máximo o mínimo, o la resolución del problema isoperimétrico tomado en su sentido más amplio”, el primer libro en la historia, sobre cálculo de variaciones.

En lugar de la resolución de un problema de variaciones, aún difícil, o una clase entera de ellos, Euler presentó un método general, el cual se puede aplicar a la resolución de diferentes tipos de tales problemas. El objetivo de este método, denominado por Euler “método de los máximos y mínimos aplicados a líneas curvas” es el más general: la búsqueda de líneas curvas para las cuales cierta magnitud prefijable alcanza su valor máximo o mínimo. Consideremos este método en su esencia.

El problema recién formulado está presentado todavía insuficientemente preciso. Euler introduce las siguientes condiciones de determinación: a) el problema se plantea y resuelve para un mismo segmento del eje de abscisas; b) se introducen dos tipos de extremos absolutos y relativos; c) se define la forma de la funcional como una “magnitud integral indefinida”.

$$W = \int_{x_0}^x Z(x, y, y', y'', \dots) dx.$$

Las ideas sobre las que basaba Euler su método absoluto de los máximos y mínimos son comparativamente sencillas. Supongamos que entre todas las posibles curvas en el intervalo $[x_0, x]$ es necesario elegir una $f(x, y) = 0$ tal que la integral

$$W = \int_{x_0}^x Z dx$$

alcanze un valor extremal. Cada curva $y = y(x)$, definida en cierto dominio de valores $x_0 \leq x \leq x_1$, Euler la sustituye por un polígono, las abscisas de cuyos vértices se eligen en el eje Ox a distancias iguales entre sí. Esto, según la idea de Euler da la posibilidad de aproximar la curva con cualquier grado de exactitud.

La fórmula integral del máximo y el mínimo

$$I = \int_{x_0}^x Z(x, y, y', y'', \dots) dx$$

la sustituye por una suma de la forma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} Z(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \dots) dx,$$

donde

$$dx = \frac{x - x_0}{n}, \quad x_i = x_{i-1} + dx,$$

y_i es la ordenada en los puntos fijos x_i . Además, sustituyendo las derivadas por las relaciones en diferencias finitas

$$y'_i = p_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{dx}; \quad y''_i = g_i = \frac{y'_{i+1} - y'_i}{dx} = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{dx^2}, \dots,$$

Euler trata de conseguir la posibilidad de considerar el valor de la fórmula del máximo o el mínimo para una curva dada como función de la ordenada:

$$I = F(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Después resuelve un problema extremal usual: varía cierta ordenada arbitraria y_i ; la diferencia de los valores de I correspondientes a la curva original y variada, los iguala a cero. De esta manera se obtiene la ecuación diferencial de la extremal.

Así, Euler reduce la resolución del problema variacional a la resolución de otro, del extremo de una función de varias variables (ordenadas). Este método se convirtió en universal para cualquier tipo de problemas de variaciones y resulta fundamental para el cálculo de variaciones en la forma inicial creada por Euler.

Sea para simplificar $z = z(x, y, y')$. Entonces

$$\int Z(x, y, y') dx$$

se sustituye por

$$\sum_{i=0}^{n-1} Z(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{dx}) dx.$$

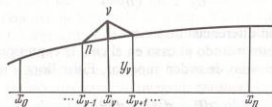


Fig. 47

La ordenada y_n recibe un incremento de n_y (fig. 47). Entonces en la suma indicada cambian solo los términos que contienen y_n . Estos son

$$Z(x_{n-1}, y_{n-1}, \frac{y_n - y_{n-1}}{dx}) dx \quad \text{y} \quad Z(x_n, y_n, \frac{y_{n+1} - y_n}{dx}) dx.$$

Para calcular su incremento, Euler diferenciaba Z según x , y , p y sustituía las diferenciales dx , dy , dp por los incrementos de las magnitudes correspondientes x , y , p .

$$dZ(x_{p-1}, y_{p-1}, p_{p-1}) = M dx_{p-1} + N dy_{p-1} + P dp_{p-1},$$

$$dZ(x, y, p) = M' dx + N' dy + P' dp.$$

Ya que el incremento lo recibe sólo y , entonces

$$dx_{p-1} = dx_p = dy_{p-1} = 0, \quad dy_p = +nv,$$

$$dp_{p-1} = +\frac{nv}{dx}, \quad dp_p = -\frac{nv}{dx}.$$

Por consiguiente, la magnitud del incremento

$$Z(x_{p-1}, y_{p-1}, p_{p-1}) dx + Z(x, y, p) dx$$

será

$$Pnv + N'nv dx - P'nv.$$

Pero $P' - P = dP$, y en lugar de N' puede escribirse N . Entonces

$$Pnv + Nnv dx - P'nv = 0$$

o

$$-dP + N dx = 0,$$

esto es

$$N - \frac{dP}{dx} = 0,$$

lo que en el simbolismo habitual a nosotros significa

$$\frac{dZ}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dZ}{dy'} \right) = 0$$

o sea, la ecuación diferencial de Euler.

Al extender este método al caso en el cual la expresión subintegral depende de las derivadas de orden superior, Euler llega a la ecuación de la forma

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \dots = 0.$$

Y él no se detiene ante la posibilidad de que esta serie se prolongue indefinidamente. Sólo advierte que la ecuación diferencial de la curva siempre tendrá un orden dos veces superior a la fórmula del máximo o del mínimo. De esta observación naturalmente surge la condición que garantiza la determinación del problema: entre todas las curvas que pasan a través de $2n$

puntos dados, definir aquella para la cual $\int Z dx$, donde

$$Z = Z(x, y, y', \dots, y^{(n)}),$$

sea máxima o mínima (fig. 48).

La exposición del método, dado por Euler, es evidente que no satisface las exigencias del actual rigor científico. En ella no se fundamentan, en particular, las cuestiones de la validez del paso al límite y el intercambio de los pasos al límite.

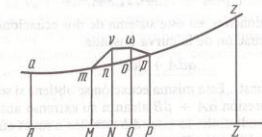


Fig. 48

No se demuestra tampoco, si el límite de los extremos de las funciones aproximantes da el extremo del funcional. Sin embargo, es necesario recordar que Euler no pudo siquiera plantear las exigencias de rigor científico en el sentido que se le da en el siglo XX. Además, la investigación de las cuestiones señaladas llevará no sólo a la búsqueda de la ecuación diferencial de la extremal sino también a la aproximación de la solución de esta ecuación mediante la solución de un sistema de ecuaciones ordinarias, lo cual se salía de los límites del problema propuesto por Euler.

El método de Euler de resolución de problemas sobre extremos relativos tiene como objetivo la búsqueda de la extremal no entre todas las curvas definidas en un segmento dado del eje de abscisas, sino entre cierta familia de ellas, cada una de cuyas curvas tiene una o varias propiedades. Si la condición complementaria consiste en la conservación de un valor constante de otra (o varias) funcional — integral, entonces se tiene el problema isoperimétrico generalizado. Euler la reduce al problema del cálculo de la integral absoluta de la forma siguiente.

Para satisfacer simultáneamente dos condiciones (si se trata de curvas que tienen una propiedad común), la invariabilidad del valor de la propiedad común B y la fórmula del máximo o mínimo A , es necesario dar la variación no de una, sino de dos ordenadas vecinas. "Los valores diferenciales" de ambas propiedades tendrán, en virtud de la variación de las dos ordenadas y_p e y_{p+1} (ver fig. 47) en nv y $o\omega$ respectivamente la siguiente for-

ma:

$$\begin{aligned}dA_s \cdot nv + dA_{s+1} \cdot \omega; \\ dB_s \cdot nv + dB_{s+1} \cdot \omega.\end{aligned}$$

De las condiciones dadas (extremalidad de A y constancia de B) se deduce que estas dos expresiones deben ser igualadas a cero:

$$\begin{aligned}dA_s \cdot nv + dA_{s+1} \cdot \omega = 0; \\ dB_s \cdot nv + dB_{s+1} \cdot \omega = 0.\end{aligned}$$

Después de la eliminación, en este sistema de dos ecuaciones, de nv y ω , Euler obtiene la ecuación de la curva buscada

$$\alpha dA + \beta dB = 0$$

($\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$). Esta misma ecuación se obtiene si se busca la curva para la cual la expresión $\alpha A + \beta B$ alcanza su extremo absoluto.

El método indicado Euler lo extendió también a casos aún más complejos: a) la función subintegral Z en la expresión de la funcional, es ella misma una funcional; b) esta función subintegral está dada mediante una ecuación diferencial, el método de cuya solución es desconocido. Así, por ejemplo, se presenta por Euler el problema de la braquistócrona en un medio resistente. Como advirtió Euler, aquí se trata de la búsqueda del máximo de la expresión

$$\int_0^l \frac{dx\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{v}}$$

dada la condición

$$dv = g dx - hv^n dx\sqrt{1+p^2}.$$

Además él resolvió correctamente la cuestión sobre los límites de aplicación del denominado principio de Leibniz — Bernoulli sobre la presencia de la propiedad extremal en cada punto de una extremal.

En el libro de Euler se citan un gran número de ejemplos (más de 60), los cuales ilustran las posibilidades del nuevo método. En ellos queda demostrado el valor práctico del cálculo y se establece su estrecha relación con la mecánica y la física. Además, de aquellas insuficiencias, las cuales en el siglo XVIII era aún imposible advertir, el método de Euler tenía todavía otra: la voluminosidad. En el transcurso de algunos años posteriores Euler trabajó con ahínco en la búsqueda de un algoritmo cómodo.

Paso de los métodos directos al cálculo de variaciones. La situación comenzó a cambiar desde el año 1755 cuando el aún joven profesor de matemáticas de la escuela de artillería en la ciudad de Turín, Lagrange comunicó a Euler sobre el método general analítico, creado por él, de cálculo de la

variación de la integral mediante la integración por partes. Este método se basaba en la introducción de la variación de una función y en la extensión a las variaciones de las reglas del cálculo diferencial. Aclaremos esta idea más detalladamente.

Para comparar el valor de la integral $I(C)$ a lo largo de la curva C con sus valores a lo largo de curvas vecinas, Lagrange sustituía las funciones

$$y = y(x), \quad z = z(x),$$

que definen la curva C , añadiendo a ellas las magnitudes $\delta y(x)$, $\delta z(x)$, o sea, sus variaciones. Si las variaciones en los puntos extremos del segmento $[x_1, x_2]$, sobre el que se considera el problema, se anulan, entonces se forman dos curvas de comparación C y $C + \delta C$ con extremos comunes. La última de estas curvas está dada por las funciones

$$y(x) + \delta y(x), \quad z(x) + \delta z(x).$$

De todas las curvas de comparación posibles, ahora se requiere elegir tal curva que para cualesquiera variaciones $\delta y(x)$, $\delta z(x)$

$$\Delta I = I(C + \delta C) - I(C) \geq 0.$$

Entre las variaciones $\delta y(x)$, $\delta z(x)$ y el incremento del funcional en el cálculo de variaciones por una parte y el diferencial de la variable independiente dx y el diferencial de la función $y = f(x)$ en el cálculo diferencial por otra parte, existe analogía. Esta analogía fue advertida por Lagrange. Ella le permitió aplicar en el cálculo de variaciones algoritmos análogos a los del cálculo diferencial y demostrar la permutabilidad de los símbolos d y δ y también \int y δ . Euler, el cual estaba literalmente en el umbral de semejante descubrimiento, con entusiasmo recibió la comunicación del joven matemático. Compartió con él sus ideas y, para dar a Lagrange la posibilidad de publicar el primero sus resultados (lo que ocurrió en el año 1762), detuvo la impresión de sus artículos sobre este tema. Después de 1762, Euler dio en una serie de trabajos una exposición detallada, perfeccionada, y provista de ejemplos del cálculo de variaciones. El mismo ideó la denominación del nuevo cálculo: de variaciones. En uno de los trabajos (1771) Euler dio un nuevo tratamiento al cálculo de variaciones. Ahora éste podía ser comprendido como un método de elección, de una familia de curvas dependientes de un parámetro, una curva que realice cierta propiedad extremal. Este tratamiento aproxima esencialmente el cálculo variacional con el cálculo diferencial. No obstante, aún no se había hecho lo suficientemente general, ya que no se consideraban los casos señalados por D. Bernoulli, donde las variaciones infinitesimales del punto a lo largo de la curva están acompañadas de giros finitos de las tangentes ("variaciones fuertes").

El final del siglo XVIII se caracterizó por una serie de trabajos de

Euler, Lagrange y otros científicos. El cálculo de variaciones adquirió con relativa rapidez, una forma perfeccionada en su parte más elemental que se refiere a la teoría de la primera variación. Se consideraba todavía sólo el extremo débil y, en correspondencia con esto, sólo curvas relativamente suaves.

El problema fundamental del cálculo variacional ahora resultaba como si era el problema de la búsqueda de extremos de funcionales de la clase más amplia posible. Una larga serie de trabajos fue dedicada en el siglo XIX precisamente a este tema. Sin embargo, al mismo tiempo que este círculo de problemas, quedaba todavía un problema por resolver: cómo diferenciar el tipo del extremo encontrado. Respecto a este problema ya Lagrange, apoyándose aparentemente en la analogía con el cálculo diferencial indicado antes, señaló la posibilidad de aplicación de la segunda variación para la resolución de este problema.

En efecto supongamos que, por ejemplo, está dada la funcional

$$I = \int_{x_0}^x F(x, y, y') dx.$$

Si

$$\delta I = 0, \quad \delta^2 I \neq 0,$$

entonces el signo de ΔI coincide con el de $\delta^2 I$ (para variaciones suficientemente pequeñas de las funciones y sus derivadas). En el año 1786, Legendre (publicado en 1788) pudo reducir la segunda variación a una forma

de la cual resultaba claro que el signo depende del de $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$. Esto condujo a la denominada condición de Legendre: para que sobre la extremal se realice un máximo (respectivamente mínimo) es necesario que a lo largo de ella $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \leq 0$ (respectivamente $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \geq 0$).

Esta condición resultó también suficiente para el extremo débil, lo cual fue demostrado por K. Jacobi en el año 1837, bajo la condición de que la extremal puede ser incluida en un campo de extremales, esto es, en una familia de curvas monoparamétricas, que no se interceptan entre sí y llenan cierto dominio simplemente conexo.

El concepto de campo de extremales introducido por K. Jacobi resultó necesario para la búsqueda del extremo fuerte de una funcional. Esto se afirmó en los trabajos de Weierstrass, el cual en el año 1879 elaboró métodos de resolución de este problema. La idea de Weierstrass (teniendo en cuenta los perfeccionamientos posteriores de D. Hilbert) consistía en lo siguiente: sea dado un campo de extremales $y = y(x, \alpha)$. En él está incluida la extremal buscada. Introduzcamos una función que exprese la dependen-

cia entre el coeficiente angular de la tangente a la extremal y las coordenadas del punto de tangencia $u(x, y)$, la cual denominaremos inclinación del campo. La variación de la funcional tiene la forma

$$\Delta I = \int_{(x)} \left[F(x, y, y') - F(x, y, u) - \frac{\partial F}{\partial u} (y' - u) \right] dx.$$

La función subintegral es ampliamente conocida en la actualidad como función de Weierstrass y tiene una notación especial $E(x, y, u, y')$. El signo de esta función indica cuál es el tipo del extremo: $E \geq 0$ en el caso de un mínimo y $E \leq 0$ en el caso de un máximo. Si esta condición se considera en relación con un extremo débil, entonces es suficiente que la condición indicada se mantenga en los puntos del campo próximo a la extremal y para una diferencia $|y' - u|$ lo suficientemente pequeña. En el caso de extremo fuerte, la condición de Weierstrass debe satisfacer, evidentemente, para todo y' y no sólo para y' que disten lo suficientemente poco de u .

De este modo, en el transcurso del siglo XIX fueron encontradas las condiciones de validez de las operaciones del cálculo de variaciones. Estas condiciones fueron extendidas a una clase de funcionales amplia y provistas de demostraciones rigurosas. El hallazgo de condiciones suficientes para ambos tipos de extremos basados en la teoría de las extremales, lógicamente concluyó una etapa completa de desarrollo del cálculo de variaciones. El método directo de Euler parecía definitivamente olvidado.

Sobre el desarrollo ulterior del cálculo de variaciones. Sin embargo, en el límite entre los siglos XIX y XX renacieron los métodos directos en el cálculo de variaciones. Ya M. V. Ostrogradski en el año 1834 demostró que el problema del cálculo de variaciones sobre el extremo de integrales múltiples es equivalente al problema de la resolución de cierta ecuación diferencial de la física-matemática. En efecto si

$$I = \iiint_{\Omega} F(x, y, z, p, q) dx dy dz,$$

donde

$$z = z(x, y), \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

entonces

$$\begin{aligned} \Delta I &= \iint_{\Omega} [F(x, y, z + \delta z, p + \delta p, q + \delta q) - F(x, y, z, p, q)] dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \delta z + \frac{\partial F}{\partial p} \delta p + \frac{\partial F}{\partial q} \delta q + R \right) dx dy. \end{aligned}$$

La condición necesaria de extremo es

$$\delta I = \int_G \left(\frac{\partial F}{\partial z} \delta z + \frac{\partial F}{\partial p} \delta p + \frac{\partial F}{\partial q} \delta q \right) dx dy = 0.$$

Transformando mediante la fórmula de Ostrogradsky la integral doble en curvilínea, puede obtenerse

$$\int_G \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right) \right] \delta z dx dy = 0$$

de donde, suponiendo la continuidad de la función subintegral sigue que

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right) = 0.$$

El problema variacional sobre el extremo de la integral doble resultó, de esta manera, equivalente a un problema de contorno para una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden.

Por ejemplo, la función armónica que es la solución del problema del potencial (problema de Dirichlet)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

da, a la vez, el extremo de la integral doble

$$I = \iint_G \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

A esta circunstancia prestaron atención Gauss (1840), Thompson (1847) y finalmente Dirichlet. Las posibilidades que se abrían en relación con el hallazgo de la equivalencia indicada anteriormente fueron altamente valoradas. El significado físico de este fenómeno en el caso espacial se establece fácilmente: si u es el potencial de las velocidades de una corriente estacionaria de un líquido homogéneo e incompresible, entonces la correspondiente ecuación será

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

La solución buscada u_0 (entre todas las funciones que en la frontera de la región toman valores dados) convierte en mínimo

$$\iiint_G \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz$$

lo que corresponde al mínimo de la energía cinética.

Riemann, el cual conocía este hecho por las conferencias de Dirichlet, lo denominó principio de Dirichlet. Las deducciones las extendió a las llamadas superficies de Riemann, introducidas por él. Para Riemann resulta evidente (al parecer partiendo de consideraciones físicas) que para cualquier función armónica es suficiente dar su valor en la frontera del dominio, para tener una definición unívoca dentro de este dominio.

Consideremos el caso más sencillo del problema de contorno de Dirichlet para el círculo de una sola capa. Supongamos dada la función de distribución de los valores fronteras $u(\psi)$ que es una función continua del ángulo. El problema se reduce al establecimiento del teorema de existencia: en el interior del círculo existe una y sólo una función continua u , la cual se aproxima continuamente a los valores de frontera dados y satisface la ecuación $\Delta u = 0$.

Introduzcamos

$$\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

definida sobre el área del círculo y teniendo sentido en cualquiera de sus puntos. Todos los valores de esta integral son finitos y evidentemente no negativos. Entonces existe un extremo inferior no negativo de sus valores para todas las posibles u . Este extremo se alcanza para cierto u , esto es

$$\delta \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0.$$

Entonces la ecuación

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

es una condición necesaria y suficiente para la anulación de la primera variación.

Este razonamiento, el cual condujo a la formación en los trabajos de Riemann de la teoría geométrica de funciones de variable compleja, resultó vulnerable en su punto de partida. Resultó que era imposible llegar a la conclusión sobre la existencia de funciones armónicas basándose en problemas de variaciones, ya que existen ejemplos de estos problemas, que no admiten ninguna solución. Weierstrass demostró aún en vida de Riemann, que de la existencia del extremo inferior de la integral indicada anterior-

mente no se deduce que este extremo se alcanza en la clase de las funciones admisibles. El famoso ejemplo de Weierstrass de que la quebrada, que une los puntos del plano, es menor que cualquier curva que pasa a través de estos puntos (fig. 49), aunque no pertenece a la familia de estas curvas, fue publicado sólo en el año 1869, pero era conocido por Riemann. Este no pudo dar una demostración convincente de sus resultados, basados en la aplicación del principio de Dirichlet. Esto lo lograron realizar su discípulo Neumann (1884) y el discípulo de Weierstrass, Schwarz, los cuales en sus demostraciones no recurrieron a los métodos de variaciones.



Fig. 49

De este manera se aclaró la diferencia entre el problema extremal en un espacio puntual de dimensión finita y en el espacio funcional. En el primero, una sucesión de puntos siempre tiene puntos límites. En el segundo, de una sucesión de funciones no siempre puede extraerse una subsucesión que converja en una cierta función límite. Para superar tales dificultades en el cálculo de variaciones se requería elaborar nuevamente los métodos directos.

La idea directriz de los métodos directos del cálculo de variaciones moderno procede de Euler. Consiste en que el problema de variaciones se considera como límite para el problema correspondiente de extremo de una función con número finito de variables. Este último se busca con los métodos usuales y después el paso al límite da la solución al problema de variaciones. Directamente a Euler se remonta el método de las diferencias finitas, el cual se distingue de otros métodos directos en que, por ejemplo, la funcional

$$v = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

se considera no sobre curvas arbitrarias (de entre las admisibles para el problema dado), sino sobre quebradas formadas por un número dado n de segmentos con las abscisas de los vértices dados: $a, a + \Delta x, a + 2\Delta x, \dots, a + (n-1)\Delta x, b$ donde

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Los primeros éxitos en el renacimiento de los métodos directos fueron alcanzados por Hilbert, el cual en el año 1904, regresando a la cuestión

sobre el principio de Dirichlet, demostró la existencia de la solución en la demostración de Riemann, construyendo una sucesión de funciones, la cual efectivamente alcanza a la función buscada. Inmediatamente después Riesz (1908) elaboró aún otro método ampliamente conocido en la actualidad.

La idea de Riesz consiste en que la funcional V se estudia sobre las combinaciones lineales $\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ con coeficientes constantes. Mientras tanto la funcional se transforma en función de los coeficientes

$$v = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n),$$

obtenemos puntos de extremos de esta función y después, pasando al límite cuando $n \rightarrow \infty$, la solución del problema de variaciones. Naturalmente, en esto es necesario que se satisfagan las condiciones relativas a las propiedades de la funcional y la completitud del sistema de funciones u_1, u_2, \dots, u_n .

En la elaboración general de los métodos directos junto a los trabajos de H. Weyl, Lebesgue y Courant tuvieron gran significación las investigaciones de los científicos soviéticos. L. A. Liusternik, U. G. Petrovski, M. A. Lavrentiev, N. N. Bogoliúbov, N. M. Krilov y otros que enriquecieron el cálculo de variaciones con métodos directos altamente efectivos. Enorme es el aporte de los matemáticos soviéticos en el estudio de los métodos cualitativos del cálculo de variaciones, los cuales obtuvieron en los últimos 30...40 años un singular desarrollo, lo que es complemente natural, ya que las ecuaciones diferenciales a las que se reducen los problemas del cálculo variacional en forma finita, en la mayoría de los casos no se resuelven. Los métodos cualitativos permiten resolver cuestiones sobre la existencia de soluciones, sobre su número, dar la característica de las familias de extremales, etc.

El cálculo de variaciones se convirtió en el siglo XX en parte integrante del análisis funcional, aquella parte en que se estudian los extremos de las funcionales. Además, los métodos y principios de variaciones constituyen una parte importantísima de la mecánica teórica. Se aplican con éxito en numerosos problemas de índole aplicada.

Más de dos siglos de historia del cálculo de variaciones da un rico material para la investigación de las leyes generales del desarrollo de los cálculos matemáticos: su formación relacionada con la inversión del método, trans-

formación del contenido, que refleja el carácter dialéctico del desarrollo, inclusión en una parte más general de las matemáticas, interrelaciones con la práctica, etc.

6.5. Desarrollo de la geometría

Los descubrimientos que tienen un significado de principio, hechos en la geometría en el curso del siglo XVII, predeterminaron para esta ciencia en el siguiente siglo XVIII un carácter cualitativamente nuevo de su desarrollo. En la geometría fueron incluidas nuevas disciplinas. Prácticamente todas las ramas clásicas de la geometría, excluyendo sólo las geometrías no euclidianas, se formaron en este siglo. Se trata de las geometrías analítica, diferencial, descriptiva y proyectiva, y también de los trabajos sobre los fundamentos de la geometría. Sus rasgos generales son: desarrollo en los marcos y sobre la base del sistema de la geometría de Euclides, la influencia directa de los problemas prácticos sobre estas ramas de las matemáticas. Entre los diferentes problemas y métodos de la geometría, tuvieron un gran significado las aplicaciones geométricas del cálculo infinitesimal. De ellas surgió y se desarrolló la geometría diferencial, la ciencia que ocupó en el siglo XVIII el lugar central en el sistema de las disciplinas geométricas.

Geometría analítica. Bajo esta denominación es corriente considerar aquella parte de la geometría donde se estudian las figuras y transformaciones geométricas dadas por ecuaciones algebraicas. Para la geometría analítica es característica la utilización de los métodos del álgebra y el método de coordenadas.

Las obras de Descartes y Fermat abrieron las posibilidades para el desarrollo de la geometría analítica ya en los años 30 del siglo XVII. Sin embargo, para la puesta en práctica de las ventajas evidentes (para nosotros) de la geometría analítica, incluso en el caso de problemas planos, se requirió mucho tiempo. Pasaron cerca de cien años antes de que con los recursos de la geometría analítica se logaran obtener resultados que superaran los logros de los antiguos, en particular de Apolonio. En el siglo XVIII la geometría analítica aun sufría el proceso de establecimiento, acumulación e investigación de nuevos hechos.

La geometría analítica de Descartes y Fermat incluía sólo problemas planos. La investigación de curvas de orden superior al segundo era un caso comparativamente raro. Pero incluso, este volumen modesto era difícil para los contemporáneos. En el curso del siglo XVII surgieron muchas obras en las cuales se comentaban los nuevos métodos. Sin embargo, un paso verdaderamente nuevo en el desarrollo de la geometría analítica fue realizado sólo a comienzos del siglo XVIII como resultado de la publica-

ción en el año 1704 de la obra de I. Newton "Enumeración de las curvas de tercer orden".

Newton rechazó la clasificación de las curvas según sus géneros hechas por Descartes. Observó, que la clasificación según el grado de la ecuación de la curva se adapta mejor a las necesidades del aparato geométrico de la nueva geometría. El orden de las curvas en la nueva clasificación recibió un tratamiento geométrico en la forma del número posible de puntos de intersección con una recta. Después Newton trasladó a las curvas de tercer orden una serie de conceptos y teoremas demostrados para las secciones cónicas, transformándolos adecuadamente. Así, introdujo el diámetro de las curvas como el lugar geométrico de los puntos de una serie de rectas paralelas, cuya suma algebraica de las distancias desde los puntos de intersección de las rectas con la curva es igual a cero. En el caso de perpendicularidad de los diámetros a las cuerdas conjugadas se introduce el eje de la curva. Si todos los diámetros se interceptan en un punto, entonces este punto recibe el nombre de centro común. Correspondientemente se extienden muchos otros conceptos y teoremas.

Las formas de las curvas fueron determinadas por Newton, considerando las ramas finitas de las curvas, la presencia o ausencia de diámetros, la presencia y las propiedades de las ramas infinitas. En total resultaron 72 tipos de curvas, a cada una de las cuales Newton dio una denominación. Estos tipos de curvas se representan por ecuaciones de cuatro tipos. Si designamos

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = A,$$

entonces las ecuaciones indicadas serán:

$$xy^2 + ey = A, \quad xy = A, \quad y^2 = A, \quad y = A.$$

La clasificación compleja y voluminosa obligó a Newton a concentrarse en las particularidades de las curvas: lazos, puntos cuspidales, etc. Para facilitar este problema Newton utilizó la tercera de las ecuaciones indicadas antes, la ecuación de la parábola semicúbica

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

y mostró que cada curva de tercer orden se obtiene de ella mediante una proyección central adecuada. Tal clasificación proyectiva o, según expresión de Newton, "descripción orgánica", revela todas las curvas de tercer orden, proyectivamente distintas, partiendo de las propiedades de las raíces de la ecuación:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Precisamente si las tres raíces son reales y distintas, entonces la curva consta de dos ramas diferentes; la igualdad de las tres raíces evidencia la

presencia de puntos de retroceso. La igualdad de dos raíces indica que existe un punto doble o aislado. Las curvas que tienen sólo una rama corresponden a la presencia de dos raíces imaginarias.

No nos detendremos más en el contenido de esta obra. Ella es demasiado específica. Los principios de clasificación de las curvas de tercer orden no resultaron ni sencillos ni universales, los resultados, insuficientemente complejos y desprovistos de demostraciones. El significado de la presente obra de Newton no radica en esto. Newton descubrió nuevas posibilidades del método de coordenadas. Y, además, lo perfeccionó significativamente. El introdujo los ejes de coordenadas con iguales derechos, definió los signos de las funciones en los cuatro cuadrantes, creó las bases de la investigación de las propiedades de las curvas por las propiedades de las ecuaciones que las expresan. Estas posibilidades fueron respaldadas y desarrolladas por Stirling en el libro "Curvas newtonianas de tercer orden" (1717).

Stirling proveyó a los teoremas de Newton de demostraciones y además dedujo una serie de teoremas de carácter general. Le pertenece, en particular, la deducción de las formas canónicas de las ecuaciones de las curvas de tercer orden por medio de la elección de un eje coordenado paralelo a la asíntota. Las propiedades generales de las curvas algebraicas fueron estudiadas con éxito por Maclaurin (1720), el cual desarrolló el procedimiento orgánico de Newton de formación de las curvas. Memorias especiales sobre este tema fueron editadas por F. Nicolle (1731), Maupertuis (1731), Braikenridge (1733) y otros. Más tarde a las curvas de tercer orden le fueron dedicados trabajos de Steiner, Salmon, Silvestre, Shall, Clebsch y otros.

Como se indicó antes, la geométrica analítica de Descartes y Fermat no incluía en sí los métodos de resolución de problemas en el espacio. Ambos autores sólo pudieron dar indicaciones generales sobre la necesidad de la proyección de curvas espaciales en los planos de coordenadas. En el curso de casi un siglo esta idea, que actualmente parece evidente, se realizaba sólo episódicamente, por motivos particulares y no tenía carácter general.

La utilización sistemática en la geometría analítica de las coordenadas en el espacio fue comenzada en el año 1731 en el libro de Clairaut "Investigaciones sobre curvas de doble curvatura". Así se denominaron las curvas en el espacio. Cada punto de éstas Clairaut lo proyectaba ortogonalmente en dos planos coordenados mutuamente perpendiculares. De esta manera una curva en el espacio resultaba dada como el lugar geométrico de la intersección de dos superficies cilíndricas y en forma analítica se expresaba por un sistema de dos ecuaciones. En el caso que esté dada una ecuación única, Clairaut la interpretaba correctamente como la ecuación de una superficie, citando muchos ejemplos, principalmente superficies de revolución:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= a^2, & \sqrt{y^2 + z^2} &= \frac{m}{n} x, \\ & & y^2 + z^2 &= ax, \\ & & x^4 &= a^2(y^2 + z^2),\end{aligned}$$

etc.

Los trabajos de Clairaut crearon la posibilidad de una construcción sistemática de la geometría analítica en forma más o menos usual para nosotros. Esto lo realizó Euler hacia el año 1748.

La geometría analítica en la primera mitad del siglo XVIII se formó en estrecha vinculación con las aplicaciones geométricas del análisis matemático. Ya ella jugaba el papel de base de una gran rama de los conocimientos matemáticos, a pesar de lo inconclusa, tanto en la forma como en el contenido. Por eso Euler, realizando el intento de construcción sistemática del análisis matemático llevado a cabo por él en una serie de monografías, apartó para la geometría analítica un tomo especial ("Introducción al análisis..." t. 2). El significado de esta obra en la historia de la geometría es extraordinariamente grande. Caractericemos el contenido de este tomo más detalladamente.

En su parte fundamental, constituida por veintidos capítulos se expone el sistema de la geometría analítica en el plano. En el primer capítulo se introducen las coordenadas rectilíneas, tanto rectangulares como oblicuas y, además, se aclara la forma de escritura de las ecuaciones de las curvas, se da el concepto de continuidad de las curvas como la propiedad de una curva de ser expresada por una expresión analítica única en correspondencia con el concepto de continuidad de una función, introducido en el primer tomo de la "Introducción al análisis infinitesimal". El segundo capítulo está dedicado a las transformaciones de los sistemas de coordenadas: giro de los ejes y traslación del origen y también al análisis de la ecuación de la recta en la forma

$$\alpha x + \beta y = 0.$$

Los siguientes dos capítulos se relacionan con la clasificación de las curvas según el grado de sus ecuaciones y se revelan las propiedades generales de las curvas. Dos capítulos más se dedican a la investigación especial de las curvas de segundo orden. Mientras tanto, en el capítulo V se tratan aquellas propiedades de las secciones cónicas, que se obtienen de la ecuación general de segundo grado y, en el capítulo VI, se investigan las formas canónicas de las ecuaciones de las curvas de segundo orden. Las ramas infinitas y las asíntotas de las secciones cónicas se tratan en los capítulos VII y VIII.

Sigue la clasificación de las curvas de tercer orden (capítulos IX y X). Teniendo en cuenta el carácter de las ramas infinitas estas curvas se dividen en 16 tipos. Además, Euler comparó su clasificación con la dada por New-

ton y mostró la no completitud de esta última. La clasificación correspondiente de las curvas de cuarto orden, que se realiza en el capítulo XI, ya dio 146 tipos. No prolongando este trabajo sin perspectivas, Euler pasó nuevamente a la elaboración de métodos generales de investigación de las curvas según sus ecuaciones, dando breves indicaciones sobre esto en el capítulo XII.

Las tangentes, que son el objeto del capítulo decimotercero, se consideran en relación tanto a los puntos simples de las curvas como a los múltiples. En el interesante capítulo XIV sobre la curvatura de las curvas, inicialmente se define la parábola que aproxima la curva en el entorno de un punto dado y a continuación se busca para esta parábola el círculo de curvatura. La longitud del radio de curvatura de una curva

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + \dots$$

en el origen de coordenadas se busca mediante la fórmula

$$\frac{(A^2 + B^2)\sqrt{A^2 + B^2}}{2(A^2E - 2B + B^2C)}$$

Además, Euler encontró aquí mismo los puntos de inflexión de primer orden y órdenes superiores, los puntos cuspidales. Para lograr mayor generalidad sustituyó la parábola aproximante por curvas más generales, por ejemplo $ar^m = s^n$.

El capítulo XV se introduce para la investigación de las propiedades de los diámetros de las curvas y la simetría de estas últimas y los dos siguientes (XVI y XVII) están dedicados a la investigación de las curvas de acuerdo a sus propiedades. Se trata de tales problemas como, por ejemplo, investigar la curva

$$y^2 - P(x)y + Q(x) = 0,$$

si se sabe que para un argumento dado x la curva tiene dos ordenadas y_1 y y_2 , relacionadas entre sí por la condición

$$y_1^n + y_2^n = a^n.$$

Otra condición es, por ejemplo, que la curva tiene con un rayo dado $y = \alpha x$ un número dado de puntos de intersección. Es interesante que para esto Euler introdujo las coordenadas polares:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

* En el capítulo XVIII, Euler coleccionó y sistematizó los conocimientos sobre semejanza y las propiedades afines de las curvas. Las curvas, según Euler, se denominan afines si sus coordenadas están ligadas por las relaciones

$$x = \frac{X}{m}, \quad y = \frac{Y}{n}.$$

Este concepto se ha mantenido en las matemáticas hasta nuestros días.

Por último, en los cuatro capítulos finales se tratan: la intersección de curvas (capítulo XIX), composición de las ecuaciones de curvas complejas (capítulo XX), curvas trascendentes (capítulo XXI) y la resolución geométrica de ecuaciones trigonométricas. Los dos últimos capítulos surgieron, naturalmente, en calidad de tratamiento geométrico de las funciones introducidas en el primer tomo de la "Introducción al análisis". En ellos se tratan las curvas de las funciones trigonométricas, la curva logarítmica, las cicloides de los tres tipos, la línea $x^y = y^x$ y diversas espirales. Para la investigación de estas curvas se utilizan tanto las coordenadas cartesianas como las coordenadas polares.

El contenido de este libro, cuyo breve resumen hemos dado aquí, muestra que la geometría analítica en un plano se convirtió, gracias a los trabajos de Euler, en una ciencia independiente, cuyo objeto y métodos estaban ya determinados en el sentido y volumen próximo al actual. Sin embargo, Euler no se limitó a problemas bidimensionales. El realizó un trabajo semejante también para la geometría analítica en el espacio en el "Apéndice sobre superficies", especial para este mismo libro.

Ante todo, Euler (con referencia a Clairaut) introdujo las coordenadas cartesianas rectangulares en el espacio, considerando el conjunto de aplicantes al plano coordenado xOy . Después de la introducción de los signos de las coordenadas y de las observaciones sobre la posibilidad de cambio de los ejes, consideró una serie de superficies y sus intersecciones por planos. Euler mostró que la ecuación respecto a dos variables corresponde a una superficie cilíndrica o prismática y la ecuación homogénea, a un cono o pirámide. Tras esto introdujo una clase más general de superficies: a) las expresadas por la ecuación

$$F(x, y, Z(z)) = 0,$$

homogénea respecto a los argumentos indicados. Esta clase incluye conos, cilindros y superficies de revolución; b) las que tienen secciones triangulares perpendiculares a los ejes; c) las que tienen relaciones afines entre las secciones paralelas y otras. A partir de estas clases, Euler introdujo el método de las secciones de las superficies por planos arbitrarios. Todo este material ocupó los primeros tres capítulos del apéndice.

En el capítulo IV están deducidas las ecuaciones de la transformación de las coordenadas rectangulares en el espacio en la forma

$$\begin{aligned} x &= p(\cos \zeta \cos \theta - \sin \zeta \cos \eta \sin \theta) + \\ &+ q(\cos \zeta \sin \theta + \sin \zeta \cos \eta \cos \theta) - r \sin \zeta \sin \eta + f; \\ y &= -p(\sin \zeta \cos \theta + \cos \zeta \cos \eta \sin \theta) - \\ &- q(\sin \zeta \sin \theta - \cos \zeta \cos \eta \cos \theta) - r \cos \zeta \sin \eta + g; \\ z &= -p \sin \eta \sin \theta + q \sin \eta \cos \theta + r \cos \eta + h. \end{aligned}$$

Los ángulos ζ , η , θ se denominan también actualmente ángulos de Euler (fig. 50). Ellos determinan el giro de los ejes. El ángulo de precesión θ es el ángulo de giro alrededor del eje Or bajo el cual el eje Op pasa a la recta On , es decir, a la línea de los nodos que determina la intersección de los planos coordenados pOq y xOy . El ángulo de nutación η es el ángulo de giro alrededor de la recta Or bajo el cual el eje Or pasa al Oz . Finalmente el ángulo ζ del correspondiente giro alrededor de Oz transforma On en Ox .

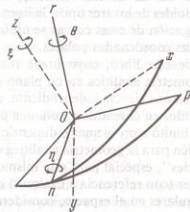


Fig. 50

En este mismo capítulo, Euler introdujo el concepto de orden de una superficie, demostró que el orden de una curva en una sección plana no supera el orden de la superficie y consideró el caso de desintegración de las líneas de corte.

La investigación de la ecuación general de segundo grado con respecto a tres coordenadas y su reducción a la forma canónica, realizada por Euler en el capítulo V, dio por vez primera las ecuaciones de todos los tipos de las superficies no degeneradas de segundo grado:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = a^2 \quad (\text{eipsoide}),$$

$$Ap^2 + Bq^2 - Cr^2 = a^2 \quad (\text{hiperboloido de una hoja}),$$

$$Ap^2 - Bq^2 - Cr^2 = a^2 \quad (\text{hiperboloido de dos hojas}),$$

$$Ap^2 + Bq^2 = ar \quad (\text{paraboloido elíptico}),$$

$$Ap^2 - Bq^2 = ar \quad (\text{paraboloido hiperbólico}).$$

Al final del libro Euler consideró las curvas en el espacio como intersección de dos superficies y elaboró el aparato analítico para su investigación.

La segunda mitad del siglo XVIII trajo a la geometría analítica sólo

mejoras parciales, aunque de cuando en cuando muy importantes. En lo fundamental la geometría analítica ya estaba formada. Mencionemos sólo algunos de los aportes más importantes. En relación con las investigaciones geométrico-diferenciales sobre el desarrollo de superficies G . Monge en el año 1771 (publicado en 1785) resolvió una serie de problemas de la geometría analítica. Así, encontró la condición de perpendicularidad del plano que pasa a través de un punto (x_1, y_1, z_1)

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

y de una recta

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0.$$

A continuación, Monge determinó la longitud de la perpendicular, trazada desde un punto dado del espacio hasta una recta dada. Finalmente, logró determinar el plano normal en cualquier punto de una curva de doble curvatura: $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$.

Lagrange en un artículo del año 1773 (publicado en 1775) investigó, no remitiéndose a dibujos, con los recursos de la geometría analítica, problemas relativos a una pirámide triangular. La cuestión sobre la transformación de las coordenadas en el espacio fue totalmente culminada por Menier (1785), quien dedujo las fórmulas

$$z' - z = t \cos \omega + u \sin \omega,$$

$$x' - x = [v \cos \omega - t \sin \omega] \sin \pi + u \cos \pi,$$

$$y' - y = [v \cos \omega - t \sin \omega] \cos \pi - u \sin \pi,$$

donde u, v, t son las coordenadas viejas, x', y', z' las nuevas y x, y, z las nuevas coordenadas del viejo origen de coordenadas. El ángulo del plano de coordenadas viejo xOy con la nueva se designa aquí por π y el ángulo de la línea de intersección de ambos planos con el nuevo eje y es ω .

En la segunda mitad del siglo XVIII, la geometría analítica comenzó a introducirse en los programas de los centros de enseñanza superior. Entre los textos surgidos, el más sistemático y cercano a los actuales por su estilo fue el texto de Lacroix (1798—1799), que fue reeditado muchas veces: la edición 25, por ejemplo, vio la luz con un complemento de Hermite en el año 1897. En estos textos de Lacroix apareció también la denominación de esta ciencia, geometría analítica.

Naturalmente, también en lo sucesivo la geometría analítica cambió su aspecto. Esto estuvo relacionado ante todo con la generalización del método de coordenadas. Las coordenadas baricéntricas creadas por Möbius (1827) permitieron introducir los elementos infinitamente alejados. De la geometría proyectiva fueron tomadas las coordenadas homogéneas y des-

pués las proyectivas como combinación lineal de las coordenadas homogéneas más simples. Darboux introdujo las coordenadas tetracíclicas y a continuación las pentacíclicas. A finales del siglo XIX, comienzos del XX penetraron de la mecánica en la geometría analítica los vectores, lo que perfeccionó significativamente su aparato.

Así, en el siglo XVIII fue culminada la formación de la geometría analítica como ciencia y su formación como material docente, que fue parte de la base clásica de la instrucción matemática y técnica superior.

Geometría diferencial. Esta disciplina matemática, como se conoce, estudia los objetos geométricos, o sea, las curvas, superficies, etc. Su singularidad consiste en que partiendo de los resultados de la geometría analítica, utiliza ampliamente los métodos del análisis matemático, en particular el cálculo diferencial. La geometría diferencial surgió en el siglo XVIII de las ramas de las aplicaciones geométricas del análisis infinitesimal. En cierto sentido la geometría diferencial puede considerarse incluso como precursora del análisis, si en su historia se incluyen los problemas infinitesimales de carácter geométrico. Estos últimos constituyen una parte importante de las premisas del surgimiento del cálculo diferencial e integral.

Hacia comienzos del siglo XVIII, con los recursos del análisis infinitesimal fueron descubiertos e investigados muchos hechos de la teoría de las curvas planas. Sin embargo, esto aún no condujo a la separación como ciencia particular. Todos los resultados entraban en el sistema del análisis matemático constituyendo el conjunto de las aplicaciones geométricas con la utilización, principalmente, de las funciones de una variable. Esta última circunstancia, a propósito, explica por qué precisamente las curvas planas y no las espaciales fueron inicialmente objeto de investigación.

La etapa siguiente de desarrollo de la geometría diferencial está relacionada con la introducción de los métodos de estudio de las curvas espaciales y las superficies. Una premisa necesaria para esto es, evidentemente, la extensión de los recursos de la geometría analítica a los problemas tridimensionales. Como se indicó anteriormente, esto se llevó a efecto por vez primera en el año 1731 en el libro de Clairaut "Investigación sobre las curvas de doble curvatura". En lo fundamental, este libro, como expresamos, está dedicado a la geometría analítica tridimensional, pero una serie de cuestiones están resueltas en él con ayuda del cálculo diferencial e integral. Así, Clairaut consideró las tangentes y normales a las curvas espaciales y, además, las subtangentes y subnormales, introdujo el plano tangente a una superficie que contiene una curva dada. La normal, según Clairaut, es la normal al plano tangente. Fueron tratados también los lugares geométricos de los puntos de intersección de las tangentes y normales con los planos de coordenadas.

Una curva espacial se define como la intersección de dos superficies

cilíndricas caracterizadas por las proyecciones sobre dos planos de coordenadas. Clairaut desarrolló la curva sobre estas superficies cilíndricas, resolvió una serie de problemas sobre la rectificación de curvas, determinó el área de porciones de superficies cilíndricas, limitadas por curvas, encontró ciertas curvaturas. Este círculo de cuestiones exigía de él, naturalmente, la aplicación de los métodos del cálculo integral.

El traspaso de los métodos de la geometría diferencial bidimensional al caso tridimensional, realizado por Clairaut en el transcurso de casi cincuenta años no fue superado por nadie. Sin embargo, bajo la influencia de las exigencias de la geodesia y cartografía y también de la mecánica surgieron una serie de trabajos en los cuales se resolvían problemas geométrico-diferenciales. El mismo Clairaut también advirtió nuevos hechos geométrico-diferenciales. Estando junto con Maupertuis en una expedición geodésica en Laponia, en el año 1733, demostró que a lo largo de una línea geodésica sobre una superficie de revolución, el producto del radio de un paralelo (o sea, el círculo perpendicular al eje de revolución) por el seno de su ángulo con el meridiano es constante:

$$\rho \operatorname{sen} \alpha = \text{const.}$$

Sin embargo, también en esta rama, como en muchas otras en aquel tiempo, dominaban los trabajos de Euler.

Euler comenzó (1728—1732) una serie de investigaciones al respecto, según el ejemplo de muchos de sus antecesores, con el estudio de las líneas geodésicas sobre las superficies. El dedujo la ecuación diferencial de la línea geodésica sobre una superficie, dada por la ecuación

$$P dx = Q dy + R dt,$$

en la forma

$$\frac{Qd^2x + Pd^2y}{Q dx + P dy} - \frac{dxd^2x + dyd^2y}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$$

y consideró una serie de casos particulares relacionados con las líneas geodésicas sobre las superficies de revolución. En el año 1736, Euler demostró que un punto que se mueve sobre una superficie, estando ausente la acción de las fuerzas, se desplaza según una geodésica. En ese mismo año en el artículo sobre la tractriz introdujo la ecuación natural de una curva plana y la relacionó con la ecuación en coordenadas cartesianas. Posteriormente, después de una serie de resultados particulares, estas investigaciones condujeron a Euler, por una parte, a la creación (comenzando desde el año 1744) del cálculo de variaciones (ya que el problema sobre la geodésica pertenece a los de variaciones) y, por otra, a investigaciones en la teoría general de las curvas y superficies.

La base clásica de la teoría actual general de superficies, no obstante,

comenzó a crearse comparativamente tarde. Los primeros resultados fundamentales en esta rama, así como en toda la geometría diferencial tridimensional resultó posible obtenerlos no antes del año 1760 en el artículo de Euler "Investigación sobre la curvatura de las superficies" (publicado en 1767). En este trabajo se deduce el conocido teorema de Euler de la siguiente manera: la superficie investigada $z = z(x, y)$ se corta por un plano arbitrario $z = \alpha x + \beta y + \gamma$. En la sección se obtiene una curva plana cuyo radio de curvatura se expresa excesivamente complejo:

$$\frac{[\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha q + 2\beta p + (\alpha p + \beta q)^2 + p^2 + q^2]^{3/2}}{}$$

$$\left[(\alpha - q)^2 \left(\frac{dp}{dx} \right) + (\beta + p)^2 \left(\frac{dq}{dy} \right) + 2(\alpha - q)(\beta + p) \left(\frac{dp}{dy} \right) \right] \sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}$$

donde

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \left(\frac{dp}{dx} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \left(\frac{dq}{dy} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$\left(\frac{dp}{dy} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dots$$

A continuación a través de la normal a la superficie se traza el plano secante. La expresión para el radio de curvatura de esta sección normal arbitraria se obtiene todavía de forma más compleja como consecuencia de que ahora los parámetros α y β ya son independientes. Ellos se expresan a través del parámetro determinado por la sección, esto es, a través del ángulo entre la traza horizontal del plano normal y el eje de abscisas.

De las secciones normales se eligen dos: la principal, perpendicular al plano de coordenadas xOy y la perpendicular a la principal. Para estas secciones la expresión de la curvatura se simplifica. A continuación se introduce el ángulo φ entre los planos normal y la sección principal y de nuevo se deduce la expresión general para el radio de curvatura:

$$\frac{-(p^2 + q^2)(1 + p^2 + q^2)^{3/2} \sec^2 \varphi}{\left(\frac{dp}{dx} \right) (p - q \operatorname{tg} \varphi u)^2 + \left(\frac{dq}{dy} \right) (q + p \operatorname{tg} \varphi u)^2 + 2 \left(\frac{dp}{dy} \right) (p - q \operatorname{tg} \varphi u)(q + p \operatorname{tg} \varphi u)}$$

Esta voluminosa expresión fue escrita por Euler para casos particulares: el cilindro $z = \sqrt{a^2 - y^2}$, el cono $z = \sqrt{n^2 x^2 - y^2}$ y el elipsoide $z^2 = a^2 - mx^2 - ny^2$ y a continuación la transformó a la forma

$$\frac{1}{L + M \cos 2\varphi + N \operatorname{sen} 2\varphi},$$

donde

$$L = L \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right),$$

así como M y N .

De aquí la igualdad de las curvaturas en un dominio local de la superficie se define por la igualdad de las magnitudes L , M y N . Cuando

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{N}{M}$$

entonces el radio de curvatura correspondiente alcanza un extremo. Las secciones que dan para el radio de curvatura el máximo f y el mínimo g , son perpendiculares entre sí.

Euler hace una última simplificación: supongamos que para el alcance del máximo de f sea $\varphi = 0$. Entonces $N = 0$ y el radio de curvatura será

$$\frac{1}{L + M \cos 2\varphi}.$$

El mínimo g del radio de curvatura se alcanza en este caso cuando $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Expresando L y M a través de f y g , Euler finalmente obtiene

$$\frac{2fg}{f + g - \cos 2\varphi (f - g)}.$$

La fórmula que se utiliza actualmente, para la curvatura de la sección normal fue obtenida de la expresión dada por Dupin cincuenta años después.

Del ejemplo citado se observa que en el curso de la creación de la teoría de superficies el aparato se complicó desmesuradamente. Superar las dificultades crecientes, en relación con esto, lo lograban sólo algunos y las posibilidades de aplicaciones disminuían. Pero el trabajo se continuaba bajo la presión directa de la práctica, ante todo de la cartografía y geodesia.

En los años 70, el desarrollo de superficies se convirtió en uno de los problemas fundamentales de esta rama. El concepto de superficie desarrollable lo introdujo Euler. En el artículo del año 1771 sobre los cuerpos cuyas superficies se pueden superponer en un plano, Euler parte de la correspondencia entre las coordenadas (x, y, z) , de un punto de la superficie desarrollable y (t, u) , un punto del plano con el que coincide el punto indicado de la superficie después del desarrollo. Sobre el plano se toma un triángulo rectangular elemental con vértices

$$(t, u), \quad (t + dt, u), \quad (t, u + du).$$

A este le corresponde un triángulo elemental sobre la superficie con vértices

$$(x, y, z), \quad (x + ldt, y + mdt, z + ndt), \\ (x + \lambda du, y + \mu du, z + \nu du),$$

congruente con él ($l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ son las derivadas parciales correspondientes: $\frac{\partial x}{\partial t} = l, \frac{\partial x}{\partial u} = \lambda$, etc.). La congruencia e igualdad de los segmentos correspondientes condujeron a Euler a las siguientes condiciones de desarrollo:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dt^2 + du^2, \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \quad l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

La resolución de Euler contenía la idea general de curvatura de las superficies y entrañaba una serie de resultados notables. Así, Euler demostró que la tangente a una curva arbitraria espacial genera una superficie desarrollable. Tinseau (1780) introdujo los puntos de inflexión y los clasificó. Los puntos de inflexión plana para él correspondían al caso en que la torsión era cero. Estas podían buscarse a través de los puntos de inflexión de la curva plana según la cual la superficie desarrollada, correspondiente a la curva en el espacio, intercepta el plano de coordenadas xOy . Otro tipo son los puntos de inflexión lineal, los cuales corresponden al caso cuando la curvatura es cero. Estos puntos son de inflexión para todas las proyecciones de la curva en el espacio. En ellos el plano osculador es perpendicular al plano de proyección. Monge (año 1771, publicado en 1775) introdujo una clasificación análoga de los puntos de inflexión. Este también investigó las superficies desarrollables.

Los esfuerzos por la construcción de una teoría general de las superficies y curvas en el espacio con los métodos tomados de la geometría analítica y el cálculo diferencial continuaron también en los años 80 del siglo XVIII. Nuevas ideas fueron introducidas por Euler (año 1782—1786), quien consideró las coordenadas espaciales x, y, z de la curva como función de la longitud de arco s y los coeficientes directores de los ejes del triedro móvil auxiliándose de la transformación esférica.

Una serie de científicos, Monge, Lagrange, Lambert, Menier y en particular Euler, obtuvieron en la geometría diferencial una cantidad considerable de resultados concretos. Estos tuvieron aplicación en geodesia y cartografía. No obstante, el número de individuos que se ocupaban de este problema decreció rápidamente. El aparato cada vez más pesado, que no correspondía a las posibilidades descubiertas, alarmaba a los eminentes matemáticos y los inducía a valorar de manera pesimista las perspectivas de desarrollo de la teoría general de las superficies y curvas en el espacio.



G. Monge (1746—1818)

Mientras tanto, las vías de desarrollo ulterior de la geometría diferencial ya se advertían: a) mayor atracción por las consideraciones geométricas temporalmente relegadas a un segundo plano debido a los esfuerzos en la creación de un aparato analítico; b) la ampliación de éste último mediante la atracción de la teoría de las ecuaciones diferenciales; c) traducción de los hechos geométricos al lenguaje de las ecuaciones diferenciales e interpretación geométrica de estas ecuaciones. Los mayores éxitos en estas ramas fueron logrados en la Francia revolucionaria de finales del siglo XVIII mediante las investigaciones de Monge y sus discípulos.

Gaspard Monge (1746—1818) originario de una familia campesina burguesa fue, como muchos otros matemáticos, un participante activo de la Gran Revolución Burguesa Francesa. Múltiples veces ocupó altos puestos estatales (Ministro de Marina, organizador de la Industria Militar en Francia, etc.) cumpliendo sus obligaciones con honor. Comenzando su activi-

dad científico-pedagógica en calidad de profesor de la escuela de ingenieros militares, Monge logró grandes éxitos en las matemáticas, la física, la química y la técnica y en el año 1780 fue elegido miembro de la Academia de Ciencia de París. Fue además uno de los fundadores y profesor de la Escuela Politécnica en París (1794).

En matemáticas, los trabajos fundamentales de Monge están relacionados con la rama de la geometría. Caractericemos aquí sus logros en geometría diferencial. En el transcurso de los años 70, Monge publicó dos obras: "Memoria sobre los desarrollos, radios de curvatura y diferentes tipos de inflexiones de las curvas con doble curvatura" (1771, publicado en el año 1785) y "Sobre las propiedades de muchos tipos de superficies curvas" (1775, publicado en el año 1780). En ellas se realiza una investigación amplia y completa de las propiedades de las curvas en el espacio y de las superficies, se introduce el desarrollo de las superficies, se investigan las evolutas, envolventes, etc.

En particular, en el primero de los trabajos mencionados, donde Monge estudia las curvas en el espacio, se demuestra que estas curvas pueden tener un número ilimitado de evolutas, que todas ellas yacen sobre la superficie desarrollable (se tiene en cuenta el desarrollo de las normales) y que son líneas geodésicas de esta superficie. Monge introdujo también la superficie rectificable desarrollable y mostró que la curva inicial es su geodésica. En este mismo trabajo se introducen los dos tipos de puntos de inflexión mencionados anteriormente y muchos términos que se conservan aún en la actualidad: arista de retroceso, superficie desarrollable, lugar geométrico de los centros de curvatura, y otros.

El segundo trabajo, en lo fundamental, está dedicado al desarrollo de la teoría de las superficies desarrollables. En él se aclara, en particular, las diferencias entre superficies regladas y desarrollables, se encuentra la conocida relación diferencial:

$$rt - s^2 = 0.$$

Se establece, además, que las superficies desarrollables pueden tratarse como el lugar geométrico de las tangentes a curvas en el espacio y, además, que en esencia son las envolventes de cierta familia de planos biparamétricos, etc.

Sin embargo, la clasificación de las curvas y superficies según la forma y los grados de las ecuaciones algebraicas y el voluminoso aparato relacionado con esto no satisfizo a Monge. Una nueva clasificación de las superficies fue dada por Monge en las conferencias para la Escuela Politécnica, las cuales se editaron en folletos separados y en el año 1801 en forma de libro independiente. En ella Monge parte de las exigencias de las aplicaciones prácticas y las correspondientes necesidades de la formación técnica.

Las propiedades y estructura de las superficies se revelan más claramente si además de las ecuaciones se da el método de su construcción, de su formación por medio del desplazamiento en el espacio de una línea dada. Entonces, en calidad de objeto de estudio intervienen no ecuaciones algebraicas, sino ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Resultó que una gran familia de superficies corresponde a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden. En ellas están incluidas las superficies cilíndricas, cónicas, de revolución y canales. Estas últimas se constituyen mediante el movimiento de una circunferencia de diámetro constante, el plano de cuyo círculo es perpendicular a una curva dada y el centro se mueve por ella. Además, a esta clase pertenecen las superficies de las vertientes de los terraplenes, es decir, aquellas cuyas líneas de mayor descenso son rectas de pendiente constante, y también las superficies helicoidales.

Considerando las superficies desde distintos puntos de vista, Monge obtuvo simultáneamente la ecuación diferencial de la superficie y la ecuación finita como su integral. Por ejemplo, considerando las superficies cilíndricas como aquellas cuyo plano tangente es paralelo a la generatriz,

$$x = az, \quad y = bz,$$

obtuvo su ecuación

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Pero al mismo tiempo, de la condición de que la generatriz de la superficie cilíndrica es paralela a la recta, se obtiene la ecuación finita de esta superficie

$$y - bz = -\varphi(x - az),$$

donde φ es una función arbitraria. Esta última ecuación da la solución de la ecuación diferencial de la superficie cilíndrica. Los resultados respectivos para las superficies cónicas son

$$(x - a) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - b) \frac{\partial z}{\partial y} = z - c \quad y \quad \frac{y - b}{z - c} = \varphi\left(\frac{x - a}{z - c}\right),$$

y para las superficies de las vertientes de los terraplenes son

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = a^2 \quad y \quad z^2 = a^2[(x - a)^2 + (y - \varphi(a))^2].$$

En esta parte del trabajo se introducen la interpretación geométrica de las características como líneas de intersección de dos superficies infinitamente próximas y se deduce su ecuación diferencial.

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden determinan la familia de las superficies desarrollables y además aquellas superficies regladas, que se describen por una recta, que se mueve entre dos curvas en el espacio y paralelamente a un plano dado, y la clase de superficie cuyas curvaturas satisfacen ciertas condiciones (truncadas, tubulares, minimales). Las superficies regladas generales se determinan por ecuaciones diferenciales de tercer orden, así como superficies más complejas del tipo de la superficie que envuelven una esfera de radio variable y cuyo centro se mueve según una curva dada.

La traducción de los hechos de la teoría de las superficies al lenguaje de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales se acompañaba en las obras de Monge con la elaboración de la teoría geométrica de estas ecuaciones. En particular dio un tratamiento geométrico a la teoría general de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden. La integral total de tales ecuaciones $f(x, y, z, a, b) = 0$ se interpreta geométricamente como una familia de superficies biparamétricas. Si se sustituye $b = \varphi(z)$, donde φ es el símbolo de una función arbitraria, entonces la ecuación

$$f(x, y, z, a, \varphi(a)) = 0$$

corresponde a una familia de superficies monoparamétricas (Monge las denominó envolventes). La ecuación de su superficie envolvente se obtiene con la eliminación del parámetro a de las ecuaciones

$$f = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

De aquí que para valores fijos de a se obtienen las ecuaciones de las características (generadas por las superficies envolventes que son imagen geométrica de la integral general). Todas las características se envuelven por una curva, a la que Monge denominó arista de retroceso. Consideraciones semejantes, expresadas con relación a la ecuación

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

y su diferencial total

$$Xdx + Ydy + Zdz + Pdp + Qdq = 0,$$

condujo a Monge al sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = -\frac{dp}{X + pZ} = -\frac{dq}{Y + qZ}.$$

Integrándolas obtuvo las ecuaciones de las características.

Los métodos geométricos introdujeron además claridad en el tratamiento de la ecuación, denominada posteriormente de Pfaff:

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

Si se cumplen las condiciones de integrabilidad, entonces su solución se representa geométricamente por medio de una familia de superficies

$$f(x, y, z) = C,$$

sobre la cual cualquier curva es ortogonal a las curvas

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}.$$

Si esta condición no se cumpliera, entonces, como demostró Monge, dando la dependencia complementaria $\varphi(x, y, z) = 0$ la ecuación de Pfaff determina sobre la superficie $\varphi(x, y, z) = 0$ una familia de curvas monoparamétricas, ortogonales a aquellas mismas curvas

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{dR}.$$

La teoría de las características de Monge, la reducción del problema de la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, la interpretación geométrica de las soluciones, la estrecha interrelación e interacción entre los métodos geométricos y mecánicos, todo el conjunto de los logros de Monge condujeron la geometría diferencial a una nueva etapa. Esta se caracteriza por la introducción en la geometría del aparato de las ecuaciones diferenciales y la ulterior ampliación de sus posibilidades teóricas y prácticas.

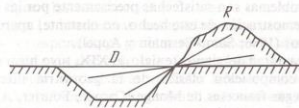


Fig. 51

A finales del siglo XVIII, la investigación de un problema de ingeniería dio a la geometría diferencial las bases de la teoría de las congruencias lineales, la cual se mantuvo durante cierto tiempo aislada. Se trata del problema considerado por Monge en el año 1871 en la "Memoria sobre la teoría de las excavaciones y terraplenes", publicada en el año 1784 (ver fig. 51).

La presentación del problema es la siguiente: se dan dos volúmenes iguales de tierra limitadas por superficies cerradas diferentes. Los elementos de uno de los volúmenes es necesario trasladarlos al otro, observando el principio del menor trabajo y consecuentemente menor costo. La trayectoria de las partículas trasladadas forman una familia de rectas biparamétricas, la cual satisface las condiciones: a) a través de cada punto D pasa una y sólo una recta de la familia; b) sobre cada recta de la familia hay elementos de volumen R (punto, segmento); c) la superficie reglada formada por las rectas de la familia limita en D y R volúmenes iguales; d)
$$\iiint_D r dV =$$

$= \min$ (dV es un elemento de volumen D , r la distancia entre los puntos correspondientes de los volúmenes D y R). En el caso plano, la familia de rectas $y = ax + b$ es monoparamétrica. Monge formó la ecuación diferencial, igualando las áreas elementales en las figuras D y R . La existencia de una tangente común a D y R permite determinar el valor de la constante aditiva de la ecuación.

Las congruencias rectilíneas surgen en el caso tridimensional. Monge demostró que entre todas las superficies regladas que así se generan existen sólo dos familias de superficies desarrollables. Si las superficies son normales entre sí, entonces la congruencia es ortogonal a la superficie. Sobre esta última se forma una red ortogonal de líneas de curvaturas. Las normales a la superficie generan a lo largo de estas líneas una superficie desarrollable. La longitud del segmento de normal desde la superficie hasta la intersección con una de las dos normales infinitamente próximas coincide con la longitud del radio de curvatura de la sección plana de la superficie según la línea de curvatura.

Finalmente, Monge afirmó que la condición de minimalidad del trabajo en tales problemas son satisfechas precisamente por las congruencias normales. La demostración de este hecho, no obstante, apareció sólo después de cien años (1886; Saint-Germain y Appel).

En la primera mitad del siguiente siglo, el XIX, tuvo lugar un enriquecimiento de la composición clásica de la geometría diferencial. Los discípulos y colegas franceses de Monge (Carnot, Fourier, Ampère, Poisson y otros), en esencia condujeron esta ciencia en su parte clásica a su estado actual. Señalemos la indicatriz y cíclica de Dupin (en trabajos de los años 1813 y 1822), la introducción de la binormal por Saint Venant (1845), los conos directores por Frenet (1847) y Serret (1851).

Una nueva etapa de la geometría diferencial se pone de manifiesto con las investigaciones de Gauss (1828) sobre la geometría intrínseca de las superficies, es decir, sobre propiedades tales que son invariantes con relación al doblamiento. Las ideas de Gauss y además los trabajos sobre las propie-

iedades de las superficies con curvatura gaussiana constante (Minding en el año 1839, Liouville en 1850) crearon la región de contacto de la geometría diferencial con la no euclídeana¹⁾. Sobre esto se tratará más adelante.

Geometría descriptiva y proyectiva. Los métodos de la geometría descriptiva se formaron en el dominio de las aplicaciones técnicas de la matemática. Los hechos del estudio sobre la perspectiva eran conocidos desde épocas remotas; en especial fueron desarrollados por artistas y arquitectos de la época del Renacimiento. Estos resultados constituyeron la base necesaria para la creación de aquella parte de la geometría teórica, en la cual los modelos espaciales se estudian mediante un complejo de transformaciones en el plano. El método de coordenadas para la construcción de la perspectiva y el correspondiente origen de proyección axonométrica por vez primera lo aplicó Desargues en el año 1636.

La formación de la geometría descriptiva en una ciencia matemática especial se culminó en los trabajos de Monge. Desde el año 1795 Monge dictaba, en la Escuela Politécnica, conferencias sobre proyección ortogonal sobre el plano. En los años 1798—1799 publicó su ya elaborado curso de geometría descriptiva ("Géométrie descriptive"), en el cual efectuó sistemáticamente la transformación de figuras en el espacio con ayuda de dos proyecciones ortogonales sobre dos planos coordenados, mutuamente perpendiculares. Este procedimiento lo completó con el desarrollo de los planos de proyección alrededor del eje, de las proyecciones en un plano y la reducción de las construcciones espaciales y las traslaciones a transformaciones respectivas de las proyecciones.

El texto de geometría descriptiva de Monge consta de cinco capítulos. En el primer capítulo se aclara el objeto y método de la geometría descriptiva y además problemas elementales relativos a rectas y planos. A continuación siguen las construcciones de planos tangentes y normales a superficies curvas. La intersección de superficies curvas se trata en el tercer capítulo, y los correspondientes problemas se trasladan al capítulo cuarto. El quinto capítulo está dedicado a la investigación, con métodos de la geometría descriptiva, de la curvatura de las líneas y superficies.

La exposición de Monge no es elemental. El trató una serie de problemas nuevos y difíciles. Así, investigó las superficies con arista de retroceso, las superficies geodésicas y las líneas de mayor pendiente sobre ellas, las superficies de pendiente idénticas, etc., inspiradas en sus investigaciones geométrico-diferenciales.

¹⁾ Sobre las investigaciones geométrico-diferenciales de Gauss ver A.P. Norden. Trabajos geométricos de Gauss. En: «Карл Фридрих Гаусс». М., Изд-во АН СССР, 1956, стр. 113—114. ("Karl Friedrich Gauss". Ed. de la AC de la URSS).

La influencia de los trabajos de Monge y los textos de Lacroix, próximos por su contenido, fue prolongada. Sus obras se reeditaron muchas veces en el transcurso de la primera mitad del siglo XIX. El perfeccionamiento de carácter particular y la elaboración de diferentes métodos de proyección constituyeron el contenido fundamental de los trabajos sobre geometría proyectiva en lo sucesivo. Esta rama de la geometría, desde la época de Monge, penetró sólidamente en el círculo de las disciplinas matemáticas incluidas en el sistema de instrucción técnica.

El aspecto teórico de la perspectiva técnica y la concepción más general de esta última como una de las formas de transformaciones proyectivas había sido elaborado ya por Desargues. La idea del estudio de las propiedades proyectivas de los objetos geométricos surgió como un nuevo enfoque para la difícil y antigua teoría de las secciones cónicas con el objetivo de simplificarla y generalizarla. La obra de Desargues "Bosquejo del camino hacia los fenómenos que ocurren durante el encuentro de un cono con un plano" (1639) y la de B. Pascal "Experiencia sobre las secciones cónicas" (1640) contienen una resolución magnífica de este problema y sirve de base a una nueva ciencia geométrica, la geometría proyectiva.

En ella la proyección central se enriqueció con elementos infinitamente alejados, reuniendo en un haz las rectas convergentes y paralelas, así como los planos. Muy productivo resultó también el concepto de involución. Las propiedades proyectivas e involutivas de las secciones cónicas constituyeron una teoría entera, entre cuyos numerosos teoremas se destacan los teoremas denominados con los nombres de sus autores, Desargues y Pascal. Además, Desargues descubrió muchos teoremas sobre los polos y polares de las secciones cónicas.

Inicialmente sólo pocos científicos asimilaron las ideas de Desargues y Pascal. Sus obras se perdieron. Sólo en el año 1845 Shalle encontró una copia de la obra de Desargues. De los trabajos de Pascal sobre geometría proyectiva se conservaron sólo bosquejos. En el transcurso de más de un siglo sólo pueden señalarse episódicas aplicaciones de las transformaciones proyectivas. Esta rama aún no se había separado para formar una disciplina independiente. Por esto la construcción rigurosa y sistemática de la geometría descriptiva realizada por Monge hacia finales del siglo XVIII jugó el papel de premisa necesaria para la construcción de la geometría proyectiva.

Las obras de L. Carnot "Sobre la correlación de las figuras en geometría" (1801) y "Geometría de posición" (1803) llamaron nuevamente la atención de los científicos hacia la semiolvidada ciencia de la época de Desargues y Pascal. La construcción teórica y la formalización (1822) de la nueva rama de las matemáticas fue culminada por el oficial del ejército napoleónico Poncelet, el cual tenía para ello suficiente tiempo libre durante

su cautiverio ruso en Saratov. Separando las clases de las transformaciones proyectivas de las figuras Poncelet centró su atención en la interrelación entre las propiedades proyectivas y métricas de las figuras.

El desarrollo posterior de la geometría proyectiva transcurrió bajo el signo de búsqueda de la resolución de este problema. En el siglo XIX, se destacaron correspondientemente dos corrientes. Los partidarios de una de estas corrientes (en especial Staudt) se esforzaban por liberar a la geometría proyectiva de toda métrica. Los otros (por ejemplo, Möbius), por todos los medios desarrollaban los métodos analíticos.

Esta contradicción se atenuó como resultado de las relaciones establecidas de la geometría proyectiva con la no-euclídeana, con la teoría de funciones de variable compleja, cuando se descubrieron las posibilidades de la geometría proyectiva y su verdadero lugar en el sistema de las ciencias matemáticas. La generalidad de las propiedades proyectivas fue usada por Cayley y Klein en el tratamiento de los diferentes sistemas geométricos desde un punto de vista único. La tendencia sintético-geométrica de Staudt y otros sirvió de base a la construcción axiomática de la geometría proyectiva a comienzos del siglo XX.

Fundamentos de la geometría. Con esta rama de la geometría se relacionan aquellas investigaciones y resultados en los cuales se estudia la fundamentación de la elección de los conceptos primarios, se da un análisis del sistema de axiomas situados en la base de las teorías geométricas y además las interpretaciones concretas están contenidas en las últimas ideas matemáticas rectoras. Además se descubren tanto las relaciones de la geometría dentro de las matemáticas, como sus relaciones más amplias con otras ciencias.

Los fundamentos de la geometría en el siglo XVIII son concretamente los fundamentos de la geometría euclídeana. El contenido fundamental de las investigaciones científicas era el análisis crítico de los "Elementos" de Euclides. El pesado sistema de los "Elementos" no satisfacía a muchos matemáticos. Por eso, entre la gran cantidad de obras se destacaba un grupo en el cual se criticaba el sistema de axiomas de Euclides, en especial el postulado sobre las paralelas.

En el plano de la revisión científica de los fundamentos de la geometría euclídeana no hay necesidad de mencionar las numerosas discusiones que ocupan un gran lugar en las obras dedicadas a esta cuestión. El asunto es que la crítica era heterogénea, contradictoria y en la mayoría de los casos insuficientemente fundamentada. Según una justa observación de D'Alembert, no es posible indicar un autor de obras sobre fundamentos de la geometría, el cual no juzgara a sus antecesores y contemporáneos en términos más o menos enérgicos y no ensalzara su propio sistema.

El análisis riguroso de los fundamentos de los "Elementos" de Euclides

y en particular los axiomas sobre las paralelas y sus numerosas "demostraciones", condujo a los matemáticos al convencimiento de lo insatisfactorio de todas las "demostraciones" de este axioma. Algunos de los matemáticos, partiendo del esfuerzo por demostrar el axioma sobre las paralelas por reducción al absurdo, obtuvieron una serie de teoremas de la geometría no euclídeana. Así, el matemático italiano monje G. Saccheri consideró el problema de las paralelas de la siguiente manera: de los extremos del segmento AB trazamos las perpendiculares AA_1 y BB_1 de igual longitud (fig. 52). Los puntos A_1 y B_1 y a continuación los puntos medios C y C_1 de las bases del rectángulo se unen con rectas. Determinemos la magnitud de los ángulos del rectángulo: $\angle A = \angle B = \frac{\pi}{2}$ por construcción. Doble-

la figura por CC_1 :

$CC_1 \perp AB$; además $CC_1 \perp A_1B_1$ y $\angle A_1 = \angle B_1$.

Las proposiciones siguientes sobre la magnitud de estos ángulos iguales reciben en las obras de Saccheri la denominación de hipótesis: de ángulos agudo, recto y obtuso. La hipótesis de ángulo obtuso rápidamente condujo



Fig. 52

a una contradicción. Según la idea de Saccheri así debía ser también el resultado de la hipótesis del ángulo agudo, lo que daría la demostración del axioma sobre las paralelas. Sin embargo, sucedió lo inesperado. La hipótesis del ángulo agudo en su desarrollo lógico daba resultados extraños pero no conducía a contradicción. Las deducciones de Saccheri, como se aclaró con posterioridad, en esencia, coincidían con los primeros teoremas de la geometría de Lobachevski: la suma de los ángulos de un triángulo resultaba menor que $2d$, el área del triángulo no podía aumentarse ilimitadamente con el aumento de sus lados; surgió la necesidad de la existencia de cierta unidad absoluta de longitud, etc.

Aproximadamente después de treinta años Klügel (1763) hizo un resumen de los intentos más importantes de demostración del teorema sobre las

líneas paralelas y llegó a la conclusión de que Euclides colocó correctamente esta proposición entre los axiomas.

Uno de los últimos trabajos sobre los fundamentos de la geometría en el siglo XVIII es el artículo del académico berlinés Lambert, suizo de origen. Alrededor del año 1766 escribió la "Teoría de las líneas paralelas" inspirada en los trabajos de Saccheri y Klügel. Lambert modificó el cuadrilátero de Saccheri, más precisamente, construyó las perpendiculares $AA_1 \perp AB$, $BB_1 \perp AB$, $A_1B_1 \perp AA_1$ y redujo el problema a la determinación de la magnitud del ángulo B_1 . La hipótesis del ángulo recto dio la geometría euclídeana, la hipótesis del ángulo obtuso condujo a un absurdo. Pero la hipótesis del ángulo agudo de nuevo dio extraños teoremas, pero no conducía a ninguna contradicción.

Los fundamentos de la geometría en la segunda mitad del siglo XVIII adquirieron junto a su significado científico, un gran significado social. La cuestión sobre la conveniencia de los "Elementos" en calidad de texto escolar de geometría fue puesta en duda y fue objeto de grandes discusiones. En Inglaterra y parcialmente en Alemania, estas discusiones condujeron al predominio de ediciones que conservaban el espíritu y estructura de los "Elementos" de Euclides y que sólo más o menos simplificaban la exposición. En Francia, al contrario, las orientaciones iniciales en la formación del curso escolar y en definitiva de todo el sistema de la geometría elemental la determinaban las ideas comunes de los enciclopedistas franceses y en especial de D'Alembert. Como resultado surgieron una serie de textos para la escuela primaria y media de autores franceses: D'Alembert, Bezout, Legendre, Lacroix. Con mayor o menor resolución, los autores de estos textos separaban la enseñanza de la geometría del esquema euclídeano.

La influencia de estos libros fue grande. En ellos, en esencia, fue creado el tipo de texto escolar de geometría contemporáneo. Para esto fue realizado un enorme trabajo. Lo que hoy parece evidente en la construcción de las bases de un texto escolar de geometría fue logrado a fines del siglo XVIII por los esfuerzos de los matemáticos franceses.

¿Qué fue hecho concretamente? En primer lugar, en los fundamentos de la geometría fueron introducidos la métrica y el movimiento, los cuales tan cuidadosamente evadió Euclides. En segundo lugar, fue realizada una amplia aritmetización, entre ella la aritmetización de la teoría de las relaciones y proporciones, como resultado de la cual desapareció la necesidad del quinto libro de los "Elementos". La introducción del simbolismo algebraico y de los elementos del álgebra eliminó la necesidad del segundo libro de los "Elementos". La utilización de los radicales suprimió en el curso de geometría la compleja clasificación de las irracionalidades, desarrollada en el décimo libro de los "Elementos". Así, los "Elementos" de Euclides fueron reelaborados en el curso de geometría elemental, cuya ex-

posición viva lo puso al alcance de amplios círculos de la juventud estudiantil y para la resolución de problemas prácticos. La creación de nuevos principios en la enseñanza de la geometría y la profundización del análisis del sistema euclidiano de axiomas crearon, en esencia, las premisas para la reconstrucción de todo el sistema de las ciencias geométricas. Esta reconstrucción ocurrió en el siglo XIX. Su inicio fue realizado por la introducción de la geometría de Lobachevsky.

6.6. Creación de las premisas del álgebra moderna y de la teoría de los números

Descartes, enlazando en una ciencia única, en la geometría analítica, los métodos del álgebra y la geometría, consideró que había creado una ciencia única, que unía y parecía como si absorbiera estas dos disciplinas. Sin embargo, la utilización del aparato algebraico en la geometría analítica no condujo a la supresión del álgebra. El álgebra se desarrolló posteriormente por su camino original, teniendo su propia problemática científica. Esta problemática resultó preferentemente la teoría de las ecuaciones algebraicas. Esta teoría incluía tanto la formación de la teoría general de las ecuaciones, como también la acumulación de procedimientos de su resolución numérica y gráfica. La elaboración científica de semejantes problemas condujo simultáneamente a la reestructuración de los fundamentos del álgebra, vinculada con la ampliación del concepto de número y con el perfeccionamiento del aparato algebraico simbólico-literal. El desarrollo de estos dos aspectos del álgebra, los cuales en esencia determinan su contenido y objeto, alcanzó, a fines del siglo considerado aquí, tal estado que se hizo necesario y posible el paso a problemas cualitativamente nuevos de esta ciencia, relacionados con el surgimiento de la teoría de Galois y la teoría de grupos.

Adjunto al álgebra, no estando aún claramente separada de ella, se encontraban los procedimientos de cálculo aritmético, entre ellos los métodos de la combinatoria elemental y además los problemas teóricos de la aritmética, es decir, la teoría de los números. Todos ellos se unían en la conciencia de los científicos del siglo XVIII hasta cierto punto, en una ciencia única, para la cual existía incluso una denominación especial, aritmética universal o general. Al análisis del desarrollo de las partes de esta ciencia está dedicado el presente capítulo.

La independencia de los caminos de desarrollo del álgebra se determinó ya a comienzos del siglo XVIII, cuando en el año 1707 vio la luz la "Aritmética Universal" de I. Newton. En ella el álgebra se exponía en estrecha vinculación con el desarrollo de los métodos de cálculo como una fase superior de la aritmética; las cuestiones geométricas fueron relegadas al do-

minio de las aplicaciones. Desde el comienzo, Newton introduce las operaciones tanto con expresiones simbólico-literales como con números (enteros y fraccionarios). Introduciendo al lector en la técnica de las transformaciones algebraicas idénticas, Newton a continuación lo pone en contacto con los métodos de resolución de ecuaciones. En un gran número de ejemplos, tomados de la geometría, la mecánica y otras ciencias, demuestra la reducción del problema a la formación de una ecuación algebraica cuya raíz es la solución del problema. Culmina el libro con los resultados de la teoría general de ecuaciones y además la resolución gráfica de éstas mediante la construcción geométrica de las raíces.

La "Aritmética Universal" constituye una escritura breve de las conferencias sobre álgebra, las cuales Newton dictó en la Universidad de Cambridge en los años 1673—1683. En ella no aparecen demostraciones. No constituye una colección de todos los logros algebraicos de Newton. En otros de sus trabajos están contenidos no pocos descubrimientos en el campo del álgebra. Entre ellos: la generalización de la fórmula de la potencia del binomio para el caso de exponentes racionales fraccionarios, comunicada en una carta de Newton a Oldenburg en el año 1676; el procedimiento de resolución numérica de las ecuaciones, conocido bajo el nombre de paralelogramo de Newton, esto es, el método de desarrollo de y en serie de potencias fraccionarias de x y otras, dada la ecuación $P_n(x, y) = 0$ (donde P_n es un polinomio).

La temática algebraica de la "Aritmética Universal" estuvo en el centro de atención de muchos eminentes matemáticos del siglo XVIII. Los procedimientos de resolución numérica de ecuaciones (tanto exacta, como aproximada) fueron elaborados por Halley, Lagrange, Mourgaille, Fourier y otros. Los numerosos esfuerzos por dar una demostración rigurosa a la fórmula del binomio en su forma más general se suprimieron sólo cuando Gauss en el trabajo sobre la serie hipergeométrica (1811) resolvió este problema. El paralelogramo de Newton recibió en los trabajos de Stirling, de Gua, Cramer y otros diversidad de aplicaciones: en la teoría de las curvas algebraicas, las funciones analíticas y otras¹⁾.

Después de la "Aritmética Universal" de Newton surgieron una serie de monografías que contenían una construcción sistemática del álgebra. El "Tratado sobre álgebra" de Maclaurin (1748) fue todavía preferentemente un comentario al libro de Newton en el cual no se citaban demostraciones. En las obras siguientes, en particular en la famosa "Aritmética Universal"

¹⁾ Ver, p. ej., Н.Г. Чеботарев. Многоугольник Ньютона и его роль в развитии математики. В кн.: Н.Г. Чеботарев. Собр. соч. т. III, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1950, стр. 48—80. (Chebotarev. Polygon of Newton and its papel en el desarrollo de las matemáticas. En: N.G. Chebotarev, obras completas, t. III).

de Euler, el álgebra, como ciencia independiente, se destacaba aún más precisamente.

Dictada por Euler, ya ciego, alrededor del año 1767, la "Aritmética Universal" apareció en los años 1768—1769 en ruso. Además de sus reediciones, fue traducida al latín, inglés, francés y holandés. Su influencia en la determinación de la problemática científica del álgebra y en la estructura del curso de álgebra en las universidades fue muy grande. El carácter monográfico de este libro y los objetivos que planteaba ante semejantes obras su autor, permiten por su contenido juzgar sobre el estado del álgebra en la segunda mitad del siglo XVIII.

La "Aritmética Universal" consta de dos partes. En los tres párrafos de la primera parte Euler dirigió una atención fundamental a la generalización de las reglas de resolución de problemas aritméticos y al desarrollo del aparato simbólico-literal del álgebra. Así, en el primer párrafo se aclaran las operaciones sobre números y monomios, sobre radicales y números complejos. Aquí se introducen los logaritmos.

La segunda sección está dedicada a las operaciones con polinomios. Además se dan las reglas de extracción de raíces de los números y las expresiones algebraicas (polinomiales). Finalmente, se introducen las series como medio de expresión de las funciones racionales fraccionarias y binomios con exponentes fraccionarios y negativos de una potencia.

El tercer párrafo es, por su contenido, el de carácter más variado. En él se introduce el número real (mediante el algoritmo de sustracción alternado), los números poligonales, las proporciones y progresiones (tanto aritméticas como geométricas), las fracciones decimales periódicas y los problemas sobre por ciento.

A los métodos de resolución de ecuaciones algebraicas y a su teoría general está dedicado el primer párrafo de la segunda parte. Aquí están coleccionados los métodos de resolución de ecuaciones algebraicas de los primeros cuatro grados y también los sistemas de ecuaciones lineales. Además, se tratan los métodos de cálculo aproximado de las raíces de las ecuaciones algebraicas.

El último párrafo (segundo párrafo de la "Aritmética Universal") incluye preferentemente los métodos de búsqueda de las soluciones enteras de las ecuaciones indeterminadas de primer grado y grados superiores. A ellas se agregan la resolución de otros problemas de carácter teórico-numérico. Así, aquí se trata el gran teorema de Fermat y se da su demostración para $n = 3$ y $n = 4$. Se introducen las sustituciones de Euler que transforman un trinomio cuadrado en un cuadrado exacto.

De este modo, fue determinado el objeto del álgebra en el siglo XVIII. Ella se convirtió en la ciencia sobre las ecuaciones algebraicas. En ella, además se incluía la elaboración del aparato simbólico-literal necesario para la

resolución de ecuaciones. El álgebra interaccionaba estrechamente con la aritmética, conservando en su composición los métodos numéricos. Por otra parte, tenía lugar una interpenetración también muy estrecha de los métodos y problemas del álgebra y la teoría de los números, principalmente en el dominio relativo al análisis diofántico. El álgebra elemental actual en gran medida ha conservado en su estructura esta particularidad.

La comparación de la "Aritmética General" de Newton y la "Aritmética Universal" de Euler nos permite advertir el comienzo y (en grado considerable) el resultado de la formación del álgebra en el siglo XVIII. Ahora consideraremos brevemente la evolución del contenido científico de esta parte amplia e importante de las matemáticas y el proceso de creación de las premisas para una nueva etapa, la actual, de su historia.

En la base de las investigaciones algebraicas está el concepto de cantidad, magnitud, número. La generalidad y el campo de aplicaciones de los métodos algebraico-literales se determinan por la generalidad del concepto de número. En el curso del siglo XVIII, este concepto sufrió un período de desarrollo lento. Se enriqueció gradualmente, distanciándose seriamente, no obstante, de la práctica de cálculo y de las aplicaciones del análisis matemático.

El concepto de número real incluía los números naturales, las fracciones positivas y las irracionalidades. Estas últimas tenían una definición general, llegada hasta nosotros desde la antigüedad, a través de una relación con la participación de consideraciones geométricas: un número es aquello que se relaciona con la unidad como un segmento de una recta a otro, tomado como unidad. Sin embargo, la concepción general de número irracional adquirió el derecho de ciudadanía sólo en la segunda mitad del siglo XVIII.

Grandes discusiones ardían todavía en torno al concepto de número negativo. En el coro discordante de los juicios, predominaron las contraposiciones de los números negativos a los positivos. Se encontraban incluso científicos (Maseres, 1758; Frenđ, 1796) que no reconocían los números negativos así como tampoco los imaginarios. Las reglas de las operaciones con números negativos no tenían demostración convincente. Sólo en el siguiente siglo, el XIX, se logró presentar los números negativos incluidos en un sistema numérico único y dar a esta presentación una demostración rigurosa y de reconocimiento general.

Los números imaginarios en el álgebra aparecieron en forma de raíces de ecuaciones. Su estudio, no obstante, avanzó no en los tratados algebraicos, sino bajo la presión de las necesidades imperiosas del análisis matemático. Precisamente, en los marcos del análisis gradualmente se buscaban e introducían las reglas de las operaciones formales con los números imaginarios y complejos. En los años 40, D'Alembert y Euler demostraron

que cada expresión, que contiene magnitudes imaginarias, se reduce a la forma $\alpha + \beta i$ (donde α y β son números reales). La evidente utilidad de los números complejos provocó el reforzamiento de la atención sobre la cuestión de su naturaleza. Sin embargo, este problema quedaba sin resolución.

El primero que elaboró (al parecer, en interés de la práctica geodésica y cartográfica) un procedimiento de interpretación geométrica de los números complejos como puntos en el plano fue el agrimensor danés K. Wessel (año 1797, publicado en 1799). Sin embargo, su trabajo resultó inadvertido, así como una interpretación análoga de J. Argand (1806). Sólo cuando en los años 20 del siglo XIX Gauss y Cauchy introdujeron y fundamentaron las operaciones con los números de la forma $\alpha \pm \beta i$, introdujeron el término "número complejo", encontraron el "módulo" (Cauchy, 1821) o la "norma" (Gauss 1828) de un número complejo, definieron el concepto de carácter conjugado de los números complejos, la situación de estos últimos en las matemáticas se consolidó considerablemente. Los números complejos entraron en el álgebra.

A propósito, mencionemos además una dificultad aritmético-algebraica, superada sólo a finales del siglo XVIII. Se trata de la introducción del aparato de las fracciones decimales. Todavía en el año 1585 el ingeniero y matemático holandés Stevin los introdujo y mostró su utilidad. Pero en el transcurso de más de doscientos años posteriores, las fracciones decimales se utilizaban sólo en la práctica del cálculo astronómico. Se requirieron los esfuerzos de muchos de los más eminentes matemáticos (Lagrange, Laplace, Monge y otros), los cuales en el período de los años 1790—1799 elaboraron un sistema métrico decimal único (introducido en Francia el 24 de abril de 1799), para que el aparato de las fracciones decimales adquiriera su actualidad universal. En el siglo XIX, en la medida del paso al sistema decimal de los nuevos Estados, este aparato se convirtió en parte de la preparación matemático-elemental de los estudiantes.

La parte del álgebra, relacionada con la resolución de ecuaciones, constituía su contenido principal. A este problema fueron dedicados una enorme cantidad de trabajos. En el ilimitado mar de libros y artículos, evidencias impresas de los esfuerzos colosales de los matemáticos, dirigidos a su resolución, se puede, por otra parte, destacar algunas direcciones. La primera de ellas se formó de los intentos de búsqueda de un algoritmo regular algebraico-elemental (a la manera del método de Tartaglia-Cardano para la ecuación cúbica y del método de Ferrari para la ecuación de cuarto grado), adecuado para la resolución de ecuaciones de grado superior al cuarto. Los autores de estos esfuerzos se guiaban sólo por la seguridad intuitiva de la posibilidad de búsqueda de tal algoritmo, por lo menos para raíces reales. Del gran número de trabajos de esta dirección consideremos sólo los trabajos de Tschirnhaus y Euler.

El método de Tschirnhaus, publicado en el año 1683, consistía en lo siguiente. Supongamos que está dada la ecuación

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

Introduzcamos la ecuación auxiliar

$$y = b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \dots + b_{n-1}$$

con coeficientes, por ahora, indeterminados. Si de ambas ecuaciones se logra eliminar x (y esto es posible), entonces obtenemos

$$y^n + c_1 y^{n-1} + \dots + c_n = 0.$$

Los coeficientes c_1, c_2, \dots, c_n son funciones de los coeficientes b_1, b_2, \dots, b_n y a_1, a_2, \dots, a_n . Ahora elijamos b_1, b_2, \dots, b_n de modo que $c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1} = 0$. Entonces $y = \sqrt[n]{-c_n}$ y obtenemos la posibilidad de sustituir la ecuación dada por otra de grado $n - 2$. Tschirnhaus logró llevar a cabo este método sólo para $n = 3$ y lo publicó sin comprobaciones posteriores. Más tarde Euler realizó todos los cálculos para $n = 4$. Para $n \geq 5$ esto, naturalmente, resultaba imposible. Los intentos de elección de b_1, b_2, \dots, b_n conducían a ecuaciones cuyo grado era mayor que cinco.

Euler más de una vez intentó, utilizando los métodos de Tartaglia, seleccionar para las raíces de las ecuaciones formas convenientes de irracionalidades. En el caso $x^3 = ax + b$ la correspondiente expresión es conocida. Esta es $x = \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}$. Para la ecuación $x^4 = ax^2 + bx + c$, Euler obtuvo una resolvente cúbica con las sustituciones

$$x = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}, \quad \text{ó} \quad x = \sqrt[3]{\delta} + \sqrt[3]{\varepsilon} + \sqrt[3]{\varphi}.$$

Sin embargo extrapolar este procedimiento, como esperaba Euler, en general a las ecuaciones de la forma

$$x^n = a_1 x^{n-2} + a_2 x^{n-3} + \dots + a_{n-1}, \quad n > 4$$

con la sustitución

$$x = \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt[n]{\alpha_k}$$

no se logró. Alrededor del año 1764, Euler generalizó esta sustitución

$$x = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \sqrt[n]{\alpha_k}.$$

Esta misma forma de sustitución la descubrió simultáneamente E. Waring. No obstante, tampoco esta sustitución tan general, más tarde utilizada por Abel para la demostración de la imposibilidad de resolución en radicales de la ecuación general de quinto grado no daba el resultado necesario.

El número de intentos de búsqueda de la solución a las ecuaciones con grado $n \geq 5$ por medios algebraicos elementales era muy grande. En esencia este era el único camino para resolver el problema que tenían al alcance los matemáticos en aquella época. El era equivalente al establecimiento de la posterior teoría algebraica de la resolvente. A propósito, en el curso de estos intentos se formó el término “resolvente” del latín *aequatio resolvens*, lo que significa ecuación que resuelve. En las matemáticas contemporáneas, este término se utiliza en diferentes sentidos. Tenemos en cuenta el aspecto algebraico: la resolvente de una ecuación algebraica $P_n(x) = 0$ es en esencia también una ecuación algebraica $g(x) = 0$, tal que: a) sus coeficientes son funciones racionales de los coeficientes de la ecuación $P_n(x) = 0$; b) el conocimiento de sus raíces permite encontrar las raíces de la ecuación $P_n(x) = 0$ en la resolución de ecuaciones de grado menor que n . Al parecer el primero que introdujo el término “resolvente” fue Euler (alrededor del año 1732).

Los fracasos en la búsqueda de algoritmos algebraicos mencionados anteriormente, fueron, al parecer, una de las causas del surgimiento de un gran número de trabajos dedicados al hallazgo aproximado de las raíces de las ecuaciones, tanto gráficamente como por métodos numéricos. Los métodos gráficos de los algebraistas fueron tomados de la geometría analítica. La elección de las curvas para la resolución geométrica de las ecuaciones se determinaba o por consideraciones de la facilidad de su construcción o por el menor grado de las ecuaciones algebraicas correspondientes a estas curvas. Por ejemplo, muchos científicos (L'Hospital, Stirling, Bernoulli, Newton, Cramer y otros) llegaron a la idea de construir las raíces de la ecuación,

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

como los puntos de intersección de la curva

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x$$

y la recta $y = -a_n$. Construcciones posteriores se basaban en la suma gráfica de las curvas:

$$y = a_0 x^n, \quad y = a_1 x^{n-1}, \quad \dots, \quad y = a_{n-1} x + a_n,$$

para lo cual fue incluso ideado un instrumento especial.

Entre los métodos numéricos aproximados, mencionemos el método de Newton, el cual fue mostrado en el ejemplo $y^3 - 2y - 5 = 0$. Denotemos la parte entera de la raíz, con la cual comienza Newton, con la letra ε , para hacerla común. Suponiendo $y = \varepsilon + p$, sustituyéndola en la ecuación y despreciando, en virtud de la pequeñez de p , todas sus potencias excepto la primera, encontramos la aproximación p_1 en el primer lugar decimal. Des-

pués poniendo $p = p_1 + q$ repetimos toda la operación desde el comienzo y así sucesivamente. Así se obtienen las sucesivas aproximaciones de la raíz: $x = \varepsilon, p_1 p_2 \dots$

La precisión de este método, el cual pertenece a Halley, consiste en tomar la primera aproximación ε de la raíz de la ecuación $P_n(x) = 0$. A continuación la magnitud $\varepsilon + p$ se coloca en la ecuación, cuyos miembros se desarrollan en potencias de p :

$$P_n(\varepsilon + p) = P_n(\varepsilon) + Ap + Bp^2 + \dots = 0$$

A continuación p se determina de la ecuación cuadrática

$$Bp^2 + Ap + P_n(\varepsilon) = 0.$$

Newton aplicó un método análogo a la resolución de ecuaciones literales con dos incógnitas $f(x, y) = 0$, lo que es lo mismo, al cálculo aproximado del valor de las funciones implícitas. Relacionada con esto, la resolución de la ecuación respecto a una de sus incógnitas, es decir, la representación de $f(x, y) = 0$ en la forma $y = f_1(x)$ es una serie de potencias, en general infinita, Newton la realizaba con ayuda de un procedimiento especial que recibió el nombre de paralelogramo de Newton. Las distintas variedades de este método son conocidas bajo los nombres de rectángulo, triángulo, polígono, diagrama, pero invariablemente están relacionadas con el nombre de su creador¹⁾.

Los métodos numéricos exigen, en calidad de datos previos de la resolución, una serie de cuestiones comunes: sobre la determinación del número de raíces positivas, negativas e imaginarias, sobre la separación de las raíces y sobre la determinación de las fronteras entre las cuales se encuentran las raíces. En el siglo XVII fue estudiado un gran número de tipos particulares de ecuaciones. M. Rolle a finales de siglo estableció que entre los raíces de la ecuación $f'(x) = 0$ puede encontrarse a lo sumo una raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Una cota superior de las raíces reales de la ecuación

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

según Rolle es igual a $|a_k| + 1$, donde a_k es el mayor, en valor absoluto, coeficiente negativo de la ecuación.

No entrando en detalles, señalemos que para el círculo de problemas mencionados ya en los siglos XVII — XVIII fueron en lo fundamental encontrados aquellos teoremas que actualmente forman parte del contenido de los respectivos capítulos de los cursos de álgebra superior. Por eso

¹⁾ Véase, p. ej., Н.Г. Чеботарев. Многоугольник Ньютона и его роль в развитии математики. В кн.: Н.Г. Чеботарев. Собр. соч., т. III, стр. 47—80. (N.G. Chebotarev. Polygon of Newton and its paper in the development of the mathematics. En: N.G. Chebotarev. Obras completas t. III.)

señalaremos sólo el método, rara vez utilizado, perteneciente a Lagrange.

Supongamos que se conoce la primera aproximación p de la raíz x de la

ecuación, tal que $p < x < p + 1$. Coloquemos en la ecuación $x = p + \frac{1}{y}$.

La nueva ecuación tiene una raíz real $y > 1$ ya que

$$1 > \frac{1}{y} > 0, \quad \varepsilon(y) = q,$$

esto es

$$y = q + \frac{1}{z}.$$

Repetiendo este procedimiento obtenemos

$$x = p + \frac{1}{q + \frac{1}{z + \dots}}$$

Si la fracción en cadena se interrumpe, entonces la raíz es racional, si ella es irracional, entonces las fracciones en cadena permiten estimar con que error se realiza cualquier aproximación sucesiva.

Los procedimientos prácticos de resolución de ecuaciones algebraicas, acumulándose, abrieron las perspectivas para el desarrollo de la parte teórica del álgebra. El futuro de esta ciencia gradualmente se revelaba en diversas investigaciones teóricas agrupadas alrededor de dos problemas: la solubilidad de las ecuaciones algebraicas en radicales y la demostración del teorema fundamental del álgebra.

Ya indicamos que Girard (1629) y Descartes (1637) por vez primera establecieron que una ecuación algebraica puede tener tantas raíces como unidades tiene su potencia mayor. En el siglo XVIII el planteamiento de este problema se transformó. Ahora se exigía demostrar que cada ecuación algebraica de grado n tiene precisamente n raíces (reales y complejas). En calidad de afirmación equivalente se proponía demostrar la posibilidad de descomponer la parte izquierda de la ecuación en producto de factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales. Sobre la resolución de este y otros problemas relacionados con él, trabajaron D'Alembert, Euler, Lagrange, Gauss y muchos otros matemáticos.

La primera demostración fue dada por D'Alembert (1746). Esta consistía en el establecimiento del hecho que

$$\min |P_n(x)| = 0.$$

No obstante, las consideraciones de D'Alembert no eran rigurosas, contenían en forma explícita apelaciones a los recursos del análisis matemático y no aliviaban las dificultades de los algebraistas.

La demostración de Euler, obtenida casi simultáneamente (publicada en el año 1751), se basaba en la consideración de los gráficos de las curvas

$$y = P_n(x)$$

respectivamente para n par e impar. Resultaba entonces, que la ecuación $P_n(x) = 0$ para n impar tiene una raíz real o un número impar de ellas, para n par existe un número par de raíces reales o no existe ninguna; si el término independiente de una ecuación de grado par es negativo, entonces la ecuación tiene en todo caso dos raíces reales de signos diferentes. La dificultad fue así reducida a la demostración del teorema para las ecuaciones de grado par: $n = 2m$. Ya que $2^{n-1} < 2m < 2^n$, entonces multiplicando la ecuación hasta $2^n - 2m$ por factores lineales de la forma $x - \alpha$ vemos que es suficiente realizar la demostración para las ecuaciones cuyo grado tiene la forma 2^n . Respecto a las ecuaciones de este último tipo Euler enunció un importante teorema: la parte izquierda de la ecuación algebraica de grado 2^n ($n > 1$, entero) se descompone en dos factores de grado 2^{n-1} y esbozó el camino de su demostración¹⁾.

Junto con esto Euler encontró dos propiedades importantes de las ecuaciones algebraicas: a) la función racional de las raíces de la ecuación, la cual toma k valores diferentes para todas las posibles sustituciones de las raíces, satisface una ecuación algebraica de grado k , cuyos coeficientes son funciones racionales de los coeficientes de la ecuación dada; b) la función racional de las raíces de la ecuación, que es invariante respecto a las permutaciones de las raíces, es una función racional de los coeficientes de la ecuación original.

Precisando la demostración de Euler, Lagrange introdujo y elaboró la teoría de las funciones semejantes, o sea, de las funciones invariantes para sustituciones de un mismo grupo y sólo para esas. Lagrange trata sobre la semejanza de funciones simétricas de las raíces de la ecuación en el caso en que todos los $2k$ valores que ellas pueden tomar, bajo todas las permutaciones de las raíces, se diferencian entre sí. Respecto a las funciones semejantes, Lagrange demostró que éstas se expresan racionalmente unas a través de las otras y a través de los coeficientes de la ecuación dada.

El sentido de las demostraciones de Euler y Lagrange desde el punto de vista actual es el siguiente. Sea dada la ecuación $P_n(x) = 0$. Sus coeficientes son elementos del campo D de números reales. K es el campo de Galois de la ecuación dada. El grado de K sobre D es: $n = 2^k \cdot k$ (k es impar) Según el

¹⁾ Véase I.G. Bashmakova. О доказательстве основной теоремы алгебры. В сб.: «Историко-математические исследования», вып. X.M., Гостехиздат, 1957, стр. 257—304. (I.G. Bashmakova. Sobre la demostración del teorema fundamental del álgebra. En la colección: "Investigaciones histórico—matemáticas".)

teorema de Silow, existe un subgrupo H de orden 2^r del grupo de Galois G de esta ecuación. Formemos un campo de elementos q invariantes respecto a las sustituciones de H :

$$D \subset q \subset k,$$

El grado de K sobre q es de 2^r , el grado de q sobre D es k impar. El campo q se genera por la adjunción a D de la raíz η del polinomio $P_2(x)$ de grado k irreducible en D . Pero k es impar; por consiguiente, $q = D^2$.

Consideremos K sobre D . Su grado es 2^r . Si $K = D(\eta)$ entonces η es raíz de la ecuación $P_2(x) = 0$ de grado 2^r con coeficientes reales como en las ecuaciones consideradas por Euler. Se sabe que los grupos de orden p^r , donde p es primo, r es natural, son resolubles; sus divisores normales tienen orden primo p . Aquí $p = 2$. Esto significa,

$$D \subset K_1 \subset \dots \subset K_r = K,$$

donde cada uno de los campos normales intermedios es cuadrático con respecto al anterior. Las correspondientes ecuaciones cuadráticas, las cuales es necesario resolver sobre el campo anterior para obtener el siguiente, tienen raíces o reales o complejas. Sea K_i el primer campo que coincide con el campo de los números complejos; los campos siguientes también coincidirán con este campo. En caso contrario todos los campos coincidirán con D .

Inversamente, si se parte de $K = K_r$, entonces para la búsqueda de la raíz de la ecuación $P_2(x) = 0$ de grado 2^r es necesario resolver en D una ecuación de grado 2^{r-1} . Sus raíces generan el campo K_{r-1} , y sobre él, una ecuación cuadrática. Es posible repetir este razonamiento para una potencia en una unidad menor, etc.

Los elementos de estas ideas de la nueva álgebra se prevén claramente en las demostraciones de Euler y Lagrange.

Otro grupo de los elementos de la teoría de Galois fue acumulado en una serie de investigaciones del problema de la reductibilidad de ecuaciones. Newton fue el primero que salió de los límites de la cuestión sobre la reductibilidad de las ecuaciones sobre el campo de los números racionales. Propuso un algoritmo para la resolución de la cuestión sobre si puede o no una ecuación "ser reducida mediante algún divisor irracional o lo que es lo mismo ... es imposible o no descomponer así una ecuación en dos partes iguales para que de cada una de ellas se pueda extraer la raíz"¹⁾.

¹⁾ Ya que las únicas ecuaciones irreducibles de grado impar sobre el campo de los números reales son las ecuaciones lineales.

²⁾ И. Ньютон. Всеобщая арифметика. М., Изд-во АН СССР, 1948, стр. 270 (I. Newton. Aritmética Universal).

Además del planteamiento de la cuestión sobre la posibilidad de reducir una ecuación sobre diferentes dominios, este razonamiento contiene cierta idea de la teoría de Galois. En efecto, Newton plantea, en esencia, la cuestión de unir al campo de los números racionales las irracionalidades del tipo \sqrt{k} y la reductibilidad de la ecuación sobre este campo ampliado. En otras palabras, se trata de la búsqueda de subcampos cuadráticos del campo de la descomposición del polinomio.

Los algoritmos de Newton, y después de él también de Waring, para la resolución de la cuestión sobre si se descompone o no una ecuación en factores, si el dominio de los números racionales se amplía mediante la adición de una irracionalidad cuadrática, bicuadrática o cúbica, son sencillos, pero voluminosos. Newton y Waring representaban cada vez el polinomio en la forma de un producto de factores con coeficientes indeterminados, que dependen de las irracionalidades del tipo investigado. Después seguían los intentos de una elección tal de los coeficientes indeterminados, para que la descomposición buscada se realizara.

Estos voluminosos métodos no descubrían perspectivas y conducían a errores. No obstante fueron útiles. En ellos en realidad se consideraban los campos de números algebraicos y se determinaba la forma general de los elementos de estos campos.

La acumulación de premisas de la nueva etapa de desarrollo del álgebra en el siglo XVIII alcanza su culminación en las investigaciones de Lagrange, las cuales se encuentran reflejadas en sus "Reflexiones sobre la resolución algebraica de las ecuaciones" (1771—1772). En esta obra, Lagrange reconsideró críticamente todos los métodos acumulados hasta su época y los intentos de resolución de ecuaciones algebraicas. A las ya descubiertas resolventes agregó una más de carácter bastante general.

Consideró la ecuación algebraica

$$x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots = 0$$

y en correspondencia con el método de Tschirnhaus, la ecuación auxiliar

$$y = -(x^{n-1} + f x^{n-2} + g x^{n-3} + \dots + k)$$

con coeficientes indeterminados f, g, \dots, k . Lagrange eliminó x de ambas ecuaciones:

$$y^n + A y^{n-1} + B y^{n-2} + \dots + P y + T = 0$$

y eligió los coeficientes f, g, \dots de modo que

$$A = B = \dots = P = 0.$$

Entonces la resolución de la ecuación dada se reducía a la resolución del sistema de ecuaciones: $y^n = -T$ y las $n - 1$ ecuaciones en las cuales se en-

encuentran los coeficientes indeterminados f, g, \dots . Las raíces de la primera de las ecuaciones:

$$y_1 = \sqrt[n]{-T}, \quad y_1 \alpha, y_1 \alpha^2, \dots, y_1 \alpha^{n-1},$$

donde $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ son las raíces transformadas de las unidades (raíces de la ecuación $y^n - 1 = 0$). Colocando estos valores en la expresión para x :

$$x = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_{n-1} y^{n-1},$$

obtuvo el sistema de n ecuaciones:

$$x_1 = a_0 + a_1 y_1 + a_2 y_1^2 + \dots + a_{n-1} y_1^{n-1};$$

$$x_2 = a_0 + a_1 y_1 \alpha + a_2 y_1^2 \alpha^2 + \dots + a_{n-1} y_1^{n-1} \alpha^{n-1};$$

$$x_n = a_0 + a_1 y_1 \alpha^{n-1} + a_2 y_1^2 \alpha^{n-2} + \dots + a_{n-1} y_1^{n-1} \alpha.$$

Como consecuencia de que

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \dots = 0;$$

$$1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots = 0;$$

Obtuvo

$$n a_0 = x_1 + x_2 + x_3 + \dots$$

$$n a_1 y_1 = x_1 + \alpha^{n-1} x_2 + \alpha^{2(n-1)} x_3 + \dots$$

$$n a_2 y_1^2 = x_1 + \alpha^{n-2} x_2 + \alpha^{2(n-2)} x_3 \dots$$

A continuación, Lagrange simplificó el sistema teniendo en cuenta que

$$\sum_{i=1}^n x_i = -m, \text{ de donde } a_0 = -\frac{m}{n}. \text{ Poniendo}$$

$$T = -y_1^n = -1, \quad a_{n-1} = \frac{c'}{n}, \quad a_{n-2} = \frac{c''}{n} \dots$$

$$a_1 = \frac{c^{(n-1)}}{n},$$

obtuvo

$$t = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \dots$$

una función lineal de las raíces de la ecuación, denominada posteriormente resolvente de Lagrange. La función $\theta = t^n$ para todas las permutaciones

$$\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n} \end{pmatrix}$$

de las raíces de la ecuación $P_n(x) = 0$ toma $k \leq n!$ valores. Los coeficientes de la ecuación

$$\theta^k + b_1 \theta^{k-1} + \dots + b_k = \prod_{i=1}^k (\theta - \theta_i) = 0$$

son en esencia funciones simétricas de θ_i ($i = 1, 2, \dots, k$). Estas últimas a su vez son funciones simétricas de las raíces x_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Por consiguiente las raíces x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) pueden ser determinadas a través de las $k \leq n!$ raíces θ_i .

Sin embargo, todos los métodos de búsqueda de las resolventes, conocidos para las ecuaciones de grado $n \leq 4$, conducen para $n \geq 5$ a una resolvente de grado $k > n$. Esto obligó a Lagrange a dudar que los métodos por él considerados pudieran resolver las ecuaciones de grado $n \geq 5$. No obstante consideró que los grupos de sustituciones de las raíces de las ecuaciones tratadas por él son "el camino para la solución", ya que él advirtió en esto los caminos de solución para la clase de las llamadas ecuaciones cíclicas, o sea, ecuaciones con grupo cíclico de sustituciones.

Lagrange logró una generalidad bastante grande. Trató las ecuaciones con coeficientes literales arbitrarios. Respecto a ellas investigó el campo de las funciones racionales de las raíces. Introdujo el grupo de las sustituciones de raíces de la ecuación (el grupo simétrico) y estudió la correspondencia entre sus subgrupos y los subcampos de las funciones racionales, invariantes respecto a las sustituciones de estos subgrupos. Finalmente, Lagrange demostró también los primeros teoremas de la teoría de grupos, por ejemplo, que el orden de un subgrupo es un divisor del orden del grupo.

Tras Lagrange, las sustituciones de las raíces de las ecuaciones fueron estudiadas por Ruffini, que propuso en 1799 una demostración de la insolubilidad en radicales de la ecuación de grado $n \geq 5$. Sin embargo, esta demostración no era general, ya que Ruffini aceptó sin demostración que las raíces de las resolventes se expresan racionalmente a través de las raíces de la ecuación original. En trabajos posteriores, aparecidos en los años 1801, 1802, 1806 y 1813 se esforzó por demostrar esta proposición, pero no pudo lograr una fundamentación completa. Sin embargo, llevó a cabo una investigación sistemática de las permutaciones finitas y demostró una serie de teoremas importantes. Además, por vez primera introdujo el término "gru-

po". En el año 1814, Ruffini descubrió y formuló la regla de cálculo aproximado de las raíces de las ecuaciones, descubierta de nuevo en el año 1819 por Horner.

El álgebra, de esta manera, se desarrolló en el transcurso del siglo XVIII como ciencia sobre la resolución de ecuaciones algebraicas. En ella obtuvieron la culminación conocida los problemas relativos a los recursos matemático-elementales de resolución de ecuaciones. Fueron elaboradas las premisas fundamentales para la creación de la teoría de Galois y la teoría de grupos. El álgebra en los albores del siglo XIX se encontraba en vísperas de una reconstrucción radical, realizada mediante la unión de una serie de ciencias algebraicas, cuyo tema de estudio pasaron a ser objetos de naturaleza más abstracta y compleja: grupos, campos, anillos, etc.

El desarrollo del álgebra en este período demuestra una vez más la ley general del desarrollo de las matemáticas: los nuevos campos de las matemáticas se engendran en las entrañas de los viejos, sus conceptos y métodos fundamentales de operabilidad pasan por un período de desarrollo "embrionario". Después ocurre el surgimiento de una nueva disciplina matemática. Una particularidad característica del proceso de surgimiento lo constituye el viraje en el método. La separación se acompaña con el surgimiento de un nuevo aparato simbólico, que juega un doble papel: el de reflejar los procesos matemáticos reales y el operativo. Los nuevos campos en el caso dado son la teoría de Galois y la teoría de grupos.

En el presente libro hemos señalado más de una vez hechos aislados en la historia de la teoría de los números. Esta rama de las matemáticas, en la cual se estudian las propiedades de los números enteros, racionales y algebraicos y también las propiedades de cualesquiera otros números surgidos de su aproximación por números racionales, surgió de la aritmética. En el siglo XVIII estaba aún estrechamente ligada al álgebra. Sin embargo, las particularidades de la problemática y métodos de la teoría de números ya se reconocía suficientemente definida. La reserva acumulada de resultados teórico-numéricos también permitía la separación de la teoría de números en un campo especial de las matemáticas. A continuación daremos un bosquejo de los momentos fundamentales de la historia de la teoría de los números.

Ya en la Grecia Antigua, como mencionamos anteriormente, habían sido separados, según el principio de generalidad de las propiedades de los diferentes subconjuntos de los números enteros: primos, cuadrados, perfectos, poligonales, constituyentes de un trió pitagórico y otros. Allí mismo fue elaborada una armoniosa teoría de divisibilidad, demostrada la infinitud de los números primos en la serie natural, creado el algoritmo de Euclides. Las obras de Diofanto plantean muchos ejemplos del desarrollo primario y superior del análisis indeterminado. La historia de las matemáticas

en China y la India evidencia sobre la temprana aparición de una serie de teoremas de la teoría de las congruencias y otros resultados de la teoría de los números.

Sin embargo, el desarrollo de la teoría de los números transcurrió muy lentamente. Entre nuevos descubrimientos pasaban decenios y a veces siglos. Los resultados teórico-numéricos eran logrados, en su mayoría, por los más eminentes matemáticos y quedaban aislados. Las posibles causas de esto eran: carácter específico del objeto de la teoría de los números, abstracción creciente en el planteamiento de los problemas de esta teoría, la desusada dificultad de su resolución, que exigía un gran desarrollo de las matemáticas y cualidades personales poco comunes del científico. Debido a estas causas un enriquecimiento esencial de la teoría de los números y su formación y separación tuvieron lugar sólo en los siglos XVII—XVIII. En este período sus problemas los estudiaron algunos científicos notables: Fermat, Descartes, B. Pascal, Wallis, Leibniz, Euler y otros.

En el curso del siglo XVII los mayores resultados los logró P. Fermat. En su correspondencia y en los márgenes de sus ejemplares de las obras de Diofanto está contenido un gran número de resultados teórico-numéricos. En particular, Fermat inscribió allí su famoso "gran" teorema: la ecuación $x^n + y^n = z^n$ para exponentes enteros con $n > 2$ no es resoluble en los números enteros. La nota de Fermat decía que él poseía una demostración verdaderamente maravillosa, pero en los márgenes el espacio era insuficiente para escribirla. No obstante, una demostración general de este teorema no ha sido encontrada hasta el momento, aunque de ella se han ocupado muchos de los más grandes matemáticos y un innumerable conjunto de aficionados. El teorema adquirió popularidad a comienzos del siglo XX, cuando por la resolución de este problema cierto Wolfskell estableció un premio en 100 mil marcos (el premio fue anulado a finales de la primera guerra mundial).

El gran teorema, al parecer, debe su planteamiento a la tendencia de Fermat de generalizar el teorema sobre la formación de trios de números pitagóricos. Esta misma fuente, la matemática de la Antigua Grecia, se puede, con gran seguridad, nombrar también para el pequeño teorema de Fermat. En relación con esto, Fermat investigó la divisibilidad de los números y el problema de la búsqueda de todos los divisores de un número dado. Con este mismo grupo de cuestiones se relacionan los trabajos de Fermat sobre los números perfectos y otros de estructura especial. Naturalmente, en las investigaciones de Fermat ocupó un importante lugar el análisis indeterminado de Diofanto, o sea, las soluciones enteras de las ecuaciones indeterminadas y sus sistemas. El dedicó una especial atención a las ecuaciones del tipo $ax^2 + 1 = y^2$, donde a no es un cuadrado perfecto. Respecto a esta ecuación (a la cual, posteriormente como consecuencia de

un lapsus casual de Euler se le asignó el nombre de Pell) Fermat podía: a) encontrar su menor solución; b) obtener todas las restantes, conociendo la menor.

Hacia el siglo XVIII se acumularon en las matemáticas muchos hechos teórico-numéricos, en ocasiones muy importantes y que posteriormente realizaban un servicio útil en la aparición de nuevas ramas de las matemáticas. No obstante, estos hechos no estaban sistematizados, las relaciones entre ellos no estaban descubiertas, las posibilidades de los métodos a aplicar no estaban estudiadas. Además, después de los trabajos de Fermat, Pascal y otros en la teoría de los números comenzó una calma de medio siglo, hasta el momento cuando Euler se ocupó de ella. Con su nombre está relacionado el establecimiento de la teoría de los números como ciencia. Los problemas de esta rama de las matemáticas se encontraron en el campo de los intereses de Euler, en el curso de toda su vida. A ellos le dedicó, como se ha calculado, un número enorme de trabajos: alrededor de 150.

Al parecer, el primer estímulo para los estudios de Euler de la teoría de los números fue la correspondencia con Goldbach. Este último en carta del 1.º de diciembre de 1729 preguntaba: "Conoces tú la observación de Fermat acerca de que todos los números de la forma $2^{2^n-1} + 1$, más precisamente 3, 5, 17, etc. son primos, además él mismo, según reconoce, no pudo demostrarlo y, por lo que yo sé, después de él nadie lo ha demostrado".¹⁾ Enseguida (1732—1733) Euler demostró que el teorema de Fermat no se cumple ya para $x = 6$, puesto que el número $2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297$ se divide por 641. Además, demostró una serie de teoremas relacionados con el problema de la divisibilidad, entre ellos el pequeño teorema de Fermat.

La búsqueda de demostraciones, generalizaciones o refutaciones de los teoremas de Fermat fue sólo la primera etapa de las investigaciones teórico-numéricas de Euler. En lo sucesivo él abarcó y desarrolló todos los capítulos fundamentales de la teoría de los números, tanto la algebraica, como también la analítica, determinando su composición y métodos para muchos años en adelante.

Los trabajos de Euler determinaron la problemática, la estructura y los métodos de la teoría algebraica de los números, o sea, aquella parte de ella en la cual se utilizan preferentemente los métodos de la aritmética y el álgebra, y no se utiliza, dentro de lo posible, el aparato de la teoría de funciones y el análisis infinitesimal.

Aquí, ante todo, le pertenecen los trabajos sobre la teoría de la divisibilidad la cual se convirtió en nuestra época en la teoría de las congruencias.

¹⁾ Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle, t. I. St. Pet. 1843, S. 10.

Junto a la demostración del pequeño teorema de Fermat, Euler introdujo la función $\varphi(m)$, cuyos valores son iguales a la cantidad de números menores que m y que son primos con él. Respecto a esta función él demostró que si a y b son primos entre sí entonces $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ y que $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$, si p es primo y α entero. Después, encontró la expresión de $\varphi(m)$ para m arbitrario, si se conoce la descomposición de m en forma de producto de números primos y demostró que $a^{\varphi(m)} - 1$ se divide por m , si a y m son primos entre sí.

Euler introdujo el concepto de raíz primitiva según el módulo m ; el número g se llama raíz primitiva del módulo m , si $g^k - 1$ se divide por m si y sólo si k es múltiplo de $\varphi(m)$. El también introdujo el concepto de índice de un número N según el módulo m y con base g , o sea, el exponente de la potencia k del número g tal que la diferencia $g^k - N$ se divide por m . Encontró una serie de propiedades de los índices, demostró la existencia de la raíz primitiva según cualquier primo p y el teorema de Wilson: $(m-1)! + 1$ se divide por m , si m es un número primo.

Euler introdujo el concepto de residuos potenciales y creó su teoría. Al número a lo denominó residuo de potencia n según el módulo p si existe un número entero x tal que $x^n - a$ se divide por p . Mostró que las propiedades de los residuos potenciales son importantes no sólo para la resolución de las congruencias binomiales

$$x^n - a = 0 \pmod{p},$$

sino también para otros problemas, por ejemplo, para el problema de la representación de números mediante formas cuadráticas. Ocupándose de las propiedades de los residuos cuadráticos, descubrió (1722) la también ahora famosa ley de reciprocidad: están dados dos números primos p y q ; si por lo menos uno de ellos tiene la forma $4n + 1$, entonces las congruencias

$$x^2 \equiv p \pmod{q},$$

$$x^2 \equiv q \pmod{p}$$

son simultáneamente solubles. Si ambos p y q tienen la forma $4n + 3$ entonces de la solubilidad de una de las ecuaciones se deduce la no solubilidad de la otra.

Después de Euler, la ley cuadrática de reciprocidad la demostró Legendre (sin embargo, su demostración fue incompleta). Gauss, hasta el año 1801 dio ocho demostraciones de esta ley. Finalmente, Legendre, hacia 1808 encontró una forma cómoda de escritura de la ley cuadrática de reciprocidad:

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

introduciendo el símbolo

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} +1, & \text{si } p \text{ es un residuo cuadrático de módulo } q, \\ -1, & \text{si } p \text{ no es un residuo cuadrático de módulo } q. \end{cases}$$

No menor es el mérito de Euler en la elaboración de los problemas del análisis diofántico (resolución de ecuaciones indeterminadas en números enteros y racionales), para cuyas necesidades elaboró y rigurosamente fundamentó la teoría de las fracciones continuas. Aquí, ante todo, merece mención la demostración del gran teorema de Fermat para $n = 3$ y $n = 4$. Para esto, Euler utilizó y desarrolló el método de descenso creado por Fermat. Este método consiste en lo siguiente. Supongamos que existe una solución no trivial (x_0, y_0, z_0) de la ecuación de Fermat, la cual satisface la condición $x_0 y_0 z_0 \neq 0$. Entonces resulta posible encontrar otra solución no trivial (x_1, y_1, z_1) , cuyos elementos son también naturales y respectivamente menores en magnitud que (x_0, y_0, z_0) . Continuando llegaremos a una sucesión infinita de tríos de números naturales decrecientes, es decir, a una contradicción. Euler demostró un conjunto de teoremas, semejantes al teorema de Fermat indicado, cuyas enumeración y tratamiento más detallado sólo tienen interés para los especialistas.

De los otros problemas del análisis diofántico, Euler prestó gran atención al problema de la búsqueda de soluciones enteras de las ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas y con coeficientes enteros:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

La cuestión sobre la obtención de un número infinito de soluciones, si se conoce una solución (x_0, y_0) Euler la redujo a la solución de la ecuación de Pell

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

(D es un número natural, no cuadrado).

En la amplia y ramificada teoría algebraica de los números creada por Euler se incluyen trabajos sobre la representación de números mediante formas cuadráticas $ax^2 + by^2$. Ya Wallis (1685) afirmaba que cada número puede descomponerse en factores de manera única. A él le pertenece el teorema sobre el número de divisores primos del número $m = p^\lambda \cdot q^\mu \cdot r^\nu \dots$ (p, q, r, \dots son primos) que es igual a $(\lambda + 1)(\mu + 1)(\nu + 1) \dots$, y su suma es igual a

$$\frac{p^{\lambda+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^{\mu+1} - 1}{q - 1} \cdot \frac{r^{\nu+1} - 1}{r - 1} \dots$$

Para la búsqueda de los divisores primos de números grandes, Euler construyó un método basado en la representación de estos divisores como formas cuadráticas. Estas últimas deben tener la propiedad de que los números primos se representan, si es posible, en forma única y los compuestos en forma no única o en general no se representan. Resultó que semejante propiedad depende del producto $n = ab$. Aquellos números n que generan semejantes formas, Euler los denominó cómodos y encontró el criterio de comodidad de un número: el número n es cómodo si para cada entero $x < \sqrt{3n}$, mutuamente primo con n , la suma $n + x^2$ es primo, duplo de primo, cuadrado de primo o potencia del número dos. Euler encontró 65 números cómodos y el mayor de ellos, 1848. La suposición de Euler de que 1848 es el último número cómodo por ahora no ha sido demostrado.

En los trabajos de Euler están contenidas todas las premisas para la creación de un sistema de métodos algebraicos de la teoría de los números. Ellos sirvieron de fuente para investigaciones posteriores. Por ejemplo, las investigaciones de Euler sobre la representación de números por los valores de formas cuadráticas y sobre el tipo de divisores primos sirvieron de base a los fundamentos de la teoría general de formas cuadráticas creada por Gauss. El esfuerzo de Kummer (1847) de continuar el trabajo de Euler sobre la resolución del gran teorema de Fermat, junto a su demostración para $n \leq 100$, lo condujo al descubrimiento de la ausencia de unicidad en el desarrollo en factores primos en los campos algebraicos y a la creación de la teoría de los ideales. Los trabajos sobre la teoría de congruencias y el descubrimiento de la ley cuadrática de reciprocidad trajeron consigo las generalizaciones de E. Kummer, D. Hilbert y otros, culminadas en la forma más general de esta ley encontrada y demostrada por I. R. Shafarevich.

Una etapa especialmente importante en el desarrollo de la teoría de números la constituye la aplicación a la resolución de sus problemas de los métodos del análisis matemático. Esta parte de la teoría de los números, la analítica, tiene su origen también en el siglo XVIII en los trabajos de Euler. Este elaboró los métodos analíticos para la resolución del problema de la distribución de los números primos en la serie de los números naturales y también para una serie de problemas aditivos. Estos métodos ponen al descubierto las relaciones entre las propiedades de los números enteros y las propiedades de las funciones analíticas.

El primero de los problemas indicados obtuvo para su resolución los métodos basados en la aplicación de la denominada función zeta, introducida por Euler

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

y la identidad de Euler

Para la búsqueda de los divisores primos de números con un método parecido a este, Euler usó un método similar. Él usó el hecho de que los números primos se representan en la serie natural y los compositos en la serie de los números compuestos. Así, la identidad de Euler se puede escribir como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

(n es natural, p es primo).

Considerando los valores de ambas partes de esta identidad con $s > 1$ y suficientemente próximos a la unidad, Euler pudo dar una demostración analítica del hecho, conocido desde la época de Euclides, de la infinitud de los números primos en la serie natural. Además, enunció la afirmación (no dando una demostración rigurosa de ella):

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \ln \sum_{n \leq x} \frac{1}{n}.$$

Las búsquedas constantes de una expresión analítica de la ley de distribución de los números primos, como se conoce, no han conducido a ningún éxito hasta el momento. Algunos enfoques sobre la resolución, por vez primera después de Euclides, surgieron en las obras de Euler, el cual enunció la proposición de que la progresión aritmética infinita, cuyos a_0 y d son primos, contiene infinitos números primos. Legendre, compartiendo con Euler esta seguridad tampoco dio una demostración. Sólo en el año 1837 consiguió Dirichlet demostrar la hipótesis de Euler.

Solamente en 1798, Legendre buscó una fórmula empírica para la función $\pi(x)$, cuyos valores son iguales a la cantidad de números primos $p \leq x$:

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x - 1,08366}.$$

Más tarde Chebyshev (1848) estableció que $\pi(x)$, cuando x crece, oscila alrededor de segmentos de la serie que se aproxima asintóticamente

$$\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{dx}{\ln x},$$

y dio estimaciones próximas a las amplitudes de estas oscilaciones. Riemann notó para el plano complejo que el orden de la diferencia $\pi(x) - \text{Li}(x)$ depende de la situación de los llamados ceros no triviales de la función $\zeta(s)$, cuyas partes están entre cero y uno. Expresó, además, la hipótesis de que con ello todas las partes reales están sobre la recta $x = \frac{1}{2}$.

Una demostración rigurosa, para la estimación del valor de $\pi(x)$ en el caso

límite,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\text{Li}(x)} = 1$$

apareció sólo en 1896. Respecto a la hipótesis de Riemann los autores de la verdadera demostración, Hadamard y Vallée-Poussin, pudieron encontrar solamente que sobre la recta

$$x = 1, \quad s = x + iy$$

no hay ceros de $\zeta(s)$.

Muy notable es el aporte de los matemáticos del siglo XVIII (fundamentalmente Euler) en la teoría aditiva de los números, donde se estudia el desarrollo de números enteros grandes N en sumandos

$$N = a_{1i_1} + a_{2i_2} + \dots + a_{si_s},$$

tomados de ciertas sucesiones numéricas $\{a_{jk}\}$.

Los problemas de la teoría aditiva de los números (o como entonces la llamaban *partitio numerorum*) tiene su origen, al parecer, en los problemas de Fibonacci sobre los pesos: cómo elegir los números (pesos de las pesas), a_1, a_2, a_3, \dots , para que cada número pueda ser representado como sus sumas. Leibniz (1674), en relación con este problema, señaló que el número 3 admite tres particiones, el 4, cinco particiones, el 5, siete, el 6, once y el 7, quince particiones.

Euler estudió los problemas de *partitio numerorum* desde 1741. Partió de dos productos infinitos

$$\prod_1^{\infty} (1 + a_k z) \quad \text{y} \quad \prod_1^{\infty} (1 - a_k z)^{-1}.$$

Si siguiendo a Euler, desarrollamos estos productos en serie de potencias de z . El coeficiente de z^n de la primera serie de potencias es la suma de todos los productos tomados n a n de los números a_k sin repetición. En la segunda serie estarán las mismas sumas, pero con repeticiones arbitrarias de a_k .

Para la resolución del problema sobre el número de representaciones del número entero N como sumas de k números naturales, idénticos o diferentes, Euler consideró los dos productos:

$$f_1(x) = \prod_1^{\infty} (1 + x^k z) = \sum_0^{\infty} A_k(x) z^k;$$

$$f_2(x) = \prod_1^{\infty} (1 + x^k z)^{-1} = \sum_0^{\infty} B_k(x) z^k,$$

donde

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x^k; \quad B_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} x^k.$$

Aquí a_{nk} son los números de representaciones del número k en la forma de sumas de n sumandos positivos diferentes y b_{nk} , el número de representaciones de k en la forma de n sumandos positivos arbitrarios sin tener en cuenta el orden de adición.

A continuación, Euler encontró las ecuaciones funcionales para $f_1(z)$ y $f_2(z)$ y con su ayuda determinó las funciones $A_n(x)$ y $B_n(x)$:

$$A_n(x) = \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-x) \dots (1-x^n)}; \quad B_n(x) = \frac{x^n}{(1-x) \dots (1-x^n)}.$$

Desarrollando en serie de potencias la función

$$\frac{1}{(1-x) \dots (1-x^n)} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n,k} x^k.$$

Euler redujo su problema al problema de la búsqueda del número de soluciones de la ecuación

$$N = \sum_{k=1}^n kx_k$$

en números enteros no negativos x_1, \dots, x_n , los cuales son iguales a $C_{n,N}$. Construyó para esta tabla de números los $C_{n,N}$.

A continuación, pasando a la determinación de los números C_n de

$$\sum_0^{\infty} C_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$$

o lo que es lo mismo, a la determinación del número de soluciones de la ecuación

$$N = \sum_{k=1}^n kx_k$$

en enteros no negativos x_1, \dots, x_n , encontró empíricamente que

$$\prod_1^{\infty} (1-x^n) = 2 + \sum_1^{\infty} (-1)^n \left(x^{\frac{3n^2-n}{2}} + x^{\frac{3n^2+n}{2}} \right).$$

Apoyándose en las relaciones entre los productos y series de potencias Euler demostró muchas proposiciones sobre el número de diferentes representaciones de los números enteros. Señalemos aquí dos de ellas: En primer lugar, la identidad para la suma de los divisores del número n (σ es el signo de suma)

$$\begin{aligned} \sigma(n) = & \int (n-1) + \int (n-2) - \int (n-5) - \int (n-7) + \\ & + (-1)^k \left[\int \left(n - \frac{3k^2-k}{2} \right) + \int \left(n - \frac{3k^2+k}{2} \right) \right]; \end{aligned}$$

en segundo lugar, el teorema de que cada número entero puede ser representado de forma única como la suma de potencias del número 2 lo que se deduce de

$$\prod_0^{\infty} (1+x^{2^k}) = \sum_0^{\infty} x^n.$$

El método de Euler era, en esencia, el método de las funciones generatrices. Después de aproximadamente un siglo de interrupción, desde finales del siglo XIX, este método se comenzó a aplicar ampliamente tanto en la teoría de números como en otras disciplinas matemáticas: análisis combinatorio, teoría de probabilidades y otras. En la teoría de los números fue esencialmente perfeccionado por I. M. Vinogradov y también por G. Hardy y J. Littlewood.

Entre los problemas aditivos de la teoría de los números, propuestos en el siglo XVIII, se encuentra también el problema de Waring (1770): cualquier número natural ≥ 2 es representable como la suma de n -ésimas potencias de números naturales, además el número r de términos de la suma depende sólo de n . Waring no dio su demostración. Como en la mayoría de los problemas de la teoría de los números, el éxito también en este caso se logró difícilmente. Así, Lagrange demostró que si $n = 2$, entonces $r = 4$.

Después fue establecido que para $n = 3$, $r \leq 7$ y que $r > n$. Sólo en el año 1909, Hilbert dio la primera demostración general. Estableció que r es finito para todo n pero no pudo dar para r una valoración lo suficientemente buena. En 1919, Hardy y Littlewood encontraron que $r \leq n \cdot 2^{n-1}$ y posteriormente que $r \leq (n-2)2^{n-1} + 5$. En el año 1934 I. M. Vinogradov, con ayuda del nuevo método de las sumas trigonométricas creado por él, hizo avanzar el problema de Waring esencialmente dando un estimado casi exhaustivo $r \leq 3n \ln(n+1)$ para n grande. Con este mismo método demostró uno de los problemas de Goldbach, de que cada número impar suficientemente grande es la suma de tres números primos. Otros dos problemas de Goldbach: de que cada número par es la suma de dos primos

y cada número impar es la suma de un primo y dos cuadrados, han quedado sin resolver hasta el momento.

Como culminación de nuestro resumen de los métodos analíticos en la teoría de los números en el siglo XVIII, mencionemos las investigaciones sobre la naturaleza aritmética de los números. En parte, en lo relativo a los números π y e , la aplicación del aparato de las fracciones en cadena elaborado fundamentalmente por Euler, permitió a Lambert en 1767 demostrar la irracionalidad del número π^1 , y también de e^m para m racional. La trascendencia de estos números fue establecida sólo a finales del siglo XIX: la demostración de la trascendencia del número e fue dada en 1873 por Ch. Hermite y de π en 1882 por F. Lindeman. Con los trabajos de Euler está relacionado el planteamiento del problema sobre la naturaleza aritmética de los números del tipo $a^{\sqrt{b}} = b$. Euler en la "Introducción al análisis infinitesimal" (1748; § 105) indicó que el logaritmo de un número racional con base racional si no es entero debe ser trascendente. En particular, afirmó que en la expresión $a^{\sqrt{b}} = b$ (donde n no es un número cuadrado) a y b no pueden ser simultáneamente racionales. En forma más general este problema lo formuló D. Hilbert como el problema sobre la naturaleza aritmética de los números a^b para a y b algebraicos. En los años 1929—1934 A. O. Gueľfond resolvió completamente este problema, demostrando que los números de la forma a^b (donde a es algebraico diferente de cero y del uno y b una irracionalidad algebraica) es trascendente.

La teoría de números en el siglo XVIII, en esencia, se convirtió en una rama independiente de las matemáticas. En ella se definieron prácticamente todos los principales problemas y direcciones. En las obras de Euler, Lagrange, Legendre, Lambert y otros matemáticos fueron elaborados numerosos métodos de la teoría de números, tanto algebraico-elementales, como también analíticos. Todas estas investigaciones, naturalmente, necesitaban sistematización, reducción a una estructura lógica armoniosa desde una posición única. Este trabajo a fines del siglo XVIII fue comenzado por Legendre, el cual publicó en los años 1797—1798 la "Experiencia de la teoría de números", teniendo como objetivo construir un sistema de resultados sobre las propiedades de los números enteros. En las reediciones sucesivas lo completó con los resultados de Gauss, Abel y otros matemáticos del siglo XIX. En los dos tomos de este libro está contenido el enorme material acumulado en la teoría de números, lo que le da junto al significado histórico, un significado práctico como una guía muy útil.

El carácter y la orientación de las investigaciones en la teoría de los nú-

¹⁾ Véase I.G. Lambert. Предварительные сведения для ищущих квадратур и спрямление круга. В сб. «О квадратуре круга». М.—Л., ГТТИ, 1934, стр. 105—166. (Ver I.G. Lambert. Informaciones preliminares para aquellos que estudian la cuadratura y rectificabilidad del círculo. En la colección: "Sobre la cuadratura del círculo".)

meros fueron en el curso de todo el siglo XIX determinados, en esencia, por los trabajos de Gauss. Su obra fundamental en esta rama, "Investigaciones aritméticas", Gauss la comenzó en el año 1797 y fue publicada hacia el año 1801 cuando su autor tenía sólo 24 años. Los siguientes trabajos teórico-numéricos de Gauss aparecieron en 1811 y en el período de 1828—1832; esto evidencia el constante interés de Gauss por la teoría de los números.

Los descubrimientos de Gauss en la teoría de los números son enormes. Felizmente nosotros podemos remitir al lector interesado al maravilloso artículo de B. N. Deloné "Trabajos de Gauss sobre la teoría de los números"¹⁾, limitándonos aquí a cortas valoraciones previas.

Ya mencionamos que Gauss dedicó muchos esfuerzos al estudio de la ley cuadrática de reciprocidad, a la que le dio ocho demostraciones rigurosas. Estudiando las formas cuadráticas, él creó en esencia la aritmética de las extensiones cuadráticas. Esta parte de sus investigaciones sirvió de punto de partida y modelo para la elaboración posterior de la aritmética de las extensiones algebraicas, incluso hasta los trabajos de D. Hilbert sobre la teoría de los campos de clases.

Gauss descubrió y demostró la ley biquadrática de reciprocidad y construyó la aritmética de los números complejos enteros. El aparato de la teoría de las congruencias, tan utilizado en nuestros días, debe su surgimiento a Gauss. Para la construcción en el siglo XIX de la teoría de los números algebraicos, este grupo de descubrimientos de Gauss sirvió de punto de partida y prototipo.

En sus investigaciones, Gauss introdujo y estudió una serie completa de grupos: el grupo de las clases de formas de un discriminante, el grupo de los géneros y otros. En ejemplos concretos fue el primero en estudiar la estructura de los grupos abelianos. En particular, demostró que un grupo abeliano es el producto directo de los grupos cíclicos, demostrando así mismo el teorema fundamental de la teoría de los grupos abelianos.

Se considera por todos reconocido, que desde la época de los trabajos de Gauss, la teoría de los números se desarrolla ya como una teoría estricta²⁾, cuyos problemas impulsaron el desarrollo de nuevos y precisos métodos de análisis (en particular de la teoría de funciones de variable compleja), del álgebra e incluso de la geometría. Se determinaron también las direcciones fundamentales de la teoría de los números: a) elaboración de métodos especiales de la teoría de los números, los cuales a veces tienen el nombre de elementales; b) los métodos analíticos aplicados preferente-

¹⁾ В сб.: «Карл Фридрих Гаусс». М., Изд-во АН СССР, 1956, стр. 11—12. (En la colección: "Carl Friedrich Gauss", Ed. de la AC de la URSS.)

²⁾ Véase A.O. Gueľfond и Ю.В. Линник. Чисел теория. БСЭ, т. 47, стр. 386. (A.O. Gueľfond и Yu.V. Linnik. Teoría de los números. B.S.E., t. 47.)

mente a los problemas de distribución; c) las ecuaciones diofánticas y las aproximaciones diofánticas.

Más adelante tendremos la posibilidad de regresar a los problemas del desarrollo de la teoría de los números (por ejemplo, en relación con la consideración de las investigaciones fundamentales de P. L. Chebyshev). Sin embargo, el carácter y las dimensiones de este libro no nos permiten dar un resumen general, más o menos detallado, de la teoría de los números y sus interrelaciones con otras ciencias matemáticas.

6.7. Desarrollo de la teoría de las probabilidades y del análisis combinatorio

Una revisión del desarrollo de las matemáticas en el siglo XVIII sería incompleta si omitiéramos los trabajos teóricos de las probabilidades y el aparato utilizando en ellos. Al parecer, la teoría de las probabilidades en aquella época no ocupaba aún un lugar notable entre las otras disciplinas. Pero los éxitos futuros de las matemáticas (como, en general, también de la ciencia), recibiendo las premisas necesarias en sus ramas más desarrolladas se recrystalizan, se separan generalmente en nuevas ramas que todavía son cuantitativamente pequeñas y con frecuencia débilmente desarrolladas.

La teoría de las probabilidades en el siglo XVIII amplió la esfera de sus aplicaciones. Sus métodos penetraron en la estadística (en particular, en la demografía), en los asuntos de seguros, en la teoría de errores en las observaciones, la teoría del tiro. Esta ampliación transcurría en estrecha relación con el enriquecimiento de los métodos y resultados matemáticos de la teoría de las probabilidades.

El primero de los resultados teóricos en esta rama fue, al parecer, la demostración realizada por Moivre (1730) del teorema local del límite, el cual estima asintóticamente la probabilidad

$$P_n(t) = P[\mu \leq np + t\sqrt{np(1-p)}]$$

de que en n experiencias independientes, en cada una de las cuales p es la probabilidad de ocurrencia del suceso buscado, el número de estas ocurrencias m no supera $np + t\sqrt{np(1-p)}$. Moivre demostró este teorema para $p = \frac{1}{2}$; dedujo también la fórmula de Stirling, necesaria para esto,

$$s! = \sqrt{2\pi s} \cdot s^s \cdot e^{-s} e^{\theta_s},$$

donde el exponente residual θ_s satisface la condición

$$|\theta_s| \leq \frac{1}{12s}.$$

Más tarde, Laplace generalizó este teorema para cualquier p ; $0 < p < 1$. La forma integral de este teorema, surgida aquí,

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

y el concepto, relacionado con esto, de distribución de las probabilidades jugaron en lo sucesivo un papel importante. En particular, mencionemos la extensión del teorema de Moivre — Laplace, perteneciente a Poisson (1837), al caso de la generalización de la ley de los grandes números en la fórmula de Bernoulli para pruebas independientes en las cuales la probabilidad de aparición de cierto suceso depende del número de la prueba. Poisson obtuvo entonces un nuevo tipo de distribución de probabilidades, conocido actualmente como Ley de Poisson y la utilizó en los trabajos sobre la teoría de dispersión del tiro.

El problema del cálculo de las probabilidades de las hipótesis sobre la base de determinados resultados de ciertas observaciones en diferentes aspectos fue tratado en los trabajos de D. Bernoulli, Euler, Simpson, Condorcet y otros. El resultado más importante fue las fórmulas de Bayes publicadas en el año 1764. Próximo a esto, la teoría de los errores en las observaciones recibió el método de los cuadrados mínimos, elaborado por Legendre, Laplace y Gauss.

Además de los dos grupos de resultados teóricos indicados se puede señalar un número suficientemente grande de problemas concretos de carácter teórico-probabilista. Entre ellos: el problema del control de la producción, el llamado “juego petersburgués”, el problema de Buffon sobre el lanzamiento de una aguja y otros.

A fines del siglo XVIII y comienzos del XIX, los resultados teórico-probabilísticos fueron llevados a un sistema único, construido sobre conceptos básicos precisamente definidos. La separación de una nueva disciplina matemática, la teoría de las probabilidades, encontró expresión brillante en una serie de trabajos de Laplace, especialmente en su clásica “Teoría analítica de las probabilidades” (1812, después 1814, 1820, 1866).

El aparato de la teoría de las probabilidades en la época en que su objeto fundamental eran los juegos de azar, estaba compuesta de procedimientos aritméticos, extraídos en especial de la combinatoria. A medida que se enriquecían los métodos de la teoría de las probabilidades, a cuenta de la utilización de las consideraciones límites y otros recursos del análisis matemático, el peso específico de los métodos combinatorios comenzó a disminuir. Pero la combinatoria continuó desarrollándose, ya que su contenido, en esencia, no se agotaba con las aplicaciones a la teoría de las probabilidades.

Puede considerarse que la combinatoria, como disciplina científica, tiene su inicio en los trabajos de Leibniz y Ja. Bernoulli. El primero de ellos hacia el año 1666 dio la primera construcción sistemática de esta parte de las matemáticas en el "Razonamiento sobre el arte combinatorio". Más tarde (alrededor del año 1700) Leibniz perfeccionó el simbolismo combinatorio con ayuda del sistema desarrollado de índices. Ja. Bernoulli en la obra "Arte de la suposición" (1713) construyó la combinatoria como el principal aparato de aquella época para resolver los problemas teórico-probabilistas. En esta misma obra demostró un caso particular importante de la ley de los grandes números, conocido como teorema de Bernoulli. En relación con el estudio de las sumas de la forma $\sum_k k^m$ descubrió los números denominados números de Bernoulli.

Sin embargo, la resolución de muchos problemas concretos de la combinatoria durante largo tiempo no estaba acompañada del perfeccionamiento de la teoría general, incluso hasta fines de los años 70 del siglo XVIII. En esta época se formaba en Alemania una numerosa escuela matemática cuyo fundador y director fue K. F. Hindenburg.

Pasaron 40—50 años y la escuela combinatoria, agotando las posibilidades de los pocos métodos operativos de cálculo y no superando las contradicciones entre el contenido de los problemas y el voluminoso aparato simbólico-formal, se desintegró.

Los métodos combinatorios quedaron en el arsenal de los científicos como medio de resolución de problemas en diferentes ramas de las matemáticas. El análisis combinatorio comenzó a obtener un nuevo desarrollo a mediados del siglo XX en relación con las amplias posibilidades de aplicación que se vislumbraban.

COMIENZO DEL PERÍODO DE LAS MATEMÁTICAS MODERNAS

7.1. Sobre el carácter del desarrollo de las matemáticas en el siglo XIX

En la historia de las matemáticas, el siglo XIX señala un nuevo período, el cual ha recibido el nombre de período de las matemáticas modernas. El concepto de matemáticas modernas, así como la separación del correspondiente período de su desarrollo, naturalmente es algo indeterminado. Ello, al parecer, no puede ser de otra forma ya que el desarrollo de la ciencia cambia constantemente la idea de contemporaneidad de sus ideas teóricas fundamentales y logros prácticos. Aquí tendremos en incluir en el período de las matemáticas modernas, el segmento de tiempo, cuyo inicio está marcado por tales transformaciones en las matemáticas, las cuales sirvieron de causa fundamental para la reducción de éstas a su estado actual. Desde nuestro punto de vista, la historia de las matemáticas del siglo XIX y comienzos del siglo XX debe ser separada en un período aparte, el cual puede denominarse período de las matemáticas de la nueva época en correspondencia con la periodización de la historia general.

Las particularidades características del nuevo período de desarrollo de las matemáticas, con mayor definición comenzaron a revelarse en el mismo comienzo del siglo XIX. Tenemos en cuenta los trabajos de Abel y Galois sobre la resolución de las ecuaciones algebraicas en radicales. Ellos promovieron a un primer lugar en el álgebra, una serie de conceptos generales muy abstractos, entre los cuales el primer lugar pertenece al concepto de grupo. La creación y desarrollo de la teoría de Galois y la teoría de grupos se convirtió en uno de los problemas principales de la nueva álgebra.

El descubrimiento en los años 20—30 del siglo XIX por Lobachevski y también por J. Bolyai y Gauss de los hechos fundamentales de la geometría hiperbólica no euclidiana y en los años 60—70 la búsqueda de sus interpretaciones provocaron en el sistema de ciencias geométricas transformaciones de carácter verdaderamente revolucionario. Su significado consistió no sólo en el cambio del aspecto de la geometría, sino que salió de los límites de esta rama de las matemáticas y después fuera de los límites de las matemáticas en general.

El sistema de disciplinas, que forman parte del análisis matemático, sufrió en sus fundamentos una reconstrucción profunda sobre la base de la creada teoría de los límites y la teoría del número real. Hacia finales del

siglo XIX, los recursos lógicos del análisis se complementaron con una variedad específica de juicios hipotético-condicionales, la cual aplicaba el aparato de las desigualdades especiales (el así llamado aparato ϵ, δ). Esto dio a las deducciones y aplicaciones del análisis un nuevo nivel de rigor matemático aún mayor.

Junto al desarrollo del aparato del análisis matemático clásico y sus aplicaciones, de él se separaron disciplinas matemáticas independientes. Ante todo, se separó el inmenso dominio de las ecuaciones diferenciales y también de la teoría de funciones de variable real y correspondientemente de variable compleja.

Los fenómenos señalados antes no agotan todo el cuadro del desarrollo de las matemáticas en el siglo XIX. Los elegimos en calidad de ejemplos, los cuales determinan las líneas fundamentales de este desarrollo. Antes de pasar a su consideración más detallada, señalemos aun tres rasgos que tienen carácter general para la mayoría de las ciencias matemáticas.

Tenemos en cuenta, en primer lugar, la ampliación del contenido del objeto de las matemáticas. Este está condicionado por el hecho de que en todas las ciencias matemáticas transcurría un proceso de generalización de los conceptos fundamentales, se sustituían unos conceptos por otros más generales. Este proceso ocurría como consecuencia de las exigencias crecientes de las ciencias afines, cuando investigar una enorme cantidad de problemas resultó posible sólo desde otros puntos de vista más generales. Una gran cantidad de problemas surgió también dentro de las matemáticas como resultado de las exigencias lógicas internas del desarrollo de la teoría.

Entre las investigaciones, surgidas como resultado de las exigencias de la teoría matemática hubo en aquella época muchas que especialmente reflejaron el reforzamiento de la atención hacia la fundamentación de las matemáticas. Éste es el segundo rasgo característico de las matemáticas del siglo XIX. Los esfuerzos de fundamentación de las matemáticas en su conjunto o en sus partes independientes son lo mismo numerosos como en el siglo anterior, el XVIII. Pero ellos tomaron ahora otra dirección. En ellos se produjo una revisión crítica de los conceptos primarios (definiciones) y afirmaciones (axiomas); se realizaron intentos de construcción de un sistema riguroso de definiciones y demostraciones; se realizó una revisión crítica de los métodos lógicos de las demostraciones matemáticas.

La atención creciente a las cuestiones de los fundamentos las cuales cambiaron el carácter de las correspondientes investigaciones, el reforzamiento de las exigencias de rigor matemático, tienen causas completamente reales y determinadas. Estas causas preferentemente radican en el enorme volumen de hechos y en la gran cantidad de nuevas teorías matemáticas. Además de la complicación de la estructura de las propias matemáticas, la relación de ésta con la práctica se convirtieron en muy complejas, en

mucho se mediatizaron. Los resultados particulares e incluso ramas enteras de las nuevas matemáticas obtienen aplicaciones concretas no inmediatamente, sino después de años y decenios. Ante tal situación no tiene objetivo esperar señales sobre la validez o no validez de la teoría en forma de errores advertidos. Por esto nuestra ciencia, sometiendo sus resultados a la práctica como criterio de verdad de sus resultados, está obligada a tomar en consideración también la práctica de los juicios lógicos, interpretándolos en las exigencias del rigor lógico. El concepto de rigor matemático, o lógico en el curso de la historia, como se sabe, varía. Este refleja la experiencia acumulada de trabajo del pensamiento humano en el campo de las matemáticas, experiencia que se suma en exigencias al rigor gradualmente formadas. Un patrón estable de rigor matemático lógico se formó sólo a fines del siglo XIX. Se basaba en concepciones teóricas de conjuntos y en la aritmética de los números naturales. Sin embargo, enseguida la lucha de ideas alrededor de este problema se agudizó en relación con el descubrimiento de contradicciones (antinomias) en la teoría de conjuntos de Cantor.

La tercera particularidad característica del desarrollo de las matemáticas en el siglo XIX es la ampliación considerable del campo de aplicaciones, en lo fundamental, condicionado por el aumento de las posibilidades del aparato del análisis matemático. En las ciencias exactas, tras la mecánica y la óptica, se incluyeron los problemas de los fenómenos termodinámicos y electromagnéticos. Bruscamente crecieron las exigencias matemáticas de la técnica: la balística, la construcción de maquinaria y otros.

El problema de la conformación de las características generales que es tan difícil comúnmente se hace especialmente difícil en la medida que nos aproximamos a la actualidad. Por esto, no multiplicando en lo adelante las consideraciones de carácter general, pasemos a la exposición de la historia del desarrollo de las disciplinas matemáticas por separado, regresando a las consideraciones generales cuando esto sea necesario. Por cuanto, ante todo los cambios fundamentales se revelaron en el álgebra, pasemos ahora a la aclaración de la historia de esta ciencia y ante todo a la historia de los problemas algebraicos en la confluencia de los siglos XVIII y XIX.

7.2. Surgimiento de los conceptos fundamentales del álgebra moderna

Problemas de la teoría general de ecuaciones algebraicas. El álgebra moderna es un campo de las matemáticas desmesuradamente amplio y ramificado. Une un gran número de disciplinas científicas independientes. Su objeto común son las operaciones algebraicas, las cuales representan abstracciones lejanas de las operaciones del álgebra elemental. Estas operaciones se definen en variados conjuntos. Estos últimos se eligen para la in-



K. F. Gauss (1777—1855)

investigación preferentemente de consideraciones sobre su aplicabilidad. Entonces resulta necesario preocuparse por la conservación de la conocida cercanía de las propiedades de las operaciones en ellas definidas y las propiedades de las operaciones con los números. Así se constituyó la clase de las formaciones algebraicas, entre las cuales el mayor significado fue adquirido por los campos, anillos, grupos y estructuras. El álgebra interactúa con otros campos de las matemáticas, participando en la formación de nuevas disciplinas "limitrofes" (el álgebra topológica, la teoría de grupos, las álgebras de Lie, etc.).

Ideas tan generales sobre la naturaleza y la composición del álgebra se formaron, en esencia, hace poco, sólo en el siglo XX. Como fue mostrado antes, incluso hasta el siglo XIX, el problema fundamental del álgebra lo constituía la resolución de ecuaciones algebraicas, comprendida como la búsqueda de las raíces de la ecuación con ayuda de operaciones racionales y

la operación de extracción de la raíz. En las búsquedas de una fórmula general, los matemáticos probaron una enorme cantidad de métodos y a fines del siglo XVIII se vieron obligados realmente a considerar los campos y grupos, no habiendo introducido estos conceptos explícitamente.

En la confluencia de los siglos XVIII y XIX en el álgebra fueron realizados descubrimientos de importancia extraordinaria. Ellos estuvieron acompañados de la introducción en esta ciencia de una serie de nuevos conceptos (en primer lugar el concepto de grupo) los cuales yacen en la base del álgebra moderna. Estos descubrimientos condujeron a la transformación de toda el álgebra en el transcurso del siglo XIX. Tenemos en cuenta aquí, los resultados de K. F. Gauss, N. H. Abel y E. Galois, relativos a la demostración del teorema fundamental del álgebra, la demostración de la no resolubilidad en radicales de las ecuaciones de grado $n \geq 5$ y la creación de la teoría de Galois. Consideremos más detalladamente estos resultados.

Karl Friedrich Gauss (1777—1855) hizo sus primeros descubrimientos en álgebra, siendo aún muy joven, en la época de sus estudios en la universidad de Gotinga (1795—1798). En marzo del año 1796 ocupado en los problemas de la búsqueda de las raíces de la ecuación

$$x^n - 1 = 0,$$

advirtió la relación entre estos problemas y la división de la circunferencia en partes iguales, demostrando que el polígono regular de 17 lados se puede inscribir en el círculo mediante regla y compás. El resultado algebraico correspondiente, que la ecuación $x^{17} - 1 = 0$ es resoluble en radicales cuadráticos, Gauss lo generalizó enseguida, encontrando criterios de la posibilidad de tal resolubilidad (la ecuación es resoluble para n primo de la forma $n = 2^{2^k} + 1$) y dando su interpretación geométrica.

En la demostración de este grupo de proposiciones, Gauss desarrolló los métodos que sirvieron de uno de los puntos de partida para la creación de la teoría de Galois, según el propio reconocimiento de su autor. Así, por ejemplo, Gauss explícitamente expresó que el objetivo de sus investigaciones del polinomio

$$X = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$$

consiste en descomponer sucesivamente el polinomio en factores incluso hasta factores lineales, descubriendo de esta manera la estructura de la ecuación.

Gauss estableció que la ecuación $X = 0$ de grado $m = n - 1$, donde n es primo, es irreducible en el campo de los números racionales y normal sobre éste, esto es, todas sus raíces se expresan racionalmente a través de una de ellas. Resultaba que estas raíces tienen la forma $\alpha, \alpha^2, (\alpha^2)^2, \dots$, es-

to es, el grupo de los automorfismos de esta ecuación es cíclico. Quedaba nada más que un sólo paso para descubrir que cualquier subgrupo de un grupo cíclico es su divisor normal. Este paso lo realizó Galois, considerando también la indicación de Lagrange de que las permutaciones de las raíces de las ecuaciones indican el camino para la construcción de su teoría general.

Al cabo de tres años, en 1799, Gauss obtuvo en Helmstadt el grado de doctor con una tesis dedicada a la demostración del teorema fundamental del álgebra. Muchos años después regresó a este teorema y dio (en 1815, 1816 y 1849) tres nuevas demostraciones.

La primera formulación de este teorema dada por Girard (1629) y Descartes contenía, como ya mencionamos, la afirmación de que la ecuación $P_n(x) = 0$ puede tener tantas raíces como unidades contiene su grado. En relación con la sucesiva introducción de los números complejos $a + bi$ esta comprensión de la posibilidad se convirtió en la seguridad de que las raíces de la ecuación $P_n(x) = 0$ (donde n es el grado de la ecuación) son precisamente n reales o complejas. Tras la primera demostración de D'Alambert (1746) surgieron otras. En todas ellas, se suponía que cada polinomio podía ser desarrollado en factores lineales

$$P_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i).$$

Quedaba demostrar que todas las raíces x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) tenían la forma $a + bi$ (a y b son reales). El problema consistía ahora en el establecimiento de la desarrollabilidad de cada ecuación algebraica con coeficientes reales en un producto de factores reales de grado $n = 1$ o $n = 2$.

No consideraremos aquellas demostraciones, en las cuales aparecen apelaciones explícitas a los resultados del análisis matemático. Hablando en general, negarse totalmente a la utilización de las propiedades de continuidad en la demostración de este teorema es imposible. Sin embargo, la cuestión sobre una demostración puramente algebraica del teorema fundamental del álgebra era en esta época muy actual. Tal demostración algebraica la buscaba también Gauss.

En la tesis doctoral mencionada antes, Gauss consideró críticamente todas las demostraciones y advirtió su insuficiencia común: la suposición a priori de que las raíces de la ecuación existen. En realidad es necesario demostrar la existencia de las raíces para evitar un círculo vicioso. Gauss vinculaba su existencia con el campo de los números complejos $[a + bi]$ ya que ninguna otra forma más general de magnitudes podía representarse. No obstante, advirtió que si fueran definidos otros campos numéricos, entonces la cuestión sobre la existencia de raíces sería necesario relacionarla a éstos.

La demostración algebraica de Gauss partió de la suposición que de antemano está dado el campo K de los números complejos. Esta demostración consistía en el establecimiento del hecho de que cada ecuación con coeficientes reales tiene raíz en el dominio indicado. En otra formulación equivalente, se exige demostrar la desarrollabilidad de cualquier polinomio, cuyos coeficientes sean números reales en factores reales de primero o segundo grados.

La negación a la suposición sobre la existencia de raíces de la ecuación postulada por Gauss, y además sobre la invocación de los resultados del análisis matemático, dificultó fuertemente el problema. En esencia fue necesario construir los campos de desarrollo de los polinomios. La voluminosa demostración ocupó una memoria especial (1815). Ella exigía una serie de conceptos y lemas especiales¹⁾. Así, Gauss se vio obligado a construir de nuevo la teoría de las funciones simétricas y demostrar su independencia algebraica. Esto le daba la posibilidad de introducir un nuevo método de demostración, el cual obtuvo posteriormente (en las obras de Kronecker, König y otros) la denominación de principio de Gauss. La relación entre funciones simétricas elementales

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots) = 0$$

puede ser sólo una identidad. Sea, por ejemplo, dado un polinomio desarrollable en factores lineales

$$P_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

y entre sus coeficientes se establece alguna relación

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots) = 0.$$

En virtud del principio de Gauss, esta relación sigue siendo cierta cuando se sustituyen los coeficientes de cualquier otro polinomio $Q_n(y) = 0$. Así, todas las relaciones entre los coeficientes de los polinomios desarrollables son ciertas para los coeficientes de todos los polinomios. Tras esto se introduce el concepto de discriminante

$$P = \prod_{i,j=1}^n (x_i - x_j)$$

¹⁾ Véase I.G. Bashmakova. О доказательстве основной теоремы алгебры. В сб.: «Историко-математические исследования», вып. X.M., Гостехиздат, 1958, стр. 257—304. (I.G. Bashmakova. Sobre la demostración del teorema fundamental del álgebra. En la colección: "Investigaciones históricomatemáticas".)

y se demuestra una serie de lemas, los cuales, en virtud de su carácter especial no citaremos aquí.

La demostración siguiente se apoya en el lema: si

$$Q(u, x) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i u + \nu_i x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

y w es una magnitud indeterminada, entonces

$$\theta \left(u + w \frac{\partial \theta}{\partial x}, x - w \frac{\partial \theta}{\partial u} \right)$$

se divide por $\theta(x, u)$. Aplicando este lema a los polinomios, Gauss obtuvo la identidad conocida:

$$\theta \left(u + w \frac{\partial \theta}{\partial x}, x - w \frac{\partial \theta}{\partial u} \right) = \theta(u, x) \theta_1(u, x, w, a_1, \dots, a_n),$$

donde θ_1 es una función entera racional respecto a sus argumentos.

Con ayuda de esta identidad, Gauss construyó a continuación el campo en el cual el polinomio auxiliar $\theta(u, x)$ tiene factor lineal y el polinomio dado, factor de segundo grado.

Pasados unos 50—60 años, Kronecker logró utilizar el método de construcción de campos, dado por Gauss, y crear (1882)¹⁾ la construcción del campo de descomposición para cualquier polinomio. Resultó que si está dado $P_n(x)$, un polinomio con coeficientes del campo k , sobre el cual la ecuación $P_n(x) = 0$ es irreducible, entonces se puede (no suponiendo la existencia de $K \supset k$) construir un campo de descomposición, esto es, un campo minimal en el cual

$$P_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i).$$

Entonces el teorema fundamental del álgebra tomó la forma siguiente: el campo de cualquier polinomio (con coeficientes reales o complejos) es un subcampo del campo de los números complejos o es isomorfo a este subcampo.

Otro de los notables descubrimientos algebraicos de comienzos del siglo XIX es la demostración de la insolubilidad en radicales de las ecuaciones de quinto grado. Como indicamos antes, las búsquedas de una forma adecuada de la irracionalidad para la resolución de una u otra clase de ecuaciones algebraicas fue sustituida por la seguridad de que, al parecer, esto era imposible. El problema se transformó, resultó necesario investigar



N. G. Abel (1802—1829)

expresiones más generales, que contenían radicales para aclarar, si pueden éstas ser expresiones de las raíces de una ecuación algebraica de quinto grado.

Por este camino P. Ruffini llevó sus investigaciones, en el mismo final del siglo XVIII. En el año 1799 él publicó "Teoría general de las ecuaciones, en la cual se demuestra la imposibilidad de resolución algebraica de las ecuaciones generales de grado superior al cuarto".

Pero el primer éxito real lo tuvo en suerte el modesto joven matemático noruego Niels Henrik Abel (1802—1829). Durante su corta vida logró realizar tantos descubrimientos en matemáticas que con derecho puede ser considerado uno de los más eminentes matemáticos del siglo XIX. Comenzando con la demostración de la imposibilidad de resoluciones en radicales de la ecuación de quinto grado, Abel realizó, tras esto, investigaciones fundamentales en el campo de la teoría de funciones analíticas. Además, inves-

¹⁾ L. Kronecker. Werke, Bd. III, SS. 341—360; Bd. II, SS. 247—300.

tió una serie de clases de funciones especiales, en primer lugar las elípticas e hiperelípticas.

Aún en la escuela (alrededor del año 1820), Abel se interesó por el problema de solubilidad de las ecuaciones en radicales. En una ocasión le pareció que daba una demostración de solubilidad en radicales de la ecuación de quinto grado. Pronto se aclaró que esta demostración tenía un error. Pero la demostración errónea realizó un buen servicio. Abel obtuvo el estipendio estatal y la posibilidad de viajar a Europa para su perfeccionamiento en las matemáticas.

La demostración corregida apareció en 1824 en la "Memoria sobre las ecuaciones algebraicas, donde se demuestra la imposibilidad de resolución de la ecuación general de quinto grado". En ella, Abel, al parecer, independientemente de Ruffini anduvo por el mismo camino. Se esforzó por demostrar que las expresiones más generales, conteniendo radicales, no pueden ser raíces de la ecuación algebraica de quinto grado. Es interesante que esta demostración de Abel sufría de la misma insuficiencia que la de Ruffini. Esta se basaba en la suposición de que las raíces de la resolvente deben expresarse racionalmente a través de las raíces de la ecuación dada.

Finalmente, en el año 1826, en el trabajo de Abel "Demostración de la imposibilidad de resolución de ecuaciones, cuyo grado supera al cuarto" el problema multiseccular obtuvo resolución satisfactoria. Aquí, Abel consideró la ecuación de quinto grado con coeficientes variables. La solución la trataba como expresión de las raíces a través de funciones algebraicas de los coeficientes. Este tipo de funciones se forma de los argumentos mediante un número finito de las cuatro operaciones aritméticas y la operación de extracción de la raíz, cuyo índice es un número primo.

La voluminosa demostración de Abel¹⁾ comienza con la construcción de las funciones algebraicas de tipo general:

$$v = q_0 + p^n + \dots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

donde n es un número primo, q_i son funciones algebraicas del mismo orden que v , pero de orden mayor que $m - 1$; p es una función algebraica en una unidad menor que v construida de tal forma que no se expresa racionalmente a través de q_0, \dots, q_{n-1} . A continuación, en el segundo párrafo, se consideran las propiedades de las funciones algebraicas, las cuales satisfacen una ecuación dada y se demuestra que si la ecuación es algebraicamente resoluble, entonces su raíz siempre se puede dar de tal forma, que todas las funciones algebraicas, de las cuales ésta se compone, se expresan a través de funciones racionales de las raíces de la ecuación dada.

¹⁾ Véase H.Г. Чеботарев. Теория Галуа, т. I. М.—Л., ГИИИ, 1936. (N.G. Chebotariev. Teoría de Galois.)

El párrafo siguiente está dedicado a la cuestión sobre las sustituciones y sobre el número de valores diferentes, que pueden tomar las funciones de varias variables. Aquí se demuestra el teorema, conocido como teorema de Cauchy: si un número de valores diferentes v es menor que p , el mayor número primo que no supera n , entonces no supera 2. De aquí se obtiene el resultado de que no existen funciones de cinco variables las cuales tengan tres o cuatro valores diferentes. Finalmente, en el cuarto párrafo se demuestra que ninguna expresión más general en radicales puede ser expresión universal de las raíces de la ecuación de grado dado mayor que el cuarto.

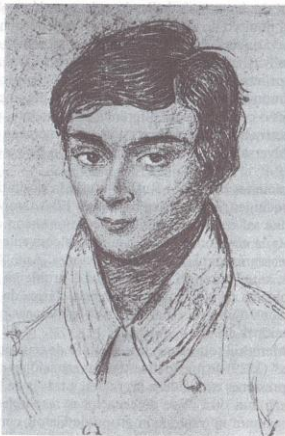
Las demostraciones de Abel—Ruffini no da la posibilidad de separar las clases de ecuaciones resolubles en radicales. Ellas tampoco eliminan la posibilidad de una tal resolución para las ecuaciones con coeficientes numéricos mediante la elección de irracionalidades convenientes en un caso concreto. Era necesario ampliar las investigaciones. Ante Abel como también en su época, ante Lagrange, se presentaba el problema general de resolubilidad, el problema fundamental de la teoría clásica de Galois.

Lagrange encontró una clase particular de ecuaciones resolubles en radicales, las ecuaciones cíclicas.

Abel en la "Memoria sobre una clase singular de ecuaciones algebraicamente resolubles" (1829) de nuevo investigó las ecuaciones cíclicas, buscando para ellas expresiones explícitas a las raíces, a través de los coeficientes. Además consideró aún otra clase de ecuaciones resolubles las cuales, en esencia, son ecuaciones normales con grupo de Galois conmutativo (abeliano).

Tanto en este, como en otro trabajo de Abel "Sobre la resolubilidad algebraica de las ecuaciones" (que quedó no terminado y fue publicado sólo en el año 1839) se demuestran una serie de teoremas relacionados con la teoría de Galois. Por ejemplo, Abel demostró un teorema, equivalente al teorema de Galois: para que una ecuación irreducible sea resoluble en radicales es necesario y suficiente que todas las raíces sean funciones racionales de dos raíces conocidas. En otros teoremas, investigó la estructura de algunas clases concretas de grupos resolubles. Realmente, Abel investigó la estructura de los grupos conmutativos. Mostró que estos grupos son producto de grupos cíclicos. Sin embargo, el concepto de grupo en él no se había destacado.

Surgimiento de la teoría de Galois. Abel no pudo dar un criterio general de resolubilidad en radicales de las ecuaciones con coeficientes numéricos. Pero la resolución de este problema no se hizo esperar largamente. Perteneció a Evaristo Galois (1811—1832), matemático francés, fallecido como Abel, en temprana edad. Su vida, corta, pero plena de activas luchas políticas y un interés apasionado por los estudios matemáticos, representa



E. Galois (1811—1832)

un vivo ejemplo de cómo, en la actividad de un hombre dotado, las premisas acumuladas en la ciencia se transforman en una etapa cualitativamente nueva de su desarrollo.

Galois escribió pocos trabajos. En la edición rusa sus trabajos, manuscritos y borradores ocupaban sólo 120 páginas en un libro de pequeño formato ¹⁾. Pero el significado de estos trabajos es enorme. Por ello consideremos sus ideas y resultados más detalladamente.

Tomemos, siguiendo a Galois, la ecuación

$$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

¹⁾ Véase Э. Галуа. Соч. М.—Л., ОНТИ, 1936. (E. Galois. Obras.)

Para ella definamos la región de racionalidad, esto es la totalidad de las funciones racionales de los coeficientes de la ecuación

$$R(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

La región de racionalidad R es un campo, esto es, un conjunto de elementos cerrado con relación a las cuatro operaciones. Si a_1, a_2, \dots, a_n son racionales, entonces R es el campo de los números racionales; si los coeficientes fueran magnitudes arbitrarias, entonces R sería el campo de elementos de la forma $\frac{P(a_1, a_2, \dots, a_n)}{Q(a_1, a_2, \dots, a_n)}$, donde el numerador y el denominador son

polinomios. La región de racionalidad se puede ampliar añadiéndole elementos, por ejemplo las raíces de la ecuación. Si a esta región se le agregan todas las raíces de la ecuación entonces la cuestión sobre la resolubilidad de la ecuación se hace trivial. El problema de resolubilidad de la ecuación en radicales se puede plantear sólo en relación a una región determinada de racionalidad.

Galois demostró que para cada ecuación $P_n(x) = 0$ se puede en la misma región de racionalidad encontrar cierta ecuación $Q(x) = 0$, denominada normal. Las raíces de la ecuación dada $P_n(x) = 0$ y la correspondiente ecuación normal $Q(x) = 0$ se expresan una a través de la otra racionalmente. La ecuación normal es una ecuación que goza de la propiedad de que todas sus raíces se expresan racionalmente a través de una de ellas y los elementos del campo de coeficientes. Un ejemplo de ecuación normal es la ecuación $x^n - 1 = 0$. Sus raíces son:

$$x_1 = \xi, x_2 = \xi^2, \dots, x_n = \xi^n = 1.$$

La ecuación cuadrática, por ejemplo, también es normal.

Todas las sustituciones de raíces de una ecuación normal forman un grupo G . Este es el grupo de Galois de la ecuación $Q(x) = 0$, o lo que es lo mismo de la ecuación $P_n(x) = 0$. Ella goza, como aclaró Galois, de la notable propiedad: cualquier relación racional entre las raíces y los elementos del campo R es invariante respecto a las sustituciones del grupo G . De esta manera, Galois vinculó con cada ecuación, el grupo de sustituciones de sus raíces. El mismo introdujo (1830) el término "grupo" y le dio una definición adecuada a nuestras exigencias actuales aunque no tan formalizada.

La estructura del grupo de Galois resultó relacionada con el problema de resolubilidad de las ecuaciones en radicales. Para que la resolubilidad tenga lugar es necesario y suficiente que el grupo de Galois correspondientemente sea resoluble. Esto significa que en el grupo dado existe una cade-

$$G \supset H_{p_1} \supset H_{p_2} \supset \dots \supset H_{p_k} (= E)$$

de divisores normales con índices primos p_1, p_2, \dots, p_k . Recordemos, a propósito, que los divisores normales o lo que es lo mismo los subgrupos invariantes H_i son tales subgrupos del grupo G donde se cumple la ecuación $gH_i = H_i g$, donde g es un elemento cualquiera del grupo G .

Las ecuaciones algebraicas generales $P_n(x) = 0$ con $n \geq 5$, hablando en general, no tienen tal cadena, ya que los grupos de sustituciones tienen sólo un divisor normal de índice 2, esto es, el subgrupo de todas las sustituciones pares. Por esto, tales ecuaciones en radicales, en general, no son resolubles.

El aparato, introducido por Galois, para el establecimiento de la resolubilidad en radicales de las ecuaciones algebraicas tuvo una significación que salía de los marcos del problema indicado. Su idea del estudio de la estructura de los campos algebraicos y la comparación con ellos de la estructura de los grupos de un número finito de sustituciones fue la base fructífera del álgebra moderna. Sin embargo, no obtuvo reconocimiento inmediato.

Antes del fatal duelo que acabó con su vida, Galois, en el curso de una noche, formuló sus más importantes descubrimientos y los envió a su amigo O. Chevallier para la publicación en caso de un fin trágico. Esta carta fue publicada enseñada después de la muerte de Galois, sin embargo, las ideas en ella contenidas no encontraron repercusión. Sólo después de 14 años, en 1846, Liouville descifró y publicó todos los trabajos matemáticos de Galois. A mediados del siglo XIX en una monografía en dos tomos de Serret y además en un trabajo de E. Betti (1852) por primera vez aparecieron exposiciones conexas de la teoría de Galois. Y sólo desde los años 70 del siglo pasado, las ideas de Galois comenzaron a obtener desarrollo posterior en diferentes direcciones.

En el dominio de los fundamentos clásicos los nuevos problemas más próximos a las propias ideas de Galois, se agruparon alrededor del problema de la clasificación de las irracionalidades algebraicas y el establecimiento de su naturaleza aritmética. A éstos, por ejemplo, se refiere el teorema de Kronecker—Weber de que las raíces de las ecuaciones abelianas (esto es, ecuaciones con grupo conmutativo) con coeficientes racionales se expresan racionalmente a través de las raíces de la unidad. La generalización ulterior de este teorema condujo a la teoría general de los campos de clases, donde se trata de la clasificación de todas las extensiones abelianas del campo de números algebraicos dado. Este último es una extensión algebraica finita del campo de los números racionales. La teoría actual de los números algebraicos se formó como unión de la teoría de estos números con la teoría de los ideales y la teoría de Galois.

El planteamiento de nuevos problemas, más generales, favoreció la complicación rápida de la teoría de Galois, y el crecimiento de la generali-

dad de sus resultados. Entre estos problemas mencionemos, por ejemplo, el problema de la búsqueda de todas las ecuaciones, las cuales para una región dada de racionalidad tienen un grupo determinado, prefijado de antemano. Los problemas de tal género condujeron al estudio de los campos de funciones racionales generales (problema de Lürot—Steinitz). La generalización del problema sobre la resolubilidad de ecuaciones en radicales condujo al problema, de carácter general, sobre la posibilidad de reducir una ecuación a una cadena de ecuaciones auxiliares con un menor número de parámetros. Los primeros resultados generales aquí fueron obtenidos sólo por el matemático soviético N.G. Chebotariov en su teoría de las resolventes. Otro matemático soviético I.R. Shafarievich en el año 1954 resolvió el denominado problema inverso de la teoría de Galois: para cualquier grupo resoluble de cualquier orden, si el campo extendido k_0 de números algebraicos contiene una raíz n -ésima de la unidad siempre existen cuantas extensiones K se quieran, las cuales tienen sobre k_0 cualquier grupo resoluble de antemano prefijado de orden n .

La teoría actual de Galois se ha convertido en una disciplina matemática compleja y ramificada, la cual incluye un amplio material sobre las relaciones entre las propiedades de las ecuaciones, los números algebraicos y los grupos¹⁾.

Surgimiento de la teoría de grupos. El aparato, introducido por Galois, se apoya en considerable grado, sobre el concepto de grupo. Galois mismo, al parecer independientemente de Ruffini, introdujo el término correspondiente. Lo fructífero de este concepto y la necesidad de su introducción eran evidentes para muchos matemáticos. El grupo de las sustituciones realmente fue considerado ya por Lagrange. Desde el año 1815, Cauchy llevó a cabo una serie de investigaciones sobre la teoría de grupos finitos, demostrando, en particular, el teorema de que cada grupo cuyo orden se divide por un número primo p contiene al menos un subgrupo de orden p .

En la primera mitad del siglo XIX, los resultados de la teoría de grupos aún jugaron un papel auxiliar, especialmente en la teoría de las ecuaciones algebraicas. La teoría de grupo que se formaba era aún, predominantemente la teoría de los grupos finitos, esto es, de los grupos de sustituciones. Hacia mediados del siglo quedó claro que el concepto de grupo tiene una aplicación más general. En relación con esto en los años 50 en trabajos de Cayley y otros comenzaron a aparecer definiciones abstractas más genera-

¹⁾ Véase Н.Г. Чеботарев. Проблемы современной теории Галуа, в кн.: Э. Галуа. Соч., стр. 183—241; Н.Г. Чеботарев. Собр. соч., т. III, стр. 5—43; Н.Г. Чеботарев. Основы теории Галуа, тт. 1—2. М., Гостехиздат 1934—1937. (N.G. Chebotariov. Problems of the theory actual of Galois. En: E. Galois Obras; N.G. Chebotariov. Fundamentos de la teoría de Galois.)

les de grupo. Quedó claro que las propiedades más importantes del grupo dependen no del carácter de los elementos de la sustitución, sino de la operación del grupo. El proceso de paso a la teoría abstracta de grupos se aceleró desde el año 1870, después de la aparición del trabajo de C. Jordan "Traité des substitutions et des équations algébriques" ("Tratado sobre las sustituciones y las ecuaciones algebraicas"), donde fue hecho un resumen de los resultados de la teoría de los grupos finitos en su aplicación a la teoría de números, teoría de funciones y geometría algebraica.

Hacia fines del siglo XIX, se formó y alcanzó un alto nivel la teoría de los grupos finitos. Surgió una serie de tratados los cuales contenían su elaboración sistemática. En esta misma época aparecieron las primeras aplicaciones de la teoría de grupos. En los años 1890—1891, el cristalógrafo y geómetra ruso E.S. Fiódorov y el matemático alemán A. Schoenflies, independientemente uno de otro, resolvieron con los métodos de la teoría de grupos, el problema de la clasificación de todas las redes cristalinas espaciales. Establecieron la existencia de 230 grupos de simetría espacial, que constaban de la totalidad de las estructuras cristalinas auto coincidentes. Los puntos que se obtienen uno del otro por la transformación de un grupo dado se denominan homólogos en relación a este grupo y forman el llamado sistema regular. En la actualidad, la investigación de la estructura de las sustancias cristalinas incluye la definición de sus grupos de Fiódorov.

Los grupos discretos finitos, a los que pertenecen los grupos de Fiódorov, obtuvieron extensión en la teoría de los espacios multidimensionales en relación con la teoría de los poliedros regulares en éstos. En la base de estos estudios está el teorema de Jordan: el número de grupos finitos lineales de una dimensión dada es en esencia, finito. Este mismo teorema obtuvo aplicación en la confluencia de los siglos XIX y XX en la teoría de las integrales algebraicas de las ecuaciones diferenciales lineales, las superficies de Riemann y otros. Por ejemplo, Jordan indicó la relación entre las ecuaciones diferenciales lineales que tienen integrales algebraicas y los grupos finitos. Resultó que, la condición necesaria y suficiente de existencia de integrales algebraicas para una ecuación diferencial lineal de tipo Fuks es la condición de finitud del grupo de las transformaciones lineales, sufridas por sus integrales cuando la variable independiente circula cada uno de los puntos críticos.

Hacia fines del siglo XIX, la teoría de los grupos finitos se desarrolló en tal grado que para ella adquirió actualidad el problema de la clasificación. Sin embargo, en forma general, este problema no ha sido resuelto hasta el momento. Extraordinarias dificultades surgen también en la investigación de sus aspectos particulares. Por ejemplo, aún no está resuelta totalmente la cuestión sobre la estructura y clasificación de los grupos solubles finitos. Resultó, además, que todos los grupos finitos simples no conmutativos co-

nocidos tienen el orden par. El problema de Burnside: será o no esta propiedad general para todos los grupos de esta clase, está por ahora sin resolver.

Bajo tal estado de cosas en la teoría de grupos, cuando se destacó el concepto abstracto general de grupo, era natural que surgiera la cuestión sobre la investigación de los grupos infinitos tanto continuos como discretos y también sobre la creación de un aparato de cálculo adaptado a las necesidades de la teoría de grupos. Estos tres grupos de cuestiones fueron presentados y recibieron desarrollo a fines del siglo XIX — comienzos del XX.

Los logros fundamentales pertenecen a los discípulos de C. Jordan, F. Klein y S. Lie, los cuales emprendieron el estudio sistemático de la teoría de grupos y sus posibles generalizaciones y aplicaciones.

El matemático noruego Sophus Lie extendió los métodos de la teoría de grupos al problema de la integración de ecuaciones diferenciales. Introdujo alrededor del año 1873 un nuevo tipo de grupo, denominado por él "grupos continuos de transformaciones". Con cada ecuación diferencial relacionó tal grupo de transformaciones que la deja invariante. Los grupos de Lie constaban de las transformaciones del tipo

$$x \rightarrow f(x, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

determinadas por los parámetros. Por ejemplo, para la rotación de un plano, los parámetros son los ángulos de giro, en el espacio, los denominados ángulos de Euler. La multiplicación de dos transformaciones que son elementos del grupo da una transformación que es también un elemento del grupo. Los parámetros de este último están vinculados con los parámetros de los cofactores de las funciones continuas

$$F_i = F_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

Los grupos, definidos de esta manera, recibieron la denominación de grupos de Lie. La estructura de los grupos de Lie resultó relacionada con la cuestión sobre la integrabilidad de ecuaciones diferenciales en cuadraturas. Las propiedades estructurales correspondientes de los grupos de Lie obtuvieron, por analogía con la teoría de Galois, la interpretación de las propiedades de resolubilidad. Lie clasificó todos los grupos posibles de transformaciones en el plano y compuso una tabla de los tipos normales de ecuaciones diferenciales con indicación de si se resuelven o no en cuadraturas. La cuestión, surge o no de la continuidad de las funciones F_i , la existencia de tales parámetros en el grupo para los cuales las funciones F_i sean analíticas fue incluida por D. Hilbert en el número de sus problemas famosos y en la actualidad ha sido resuelta positivamente¹⁾.

¹⁾ Véase Л.С. Поингрягин. Непрерывные группы. М., ГИТИ, 1954. (L.S. Pontraguin. Groups continuous.)

Otra aplicación importante de la teoría de los grupos continuos fue realizada alrededor del año 1872 por F. Klein. Más adelante se hablará sobre la concepción de Klein de que cualquier geometría (euclídeana, afin, proyectiva, etc.) tiene en su base cierto grupo continuo de transformaciones y es en esencia el estudio de los invariantes de este grupo.

El descubrimiento de tan variadas aplicaciones de la teoría de grupos continuos fue la causa de la introducción de una definición abstracta, aún más general de grupo continuo. En ella se incluye la exigencia de bajar la transición límite, de acuerdo con un grupo de operaciones. Enseguida se logró demostrar (esto lo realizó Van Dantzig), que esta definición es más general que la definición de Lie y que existen grupos continuos que no son grupos de Lie. Ya que en esta definición se hace abstracción de que los elementos del grupo son transformaciones, entonces se llega, en esencia, a un grupo topológico y a un espacio topológico. En relación con esto, se creó una imperiosa necesidad de unificar los hechos topológicos aislados en una teoría única. Esto fue realizado por H. Poincaré en su famosa memoria "Analysis situs" ("Análisis de Situación") (1895) y en cinco suplementos a éste (1899—1911).

En la confluencia de los siglos XIX y XX la teoría de grupos se ramificó desmesuradamente, formando el núcleo del álgebra actual. Ella se compone de una serie de teorías altamente desarrolladas: los grupos finitos, los grupos discretos infinitos, los grupos continuos, entre ellos los grupos de Lie. Los métodos teóricos de grupos penetraron en una serie de disciplinas matemáticas y sus aplicaciones. Los descubrimientos de De Broglie, Schrödinger, Dirac y otros, en la mecánica cuántica y en la teoría de la estructura de la materia mostraron que la física moderna debe apoyarse en la teoría de los grupos continuos, en particular en la teoría de la representación de grupos por operadores lineales, la teoría de los caracteres y otras elaboradas por Cartan, H. Weyl y otros científicos.

Pasó un medio siglo después de los trabajos de Gauss, Abel y Galois y el centro de gravedad en las investigaciones algebraicas se trasladó a la teoría de grupos, subgrupos, anillos, estructuras. En el álgebra comenzó el período de las matemáticas modernas.

Algunas otras vías de la formación del álgebra moderna. De la rica y variada historia del álgebra del siglo XIX extrajimos una parte comparativamente pequeña de la formación de ciertos conceptos fundamentales. Esto se hizo porque en el aislamiento de algunos objetos algebraicos: los grupos, campos y más tarde anillos y estructuras, y en la creación de las teorías correspondientes se reflejan los cambios principales que ocurrieron en el álgebra en el transcurso del siglo XIX — comienzos del XX. Estos cambios predeterminaron las direcciones fundamentales del desarrollo del álgebra en la primera mitad del siglo XX.

Una investigación más detallada de la historia de la creación del álgebra actual está relacionada con la resolución de algunos problemas histórico-matemáticos.

En primer lugar, es necesario seguir el enriquecimiento de la teoría de grupos y también de la teoría de otros conceptos algebraicos fundamentales, con hechos los cuales permiten descubrir completamente sus propiedades. Así, junto con la historia de los grupos finitos e infinitos continuos, gran interés, en virtud de su importancia para las aplicaciones, provocan los grupos infinitos discretos.

En segundo lugar, ante los investigadores se pone la tarea de descubrir las relaciones de la teoría de grupos (y también la teoría de campos, anillos y estructuras) con otras disciplinas matemáticas. Por ejemplo, la introducción de las consideraciones de la teoría de grupos en el dominio de las propiedades topológicas condujo a que ahora cada representación topológica se caracterice en cierta medida por su grupo fundamental, en caso general infinito. Especialmente grande, al parecer, es el papel de la teoría de grupos en la teoría de los nudos, caso particular de los cuales es la teoría de trenzas. Entre los numerosos problemas que aquí quedan por resolver, puede citarse, por ejemplo, el problema de la aclaración detallada de la circunstancia que las representaciones topológicas de los grupos fundamentales tienen, al parecer, funciones semejantes a las funciones de los grupos de Galois en los campos algebraicos.

La historia del álgebra del siglo XIX quedaría incompleta, si el investigador no atendiera, en tercer término, a la formación del álgebra lineal, surgida de la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales y relacionada con la teoría de determinantes y matrices. En la segunda mitad del siglo XIX se llevaron a cabo investigaciones muy importantes de la teoría de los invariantes de las ecuaciones, esto es, la evidencia de las funciones de los coeficientes que conservan sus valores ante una u otra clase dada de transformaciones. En este camino del desarrollo creció la teoría más general de las formas, la cual encontró aplicación no sólo en el álgebra, sino también en otras ramas de las matemáticas: la teoría de números, la geometría diferencial, la geometría algebraica, la mecánica y otras y, además, en sus aplicaciones.

No podemos, finalmente, dejar lugar para la aclaración de la historia de los sistemas numéricos hipercomplejos de Hamilton y Grassmann, creados en los años 1830—1840 y para el rico conjunto de recursos de estudio de los espacios vectoriales, los cuales juegan actualmente un papel tan importante en investigaciones de diversas, al parecer, teorías matemáticas desde posiciones únicas, muy generales.

7.3. Reconstrucción de los fundamentos del análisis matemático

Reforzamiento del papel de la teoría de límites. El análisis matemático, hacia el siglo XIX se convirtió en un sistema de disciplinas ramificado y siguió ocupando un lugar central en las matemáticas. El flujo inagotable de nuevos resultados teóricos y el campo de aplicaciones el cual se amplía continuamente condicionaron el que en la estructura general de la matemática ocuparan un lugar especial, principalmente, las disciplinas analíticas.

Las ciencias exactas enriquecían su contenido principalmente a cuenta del análisis, en primer término, de las ecuaciones diferenciales. Los métodos del análisis penetraron más profundamente en la física no sólo en mecánica y óptica, sino también en la teoría de los fenómenos eléctricos, magnéticos y caloríficos. En la mecánica fueron sometidos a la elaboración, además de los puntos y sus sistemas, los medios continuos. Los diversos campos de la técnica: las máquinas de vapor, la artillería, la técnica de construcción y otros recibieron nuevos métodos analíticos de investigación de los problemas más importantes. En relación con esto, la estructura y el contenido del análisis matemático sufrieron una profunda reconstrucción.

El estándar de rigor lógico, formado en el análisis matemático en la segunda mitad del siglo XVIII se quedaba atrás de las aplicaciones. El trabajo de investigación de esta rama de las matemáticas realizado por Euler, D'Alembert, Lagrange y otros no condujo a la superación del retraso. Las investigaciones teóricas exigían métodos analíticos nuevos, más exactos, los cuales se apoyaban en puntos de partida claros y rigurosamente definidos. El problema de la reconsideración crítica del sistema de definiciones y procedimientos lógicos de las demostraciones adquirió para el análisis matemático una actualidad aún más grande. De su resolución dependía demasiado. Por ello, las investigaciones sobre la fundamentación del análisis matemático ocuparon en las matemáticas del siglo XIX un lugar importante.

En la estructura actual del análisis matemático uno de los lugares centrales pertenece al concepto de límite. Su significado es enorme. Sobre él se apoya prácticamente todo el aparato de las demostraciones infinitesimales, caracterizadas por juicios hipotético-deductivos y la aplicación de las desigualdades específicas (este aparato antes lo denominamos, convencionalmente, aparato ε, δ).

Antes fue mostrado además que el concepto de límite y el de paso al límite realmente existen en las matemáticas desde épocas remotas. La primera forma teórica de razonamientos límites la tenían ya los griegos antiguos, en forma del método de exhaustión. No encontramos aún en este método ni el concepto de límite ni un simbolismo único, lo cual reflejara la esencia de este concepto. No obstante la uniformidad de realización del

método con el paso obligatorio al límite, aunque no realizado explícitamente, nos dio la posibilidad de ver en él una forma no desarrollada de la posterior teoría de límites.

Hasta la aparición de los trabajos de Newton en la historia de las matemáticas se pueden señalar sólo la existencia de pasos aislados al límite realizados verdaderamente, el conjunto de los cuales se amplía lentamente. A Newton le debemos el primer intento por desarrollar la teoría de límites como base lógica del cálculo diferencial e integral creado por él en forma de la teoría de fluxiones. El mismo introdujo el término específico *limes* (límite), no dándole una definición formal, al parecer como al intuitivamente claro. La teoría de Newton fue publicada en sus famosos "Elementos matemáticos de la filosofía natural". Aquí tenía el nombre de "método de las primeras y últimas relaciones", y sobre este método se afirmaba que con su ayuda se demostraba todo lo que sigue. Sin embargo, el método de las primeras y últimas relaciones no daba una base operativa para la utilización práctica de los infinitesimales. Newton tampoco pudo superar las dificultades relacionadas con la definición de la relación de magnitudes que desaparecen o aparecen.

Los matemáticos del siglo XVIII probaron un conjunto de procedimientos para fundamentar el análisis infinitesimal. Lo insatisfactorio de casi todos estos métodos rápidamente se hizo evidente. Sólo con relación a los métodos basados en el concepto de paso límite, la crítica no advertía ni lagunas lógicas esenciales ni absurdos. Los partidarios del método de límites, D'Alembert, L'Huilier, Guriev y otros lo defendieron con gran perseverancia, aclarando el papel y sentido del concepto de límite. Así, D'Alembert escribió al respecto, que Newton vio en el cálculo diferencial sólo el método de definición de los límites de las relaciones. Nunca diferenciaba las magnitudes, sino sólo las ecuaciones, ya que toda ecuación incluye la relación entre las variables y la resolución de ecuaciones diferenciales consiste solamente en la determinación de los límites de las relaciones entre las diferencias finitas contenidas en la ecuación de las variables.

No obstante, D'Alembert no pudo contraponer a la eliminación de Leibniz de los infinitesimales en la diferenciación ningún método racional, basado en consideraciones límites. El procedimiento por él recomendado se puede escribir brevemente mediante la fórmula:

$$y' = \left. \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|_{h=0}$$

En este procedimiento se supone claramente la desarrollabilidad de la función en serie; además en él, en esencia, aún no hay operaciones con límites.

Semejantes definiciones del concepto de límite y de los conceptos con él relacionados pueden servir sólo para la explicación, interpretación y final-

mente justificación de la validez de los resultados del análisis infinitesimal. Así eran apreciados. Pero para la introducción en el análisis de las consideraciones límites se exigía más: que sirvieran de medio para la elaboración de los problemas presentados ante esta ciencia, que entraran en su práctica operativa. En este camino, tenían que superarse grandes dificultades relativas a: la necesidad de determinar la existencia de los límites; la ausencia de un algoritmo de cálculo de límites; la ausencia de la expresión matemática de los límites que permitiera operar con ellos y el simbolismo correspondiente.

La primera de las dificultades indicadas (no hablando sobre las restantes) de ningún modo tenía un carácter teórico-abstracto como podría parecer. En las matemáticas se había acumulado una gran cantidad de problemas cuya resolución se reducía a la resolución de las cuestiones de existencia. Tales, por ejemplo, como: la cuestión sobre la existencia de las raíces de las ecuaciones algebraicas; sobre la existencia de las sumas de series infinitas de números; sobre la existencia de las sumas de series infinitas de funciones; sobre la existencia de las integrales de las funciones, tanto de variable real como compleja. Para la resolución de todos estos problemas, el conjunto de los pasos límite conocidos, definidos individualmente antes era completamente insuficiente.

A finales del siglo XVIII — comienzos del XIX, las obras de un gran número de matemáticos reflejaban ya, con diferente grado de resolución y consecuencia, la necesidad objetiva de construcción de la teoría de límites como base del análisis matemático y una reconstrucción radical de este último. Los mayores méritos en la realización de esto pertenecen a A. Cauchy.

Actividad de A. Cauchy en el campo de los fundamentos del análisis matemático. El proceso de reconstrucción de los fundamentos del análisis matemático sobre la base de la teoría de límites se reveló claramente en los años 20 del siglo XIX ante todo en las famosas conferencias de A. Cauchy, las cuales dictó en la Escuela Politécnica en París.

Augustin-Louis Cauchy (1789—1857) terminó en el año 1807 la Escuela Politécnica en París. Este centro de enseñanza, abierto en 1794, en la época de la Gran Revolución Burguesa Francesa, para la preparación de ingenieros militares, se convirtió posteriormente en la fuente principal de completamiento del cuerpo de ingenieros del país. En el transcurso de dos años los educandos de la Escuela Politécnica recibían preparación básica en matemáticas, mecánica y dibujo. A continuación los enviaban, para la adquisición de conocimientos de ingeniería especiales durante dos años, a uno de los cuatro centros de enseñanza: al Instituto de vías de comunicación, al Instituto de minas y a las academias militares superiores: la de ingeniería y artillería. Los mejores de los egresados tenían derecho a la elección. Como regla, ellos elegían el primero de los institutos mencionados, el



O. Cauchy (1789—1857)

cual gozaba de una reputación más alta. La sucesiva distribución por institutos también transcurría en correspondencia con los éxitos académicos. Cauchy estudió en el Instituto de vías de comunicación y después (hasta el año 1813) trabajó como ingeniero.

Desde el año 1816, Cauchy fue nombrado miembro de la Academia y profesor de la Escuela Politécnica donde trabajó junto con otros de los mejores matemáticos de Francia. No obstante desde 1830 hasta 1838, Cauchy se vio obligado a encontrarse en la emigración debido a sus convicciones monárquico-religiosas y la oposición al régimen republicano. A su regreso a Francia enseñó en un colegio jesuíta y sólo en el año 1848 se hizo profesor de la Sorbona, la universidad de París.

La productividad científica de Cauchy fue excepcional. Los biógrafos calculan 789 trabajos publicados por él. La mayoría de ellos se relacionan con diferentes ramas del análisis matemático y sus aplicaciones. Más ade-

lante tendremos la posibilidad de aclarar el aporte de Cauchy a la teoría de funciones de variable compleja. En el presente capítulo para no violar la integridad de la exposición, no nos detendremos tampoco en los méritos de Cauchy en el campo de las ecuaciones diferenciales: planteamiento del problema de Cauchy, los teoremas fundamentales de existencia de las soluciones para el caso de variables reales y complejas, el método de las mayorantes y el método de las franjas características para la integración de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. Al parecer, en el presente libro no podremos dar, en general, una caracterización de los trabajos de Cauchy sobre geometría, teoría de números, álgebra, teoría de la elasticidad y óptica y crear la atmósfera de creatividad intensa de Cauchy y su enorme autoridad entre los científicos matemáticos. Aquí como en todo el texto estamos obligados a sacrificar el aspecto personal de la cuestión y limitarnos sólo a breves referencias biográficas no pretendiendo realizar una biografía científica.

En la escuela Politécnica, Cauchy dictó conferencias sobre análisis matemático. Todo el curso de conferencias fue publicado en tres libros: "Curso de análisis" (1821), "Resumen de conferencias sobre cálculo de infinitesimales" (1823), "Conferencias sobre aplicaciones del análisis a la geometría" (2 tomos, 1826, 1828). Estos libros tienen una importancia especial, porque en ellos, por primera vez, el análisis matemático se construye sucesivamente sobre la base de la teoría de límites. Señalan el comienzo de una reconstrucción radical de los fundamentos de esta ciencia, reconstrucción que antecedió inmediatamente a su estado actual.

El "Curso de análisis" de Cauchy, denominado a veces "Análisis algebraico" (en correspondencia con el texto del subtítulo), está dedicado al estudio de las funciones elementales tanto de variable real como compleja, incluyendo el estudio sobre las series infinitas. En este aspecto Cauchy siguió la tradición establecida, gracias a Euler, en el siglo XVIII: antepone al cálculo diferencial e integral propiamente dicho el estudio de las funciones. El significado de esta composición en la estructura del análisis es evidente. La clasificación de las funciones, el desarrollo de éstas en series de potencias, en productos infinitos, los procedimientos particulares de transformación de funciones son necesarios para la aplicación exitosa a ellas de las operaciones de diferenciación e integración. Estos dos últimos tipos de operaciones se consideraban específicos para el análisis infinitesimal. Todas las transformaciones de funciones que les precedían, aunque también, se llevaban a cabo tanto sobre un número finito como infinito de objetos, recibieron por esto la denominación específicamente mixta de "Análisis algebraico".

El análisis algebraico de Cauchy ya recuerda mucho la exposición contemporánea de los fundamentos del análisis matemático. En él se introdu-

ce, por primera vez, una magnitud infinitesimal como una variable cuyo límite es igual a cero. La continuidad de una función se trata como la existencia de la correspondencia de un incremento infinitesimal de la función a un incremento infinitesimal del argumento. Con gran meticulosidad se expone la cuestión de la convergencia de series infinitas, cuya existencia se condiciona con la existencia del límite de las sumas de un número finito de términos con una obligatoria apreciación analítica rigurosa del resto.

Para extender el concepto de convergencia a clases de series lo más amplias posible, Cauchy relacionó la convergencia de las series de términos de signo variable con la convergencia de las series constituidas por los módulos de sus términos. Respecto a la convergencia absoluta, introducida de esta manera, demostró un grupo de teoremas, por ejemplo el teorema de que la suma de una serie que es producto de dos series absolutamente convergentes es igual al producto de sus sumas.

Cauchy situó sobre una base lo suficientemente sólida la investigación de los criterios de convergencia de las series. Los precedieron sólo pocos descubrimientos: el criterio integral (Maclaurin, 1742) y el criterio, formulado con rigor insuficiente, de D'Alembert (1768). En las conferencias de Cauchy se indica una serie de criterios suficientes de convergencia.

Estos resultados de Cauchy lo siguió una larga sucesión de investigaciones las cuales tienen por objetivo elaborar criterios, de convergencia de las series, generales y efectivos. Abel dio una investigación completa de las condiciones de convergencia de una serie en el plano complejo en el año 1826. Nuevos criterios suficientes, los cuales después se incluyeron en los cursos de enseñanza fueron encontrados por Raabe (1832), N. Lobachevski (1834), E. Kummer (1835), Bonne (1842), Bertrand (1842), V. P. Ermakov (1870) y otros. Un resumen preciso de todos los intentos particulares en la búsqueda de criterios de convergencia fue llevado a cabo por N. V. Bugayev (1863 y 1888), el cual introdujo la teoría de las series conjugadas, la cual permite abarcar desde posiciones únicas un conjunto de criterios.

La teoría de las series se enriqueció en las conferencias de Cauchy con el establecimiento de la región de convergencia de las series de potencias

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

tanto para valores reales como complejos del argumento. Para estos últimos se definió (en el año 1844) el círculo de convergencia y se dedujo el teorema, conocido actualmente como teorema de Cauchy—Hadamard: una serie converge (respectivamente, diverge), si

$$|z| < \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lambda}.$$

Quedó claro que si $\lambda = 0$, entonces la serie converge en todo el plano; si $\lambda = \infty$, entonces la región de convergencia se reduce a un punto; finalmente, la condición $0 < \lambda < \infty$ significa que la serie converge dentro del círculo de radio $|z - z_0| < \frac{1}{\lambda}$ y diverge fuera de él.

Lamentablemente Cauchy aún no tiene idea sobre la convergencia uniforme de una serie en el intervalo. Debido a esto, en el análisis algebraico apareció un teorema incorrecto: una serie convergente de funciones continuas en la región de convergencia, representa ella misma una función continua. Enseguida (1826) este error, por cierto, lo advirtió y corrigió Abel. El concepto de convergencia uniforme fue introducido en 1848 por J. Stokes y L. Seidel.

Esta misma tendencia de reconstruir todo el análisis sobre la base de la teoría de límites se expresa en el segundo libro de Cauchy, "Resumen de las conferencias sobre el cálculo infinitesimal" (1823). En él se expone el cálculo diferencial e integral de funciones de variable real. Sobre las particularidades de la estructura de este libro, surgidas del objetivo propuesto, en el libro se dice: "Mi objetivo principal ha sido conjugar el rigor, el cual me impone en la exposición de mi curso de análisis (se tiene en cuenta el análisis algebraico), con la sencillez surgida de la consideración inmediata de las cantidades infinitesimales. Por este motivo consideré un deber renunciar al desarrollo de funciones en series infinitas en todos los casos cuando la serie obtenida no converge y me vi obligado a relegar al cálculo integral la fórmula de Taylor, ya que esta fórmula se puede considerar como general sólo cuando la serie contenida en ella se reduce a un número finito de términos y una integral definida complementaria (se trata de la forma integral del resto. — *n. del autor*).

Se que el famoso autor de la Mecánica Analítica (Lagrange. — *n. del autor*) tomó la fórmula mencionada en calidad de base para su teoría de las funciones derivadas. Pero, a pesar del respeto profesado a tan gran autoridad, la mayor parte de los geométricos (así se denominaban en aquella época a todos los matemáticos. — *n. del autor*) reconocen ahora la falsedad de los resultados a los cuales puede llegar utilizando las series divergentes; agreguemos que en muchos casos el teorema de Taylor parece dar el desarrollo de una función en una serie convergente, aunque la suma de esta serie se diferencia esencialmente de la función propuesta. Además, espero que el lector de mi obra se convenza de que los principios del cálculo diferencial y sus importantísimas aplicaciones pueden ser fácilmente expuestas sin la ayuda de las series" ¹⁾.

¹⁾ O.-L. Cauchy. Résumé des leçons données sur le calcul infinitesimal. Oeuvres, ser. 2, vol. IV. Paris, 1829, p. 263.

A continuación siguen las conferencias sobre el cálculo diferencial, muy parecidas ya a la exposición habitual a nosotros. La sensación de semejanza se refuerza cuando encontramos el criterio de convergencia de las sucesiones (criterio de Bolzano—Cauchy): los términos de una sucesión convergente con índices lo suficientemente grandes deben diferenciarse uno de otro tan poco como se quiera. Aquí no aparece aún el aparato ε, δ (para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que $|a_n - a_m| < \varepsilon$ para todo $n, m > N$) pero la esencia de la cuestión ya está expresada. Para el cálculo diferencial de Cauchy es característica también la aplicación sistemática del teorema del valor medio:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h), \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

cuyas menciones episódicas eran conocidas antes y el cual por primera vez aplicó Lagrange (1804) para la deducción de una serie con expresión aproximada del resto. No expondremos aquí más detalladamente esta parte del curso de conferencias de Cauchy.

En el campo del cálculo integral, el curso de conferencias de Cauchy se diferenciaba radicalmente del curso de Euler y otros predecesores. Su particularidad, ante todo se revelaba en la elección del concepto fundamental. Este era el concepto de integral definida.

Nueva fue también la aparición, al comienzo de las conferencias, de una demostración analítica de existencia de la integral definida de una función continua. Esta demostración posee todos los rasgos posteriores de las demostraciones de los teoremas de existencia. El curso de las ideas aquí era el siguiente: se da una función $f(x)$ continua en el intervalo $[x_0, X]$. Este intervalo se divide en n partes mediante los puntos x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Se forma la suma

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i),$$

y respecto a ella se demuestra que $S \rightarrow A$ cuando $n \rightarrow \infty$ y $\Delta x_i \rightarrow 0$. La magnitud de la integral A se considera como función de los valores extremos del intervalo de integración y de la función $f(x)$.

Una parte notable de las conferencias sobre cálculo integral ocupaban los desarrollos de funciones en serie de Taylor y Maclaurin. A la estimación precisa del resto y a la deducción de sus diferentes formas analíticas, Cauchy les dedicó mucho lugar también en otras de sus investigaciones. En las conferencias de Cauchy se cita el ejemplo, ampliamente conocido también ahora de la función

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad x \neq 0; \quad f(x) = 0, \quad x = 0,$$



B. Bolzano (1781—1848)

cuya serie correspondiente en el punto $x = 0$ converge pero no a la función dada. Así mismo, él delimitó la clara diferencia entre las cuestiones de la convergencia de las series de Taylor en general y la convergencia hacia la función dada.

Las conferencias de Cauchy señaladas (cuya tercera parte está dedicada a las aplicaciones geométricas del análisis matemático) tuvieron muy importantes consecuencias. La teoría de límites comenzó a conquistar la posición de base de todo el análisis. Esta idea gradualmente obtuvo difusión.

Perfeccionamiento de B. Bolzano de los fundamentos de la teoría de funciones. Una investigación más profunda de los fundamentos del análisis matemático exige, como ahora se sabe, la utilización de los métodos y resultados de la teoría de conjuntos y la teoría de funciones de variable real. Las bases de tales investigaciones fueron echadas también en la primera mitad del siglo XIX. Los méritos principales en esta rama (lo que fue conoci-

do posteriormente) pertenece a Bernard Bolzano (1781—1848) eminente matemático checo. Desde el año 1805 hasta 1820 enseñó disciplinas teológicas en la universidad de Praga. Por sus intervenciones en favor a la independencia nacional del pueblo checo y contra la dominación de la monarquía austríaca, fue separado de la enseñanza. Le fue prohibido ingresar en el servicio estatal, intervenir verbalmente o por escrito. Sin medios de subsistencia, Bolzano vivió el resto de su vida en el campo, con sus amigos, continuando el estudio preferido desde los años jóvenes, de las matemáticas y la filosofía.

Las investigaciones filosóficas y matemáticas de Bolzano estuvieron siempre estrechamente vinculadas. El véa en la elaboración del pensamiento matemático la premisa necesaria para razonamientos filosóficos, como regla, más complejos. En el trabajo “Hacia una exposición más fundamentada de las matemáticas” formuló así el objetivo de sus investigaciones matemáticas “En el curso de aproximadamente quince años, esta ciencia siempre fue una de mis ocupaciones favoritas; no obstante, preferentemente sólo en su parte especulativa, como rama de la filosofía y como recurso de ejercitación del pensamiento correcto. Inmediatamente después del encuentro con ella, lo que ocurrió a través del maravilloso texto de Kästner, advertí una o dos insuficiencias en cuya eliminación comencé a trabajar en mis horas libres, no por vanidad, sino por el interés interior, el cual encontré en tales especulaciones. Después de muy prolongada meditación, el número de insuficiencias las cuales me ha parecido advertir, aumentó aún más”¹⁾.

Una característica más o menos compleja del trabajo creador de Bolzano sale de los límites de los objetivos propuestos ante el presente capítulo. Prestemos atención sólo al análisis lógico del contenido de los conceptos y métodos fundamentales de demostración, los cuales hicieron avanzar la formalización de los razonamientos, y permitieron a Bolzano realizar en el dominio del análisis una serie de importantes descubrimientos, adelantándose a la ciencia contemporánea a él. Las condiciones excepcionalmente desfavorables en las cuales vivió y trabajó Bolzano fueron la causa de que casi todos sus trabajos vieran la luz sólo después de su muerte. Sus resultados fundamentales fueron conocidos sólo en los años 70 y obtuvieron reconocimiento desde los años 80. El manuscrito de su obra más importante “Estudio sobre las funciones” fue encontrado sólo en el año 1920 y publicado con notas de K. Rychlík sólo en 1930, esto es exactamente después de cien años desde la época de su escritura. Esta circunstancia puede sólo lamentarse. En el dominio de la fundamentación del análisis Bolzano trabajó

¹⁾ Véase Э. Кольман. Бернард Больцано. М., Изд-во АН СССР, 1955, стр. 35. (E. Kolman. Bernard Bolzano.)

mucho antes que Cauchy y más antes aún que Weierstrass. De haber sido publicados sus trabajos, el curso de los acontecimientos en este campo hubiera sido evidentemente acelerado.

En efecto, ya en el año 1817, Bolzano formuló y demostró el teorema de que si el conjunto de los números reales está acotado superiormente (respectivamente, inferiormente), entonces él tiene extremo superior (respectivamente inferior). Así mismo se adelantó a Weierstrass que formuló este teorema después de 1860. En aquel entonces, unos cuantos años antes de Cauchy, Bolzano dedujo el criterio de convergencia de sucesiones y dio una definición rigurosa de continuidad de funciones. Estudió profundamente las propiedades de las funciones continuas y demostró en relación con éstas, una serie de teoremas notables y en particular el siguiente: una función continua toma todos los valores intermedios que están entre sus dos valores diferentes. A él pertenece así mismo la introducción de continuidad lateral.

Bolzano refutó la opinión general formulada en el año 1806 por Ampère que las funciones continuas pueden, a lo sumo tener singularidades aisladas. En sentido geométrico esto significa que cada curva continua debe tener tangentes en todas partes con excepción posiblemente de puntos aislados. Bolzano amplió la clase de curvas continuas, aplicando el método de acumulación de las singularidades y obtuvo por esta vía muchas funciones originales, entre ellas, la función que no tiene derivada (respectivamente, tangente) en ningún punto y conocida actualmente como función de Bolzano.

En su aplicación a la construcción de la función de Bolzano $B(x)$, el método de acumulación de las singularidades consiste en lo siguiente. Se construye $B_0(x)$, un segmento de recta entre dos puntos, por ejemplo $A(0, 0)$ y $B(a, h)$ (fig. 53). A continuación se construye $B_1(x)$, la quebrada $ACDEB$, donde

$$C\left(\frac{a}{4}, -\frac{h}{2}\right), D\left(\frac{a}{2}, 0\right), E\left(\frac{3a}{4}, \frac{h}{2}\right).$$

$B_2(x)$ se obtiene por la repetición de la operación anterior en cada uno de los cuatro segmentos indicados. La repetición n veces de esta operación de la quebrada $B_n(x)$. La función de Bolzano $B(x)$ en los puntos de la forma

$$x = \frac{ka}{4^n}$$

($0 \leq k \leq 4^n$, k entero, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$) se define como coincidente con $B_n(x)$. En el conjunto $\{x\}$ de los x diferentes de $t = \frac{ka}{4^n}$,

$$B(x) = \lim_{t \rightarrow x} B(t).$$

La función de Bolzano es continua, pero no tiene derivada finita en ningún punto. En efecto, la oscilación de $B_n(x)$ en los segmentos

$$\left(\frac{ka}{4^n}, \frac{(k+1)e}{4^n}\right)$$

será

$$\omega_n\left(\frac{ka}{4^n}, \frac{(k+1)a}{4^n}\right) = \frac{h}{2^n}.$$

Sin embargo, la oscilación de $B_n(x)$ para cualquier segmento de longitud $\frac{a}{4^n}$

$$\omega\left(x, x + \frac{a}{4^n}\right) > \frac{h}{2^n} \quad (*)$$

ya que en el interior de este segmento caerá por lo menos un intervalo, de los que se obtienen en la división de éste $(0, a)$ en 4^{n+1} partes iguales. Por

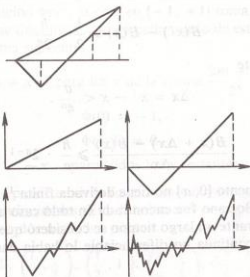


Fig. 53

ello siempre se puede elegir $\Delta x > 0$ para que simultáneamente

$$\Delta x < \frac{a}{4^n} \quad \text{y} \quad |B(x + \Delta x) - B(x)| \geq \frac{h}{2^{n+1}}.$$

En efecto, supongamos que en el segmento $\left[x, x + \frac{a}{4^n}\right]$ los valores mayores y menores de $B(x)$ sean M y m . En correspondencia con (*)

$$M - m > \frac{h}{2^n}.$$

Por esto tendrá lugar por lo menos una de las desigualdades

$$M - B(x) > \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2^n},$$

$$B(x) - m > \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2^n}.$$

Supongamos, por ejemplo

$$M - B(x) > \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2^n}.$$

Entonces en el intervalo $\left[x, x + \frac{a}{4^n}\right]$ se encuentra un x' tal que

$$B(x') = M,$$

y por esto

$$B(x') - B(x) > \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2^n}$$

y simultáneamente

$$\Delta x = x' - x < \frac{a}{4^n}.$$

En este caso

$$\frac{B(x + \Delta x) - B(x)}{\Delta x} \geq \frac{h}{a} \cdot 2^{n-1}$$

y $B(x)$ en el segmento $[0, a]$ no tiene derivada finita ¹⁾.

La curva de Bolzano fue encontrada en todo caso antes del año 1830. Sin embargo, durante un largo tiempo se consideró que el primer ejemplo de una función continua no diferenciable lo había dado en el año 1875 Weierstrass:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

$(0 < a < 1, b$ es entero impar; $ab > 1 + \frac{3}{2})$ y Darboux:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \operatorname{sen}[(k+1)\pi x].$$

¹⁾ Véase V. Ф. Бржечка. О функции Больцано. «Усп. матем. наук», 1949, т. 4, № 2 (30), стр. 15—21. (V. F. Břečka. Sobre la función de Bolzano.)

En el "Estudio sobre las funciones" de Bolzano, fueron construidas e investigadas también otras funciones complicadas. Bolzano estudió las funciones continuas con un número infinito de extremos. Tales como por ejemplo: la quebrada con puntos angulosos

$$(0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{4}, 0\right), \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{15}{16}, 0\right), \dots,$$

$$\left(\frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n-1}}, \frac{1}{\lambda}\right), \left(\frac{2^{2n}-1}{2^{2n}}, 0\right), \dots$$

continua en $[0, 1]$ y la cual tiene en $x = 1$ una discontinuidad, la función

$$f(x) = \operatorname{sen} \log(1-x)$$

en $[0, 1]$ y otras.

Bolzano sometió a investigación también las funciones discontinuas. Construyó una función $\Phi(x)$, la cual en $[-1, +1]$ toma todos los valores de -1 a $+1$ y tiene discontinuidad en cada punto de este segmento, definiéndola de la forma siguiente:

$$\Phi(x) = x \quad \text{para los } x \text{ de la forma } \frac{2m+1}{2^n},$$

$$\Phi(0) = -1,$$

$$\Phi(-1) = 0,$$

$$\Phi(x) = -x \quad \text{para todos los } x \text{ restantes.}$$

De otro ejemplo puede servir la función monótona que tiene un conjunto infinito de discontinuidades. Esta función está dada por una sucesión de segmentos que unen dos a dos los puntos:

$$(0, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{6}{4}\right),$$

$$\left(\frac{7}{8}, \frac{13}{8}\right), \left(\frac{7}{8}, \frac{14}{8}\right), \left(\frac{15}{16}, \frac{19}{16}\right), \dots$$

En las obras de Bolzano y particularmente en su "Estudio sobre las funciones" está contenido un gran número de resultados, los cuales posteriormente formaron parte de la teoría de funciones de variable real. Además en la obra "Paradojas del infinito", escrita por Bolzano en los últimos años de su vida y que vio la luz en el año 1851, encontramos razonamientos esenciales de la posterior teoría de conjuntos. Así, se da la definición, usualmente adjudicada a Dedekind, de conjunto infinito como equipotente con su parte correcta. Se enuncia el principio de que cada conjunto infinito de

puntos en un segmento tiene por lo menos un punto límite. Más tarde se anuló la publicación de los materiales de la herencia científica de Bolzano, lo que da la posibilidad de caracterizar más completamente sus logros científicos.

Construcción de la teoría del número real y la teoría de conjuntos. Hacia mediados del siglo XIX fue elaborada la teoría de límites, fueron construidos los elementos de la teoría de funciones actual y la teoría de conjuntos. No obstante la teoría de límites no obtuvo reconocimiento inmediatamente. Los más grandes matemáticos de Europa no utilizaban este método en sus trabajos (por ejemplo, Poisson), prefiriendo el cálculo infinitesimal de Leibniz. La mayoría de los matemáticos ingleses no aceptaron durante mucho tiempo las ideas de Cauchy, así como el simbolismo generalmente aceptado ahora del análisis infinitesimal, introducido por Leibniz, viendo en ellas casi una vía de ultraje a la memoria de Newton. No hubo tampoco pocas críticas a la teoría de límites.

En una consideración más cercana a esta circunstancia, al parecer extraña, resulta que la mayoría de los críticos de la teoría de límites pertenecían a los matemáticos cuyos trabajos estaban dedicados, en lo fundamental o en su mayoría, a las aplicaciones. El contenido de la crítica con el transcurso del tiempo se definió en dos direcciones. En primer lugar se prestó atención a que con el concepto de límite no es posible vincular ningún algoritmo para su búsqueda. Muchos conceptos no pudieron ser aceptados a causa de su descriptibilidad, ausencia de estimaciones cualitativas. Por ejemplo: “aproximarse indefinidamente”, “tan pequeño como se quiera”, “última relación de incrementos infinitesimales”, etc. El concepto de tendencia, básico para la teoría de límites, significa una apelación a la intuición del movimiento. En virtud de estas insuficiencias, la aplicación de la teoría de límites, especialmente en problemas de carácter práctico parecía a muchos contemporáneos de Cauchy una dificultad inusual e injustificada.

En segundo lugar, en la teoría de límites fueron notadas lagunas lógicas, las cuales no lograron eliminar sus defensores. Como ejemplo de tal laguna puede servir la definición de número real. Este último se definía como límite de una sucesión de números racionales. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ se consideraba como límite de la sucesión de sus extracciones incompletas: 1; 1,4; 1,41; 1,414; Pero para definir así este número, era necesario presuponer su existencia, esto es, completar un círculo vicioso lógico en los razonamientos. No quedaba claro tampoco el concepto de conjunto infinito de elementos al cual era necesario acudir. Finalmente, la falta de elaboración de la teoría de funciones, lo cual había sido superado por el entonces desconocido Bolzano, condujo a los matemáticos a errores, análogos a las concepciones antes mencionadas de que, la continuidad de una función es sufi-

ciente para su representación geométrica y la existencia de la derivada casi en todas partes o que toda serie convergente de funciones continuas representa una función continua.

De este modo, los problemas de la fundamentación del análisis se expresaban entonces como una aguda necesidad de: a) la construcción rigurosa de la teoría del número real, b) aclaración e inclusión en las matemáticas del concepto de conjunto infinito, c) separación del volumen total de la clase de funciones continuas e inclusión en la clasificación general de una clase más amplia de funciones discontinuas. De la superación de estas dificultades dependían los éxitos futuros del análisis matemático.

Y así en el año 1872, en un solo año, surgieron una serie de trabajos curiosos. En la revista “*Mathematische Annalen*” fue publicado el primero de los trabajos de G. Cantor sobre los fundamentos de la aritmética. Salíó publicada la obra de R. Dedekind “Continuidad y números irracionales”. Aparecieron trabajos sobre este tema de E. Heine y Ch. Méray¹⁾. Todas estas obras perseguían el único objetivo: dar una teoría rigurosa del número real. Esta misma cuestión, en el curso de una serie de años fue elaborada por Weierstrass en sus famosas conferencias sobre las funciones analíticas.

En las numerosas investigaciones indicadas surgió una diversidad de teorías del número real, las cuales satisfacían un alto grado de rigor. Dedekind definió el número real como una cortadura en el conjunto de los números racionales, dando al conjunto de los números reales (continuo lineal) una interpretación geométrica en forma de línea recta. La propiedad de continuidad de la recta, según Dedekind, consiste en que en las cortaduras se encontrará o el punto más derecho de una clase o el más izquierdo de la otra. El conjunto de todos los números racionales no tiene la propiedad de continuidad. Entonces se introduce el número irracional (punto), como tal cortadura en el conjunto de números racionales en cuyas clases no hay ni número (punto) más derecho ni más izquierdo. Así, Dedekind introdujo el conjunto de todos los números reales que ya poseía la propiedad de continuidad.

La definición de Cantor de número real identifica a este último con una sucesión convergente de números racionales²⁾. Esta definición, así como la anterior, se apoya en la abstracción del infinito actual y se basa en el análisis del concepto de continuidad. El enfoque de la definición de continuidad era diferente. La definición de Dedekind se basa en la ordenación del con-

¹⁾ Véase H.C.R. Méray. Ch. Nouveau précis d'analyse infinitesimal. Paris, éd. Savy, 1872; E. Heine. Die Elemente der Functionlehre, Borchardt J., LXXIV, 172—188 («Journal für die reine und angewandte Math.», 1872).

²⁾ Véase И.В. Арнольд. Теоретическая арифметика. М., Учгиздиз, 1938, стр. 286. (I.V. Arnold. Aritmética teórica.)

junto de los números racionales. La definición de Cantor incluye el tratamiento de las diferencias, las distancias entre los elementos, lo que corresponde a la naturaleza del concepto de convergencia. Sin embargo, ambos enfoques a la definición de continuidad son equivalentes, ya que los números reales se construyen sobre la base del sistema de números racionales.

Las ideas del profesor berlinés K. Weierstrass sobre la naturaleza del número real formaban parte de su plan general de construcción del análisis matemático, entendido en sentido amplio, sobre bases lo más rigurosas posible. Weierstrass introdujo en el análisis matemático muchos resultados importantes: la utilización sistemática de los conceptos de los extremos superior e inferior de conjuntos numéricos, el estudio sobre los puntos límites, fundamentación de la propiedad de las funciones continuas en un segmento de alcanzar sus extremos superior e inferior, construcción de una función que no tiene derivada en ningún punto, demostración de la posibilidad del desarrollo de una función continua en un segmento de la función en serie de polinomios uniformemente convergente y otros. En este riguroso y armonioso sistema del análisis matemático aproximadamente hacia el año 1880 fue elaborada la forma actual de las definiciones y el aparato de demostraciones, basado en los razonamientos condicional-deductivos ("sea dado $\varepsilon > 0$, entonces se puede elegir $\delta > 0$, tal que..." y el simbolismo correspondiente. La teoría del número real sirve a Weierstrass (como también a otros científicos) de base para todo el edificio del análisis matemático.

Weierstrass parte, para esto, de un conjunto de números racionales positivos $\{a_n\}$, el cual denomina agregado. El agregado goza de la propiedad de que cualesquiera que sean y cuantos quiera que sean los elementos del agregado que se sumen (siempre se trata de un número finito, aunque tan grande como se quiera, de elementos) su suma no supera un límite dado. Un ejemplo de agregado puede ser cualquier fracción decimal. Supongamos dados dos agregados $\{a_n\}$ y $\{a'_n\}$ identificados con los números b y b' .

Tomemos las partes alcuotas de la unidad $\frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, 4, \dots$ ó $n = 1, 10, 100, \dots$ ¡es igual!). Puede suceder uno de los tres casos: a) examinando los elementos de los agregados, encontramos que $\frac{1}{n}$ se repite con la misma frecuencia; b) y c) para cierto n la magnitud $\frac{1}{n}$ se repite más frecuentemente en el primer agregado (respectivamente en el segundo). Estos tres casos significan respectivamente que $b = b'$, $b > b'$, $b < b'$. La unión de agregados da la suma de los números correspondientes. La constitución del agregado $\{a_n \cdot a'_n\}$ cuyos elementos son todos los posibles productos de elementos de la forma $\{a_n \cdot a'_n\}$ sirve para la definición de producto.

Todas las formas de teoría del número real se apoyaban en la consideración de conjuntos de números racionales. Estas mismas dificultades, relacionadas con la fundamentación del análisis se trasladaban al dominio del análisis lógico de la serie de números naturales y, en general a los conjuntos con un número infinito de elementos. En el propio análisis, hacia fines del siglo XIX se estableció, en lo fundamental, el prototipo actual de rigor lógico en las definiciones y demostraciones.

La creación de la teoría de los conjuntos infinitos y los números transfinitos pertenece a G. Cantor, profesor de la universidad en Halle. La serie de sus trabajos sobre este tema siguió tras los trabajos sobre la teoría del número real. El demostró (1874) la no equivalencia de los conjuntos de números racionales y reales. Pasados unos años (1878), en sus trabajos, fue introducido el concepto general de potencia de un conjunto, fueron elaboradas las bases de transformación y comparación de conjuntos y fue demostrada la equipotencialidad del conjunto de puntos del continuo lineal y los puntos de una variedad n -dimensional. La elaboración sistemática de la teoría de conjuntos fue culminada por Cantor en los cinco años sucesivos (1879—1884). Entonces, introdujo el concepto de punto límite, de conjunto derivado, el ejemplo de conjunto perfecto que recibió su nombre (1883), enunció la hipótesis del continuo, etc.

El desarrollo de la teoría de funciones de Weierstrass, la teoría de conjuntos de Cantor trascurrió en los últimos años del siglo XIX en un ambiente de aguda crítica y de lucha. Especialmente aguda fue la intervención del profesor berlinés L. Kronecker, discípulo de Kummer. En las cuestiones de los fundamentos de las matemáticas, Kronecker, cuyos trabajos fundamentales se referían al álgebra y la teoría de grupos, era partidario de la aritmetización de las matemáticas. Esto significaba la tendencia a reducir todas las dificultades relativas a la fundamentación de cualquier rama de las matemáticas a una serie natural. Esta posición de Kronecker encontró una expresión brillante en la afirmación la cual él repetía más de una vez, que los números enteros los creó el Dios todopoderoso y lo restante es obra de las manos de los hombres.

Naturalmente, la apelación a un ser superior no significa otra cosa que una manifestación del idealismo, la limitación metafísica y otras imperfecciones en las ideas filosóficas de Kronecker. A propósito, advertimos que esta estrechez y limitación de las ideas (y Kronecker con gran pasión las defendía) hizo un gran daño a la creación científica del propio Kronecker. Poincaré llamaba la atención correctamente sobre esta circunstancia, agregando en forma de broma que Kronecker alcanzó notables resultados en las matemáticas sólo porque frecuentemente se olvidaba de sus convicciones filosóficas.

La teoría general, construida por Cantor, de las potencias de conjun-

tos, las transformaciones y operaciones sobre conjuntos, las propiedades de los conjuntos ordenados constituyó posteriormente el contenido fundamental de la teoría abstracta de conjuntos. El concepto de punto límite y el concepto de conjunto cerrado relacionado con aquel, después de la introducción en el año 1902 por H. Lebesgue del concepto de medida de un conjunto y las investigaciones de E. Borel condujeron a la creación de la teoría métrica de conjuntos. Esta última sirvió de base a la teoría general de integración y las series trigonométricas. Más tarde condujo a la construcción, en los trabajos de H. Lebesgue, K. Carathéodory, F. Hausdorff y otros, de la teoría general de la medida.

M. Fréchet (1906) y F. Hausdorff (1914), investigando el concepto introducido por Cantor de conexidad y otros cercanos a éste desarrollaron la teoría topológica de conjuntos como la teoría de conjuntos situados en espacios métricos y topológicos generales. Finalmente, la teoría descriptiva de los conjuntos de puntos y la, relacionada con ella, clasificación general de las funciones discontinuas (clasificación de Baire) tienen su origen aproximadamente en el año 1900 en los trabajos de R. Baire y H. Lebesgue.

La teoría de conjuntos ejerció una influencia enorme en el desarrollo de las matemáticas. Sirvió de base a la teoría actual de funciones de variable real, la topología, el álgebra y la teoría de grupos, el análisis funcional y otros. Los métodos de la teoría de conjuntos se utilizan ampliamente en la mayoría de las ciencias matemáticas modernas. Esto, no obstante, no significa la reducción de todas las matemáticas a la teoría de conjuntos. En esta misma teoría, aún en vida de Cantor se notaron paradojas, como, por ejemplo, la paradoja respecto a la existencia del conjunto de todos los conjuntos y otros.

Las cuestiones de fundamentación de la teoría de conjuntos, la investigación de los límites de su aplicación se convirtieron en el siglo XX en una ciencia especial, la lógica matemática, la cual forma una parte importante de los fundamentos de las matemáticas modernas. Esta parte de las matemáticas (los fundamentos), la cual incluye la totalidad de las ideas filosóficas, históricas y lógicas relativas al contenido, forma y vínculos (entre ellos los vínculos internos) de las matemáticas se desarrolla en el siglo XX muy tempestuosamente. Sus conclusiones obtienen aplicación práctica, reflejando el crecimiento de la práctica científica y técnica de la humanidad.

7.4. Desarrollo del aparato y aplicaciones del análisis matemático

Las ecuaciones diferenciales son el medio operativo fundamental del análisis. El aparato del análisis matemático en el siglo XIX era un conjunto de procedimientos y métodos de solución de numerosos problemas que crecía rápidamente. Todos estos métodos aún podían dividirse en tres gran-

des grupos, constituidos en el cálculo diferencial, el cálculo integral y la teoría de ecuaciones diferenciales que rápidamente se independizaba de este último. Los contornos de la teoría en formación, de funciones de variable compleja, la teoría de las funciones especiales, etc. se delineaban aún débilmente.

De las variadas aplicaciones del análisis matemático destacamos aquellas que están relacionadas con la resolución de ecuaciones diferenciales. Así mismo, dejemos aparte las aplicaciones comparativamente elementales que se reducen a la diferenciación o integración de las funciones, exigidas por las condiciones del problema. Estas operaciones ya habían entrado en el campo, relativamente alcanzable y amplio, de la práctica. Sin embargo, la complejidad creciente de las aplicaciones necesitaba recursos más generales y potentes. Tal recurso lo constituía el conjunto de métodos de resolución de ecuaciones diferenciales, tanto ordinarias como en derivadas parciales. La resolución de ecuaciones diferenciales era el medio operativo fundamental del análisis y los problemas relacionados con esta resolución, eran los problemas científico-prácticos fundamentales.

En la rama del análisis matemático destacada por nosotros se revelaba fuertemente la influencia determinante de los problemas de las ciencias exactas, en primer lugar la mecánica y la física matemática y la estrecha interrelación de las investigaciones teóricas y prácticas. Alrededor de la resolución de los problemas de la física matemática se agrupaban colectivos de científicos comparativamente grandes, formando escuelas científicas. La mayor de tales agrupaciones se formó en París en la Escuela Politécnica. Los problemas de la física matemática fueron aquí estudiados con éxito por Poisson, Fourier, Cauchy y otros.

En París obtuvieron preparación científica los matemáticos rusos V. Ya. Bunyakovski, M. V. Ostrogradski. Al regresar a Rusia, crearon la escuela matemática de Petersburg, una de cuyas direcciones de trabajo fundamentales era la elaboración de métodos de resolución de problemas de la física matemática.

Algunos centros notables de investigación científica en la rama de los métodos aplicados del análisis se formaron en los estados de la Unión germana. En Berlín, en tal centro se convirtió la Escuela Politécnica Berlina, el papel dirigente en la cual pertenecía a L. Dirichlet. Desde los años 20 un lugar notable comenzó a ocupar la universidad de Königsberg, en relación con los trabajos de F. Neumann y sus discípulos en física matemática. Finalmente, en Gotinga, en la creación del aparato matemático de los fenómenos electromagnéticos, trabajó mucho K. F. Gauss en colaboración con Weber.

Un gran grupo de investigadores de los métodos matemáticos de la física y la mecánica existía en Inglaterra: Green, Stokes, Thomson, Hamil-

ton, Maxwell y otros. Con los esfuerzos de tan gran cantidad de científicos fue lograda una rápida y considerable ampliación del campo de aplicaciones del análisis matemático. Consideremos algunos aspectos de este proceso.

Creación del aparato analítico para la investigación de los fenómenos electromagnéticos. Uno de los primeros problemas resueltos exitosamente fue el problema de la construcción de la teoría de los fenómenos electromagnéticos. Hacia el siglo XIX el estudio sobre la electricidad y el magnetismo se separó en la física como una rama independiente. En el año 1820 se llegó a conocer sobre el descubrimiento hecho por Oersted de la acción de la corriente sobre una aguja magnética, el cual estableció lo común de los fenómenos, al parecer, heterogéneos. Hacia esta misma época Biot, Savart, Laplace, Arago, Ampère, Coulomb y otros introdujeron los conceptos fundamentales necesarios: carga, cantidad de electricidad, densidad de electricidad, leyes de interacción de cargas inmóviles, etc. Los problemas del electromagnetismo trajeron consigo, en el plano matemático un conjunto de trabajos de investigación sobre la atracción de puntos según la ley de Newton y los campos electrostáticos.

Los métodos de resolución de problemas de la mecánica celeste, en particular los problemas sobre la atracción de los cuerpos celestes según la ley de Newton obtuvieron un nuevo campo de aplicación. El paso en las investigaciones de los centros puntuales de atracción a la distribución continua de la materia condujo del tratamiento de los potenciales de un campo puntual discreto a campos de fuerza, formados por cuerpos o por materia continuamente distribuida. Fue introducido el concepto de potencial de un campo y definida su expresión para un campo simple formado por el punto cargado $A(a, b, c)$ de masa m :

$$V_p = V(x, y, z) = \frac{\gamma m}{r}$$

(donde $r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$, γ es la constante de atracción $p(x, y, z)$ es el punto atraído). Enseguida fueron encontradas las expresiones del potencial para un sistema de puntos de atracción y después para el campo con distribución continua de masas de atracción en un volumen ω :

$$V_p(x, y, z) = \gamma \iiint_{(\omega)} \frac{\rho(a, b, c) d\omega}{r}$$

($\rho(a, b, c)$ es la densidad de la distribución).

Ya en el año 1787 Laplace mostró que en el espacio fuera del cuerpo la función potencial satisface la ecuación

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

A propósito, esta ecuación ya se encontraba en los trabajos de Euler y el concepto de función de fuerzas, cuya diferenciación según una dirección daría las fuerzas de atracción newtonianas, lo introdujo en 1773 Lagrange, conformando así mismo la idea de función de fuerza la cual fue enunciada ya por D. Bernoulli, Euler y Clairaut.

La teoría matemática del potencial eléctrico se formó bastante rápidamente. Una serie de problemas sobre distribución de la electricidad en la superficie de los conductores los resolvió Poisson, el cual en general elaboró a fondo muchas partes de la física matemática contemporánea a él: capilaridad, flexión de láminas, magnetostática electrostática, conducción del calor. Alrededor del año 1813 Poisson extendió la ecuación de Laplace al espacio situado en el interior del cuerpo que atrae e introdujo la ecuación actualmente de amplio conocimiento

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho.$$

Poisson resolvió muchos problemas de magnetostática. Para esto se apoyó de hecho en el concepto de potencial, sin embargo, no fue él quien introdujo este importante concepto. El planteamiento general de la teoría del potencial surgió en los trabajos de Green y Gauss.

Green expuso su teoría en la obra "Investigación sobre la teoría matemática de la electricidad y el magnetismo" (1828). En ella investigó el problema central de la electrostática de aquella época: el problema sobre la distribución de la electricidad sobre la superficie de un conductor, la cual se induce por la acción de fuerzas eléctricas exteriores. En la base de los razonamientos de Green yacía la idea que las fuerzas eléctricas y magnéticas pueden ser definidas a través de una función de coordenadas tal que las componentes de estas fuerzas según los ejes son, en esencia, sus derivadas parciales correspondientes, tomadas con signo contrario. La función potencial (como la llamó aquí por primera vez Green) se determina por la distribución de cargas. Green dedujo más adelante el teorema integral conocido actualmente como fórmula de Green, mostró que el valor del potencial dentro o fuera de cualquier superficie se expresa a través del valor de la función potencial y su derivada normal sobre esta superficie.

La expresión de la densidad superficial ρ es según Green

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial v}{\partial \omega} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \omega'} \right],$$

donde en los corchetes se colocan las derivadas normales del potencial sobre lados opuestos de la superficie. Si se trata de un conductor, dentro del cual no existe el campo y consecuentemente también la derivada normal, entonces

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \nu}{\partial \omega}$$

(actualmente se escribe: $E = 4\pi\rho$, donde E es la intensidad del campo). Finalmente, Green introdujo la llamada función de Green que se interpreta como el potencial en el interior de una superficie cerrada conductora conectada a tierra, si allí se coloca una carga unitaria.

En una forma más general y al parecer independientemente de Green, Gauss construyó una teoría general del potencial. Esto lo realizó en el trabajo "Teoremas generales relativos a las fuerzas de atracción y repulsión... actuando inversamente proporcional al cuadrado de la distancia" (1840). A la función

$$v = \sum \frac{m}{r},$$

donde m puede representar tanto unas masas comunes como también cargas eléctricas o magnéticas, Gauss las denominó potencial. Investigó sistemáticamente las propiedades de la función potencial y su aplicación a los fenómenos físicos. No deja de ser interesante señalar la aparición en este trabajo del teorema

$$\begin{aligned} \iiint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz &= \\ &= \iint (X dy dz + Y dz dx + Z dx dy). \end{aligned}$$

Este teorema, M.V. Ostrogradski lo demostró en el año 1828 y lo trató como una fórmula de balance hidrodinámico, la cual establece la equivalencia del flujo del líquido que pasa por unidad de tiempo: a) partiendo del control de las fuentes dentro del volumen; b) partiendo de las velocidades de fluencia a través de la envoltura.

Once años después, Gauss utilizó esta fórmula para relacionar la magnitud del flujo de la intensidad de las fuerzas del campo potencial dado con masa o carga común situada dentro de la superficie. En nuestra época esta fórmula la denominan fórmula de Gauss—Ostrogradski (lo que evidentemente es injusto).

En la historia de la física ¹⁾ se advierte que al concepto de potencial, los

¹⁾ Véase Б.И. Спасский. История физики, ч. 1. Изд-во МГУ, 1956, стр. 352—353. (B.I. Spasski. Historia de la Física.)

físicos, durante mucho tiempo o no le atribuyeron un significado de principio, tratando al potencial o a la función potencial sólo como un concepto matemático cómodo. Su significado físico fue descubierto posteriormente, después del establecimiento de los conceptos de trabajo, energía y la ley de conservación de la energía.

Otra era la situación de este importante concepto en las matemáticas. Su introducción posibilitó la ampliación del campo de aplicaciones del análisis matemático. Junto a la óptica y las oscilaciones, surgía la teoría matemática de los fenómenos electromagnéticos. El planteamiento del problema sobre el potencial incitó a la ampliación del concepto de integral, a la extensión de la integración sobre objetos complejos. En el análisis fue comenzada la elaboración de las funciones armónicas como soluciones de la ecuación diferencial de Laplace: $\Delta v = 0$.

Resultó que las funciones armónicas pueden servir para la descripción de muchos problemas físicos y mecánicos, cuya particularidad distintiva es la investigación de estados heterogéneos, los cuales dependen de la posición de los elementos y no del tiempo. Así, por ejemplo, las funciones armónicas resultaron, además de potenciales en campos de atracción y en campos eléctricos, el potencial de velocidades del movimiento estacionario, sin remolinos, de un líquido incompresible, de la temperatura de los cuerpos con una distribución estacionaria del calor, la magnitud de flexión de una membrana, tirante sobre un contorno no plano arbitrario y otros. El aparato matemático de investigación de las funciones armónicas, surgido en la resolución de un problema o una clase de problemas, recibió gradualmente nuevas aplicaciones.

Las funciones armónicas obtuvieron aplicación en una amplia clase de problemas de contorno. Así es el problema de Dirichlet sobre la búsqueda de los valores de una función armónica en un dominio, dados sus valores sobre el límite (por ejemplo, determinación de la temperatura dentro de un cuerpo por la temperatura sobre su superficie, determinación de la forma de la membrana por la forma de su contorno). Con este género de problemas se relaciona además el problema de Neumann en el cual la función armónica debe ser buscada por la magnitud de la derivada normal sobre el límite del dominio (búsqueda de la temperatura dentro de un cuerpo dado el gradiente de temperatura en su superficie, determinación del potencial del movimiento de un líquido incompresible que rodea a un cuerpo sólido de la condición de que las componentes normales de las velocidades de las partículas colindantes con la superficie del cuerpo, coinciden con las componentes normales dadas de las velocidades de los puntos de la superficie del cuerpo).

Para la resolución de los problemas de contorno de la teoría de las funciones armónicas fueron elaborados métodos, que tienen gran significado



J. B. Fourier (1768—1830)

tanto práctico como teórico. Por ejemplo, para la resolución del problema de Dirichlet, H.A. Schwarz y C.G. Neumann idearon alrededor del año 1870 el método alternante, Poincaré, el método de los barridos (alrededor del año 1880), Fredholm, el método de las soluciones fundamentales, relacionado con las ecuaciones integrales, Perron, el método de las funciones superiores e inferiores. Aún debe mencionarse el método de redes como un método fundamental en la resolución aproximada de problemas de contorno. Estos métodos daban la posibilidad de liberarse de una u otra limitación, la cual era necesario imponer a la frontera del dominio. Pero en cualquier planteamiento general de un problema de contorno surgieron los problemas de las condiciones de existencia de las soluciones y su estabilidad.

Gran significación en la historia de la teoría del potencial tienen las investigaciones del académico ruso A.M. Liapunov realizadas a fines del

siglo XIX — comienzos del XX ¹⁾. En ellas se estudian: la dependencia de las propiedades de los potenciales de las cargas y dipolos uniformemente distribuidos por la superficie, el potencial de doble capa en el caso de los dipolos, comportamiento de las derivadas de las soluciones del problema de Dirichlet en la aproximación a la superficie sobre la cual está dada la condición de contorno. La solución del problema de Dirichlet, Liapunov lo expresó en forma de integral sobre la superficie del producto de la función que entra en la condición de contorno por la derivada normal de la función de Green.

Así como sus antecesores, Liapunov se vio en la necesidad de utilizar una serie de exigencias restrictivas. Entre estas exigencias, la fundamental, es el cumplimiento del principio de Neumann. Esta limitación separa además la clase de superficies, respecto a las cuales se tratan los problemas indicados antes; para estas superficies se ha conservado la denominación de superficies de Liapunov.

Los problemas de la física matemática, surgidos de los primeros trabajos sobre teoría del potencial, adquirieron, como vimos, hacia fines del siglo XIX gran generalidad. La solución de problemas teóricos tan generales y después el desarrollo tempestuoso de los métodos de resolución numérica de problemas de contorno (los que resultaron posibles en relación con el surgimiento de los dispositivos electrónicos de cálculo) se relacionan enteramente con el siglo siguiente, el siglo XX. Del mismo modo, con esta época más reciente, se relaciona la elaboración efectiva del importante y difícil problema inverso de la teoría del potencial: según la distribución de los valores del potencial en un campo de fuerzas determinar la forma y densidad de las masas que se atraen, el problema, cuya actualidad (por ejemplo, para la electrotecnia y geofísica) es evidente.

Teoría matemática de la conductividad del calor. Junto a las aplicaciones del análisis matemático a los fenómenos electromagnéticos tuvo desarrollo otro campo de las aplicaciones de esta ciencia. Se trata de la creación de la teoría matemática de la conductividad del calor más tarde desarrollada en la termodinámica, la ciencia general sobre las leyes del movimiento térmico. La causa motriz de este proceso fue la invención de las máquinas de vapor, las que conformaron más tarde la base energética de la producción industrial. Investigar teóricamente el trabajo de las máquinas de vapor, encontrar los métodos de elevación de rendimiento tal era uno de los problemas principales de la ciencia.

Las exigencias planteadas a las matemáticas en relación con esto, encontraron su expresión en las condiciones del concurso convocado en el

¹⁾ Véase A.M. Ляпунов. Работы по теории потенциала. М., ГИИТ, 1949. (A.M. Liapunov. Trabajos sobre teoría del potencial.)

año 1811 por la Academia de Ciencias de París: dar una teoría matemática de las leyes de distribución del calor y comparar los resultados de esta teoría con los datos de los experimentos. El vencedor de este concurso resultó el académico parisiense (desde 1817) J.B. Fourier (1768—1830). A semejanza de muchos científicos contemporáneos con él, Fourier había salido de la familia modesta de un sastre, terminó la escuela militar y enseñó en ella. Enseguida después de la organización de la Escuela Politécnica se hizo uno de sus profesores (1796—1798). No obstante en el año 1798 fue incluido entre los participantes de la expedición de Napoleón a Egipto y después se ocupó de actividades administrativas y de organización en calidad de prefecto del departamento de Isere (la ciudad principal es Grenoble). Sólo en el año 1817, Fourier pudo trasladarse a París y dedicarse enteramente a la actividad científica.

Los méritos científicos principales de Fourier están relacionados con la resolución del problema de la distribución del calor. Ya en el año 1807, presentó en la Academia una memoria dedicada a la teoría de la difusión del calor en un cuerpo sólido. En el año 1811 siguió la segunda memoria sobre este tema. Al cabo de 11 años, en 1822, Fourier publicó la "Teoría Analítica del calor", la cual ejerció una enorme influencia en el desarrollo de las matemáticas.

Fourier compartía la convicción sobre la significación universal y la omnipotencia del análisis infinitesimal. En su presentación, el análisis es tan amplio como la propia naturaleza; refleja sus leyes principales, destacando su claridad y precisión, y principalmente la posibilidad de llegar hasta las aplicaciones numéricas. El análisis de un fenómeno físico, en esencia, se culminaba cuando se lograba expresar sus rasgos fundamentales mediante ecuaciones diferenciales. En lo que respecta a los principios de construcción de la teoría matemática, entonces, por indicación de Fourier, éstos así como los principios de la mecánica, se deducen de un pequeño número de hechos por cuya causa las matemáticas no se interesa, considerándolos como resultados de las observaciones confirmadas por los datos del experimento.

La propagación del calor, así como de la luz, Fourier la representaba en forma de flujo de partículas elementales, las cuales penetran libremente a través del medio. La cantidad elemental de calor dQ que fluye a través de una lámina Sdx en el tiempo dt con diferencia de temperatura dv satisface la relación, encontrada empíricamente

$$dQ = -kS \frac{dv}{dx} dt$$

(k es el coeficiente de conductividad, el cual depende del material de la lámina) (fig. 54).

Partiendo de esta expresión de la densidad del flujo calorífico, se hace el cálculo del balance de calor en el tramo por unidad de tiempo (en lo fundamental esto se realiza del mismo modo que en nuestra época) ¹⁾ y se llega a la ecuación

$$\frac{dv}{dt} = c^2 \Delta v,$$

donde Δ es el operador de Laplace.

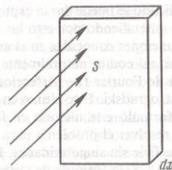


Fig. 54

Esta ecuación, Fourier la integra con diferentes condiciones de contorno dadas. Se da o bien la distribución de temperatura v en el límite o el flujo calorífico $\frac{dv}{dn}$ o su relación $\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dn}$. Para la resolución de la ecuación de conductividad del calor con estas condiciones de contorno Fourier elaboró el método de separación de variables, conocido actualmente como método de Fourier. Logró resolver los problemas de conducción del calor para los casos particulares de la esfera, el anillo, el cubo y el cilindro. El rasgo característico del método de Fourier es, como se sabe, el desarrollo de las funciones según las funciones propias encontradas. Fourier aplicó sistemáticamente el desarrollo de funciones en series trigonométricas del tipo

$$f(x) \sim \sum_0^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Aunque las series de tal tipo eran conocidas antes, después de la aparición de la "Teoría analítica del calor" recibieron el nombre de series de Fourier, conservándolo hasta el momento. Fourier aplica las series trigono-

¹⁾ Véase A.H. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнение математической физики. М., ГТТИ, 1951, стр. 172. (A.N. Tikhonov, A.A. Samarski. Ecuaciones de la física matemática.)

metricas no sólo para n entero, sino también en casos más complejos cuando n se determina por la relación trascendente $\operatorname{tg} n\pi = an$ ($a = \text{const} > 0$). En los trabajos de Fourier se encuentran incluso desarrollos mediante funciones de Bessel.

El aparato de las series trigonométricas dio la posibilidad a Fourier de expresar con su ayuda las funciones de naturaleza muy general. Fourier prácticamente podía desarrollar en serie cualquiera de las funciones que en aquel entonces se le podía proponer. Por ello tenía derecho a afirmar que con ayuda del aparato indicado se puede dar la expresión de funciones “absolutamente arbitrarias”, entendiendo por esto las funciones que constan de partes arbitrarias de funciones conocidas en el análisis. El no pudo dar una demostración rigurosa así como, naturalmente, eliminar una serie de imprecisiones. El método de Fourier fue perfeccionado por Poisson, Dirichlet y especialmente Ostrogradski. Este último en una serie de memorias de los años 1828—1836 formuló este método en forma general, lo suficientemente general para resolver el problema para cualquier cuerpo sólido, limitado por una superficie sin singularidades. En estas memorias fue deducida por primera vez (1828) la fórmula de Ostrogradski—Gauss mencionada antes, fue dado su tratamiento y generalización (1834) a una región n -dimensional,

$$\int_{v_n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right) dv_n = \int_s \frac{\sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2}} ds.$$

El mismo resolvió el problema sobre la conductividad del calor en un líquido y enunció en el año 1831, mucho antes que Riemann, el principio de localización: la convergencia en un punto de la serie de Fourier de una función absolutamente integrable depende sólo de sus valores en una vecindad tan pequeña como se quiera de este punto. Además, una investigación atenta muestra que el principio de localización de las series de Fourier no formulado en forma explícita se utiliza en una serie de trabajos de los contemporáneos de M.V. Ostrogradski. Este principio se puede advertir en las obras del propio Fourier y también en las obras de Dirichlet (1829) y Lo-bachevski (1834).

La referencia, en los trabajos histórico-matemáticos, de la formulación y la demostración del principio de Fourier a los méritos de Riemann, se fundamenta en el trabajo de este último “Sobre la posibilidad de representación de la función mediante una serie trigonométrica”. Este trabajo fue

presentado por Riemann en el año 1853 en la Universidad de Gotinga pero resultó conocido en el año 1867 después de su publicación. El trabajo contiene un interesante recuento de la historia de esta cuestión y por ello remi-timos a él al lector ¹⁾.

Las investigaciones matemáticas de la conductibilidad térmica antecedieron la creación de una ciencia más general sobre el calor, la termodinámica. En lo sucesivo para su formación se exigía la unión de los métodos matemáticos, que llevan su comienzo en Fourier con las ideas de S. Carnot sobre el ciclo ideal (1824) y con la ley de conservación de la energía, descubierta en los años 40 del siglo XIX por R. Mayer, H. Helmholtz y J. Joule. Esta unión transcurrió a mediados del siglo cuando R. Clausius (1850) y G. Thomson-Kelvin (1851) dieron la formulación del segundo principio de la termodinámica e introdujeron el concepto de entropía. El perfeccionamiento ulterior del aparato matemático de la termodinámica está vinculado con la salida fuera de los límites del análisis matemático y la introducción de razonamientos teórico-probabilísticos en la teoría cinética de los gases de J. Maxwell (1860) y las representaciones estadísticas en la teoría de los procesos caloríficos de L. Boltzman (1871).

Como resultado de las investigaciones de una serie de científicos, el físico suizo Fick, para el año 1855 pudo desarrollar la teoría cualitativa de la difusión. Entonces se aclaró que su primera ley sobre la cantidad de sustancia difundida es análoga a la ley, advertida por Fourier para el calor. Precisamente, la masa de sustancia dm , que difunde durante el tiempo dt a través del área S (ver fig. 54) perpendicular al eje Ox , se expresa por la fórmula

$$dm = -D \cdot S \cdot \frac{dc}{dx} dt,$$

donde $\frac{dc}{dx}$ es el gradiente de concentración y D es el coeficiente de difusión, el cual depende de la naturaleza de la partícula y el estado del disolvente y la sustancia difundida. Si el coeficiente de difusión es constante se obtiene la segunda ley de Fick

$$\frac{dc}{dt} = D \frac{d^2c}{dx^2},$$

esto es, la ecuación equivalente a la ecuación de conducción del calor.

En el desarrollo del análisis matemático la “Teoría analítica del calor” sirvió, después de los trabajos de Euler y sus contemporáneos, de comienzo a una nueva elaboración de la teoría de las series trigonométricas. El es-

¹⁾ Véase B. РИМАН. Соч. М., ГТТИ, 1948, стр. 225—261. (B. Riemann. Obras.)

fuerzo de Fourier por demostrar que cualquier función se puede desarrollar en serie trigonométrica condujo a la investigación del problema de la representación de funciones mediante series trigonométricas en los trabajos de Dirichlet, Lobachevski, Riemann y otros. En estas investigaciones se formó una de las premisas para la creación hacia fines del siglo XIX de la teoría de conjuntos de Cantor, más ampliamente, de la teoría de funciones de variable real.

Sobre el aparato matemático de la mecánica. Hemos citado ejemplos de aplicación del análisis matemático en la rama de los fenómenos eléctricos y magnéticos y además en la teoría del calor. Con estos ejemplos, el problema, naturalmente, no se agota. Los métodos analíticos penetraron en muchas ramas de las ciencias naturales, adquiriendo en ellas el significado de medios operativos resolutivos. Casi en primer lugar penetraron en la mecánica, determinando su contenido. La mecánica analítica adquirió su aspecto clásico precisamente como un estudio sobre las ecuaciones diferenciales que expresan las propiedades de las trayectorias de cualquier sistema mecánico. La investigación de las propiedades de estas ecuaciones y sus interpretaciones para casos particulares adquirieron significado de problema principal de la mecánica analítica. El papel decisivo en la construcción del sistema de esta ciencia lo comenzaron a jugar los postulados generales, o como se ha convenido en denominarlos, principios o leyes de la mecánica.

Supongamos dado un sistema, cuya posición para cada momento de tiempo t dado está definida por los valores de n parámetros independientes q_1, q_2, \dots, q_n , esto es, un sistema con n grados de libertad. Para la descripción de su movimiento se introducen dos conceptos: fuerza viva o energía cinética T y función de fuerza o energía potencial U . Los conceptos de energía cinética y potencial se contraponen, por esto frecuentemente se considera la función de Lagrange (antes conocida bajo la denominación de potencial cinético, el cual tenía un sentido no tan amplio):

$$L = T(q_i, \dot{q}_i) = U(q_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Las ecuaciones del movimiento del sistema mecánico son en esencia las ecuaciones diferenciales de Lagrange (introducidas por él a fines del siglo XVIII):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

En calidad de integral de la ecuación se obtiene la ley de conservación de la energía formulada a mediados del siglo XIX

$$T + U = \text{const.}$$

En el caso de movimientos perturbados, como consecuencia de la aplicación de fuerzas exteriores P , a la derecha se agrega la correspondiente in-

tegral:

$$T + U = \text{const} + \int P dt.$$

La resolución e investigación de las ecuaciones diferenciales de Lagrange fue una de las direcciones fundamentales de la mecánica analítica del siglo XIX.

Otro enfoque para formular los principios fundamentales de la mecánica consistió en que partían, no de las ecuaciones diferenciales, sino de ciertas integrales con respecto a las cuales se resolvía el problema variacional de búsqueda de mínimo. Por este camino se obtienen los principios variacionales de la mecánica, el aparato fundamental aquí es el aparato del cálculo variacional. El primer principio variacional fue el principio de la acción mínima. Fue enunciado por primera vez en el año 1744 por Maupertuis. La formulación matemática rigurosa del principio perteneció a Euler, las sucesivas generalizaciones a Lagrange, Jacobi, y Zhukovski. Más tarde surgieron otros principios variacionales, por ejemplo, el principio de Hamilton—Ostrogradski o de otra manera el principio de acción estacionaria ¹⁾.

El desarrollo de los métodos generales de integración de las ecuaciones diferenciales de la dinámica, que comenzó a mediados del siglo XIX, constituye una rama independiente de las aplicaciones del análisis matemático. En esta rama se considera una clase comparativamente pequeña de ecuaciones diferenciales, la cual, no obstante, se expone a una profunda investigación. Los resultados matemáticos aquí están especialmente entrelazados con sus interpretaciones aplicadas formando la base teórica de todas las disciplinas mecánicas.

En esta amplia rama de las aplicaciones podemos mencionar sólo algunos logros de las matemáticas aplicadas ²⁾. Así por ejemplo, el problema de la reducción de las ecuaciones diferenciales de la mecánica a un sistema canónico de ecuaciones de primer orden en el caso de relaciones estacionarias fue adelantado esencialmente ya a comienzos del siglo (1809) por Poisson y años después (1834) resuelto por Hamilton. Ostrogradski generalizó estas ecuaciones para el caso de relaciones no estacionarias. El mismo redujo la integración de un sistema canónico a la integración de una ecuación no lineal en derivadas parciales. Esto mismo realizó Hamilton para el caso particular de relaciones estacionarias utilizando una analogía óptico-mecánica.

¹⁾ Hay un rico material sobre la historia de los principios variacionales en la colección «Вариационные принципы механики». М., Физматгиз, 1959 («Principios variacionales de la mecánica»).

²⁾ En el siglo XIX era arreptado dividir las matemáticas en pura y aplicada.

Según las tradiciones establecidas, el aparato matemático de la mecánica, relacionado con la consideración de los principios fundamentales de esta ciencia, se incluye enteramente en ésta. Nos adherimos a esto, ya que separar en este campo las matemáticas y la mecánica es casi imposible. Señalemos sólo que los métodos del análisis matemático eran y son principales en la resolución de los problemas más importantes de la mecánica: movimientos de un cuerpo sólido pesado, teoría de la estabilidad del equilibrio y movimiento; oscilaciones de sistemas materiales, etc.

Perfeccionamiento de los medios operativos de la teoría de ecuaciones diferenciales. Las aplicaciones de los métodos del análisis matemático constituyen partes importantes de disciplinas científicas mixtas descubriendo, ante ellas y ante todas las ciencias exactas, nuevas perspectivas de desarrollo y cambiando su composición y estructura. Esto fue particularmente notable en el desarrollo de los métodos matemáticos de la mecánica y la física. A su vez el proceso de amplio desarrollo de las partes aplicadas ejerció influencia sobre la estructura del propio análisis matemático.

En lo que respecta a la base clásica del análisis matemático, esto es, el cálculo diferencial e integral y la teoría elemental de funciones, como fue mostrado en el capítulo anterior, sufrió una reconstrucción radical. En ella fueron rigurosamente formulados en términos de la aritmética, los conceptos fundamentales: infinitesimal, continuidad, límite, diferencial, y otros. El concepto de función adquirió el carácter actual muy general. Los teoremas recibieron precisiones en su formulación con indicaciones obligatorias de las restricciones: precisión del dominio de valores del argumento, forma de la función, etc., bajo cuya observancia son válidas. Las posibilidades operativas de esta parte del análisis, como resultado de la reconstrucción, se ampliaron significativamente y las deducciones adquirieron un alto grado de certeza.

En la teoría de las ecuaciones diferenciales el reforzamiento de su papel de aplicación resultó además vinculado con el planteamiento de problemas más amplios y la elaboración de conceptos más generales. Así, ya en la primera mitad del siglo XIX en la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias prácticamente se suprimieron los esfuerzos de búsqueda de métodos concretos de integración en cuadraturas. Se aclaró que el encuentro de tales métodos era un fenómeno raro y las posibilidades eran insignificantes. Fueron añadidos sólo pocos resultados, en particular relativos a la ecuación de Jacobi (1842):

$$(A_x + B_y + C)dx + (A_1x + B_1y + C_1)dy + (A_2x + B_2y + C_2) \cdot (xdy - ydx) = 0.$$

Entre las numerosas investigaciones en esta rama, ocupan un lugar notable aquellas donde se estudian las posibilidades de obtención de la solu-

ción de la ecuación si se parte de un cierto número de sus integrales parciales conocidas. Por ejemplo, en el año 1878, Darboux demostró que la ecuación

$$Ldx + Mdy + N(xdy - ydx) = 0,$$

donde L, M, N son polinomios enteros cuyo mayor grado es m , puede ser resuelta sin aplicación de cuadraturas, si se conoce no menos de $\frac{m(m+1)}{2} + 2$ integrales parciales algebraicas. Un aporte significativo en

la elaboración de esta dirección fue hecho, en particular, por los matemáticos de Rusia: F.G. Minding, A.N. Korin, V.P. Ermakov y otros.

Un lugar destacado lo ocuparon también los problemas de la deducción de las condiciones de integrabilidad y la separación de clases de ecuaciones integrales en cuadraturas. Señalemos en calidad de ejemplo la deducción de Liouville de la condición de integrabilidad de la ecuación especial de Riccati. Característica en este plano es también la deducción por Chebishev (1853) de la condición de integrabilidad del diferencial binomial.

El planteamiento y la resolución de los problemas más generales conducen como regla, a la ampliación del círculo de conceptos. Como ejemplo puede servir la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales. Los tipos particulares de estas ecuaciones con coeficientes variables son: la ecuación de Bessel (conocida además ya por D'Alembert y Euler), la ecuación hipergeométrica

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0$$

(que fue objeto de investigación, en particular, por Euler en el año 1778 y por Gauss en 1812), la ecuación de Legendre, Lamé y otros condujeron al surgimiento de la teoría de las funciones especiales: cilíndricas, esféricas, etc. Los trabajos de Sturm y Liouville sobre la resolución de la ecuación

$$y''(x) + p(x)y'(x) + \lambda y(x) = 0$$

con valores dados de cierta función lineal de y e y' en dos puntos del eje x , dieron el comienzo de la investigación de la teoría del problema de contorno, denominado según el nombre de sus investigadores. Resultó que la resolución de este problema conduce a la necesidad de desarrollar la teoría de las ecuaciones integrales y la teoría de la descomposición de la función mediante funciones fundamentales.

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, en su desarrollo, siempre conservaron el más estrecho contacto con los problemas de la física y la técnica. Como fue mostrado antes, el mayor significado práctico lo tuvieron las ecuaciones de segundo orden. Por ello, también en el plano teórico ellas atrajeron la mayor atención. Para ellas, en primer término,

fueron deducidos los tipos canónicos de ecuaciones: hiperbólicas, parabólicas y elípticas. Los métodos acumulados de resolución de tipos aislados de ecuaciones fueron sometidos a una sistematización y una fuerte generalización. Estos métodos en enorme medida incluían los resultados del cálculo variacional, de la teoría de funciones de variable compleja, de las series trigonométricas y de otras partes superiores del análisis. Precisamente en virtud de su significación práctica, estas ecuaciones resultaban ser centro donde se concentraban los resultados de diferentes ramas de las matemáticas. Así mismo, en particular, se crearon las premisas para grandes analogías características para el análisis funcional actual y para las teorías generales de las ecuaciones diferenciales.

Es necesario también mencionar que en aquella época se reveló la importancia práctica de la ecuación tipo

$$\sum_{i=1}^n X_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i = 0.$$

Estas ecuaciones atrajeron la atención de Euler. Ellas fueron estudiadas también por Monge. A comienzos del siglo XIX las investigó Pfaff. En los años 1814—1815 él pudo mostrar que la solución de esta ecuación (la cual desde entonces recibió su nombre) consta de las relaciones

$$\Phi_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad y \quad d\Phi(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n).$$

El surgido problema de Pfaff, de integración de esta ecuación con el menor número posible de relaciones entre los argumentos x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) provocó y provoca grandes discusiones. Además, del enorme papel de este problema en la creación de la teoría geométrica de las ecuaciones diferenciales y las aplicaciones de éstas a la geometría, él obtuvo un gran significado para la mecánica. Resultó que las relaciones noholónomas son ecuaciones de Pfaff entre los desplazamientos virtuales. Las ecuaciones de Pfaff encontraron aplicación también en termodinámica.

Jacobi (quien denominó este problema con el nombre de Pfaff) obtuvo numerosos resultados importantes sobre el carácter de las variedades integrales de esta ecuación. Cauchy (1819) elaboró el método de las características, tras el cual aparecieron una serie de obras sobre teoría de las características para diversos tipos de ecuaciones de diferentes órdenes.

En el ambiente de completamiento rápido de la composición efectiva y las aplicaciones de la teoría de las ecuaciones diferenciales, adquirió un significado decisivo la elaboración de las ideas generales, las cuales unían y organizaban, en lo posible, un mayor número de resultados. La formación de semejantes ideas generales constituyó un rasgo característico del análisis

matemático del siglo XIX. Un significado especialmente importante adquirió este rasgo en la teoría de las ecuaciones diferenciales. Aquí, ya era imposible partir del convencimiento intuitivo de la existencia de soluciones generales, las cuales restaban sólo encontrar por el método más favorable posible. Era necesario demostrar la existencia de las soluciones partiendo de los elementos conocidos. Ya a comienzos del siglo surgieron las primeras demostraciones de los teoremas de existencia, tan características para el análisis contemporáneo. Estos pertenecieron a Cauchy. Estos teoremas fueron demostrados para las ecuaciones diferenciales teniendo en cuenta las condiciones del estado inicial, esto es, para los problemas actualmente conocidos como problemas de Cauchy.

En las conferencias sobre análisis, las cuales dictó Cauchy en la Escuela Politécnica, él dio la resolución de este problema en un planteamiento más sencillo. Dada la ecuación diferencial ordinaria de primer orden: $y' = f(x, y)$. Demostrar la existencia y unicidad de su solución, con condiciones iniciales dadas: $x = x_0, y = y_0$. Cauchy demostró esto en el dominio donde $f(x, y)$ y $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ son continuas. Para ello partió del método de

Euler de integración aproximada: en el segmento del eje de abscisas (x_0, X) señaló los puntos con abscisas $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = X$. De estos puntos él restableció las ordenadas:

$$y_0 ; \\ y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0); \\ y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1); \\ \dots \\ y_n = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + \dots + \\ + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

Los vértices de las ordenadas determinan un polígono que aproxima la curva integral buscada. Queda demostrar la existencia de la función límite $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, la cual satisface las condiciones del problema de Cauchy.

Esta demostración de Cauchy la perfeccionó en 1844 su discípulo F. Moigno. La condición de Lipschitz, utilizada actualmente, fue introducida por este último en 1876. Enseñada J. Peano demostró el teorema de existencia por lo menos de una solución del mencionado problema de Cauchy en el dominio, donde $f(x, y)$ es continua.

Cauchy pudo extender su método de demostración de los teoremas de existencia al caso de la ecuación

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

dados $x = x_0, y = y_0$ y respectivamente $y_0^{(i)} (i = 1, 2, \dots, n-1)$ por medio de su reducción a un sistema de ecuaciones de primer orden. Para el año 1842, Cauchy demostró el teorema de existencia para un sistema lineal de ecuaciones en derivadas parciales, indicando el procedimiento de reducción a esta forma de un sistema no lineal. La forma definitiva, según expresión de Poincaré, a los teoremas de existencia la dio S.V. Kovalevskaya (1874), que demostró el teorema de existencia y unicidad de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

donde $u_i = u_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$
($i = 1, 2, \dots, m$)

dados los valores iniciales

$$t = t_0, u_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

en el caso de holomorfia de las funciones f_i y φ_i . Con estas condiciones Kovalevskaya demostró que el sistema tiene, para suficientemente pequeños $t - t_0$, una solución holomorfa, determinada unívocamente por las condiciones iniciales.

Finalmente, Picard en el año 1890 desarrolló la idea de Cauchy y creó otro método de demostración de los teoremas de existencia y unicidad basado en la demostración de la convergencia de las aproximaciones sucesivas

$$y_0;$$

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx;$$

.....

$$y_k = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{k-1}) dx.$$

Los teoremas de existencia tuvieron en la historia de las ecuaciones diferenciales un significado de principio. Resolvían la cuestión sobre el rigor y la validez de su aplicación. Al mismo tiempo, los métodos de aproximaciones sucesivas, aplicados en la demostración de los teoremas correspondientes creaban la base para la elaboración de los métodos de integración numérica de las ecuaciones diferenciales.

Para el siglo XX, las demostraciones de los teoremas de existencia se convirtieron en parte inseparable de muchas investigaciones teóricas, entraron en la norma del rigor matemático. En la teoría de ecuaciones diferenciales muchos trabajos fueron dedicados a diferentes generalizaciones del teorema de Kovalevskaya: para los casos de funciones no analíticas, de soluciones no analíticas, del problema de unicidad en todo el dominio de existencia de la solución y no sólo local, etc.

Penetración en la teoría de las ecuaciones diferenciales de los métodos de otras disciplinas matemáticas. Comenzando desde los años 70 del siglo pasado, la teoría de ecuaciones diferenciales se completaba con dos direcciones que no han perdido su actualidad aun en nuestra época. Tenemos en cuenta la introducción en este dominio de las matemáticas de las representaciones teóricas de grupos y la creación de los métodos cualitativos.

Ya mencionamos que F. Klein y S. Lie, después del estudio en París junto a Jordan se propusieron como objetivo extender las teorías dadas de grupos al mayor número posible de ramas de las matemáticas. Klein consideró los grupos continuos de las transformaciones geométricas, e investigando las propiedades de estos grupos, en especial sus invariantes, creó la clasificación de las ciencias geométricas.

Lie, a su vez vinculó (comenzando desde el año 1873) la teoría de grupos con las investigaciones sobre ecuaciones diferenciales.

Cada ecuación diferencial, Lie consideró posible relacionarla con un grupo continuo de transformaciones, respecto al cual la ecuación es un invariante. Los grupos considerados para esto contienen transformaciones definidas por parámetros numéricos

$$x - f(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Tal género de correspondencia biunívoca de las transformaciones y de los sistemas de parámetros es válido sólo para pequeñas transformaciones. En dependencia de las correspondientes transformaciones infinitesimales Lie obtuvo la posibilidad de formar la clasificación de las ecuaciones diferenciales. Así, distinguió el grupo de las transformaciones que componen la clase de ecuaciones diferenciales integrables en cuadraturas.

El punto de vista de la teoría de grupos, introducido por Lie, demostró la estrechez de la clase de ecuaciones diferenciales resolubles en cuadraturas y la falta de perspectiva de los esfuerzos de construcción de una teoría general de ecuaciones diferenciales en esta dirección. Por esto, en lo sucesivo hasta advertir las posibilidades de aplicación, las investigaciones de los grupos continuos se llevaron a cabo en el plano de la construcción de su teoría general. De esta última se distinguió la teoría de los grupos de Lie como grupos en los cuales el producto de dos transformaciones tiene, como sus parámetros, funciones continuas de los parámetros de las

transformaciones-factores

$$\gamma_i = F_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n).$$

Más precisamente, la teoría de los grupos continuos de transformaciones surgió precisamente como la teoría de los grupos de Lie y adquirió un nivel de generalidad cercano al actual, sólo posteriormente.

El significado práctico de las concepciones teóricas de los grupos para las ecuaciones diferenciales surgió en la física matemática. Las ecuaciones de la mecánica clásica, como se sabe, son invariantes respecto a las transformaciones de Galilei. Las contradicciones, encontradas en la electrodinámica de los cuerpos en movimiento con los resultados de la mecánica clásica se aclararon después de la introducción de las transformaciones de Lorentz. Estas transformaciones

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}; y' = y; z' = z; t' = \frac{t - \frac{\beta}{c}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{v}{c}\right)$$

las encontró en el año 1887 W. Vogt. El mismo demostró la invarianza respecto a estas transformaciones de la ecuación de la onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$$

(Δu es el operador de Laplace).

Lorentz (1904) descubrió que si las transformaciones de Galilei, esto es, los giros, traslaciones del origen y las transformaciones de la forma

$$x' = x - vt; y' = y; z' = z; t' = t,$$

donde se utiliza la idea de transmisión instantánea de la interacción de los cuerpos, se sustituyen por las transformaciones de Lorentz, entonces las contradicciones indicadas pueden ser eliminadas. Poincaré, a su vez, demostró que las transformaciones de Lorentz forman un grupo. La idea de la consideración de las clases de ecuaciones diferenciales con diferentes grupos de transformaciones obtuvo además realización práctica.

Bajo la presión de problemas prácticos, en particular de los problemas de la mecánica celeste surgió y se desarrolló la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. Por grandes que fueran los éxitos en la resolución de diferentes clases de ecuaciones diferenciales, ni uno de los métodos podía ayudar en la resolución de los viejos problemas sobre el movimiento de tres cuerpos subordinados a las leyes de la mecánica newtoniana. Los trabajos de Lie confirmaron la imposibilidad de resolución en cuadraturas de las correspondientes ecuaciones diferenciales. Los métodos de resolución aproximada daban sólo una solución parcial del problema dado

correspondiente a condiciones iniciales dadas en un intervalo finito. El comportamiento de las curvas integrales en todo el dominio de existencia, como exigían los problemas de la mecánica celeste no ayudaban a aclarar ninguno de los métodos.

Poincaré en una serie de memorias, comenzadas en el año 1878 y conocidas bajo la denominación común de "Sobre las curvas definidas por ecuaciones diferenciales" investigó el problema si se puede o no y cómo caracterizar el comportamiento de la familia de las curvas integrales de las ecuaciones $y' = f(x, y)$ o del sistema

$$\frac{dx}{dt} = \varphi_1(x, y); \frac{dy}{dt} = \varphi_2(x, y)$$

en todo el plano partiendo de las propiedades de las funciones f ó φ_1 y φ_2 .

En general, muchos de los trabajos de H. Poincaré están dedicados a las ecuaciones diferenciales. Además de los problemas de la mecánica celeste, investigó el problema de las oscilaciones de continuos tridimensionales, estudió una serie de problemas de la conducción del calor, la teoría del potencial, el electromagnetismo, etc. En el curso de estas investigaciones Poincaré enriqueció esencialmente la totalidad de los recursos operativos de la teoría de las ecuaciones diferenciales. Estudió el desarrollo de las soluciones de las ecuaciones diferenciales según un parámetro pequeño, demostró el carácter asintótico de ciertas series, las cuales expresan las soluciones de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, investigó los puntos singulares. Al parecer, los problemas prácticos le sirvieron de estímulo también para la elaboración de los métodos cualitativos.

En matemáticas se denominan cualitativos los métodos que dan la posibilidad de aclarar las singularidades de la solución buscada del problema, la existencia y cantidad de soluciones y sus singularidades no realizando su resolución numérica.

Los métodos de Poincaré eran fundamentalmente geométricos, más exactamente, topológicos. Considerando la familia de curvas integrales Poincaré separó los puntos singulares y les dio su clasificación. Investigó especialmente el carácter del comportamiento de las curvas integrales en la vecindad de los puntos singulares. Para un tipo especial de curva integral, la cerrada, a la cual se aproximan por espirales las curvas próximas de la familia, Poincaré introdujo la denominación de ciclo límite. En calidad de uno de los problemas resolubles por los métodos cualitativos, él estudió las curvas integrales dadas sobre el toro. Poincaré dio las primeras aplicaciones de los métodos cualitativos al problema de los tres cuerpos. Más tarde sus investigaciones sobre los ciclos límites tuvieron aplicación en la radiotécnica (los trabajos de A.A. Andréonov).

El éxito de los métodos topológicos de Poincaré fue simplificado por la



A.M. Liapunov (1857—1918)

existencia de premisas en forma de ideas geométricas desarrolladas en la teoría de funciones de variable compleja y en la geometría diferencial y además por las ideas de la teoría de conjuntos de G. Cantor. La especificidad de los métodos aplicados por Poincaré consistía en que éstos unían la teoría de las ecuaciones diferenciales con la topología. Esto condujo a su vez a la formación de la topología como rama especial de las matemáticas en primer lugar en los trabajos de Poincaré mencionados antes. Dentro de la propia teoría de ecuaciones diferenciales, para los métodos cualitativos se arraigó la denominación de topológicos.

Casi simultáneamente con Poincaré, los métodos cualitativos fueron introducidos en los trabajos de A.M. Liapunov (1857—1918). Educando de la Universidad de Petersburgo y discípulo de P.L. Chebichev, Liapunov comenzó en el año 1882, por consejo de su maestro, la resolución de un problema astronómico concreto pero difícil: investigar la posibilidad de

existencia de figuras de equilibrio, de una masa de líquido que gira, diferentes de las elipsoidales. Enseguida el círculo de sus investigaciones se amplió abarcando el problema de la estabilidad del equilibrio y el movimiento de los sistemas mecánicos definidos por un número finito de parámetros, la teoría del potencial y otros.

El problema general de la estabilidad, el cual acabamos de mencionar, Liapunov lo redujo a la investigación, mediante métodos cualitativos, del comportamiento de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

donde F_i para pequeños x_i es desarrollable en series convergentes según potencias enteras de x_k y

$$F_i(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Liapunov se negó a introducir la linealización de las ecuaciones, por medio de la eliminación de todos los términos no lineales, para aclarar la cuestión sobre la estabilidad del movimiento. La estabilidad, según Liapunov, se relacionaba con el comportamiento en relación a las perturbaciones de los datos iniciales. En su tesis doctoral, en el año 1892, "Problema general sobre la estabilidad del movimiento", Liapunov definió rigurosamente los conceptos principales de la teoría de la estabilidad, destacó los casos cuando la linealización da la solución a la cuestión sobre la estabilidad e investigó una serie de casos donde la linealización era insuficiente. En relación con esto, Liapunov resolvió muchas cuestiones de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias: sobre la existencia y construcción efectiva de soluciones periódicas de una clase de ecuaciones diferenciales no lineales, comportamiento de las curvas integrales de las ecuaciones en la vecindad de la posición de equilibrio, etc.

En una serie de trabajos (1903—1918) Liapunov dio la solución del problema, indicado por Chébichev sobre la forma de las figuras de equilibrio de un líquido que gira uniformemente en condiciones de la gravitación newtoniana. Estableció la existencia de figuras de equilibrio próximas a las elipsoidales, de un líquido homogéneo y débilmente heterogéneo. Resultó imposible separar las figuras de equilibrio no elipsoidales de las elipsoidales. Liapunov demostró la inestabilidad de las figuras de equilibrio en forma de pera, aceptadas en la teoría astronómica. No enumerando todos los resultados señalemos sólo que los trabajos de Liapunov sobre estabilidad contienen hasta el momento, la mayor parte de los resultados obtenidos en este campo. Ellos continúan siendo fundamentales en el desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones a la investigación de las oscilaciones de los sistemas físicos y mecánicos.

En las matemáticas modernas, cualquier sistema físico cuyo comportamiento en las proximidades de cada estado se describe por un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n, t \text{ es el tiempo}),$$

recibe el nombre de sistema dinámico. La teoría general de los sistemas dinámicos estudia el conjunto de todos sus movimientos correspondientes a todos los posibles estados iniciales. La teoría de las ecuaciones diferenciales en la época de los trabajos de Liapunov y Birkhoff (este último comenzó a elaborar la teoría general de los sistemas dinámicos en el año 1912) no estaba en condiciones de estudiar ni la resolución del problema sobre el movimiento de los sistemas dinámicos en todo el dominio de definición, ni el comportamiento de las soluciones en las proximidades de los puntos singulares. Por esto en la teoría general de los sistemas dinámicos gran significado lo adquieren los métodos cualitativos.

La aplicación de los métodos cualitativos, además, se simplifica con las representaciones geométricas de los sistemas dinámicos. La totalidad de los estados posibles de estos últimos se trata como una variedad n -dimensional denominada espacio de fase del sistema. Como puntos de este espacio sirven los diversos estados P del sistema dinámico. La totalidad de todos los movimientos de un sistema dinámico se representan como un grupo de transformaciones del espacio de fase. El movimiento independiente se caracteriza por el movimiento del punto P según su trayectoria. El papel de la teoría de grupos para la teoría de los sistemas dinámicos es tan grande que en la actualidad un sistema dinámico se da precisamente como un grupo de transformaciones.

La teoría general de los sistemas dinámicos es una rama actual de las matemáticas, surgida de las aplicaciones prácticas de la teoría de ecuaciones diferenciales.

La historia de la teoría de las ecuaciones diferenciales en el siglo XIX y sus aplicaciones está aún débilmente estudiada. Se conocen muchos hechos de esta historia, en verdad muy diversos. Las leyes teórico-generales se observan aún con dificultad. El presente capítulo es uno de los pocos intentos de aclaración de los puntos de partida y leyes principales del desarrollo de esta rama de las matemáticas. En ella: a) se muestra la influencia creciente de los problemas de la práctica, que se complican rápidamente, en el análisis matemático en su formulación clásica; b) se indican los métodos de transformación del aparato del análisis, en especial de la teoría de las ecuaciones diferenciales y la ampliación del dominio de sus aplicaciones; c) se aclaran algunos rasgos del proceso de aparición y desarrollo de los elementos de la teoría general de las ecuaciones diferenciales (los teoremas de

existencia, los métodos cualitativos, las ideas de la teoría de grupos) d) se señala el ajuste de las relaciones de la teoría de ecuaciones diferenciales con otras ramas de las matemáticas (topología, teoría de grupos, geometría, teoría de funciones), la aparición de los elementos generales y la interpenetración de los métodos.

7.5. Creación de la teoría de las funciones de variable compleja

Sobre las premisas de la creación de la teoría general de funciones de variable compleja. La actual teoría de funciones de variable compleja abarca un desmesuradamente amplio dominio de las matemáticas. Con esta denominación se llama un conjunto grande y ramificado de disciplinas matemáticas, teóricas y aplicadas. Enumerar todas estas disciplinas, más aun, caracterizarlas, es una cuestión difícil y voluminosa, incluso si se limita sólo a funciones analíticas. El hacer participar en la investigación de las funciones no analíticas, pero que poseen ciertas propiedades de funciones analíticas (tenemos en cuenta la teoría de funciones casi analíticas y monogénicas, transformaciones interiores y casi conformes, etc.) amplía mucho el dominio de la teoría considerada por nosotros y refuerza las dificultades del análisis de las vías de su formación.

Para el tratamiento en el presente capítulo elegimos las cuestiones relativas a la inclusión en las matemáticas de objetos imaginarios y complejos, prestando menos atención a la propiedad analítica de la función, esto es, a su representabilidad como serie de potencias

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

Nos consideramos con el derecho a proceder así ya que sobre la historia de la clase de las funciones analíticas y sobre el, relacionado con esta clase, aparato de las series de potencias ya hemos expuesto algún material.

Consideremos inicialmente la cuestión sobre las premisas de la creación de la teoría de funciones de variable compleja, acumuladas hacia el siglo XIX.

El concepto de número imaginario y después complejo se conoce en las matemáticas y se utiliza desde tiempos remotos. La historia de su surgimiento refleja aquel rasgo general de desarrollo de los cálculos matemáticos donde la introducción y utilización de las operaciones inversas conduce, como regla, a la necesidad de ampliación del dominio numérico. Así, la introducción de la sustracción necesitó al fin y al cabo de la complementación de la serie natural con los números negativos, la división condujo a la ampliación de la serie natural hasta el conjunto de los números racionales. A su vez la operación de radicación resultó la causa operativa de introducción del concepto de número real. El caso particular, cuando se trata de la

extracción de raíz de potencia par de un número negativo exigía la introducción de los números imaginarios.

Sólo en el siglo XVI en relación con la resolución algebraica de las ecuaciones cúbicas R. Bombelli (1572) se apartó del tratamiento de los números imaginarios como misteriosos o absurdos y elaboró las reglas de las operaciones aritméticas con los números imaginarios. No obstante, aun en el curso de mucho tiempo, a pesar de algunas ideas exitosas (por ejemplo, de Wallis) respecto a la interpretación de los números imaginarios y complejos, su naturaleza no fue comprendida y la relación con ellos era como con cierta sustancia sobrenatural en las matemáticas. Incluso en el año 1702 G.W. Leibniz escribió que los números imaginarios es un hermoso y maravilloso refugio del espíritu divino, casi como la dualidad entre la existencia y la no existencia. En la historia no hubo insuficiencia en semejantes afirmaciones sobre las propiedades místicas de los imaginarios, también por parte de otros científicos.

La poca claridad del concepto de número complejo no podía esconder su utilidad en la resolución de problemas concretos. Una gran cantidad de los hechos acumulados dio motivo a los matemáticos del siglo XVIII para trasladar el concepto de lo imaginario también al campo de las magnitudes variables. Ya que este traslado se realizaba para casos concretos, entonces en dependencia del carácter del problema, las magnitudes imaginarias se representaban frente a los investigadores con diferentes "apariencias": física, geométrica o incluso analítica. El problema de la interpretación científica de los números complejos se resolvía a la vez en diferentes planos, junto con el desarrollo general del análisis matemático.

Al parecer, los esfuerzos de Leibniz y Jo. Bernoulli fueron los primeros en este siglo por introducir las operaciones con números complejos, con el objetivo de lograr los resultados más generales posibles en la integración. Utilizando, para este objetivo, el desarrollo de las funciones subintegrales en fracciones elementales, ellos utilizaron ampliamente las analogías. Por ejemplo, en el año 1704 Jo. Bernoulli afirmó que ya que la aplicación al diferencial

$$\frac{adz}{b^2 - z^2}$$

de la sustitución

$$z = b \frac{t-1}{t+1}$$

lo transforma en el denominador diferencial logarítmico

$$\frac{adt}{2bt}$$

402

entonces la aplicación a

$$\frac{adz}{b^2 + z^2}$$

de la sustitución imaginaria

$$z = \sqrt{-1} b \frac{t-1}{t+1}$$

da el "diferencial del logaritmo imaginario"

$$\frac{adt}{2\sqrt{-1}bt}$$

Una sustitución imaginaria más

$$t = \frac{b\sqrt{-1} + \sqrt{\frac{1}{r} - b^2}}{b\sqrt{-1} - \sqrt{\frac{1}{r} - b^2}}$$

y junto a la relación recién establecida entre $\operatorname{arctg} \frac{z}{b}$ y

$$\operatorname{Ln} t = \operatorname{Ln} \frac{b - z\sqrt{-1}}{b + z\sqrt{-1}}$$

Jo. Bernoulli encuentra aún la relación,

$$d(\operatorname{arc} \operatorname{sen} b\sqrt{r}) = \left(\frac{1}{\sqrt{-1}} \operatorname{Ln} t\right).$$

Semejantes métodos permiten la acumulación de resultados sobre las cantidades imaginarias pero no aclaran sobre su naturaleza. Por esto es comprensible que cada uno de los intentos de introducir los números complejos por una vía formalmente operativa conducía a discusiones, en ocasiones muy encarnizadas.

En calidad de ejemplo mencionemos la discusión sobre la naturaleza de los logaritmos de las magnitudes negativas y complejas, la cual comenzó en el año 1712 entre Leibniz que consideraba los logaritmos de los números negativos como imaginarios y Jo. Bernoulli partidario de que eran reales. Para ello Jo. Bernoulli se apoyaba en el resultado "demostrado" por él, de que

$$\operatorname{Ln} y = \operatorname{Ln} (-y).$$

403

En la discusión participaron una serie de científicos entre ellos D'Alembert y Euler. No obstante, ésta no se apaciguó incluso después de que en el año 1749 Euler descubrió la multiformidad del logaritmo y propuso una demostración, para aquel tiempo, convincente.

Euler partió de la ecuación

$$x = e^y = \left(1 + \frac{y}{i}\right)^i,$$

esto es, en la forma actual de escritura

$$x = e^y = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{ny}.$$

Aquí como ya hemos mencionado i es un número "infinitamente grande". Resolviendo esta ecuación respecto a y , Euler obtuvo

$$y = \ln x = i(x^{\frac{1}{i}} - 1),$$

esto es

$$y = \ln x = \lim_{n \rightarrow \infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1).$$

Aquí $x^{\frac{1}{i}}$ es una raíz con un índice infinitamente grande. El tiene un número infinito de valores. Todos sus valores son diferentes; en general son imaginarios. Por consiguiente, el logaritmo también tiene un conjunto infinito de valores diferentes, los cuales se diferencian en un número, múltiple de $2\pi\sqrt{-1}$. En efecto

$$\begin{aligned} x &= a + b\sqrt{-1} = \rho(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) = \\ &= e^{\rho(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)}. \end{aligned}$$

De aquí

$$y = \ln x = c + (\varphi \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}) \quad (\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Uno de los valores del logaritmo de un número real positivo es real, los restantes son imaginarios. Los valores de los logaritmos de los números negativos e imaginarios son todos imaginarios.

El impulso decisivo a la introducción de los números imaginarios en el análisis matemático fue dado cuando quedó clara su utilidad en la resolución de ecuaciones diferenciales de la física matemática. Esto se reveló en las obras de D'Alembert (1752) y Euler (1755) sobre hidrodinámica. En estos trabajos fueron utilizados los resultados de Euler (1734) y Clairaut (1739) equivalentes a la afirmación que la expresión

$$Pdx + Qdy$$

es un diferencial total de cierta función $\varphi(x, y)$, si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

D'Alembert resolvió el problema del contorno de un cuerpo sólido por un líquido (homogéneo y sin consideración del peso). Designando por p y q las componentes según los ejes de las velocidades de las partículas que fluyen a través del punto $M(x, y)$, encontró de la comparación de sus diferenciales totales las ecuaciones

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

las cuales se interpretan como la condición de que

$$pdx + qdy \quad \text{y} \quad pdy - qdx$$

sean diferenciales totales. Estas ecuaciones fueron obtenidas también por Euler.

Ahora ya no resulta difícil determinar un par de funciones armónicas conjugadas, las cuales sean soluciones del sistema de ecuaciones de D'Alembert—Euler. Se debería sólo aplicar el método propuesto por D'Alembert en el caso de la ecuación de la oscilación de una cuerda. Sean

$$pdx + qdy = du, \quad pdy - qdx = dv.$$

Entonces

$$\begin{aligned} d(u + \sqrt{-1}v) &= (p + \sqrt{-1}q) d(x + \sqrt{-1}y), \\ d(u - \sqrt{-1}v) &= (p - \sqrt{-1}q) d(x - \sqrt{-1}y). \end{aligned}$$

De aquí

$$\begin{aligned} p + \sqrt{-1}q &= \frac{d(u + \sqrt{-1}v)}{d(x + \sqrt{-1}y)} = \varphi(x + \sqrt{-1}y), \\ p - \sqrt{-1}q &= \frac{d(u - \sqrt{-1}v)}{d(x - \sqrt{-1}y)} = \psi(x - \sqrt{-1}y). \end{aligned}$$

Las funciones armónicas conjugadas, como ahora no es difícil advertir representan la parte real e imaginaria de una función de variable compleja.

Euler, obteniendo un resultado análogo y no teniendo la posibilidad de darle una interpretación adecuada expresó las funciones armónicas conjugadas en forma de series según polinomios armónicos homogéneos, representando así los números complejos tanto en forma algebraica como trigonométrica.

Hacia mediados del siglo XVIII, en la práctica matemática entraron diferentes aspectos en la comprensión del número complejo, tanto variable como constante. Los mayores méritos en esto pertenecen a Euler. En una serie de monografías dedicadas a la construcción general del análisis ("Introducción al análisis infinitesimal", tomos 1—2. "Cálculo diferencial", "Cálculo integral, tomos 1—3) consideró posible incluir en un sistema general también a las funciones analíticas de variable compleja. En la "Introducción al análisis infinitesimal" (1748), Euler introdujo la variable compleja en calidad del concepto más general de magnitud variable, utilizando los números complejos en el desarrollo de funciones en factores lineales. Introdujo por primera vez las fórmulas (las citaremos en el simbolismo usual a nosotros):

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n; \quad \ln z = \lim_{n \rightarrow \infty} n(z^n - 1);$$

$$(\cos z \pm i \operatorname{sen} z)^n = \cos nz \pm i \operatorname{sen} nz,$$

y además las fórmulas de relación entre las funciones trigonométricas y exponenciales

$$\cos v = \frac{e^{+iv} + e^{-iv}}{2}; \quad \operatorname{sen} v = \frac{e^{+iv} - e^{-iv}}{2i}$$

$$e^{iv} = \cos v + i \operatorname{sen} v.$$

Si se considera todo el conjunto de resultados establecidos por Euler y sus contemporáneos, entonces se puede llegar a la conclusión de que los resultados fundamentales de la teoría de las funciones elementales de variable compleja estaban ya en su mayor parte reveladas.

En lo que se refiere a la diferenciación e integración de funciones de variable compleja, Euler suponiendo que

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

actuó con ellas como con un par de funciones de variable real. Además en una serie de trabajos (1776—1783) utilizó los números complejos en el cálculo de integrales. No formulando explícitamente, Euler destacó la clase de funciones analíticas de variable compleja, enunciando respecto a ellas el principio de simetría consistente en que cada función $Z(z)$ donde $z = x + iy$ tiene la forma

$$Z(x + iy) = M + iN,$$

y cuando $z = x - iy$

$$Z(x - iy) = M - iN.$$

Si ahora se considera la integral

$$\int Zdz = V,$$

donde

$$z = x + iy, \quad V = P + iQ,$$

entonces

$$P + iQ = \int (M + iN)(dx + idy),$$

$$P - iQ = \int (M - iN)(dx - idy),$$

de donde

$$P = \int Mdx - Ndy, \quad Q = \int Ndx + Mdy.$$

Como se indicó antes, la condición de que la expresión subintegral es un diferencial total conduce a las conocidas condiciones de D'Alembert—Euler D'Alembert—Euler

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

En otros casos Euler utiliza

$$z = v(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi).$$

Poniendo aquí $\varphi = \text{const}$, Euler integra de esta manera a lo largo de un rayo que parte del origen de coordenadas.

El trabajo de Euler "Sobre la representación de una superficie esférica en un plano" (1777) no sólo contiene la idea, sino que prácticamente introduce la proyección conforme de las regiones de la esfera sobre el plano. Euler denominó a estas transformaciones "semejantes en lo pequeño". El término "conforme" fue utilizado por primera vez, al parecer, por el académico de Petersburgo F. Schubert en el año 1789. Considerando la longitud t y la latitud u de una superficie esférica, las cuales corresponden a las coordenadas cartesianas x e y de los puntos del plano, Euler dedujo las condiciones generales de la transformación conforme en la forma

$$dx = pdu + rdt \cos u,$$

$$dy = rdu - pdt \cos u,$$

de donde

$$dx + i dy = (p + ir)(du - dt \cos u).$$

Mediante la sustitución

$$s = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right), \quad z = \ln s - it$$

ésta se transforma en

$$dx + idy = (p + ir) \cos u \, dx.$$

Geoméricamente esto corresponde a: la proyección estereográfica de la esfera en el plano

$$\zeta = s(\cos t + i \operatorname{sen} t),$$

la transformación del plano ζ mediante el logaritmo

$$e = \ln \zeta = \ln s + it$$

la reflexión especular en la parte real del eje $z = e$. Tal transformación conforme de la esfera (sin polos) sobre el plano

$$z = \ln s - it = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) - it$$

se denomina proyección de Mercator en cartografía ¹⁾.

Por esto

$$x + iy = 2\Gamma(z) = 2\Gamma(\ln s - it), \quad x - iy = 2\Gamma(\ln s + it),$$

$\Gamma(z)$ es una función analítica con valores reales para z real de donde

$$x = \Gamma(\ln s - it) + \Gamma(\ln s + it),$$

$$iy = \Gamma(\ln s - it) - \Gamma(\ln s + it).$$

De este modo, ya Euler logró resolver prácticamente el problema general de la transformación conforme de la esfera en el plano.

La literatura matemática del siglo XVIII, en el plano que nos interesa aquí, representa una mezcla abigarrada de resultados importantes, los cuales sacan a luz la naturaleza de las magnitudes complejas, las no menos importantes aplicaciones de éstas a la hidrodinámica, cartografía y otras ciencias y abundantes errores e imprecisiones en la utilización de los objetos imaginarios. Las diferentes interpretaciones de los números complejos aún no se habían formulado en una concepción única, más aun esto se refiere a las variables complejas. Sin embargo, todos los elementos necesarios de la teoría general, los cuales abarcan las propiedades de las funciones de variable compleja, en lo fundamental estaban formadas, había llegado el momento de la creación de esta teoría. Este momento coincidió con el arribo del siglo XIX.

¹⁾ Véase A. И. Маркушевич. Очерки по истории теории аналитических функций. М., Гостехиздат, 1951, стр. 33. (A. I. Markushevich. Ensayo sobre teoría de las funciones analíticas.)

Introducción de los conceptos fundamentales de la teoría de funciones de variable compleja. La etapa siguiente de la historia de la teoría de funciones de variable compleja estuvo caracterizada por la introducción de definiciones precisadas de los conceptos fundamentales. Ante todo se trata del surgimiento de las interpretaciones geométricas del concepto de número complejo. Estas interpretaciones fueron las primeras que se destacaron en forma explícita de la masa de resultados acumulados en calidad de objetos de estudio especial sistemático. En el año 1799 y en años sucesivos surgieron una serie de trabajos en los cuales se daban interpretaciones más o menos cómodas del número complejo y se definían las reglas de operaciones. Lo general en todos los trabajos era la introducción de un plano, sobre el cual los números complejos se representaban o en forma de punto o en forma de segmento dirigido.

La representación geométrica de los números imaginarios y las operaciones con ellos fueron denominadas por C. Wessel (en el año 1799), Biot y Argand (en 1806), Gauss y enseguida por muchos otros científicos. No obstante, ellos conjugaron esta cuestión con problemas concretos en otros campos de las matemáticas. Un tratamiento teórico lo suficientemente general de la cuestión surgió inicialmente en los trabajos de Gauss y después en los trabajos de Cauchy.

C. Wessel, especialista en agrimensura, en el trabajo "Sobre la representación analítica de la dirección" (1799) propuso el problema de la búsqueda de una expresión analítica de la longitud y dirección de un segmento sobre el plano. Para ello utilizó los números complejos

$$z = x + \sqrt{-1}y = r(\cos \varphi + \sqrt{-1} \operatorname{sen} \varphi),$$

por el camino aclaró su esencia y relación con los números reales, para cuya representación es suficiente con una recta. Sobre los ejes coordenados introdujo los segmentos unitarios

$$+1, -1, +\varepsilon (= \sqrt{-1}), -\varepsilon$$

generalizando después este procedimiento con la adición de una tercera coordenada espacial unitaria $\pm \eta$. Los números representados eran vectores desde el origen de coordenadas, sobre éstos estaban definidas las operaciones y resuelta una serie de problemas incluso hasta la expresión analítica de la rotación.

Escrito en danés, el trabajo de Wessel quedó durante largo tiempo inadvertido. Una popularidad más amplia, pero no inmediatamente obtenida por los trabajos, aparecidos en el año 1806 de Argand y Biot. En éstos se realizó la misma idea de representación de un número imaginario por medio de la colocación de un segmento perpendicular al eje real. Gauss dominaba la idea de representación de un número complejo como elemento

de un espacio bidimensional, pero durante mucho tiempo no le dedicó a su exposición un trabajo especial, ya que desde su punto de vista era necesario contar con las convicciones de los contemporáneos. Sólo en 1831 Gauss publicó un trabajo sobre la teoría de los residuos biquadráticos, donde expuso la fundamentación teórica y la interpretación geométrica de los números complejos, dándoles por primera vez la denominación que se ha conservado hasta nuestros días. Para comprender mejor lo profundamente que penetró Gauss en la teoría de los números complejos es suficiente citar un fragmento de una carta de Gauss al astrónomo y matemático Bessel (1811; publicada sólo en 1880). En esta carta, con motivo de la introducción por él del logaritmo integral $\text{li}(x) = \int \frac{dx}{\ln x}$, Gauss escribía: “¿Qué debe enten-

derse por $\int \varphi x \cdot dx$ para $x = a + bi$? Evidentemente si se quiere partir de conceptos claros es necesario admitir que x , partiendo del valor para el cual la integral debe ser cero, mediante incrementos infinitesimales (cada uno de la forma $a + bi$) pasa a $x = a + bi$ y entonces se suman todos los $\varphi x \cdot dx$.

Así el sentido (de la integral) queda completamente establecido. Pero el paso se puede realizar de infinitas maneras: así como la totalidad de las magnitudes reales se pueden imaginar en forma de una línea recta infinita, también la totalidad de todas las magnitudes reales e imaginarias se pueden imaginar mediante un plano infinito, cada uno de cuyos puntos de abscisa a y ordenada b representará a la magnitud $a + bi$. El paso continuo de un valor de x a otro $a + bi$ entonces se representa mediante una línea, posiblemente de infinitas maneras. Afirmo ahora que la integral $\int \varphi x \cdot dx$ para dos cambios distintos siempre conserva un mismo valor, si dentro de la parte del plano comprendida entre dos líneas representantes del cambio, φx no se hace infinita. Este maravilloso teorema, cuya demostración no es difícil yo la daré en un caso adecuado. El teorema está vinculado con otras verdades magníficas relacionadas con el desarrollo en series”.

En este fragmento se contiene mucho: la interpretación precisa de los números imaginarios, la definición de integral en el plano complejo, el teorema integral (conocido actualmente como teorema de Cauchy), el desarrollo de una función analítica en serie de potencias. En esta misma carta, Gauss consideró $\int \frac{dx}{x}$ y su valor en el punto $x = 0$. En cada recorrido alrededor de este punto a la primitiva $y = \log x$ se le añadirá un sumando constante $\pm 2\pi i$.

El esclarecimiento del sentido de la integración en un plano complejo tuvo un significado especialmente grande, ya que la utilización de las variables complejas en los cálculos de integrales definidas difíciles ejerció, al parecer, la mayor influencia en aquella época sobre el desarrollo de la

teoría de funciones de variable compleja. Laplace (1749—1827) en una serie de trabajos, (1782—1812) muchas veces acudió a la ayuda de los imaginarios en la integración de funciones. Desarrolló el método de resolución de ecuaciones lineales en diferencias y diferenciales, conocido bajo la denominación de transformada de Laplace: la función incógnita $y(s)$ se reemplaza por la integral $\int \varphi(x)x^s ds$ o $\int \varphi(x)e^{-sx} dx$, donde $\varphi(x)$ es una nueva función incógnita. Esta transformación transforma, como decimos actualmente, la función original $f(t)$, $0 < t < \infty$ en la función

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

de la variable compleja $p = \sigma + it$. Las transformaciones necesarias (cambio de variable en la integración, integración según direcciones diferentes a la del eje real) Laplace aún las considera como “instrumentos del descubrimiento”, un método cómodo semejante a una inducción singular. Su valor real, naturalmente, es mayor: con ayuda de la transformación de Laplace y métodos análogos se resuelven en forma efectiva muchos problemas de electrotécnica, hidrodinámica, mecánica, conducción del calor, ya que así en las correspondientes ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales, el número de variables se simplifica. Especialmente amplia es su aplicación en el cálculo operacional.

Los resultados de Laplace y otros científicos que se ocupaban de problemas análogos se obtenían de esta manera durante el estudio de las propiedades de las series de potencias mediante el paso de los términos reales de la serie a términos complejos. La integración en el campo complejo es posible que aún no existiera; se integraban funciones imaginarias por el argumento real. Una nueva idea en esta dirección fue expresada por Poisson (alrededor del año 1820): elegir el camino de cambio de variable entre límites reales según una sucesión de valores complejos. El objetivo de esto era superar las dificultades relacionadas con la impropiedad de las integrales, debido a la conversión de la función subintegral en el infinito. Según expresión de Poisson.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$$

“no es una suma de diferenciales” ya que

$$\frac{1}{x} \Big|_{x=0} = \infty.$$

Pero si se introduce la sustitución

$$x = -e^{iz} = -(\cos z + i \operatorname{sen} z)$$

y se integra en z de 0 a $(2n + 1)\pi$, entonces la integral resulta igual a $-(2n + 1)\pi i$. De esta misma manera

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^m} = \frac{(-1)^m}{m-1} [\cos(m-1)(2n+1)\pi - 1].$$

Bajo la presión de los problemas prácticos, las dificultades relativas a la aplicación de las variables complejas fueron, en lo fundamental, superadas por una serie de científicos. Maduró la necesidad de una elaboración sistemática de la teoría de funciones de variable compleja y sus relaciones con las demás partes del análisis infinitesimal. El cumplimiento de esta tarea, en una parte considerable tocó su suerte a Cauchy.

En el "Análisis algebraico" y el "Resumen de las conferencias sobre cálculo diferencial e integral", Cauchy, como se sabe, se esforzó en contruir un sistema objetivo y riguroso del análisis infinitesimal. En este sistema encontraron repercusión los esfuerzos por sistematizar los resultados relacionados con la utilización en el análisis de los números complejos y las cantidades variables. En las conferencias de Cauchy, en esta rama, no aparece nada esencialmente nuevo, en comparación con los predecesores y contemporáneos. La variable compleja aquí, en lo fundamental aún era sólo un medio auxiliar para la resolución de problemas difíciles del cálculo integral; en la introducción de las operaciones era grande el elemento de la analogía.

No obstante, el mismo esfuerzo por la construcción de un sistema de análisis, naturalmente, obligó a Cauchy a la aclaración del sentido de los conceptos fundamentales y operaciones con los imaginarios. Los primeros resultados esenciales de Cauchy fueron publicados en el año 1825 en dos trabajos: "Memoria sobre la teoría de las integrales definidas" y "Memoria sobre las integrales definidas tomadas entre límites imaginarios". El primero de ellos fue escrito aún en el año 1814. En él, el objetivo era aún el mismo que antes: aplicar las magnitudes imaginarias al cálculo de integrales definidas. El punto de partida de Cauchy es la relación

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} (x, y) dy dx = \int_{y_0, x_0}^{y, x} f(x, y) dx dy,$$

conocido ya por Euler (1769). A continuación Cauchy elige dos funciones S y V que satisfacen las ecuaciones de D'Alembert-Euler:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial x}; \quad \frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Esta condición la satisfacen, como se sabe, las partes real e imaginaria de una expresión analítica

$$F(x + iy) = S + iV.$$

Colocando en las partes derecha e izquierda de la relación inicial en lugar de $f(x, y)$ respectivamente las partes derecha e izquierda de la ecuación de D'Alembert-Euler, Cauchy obtuvo:

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{\partial V}{\partial y} dy dx = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{\partial S}{\partial x} dx dy;$$

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{\partial S}{\partial y} dy dx = -\int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{\partial V}{\partial x} dx dy,$$

de donde

$$\int_{x_0}^x [V(x, Y) - V(x, y_0)] dx = \int_{y_0}^y [S(X, y) - S(x_0, y)] dy;$$

$$\int_{x_0}^x [S(x, Y) - S(x, y_0)] dx = \int_{y_0}^y [V(X, y) - V(x_0, y)] dy.$$

Sólo un poco antes de la publicación, Cauchy logró unir estas dos fórmulas en una para obtener la relación respecto a las funciones de variable compleja. La primera de las relaciones la multiplicó por i y la sumó con la segunda relación. Se obtuvo:

$$\int_{x_0}^x F(x + iY) dx - \int_{x_0}^x F(x + iy_0) dx =$$

$$= \int_{y_0}^y F(X + iy) dy - \int_{y_0}^y F(x_0 + iy) i dy,$$

$$\int_{y_0}^y F(x_0 + iy) i dy + \int_{x_0}^x F(x + iY) dx =$$

$$= \int_{y_0}^y F(x + iy_0) dx + \int_{x_0}^x F(X + iy) idy$$

lo que es el teorema de Cauchy para la integración por un contorno rectangular:

$$\int_{ADC} F(z) dz = \int_{ABC} F(z) dz.$$

Para esto Cauchy, independientemente de Gauss, indicó la necesidad de la exigencia de que $f(x, y) \neq \infty$ en los lados del rectángulo y dentro de él.

En la segunda de las memorias antes mencionadas, Cauchy esclarece el sentido de la integral $\int_{x_0+iy_0}^{x+iy} f(z) dz$ (fig. 55). Para conservar la analogía

con las integrales de funciones de variable real y tener la posibilidad de tratar la integral dada como límite de una suma integral, Cauchy indicó

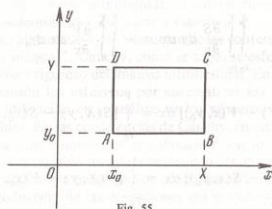


Fig. 55

que se debe establecer para $z = x + iy$ las relaciones:

$$x = x(t), y = y(t).$$

Estas funciones deben ser monótonas y continuas en la región $t_0 \leq t \leq T$ y satisfacer las condiciones:

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, x(T) = X, y(T) = Y.$$

Expresándolo de otra forma, la integral investigada, Cauchy la sustituyó por la integral a lo largo de cierta curva, la que une en el plano complejo, los puntos (x_0, y_0) y (X, Y) . Teniendo en cuenta las ecuaciones de la curva $x = x(t), y = y(t)$ llegamos a la integral

$$\int_{t_0}^T (x' + iy') f(x + iy) dt.$$

Después de esto sigue la formulación del teorema integral: si $f(x + iy)$ es finita y continua en el rectángulo $x_0 \leq x \leq X$ e $y_0 \leq y \leq Y$, entonces el valor de la integral no depende del camino de integración. Para su demostración Cauchy aplicó los métodos del cálculo variacional. Precisamente él sustituyó $x(t)$ e $y(t)$ por valores próximos $x(t) + \varepsilon u(t), y(t) + \varepsilon v(t)$, calculó la variación de la integral y estableció que ésta es igual a cero. La forma actual de la demostración del teorema integral fue obtenida en el año 1883 por Falke y en 1884 por Gurs.

Un paso completamente natural al análisis de los casos, cuando $f(z)$ se hace infinita en el interior o en el límite del rectángulo, llevó a Cauchy a la necesidad de introducir el concepto de residuo. Ya en la memoria del año 1814, llegó a él buscando la diferencia entre dos integrales con límites comunes, pero tomados a lo largo de diferentes caminos entre los cuales existen polos de la función. En 1826 aparece el propio término, residuo, el cual Cauchy introdujo de la siguiente forma: "Si después de encontrados los valores de x que hacen infinita a $f(x)$, se añade a uno de estos valores, denotado por x_1 , una cantidad infinitesimal ε y después se desarrolla $f(x_1 + \varepsilon)$ según las potencias crecientes de esta misma cantidad, entonces los primeros términos del desarrollo contendrán potencias negativas de ε y una de ellas será el producto de $\frac{1}{\varepsilon}$ por un coeficiente finito, al cual denominaremos residuo de la función $f(x)$, relativo al valor particular x_1 , de la variable x ". La suma de tales residuos Cauchy la denominaba residuo integral.

En un gran número de trabajos (16), Cauchy creó la teoría de los residuos. En lo fundamental esta teoría se conformó entre los años 1826—1829, pero Cauchy continuó desarrollándola también en años posteriores, buscando nuevas y nuevas aplicaciones de esta teoría a la resolución de diferentes problemas del cálculo integral (preferentemente al cálculo de integrales definidas) de las ecuaciones algebraicas, trascendentes y diferenciales (se trata de sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes constantes), de la teoría del desarrollo de funciones en series y de la física matemática. Es interesante que durante esto, Cauchy constantemente subrayaba la presencia de la idea sobre los residuos en las obras de Euler y no discutía su prioridad.

En los trabajos de Cauchy, por primera vez apareció la fórmula integral que es sumamente importante para el posterior desarrollo de la teoría de funciones de variable compleja y sus aplicaciones. Esta fue introducida en una serie de trabajos de Cauchy dedicados al desarrollo de las funciones analíticas en series. En su forma más clara apareció por primera vez en la memoria "Sobre la mecánica celeste y sobre el nuevo cálculo denominado cálculo de límites" (1831).

Inicialmente la fórmula integral de Cauchy fue obtenida como condición de desarrollo de una función en serie. Notemos que

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{npi} dp = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-npi} dp,$$

y cuando $n = 0$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} dp = 2\pi$$

Cauchy consideró primeramente un polinomio

$$f(x) = a_0 + a_1 \bar{x} + a_2 \bar{x}^2 + \dots + a_n \bar{x}^n,$$

donde $\bar{x} = xe^{pi}$ y obtuvo

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\bar{x}) dp = \int_{-\pi}^{+\pi} f\left(\frac{1}{x}\right) dp = 2\pi a_0 = 2\pi f(0).$$

Esta fórmula es cierta también para cualquier (según palabras de Cauchy) función $f(\bar{x})$, finita y continua, cuando se satisface la condición

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{ix} \frac{df(\bar{x})}{dp}.$$

Si $f(0) = 0$, entonces evidentemente

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\bar{x}) dp = 0.$$

Colocando en esta fórmula en lugar de $f(\bar{x})$ la expresión

$$\frac{\bar{x}[f(\bar{x}) - f(x)]}{x - \bar{x}},$$

donde $|x| < |\bar{x}|$, Cauchy obtuvo

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\bar{x} f(\bar{x})}{x - \bar{x}} dp &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\bar{x} f(x)}{x - \bar{x}} dp = \\ &= f(x) \int_{-\pi}^{+\pi} \left(1 + \frac{x}{x} + \frac{x^2}{x^2} + \dots\right) dp = 2\pi f(x). \end{aligned}$$

Consecuentemente

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\bar{x} f(\bar{x})}{x - \bar{x}} dp.$$

Si se utiliza la relación que tenía Cauchy

$$dp = \frac{d\bar{x}}{ix},$$

entonces se puede obtener la fórmula integral en su forma actual

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\bar{x})}{\bar{x} - x} d\bar{x}.$$

Pero la expresión mencionada para dp tiene lugar sólo si el módulo de \bar{x} es constante. De esta manera, el contorno de integración aquí es una circunferencia. El resultado obtenido por Cauchy es aún insuficientemente general. En la actualidad se sabe que el teorema es cierto para cualquier curva de Jordan cerrada rectificable tomada en calidad de contorno.

En otras memorias Cauchy consideró la aplicación de esta teoría a la teoría de convergencia de las series, para la deducción del término residual de la serie de Taylor y las operaciones con series. Tras Cauchy, muchos matemáticos de los siglos XIX y XX dedicaron sus trabajos a su teorema integral. Este último

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

como se sabe, da la expresión de $f(z)$ para cualquier z que se encuentra en la región de analiticidad de la función, a través de su valor sobre el contorno C . La amplia aplicabilidad de la integral de Cauchy en la teoría de las funciones especiales, la teoría analítica de las ecuaciones diferenciales, la teoría analítica de números, la física teórica, las diferentes ramas de la mecánica, determinó en lo sucesivo su actualidad que se conserva aún en nuestros días.

Junto a las memorias de Cauchy, y después de ellas surgieron muchos trabajos sobre la teoría de funciones de variable compleja. Es difícil enumerarlos, más aún caracterizarlos. Aquí mencionemos ante todo el notable trabajo de Abel "Investigación de la serie

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots,$$



B. Riemann (1826—1866)

donde m y x son números complejos cualesquiera", la cual contiene la deducción de dos teoremas notables. El primer teorema: si la serie $f(a) = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \dots$ converge para cierto $\alpha = \alpha_0$, entonces converge para los α menores a α_0 en módulo (el concepto de módulo aún no existe en la obra de Abel, lo que grava el lenguaje de la exposición). El segundo teorema: $f(\alpha - \beta) - f(\alpha)$, si $\beta \rightarrow 0$, $\alpha \leq \alpha_0$, esto es, la suma de una serie de potencias convergente es una función continua de su argumento. Aquí Abel advirtió un error de Cauchy, el cual afirmaba que la suma de una serie convergente de funciones continuas es continua. El aporte en general de Abel a la teoría de funciones, en la cual echó las bases de la teoría de las funciones algebraicas y (al mismo tiempo que Jacobi) de la teoría de las funciones elípticas es tan significativo que merece una investigación especial.

Los años 40 del siglo XIX están marcados en la historia de la teoría de

funciones de variable compleja por grandiosos descubrimientos que en esencia culminaron el período de su formación. En el año 1843 Laurent encontró la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

que actualmente lleva su nombre. En estos mismos años Liouville aplicó la teoría de Cauchy a la teoría de las funciones elípticas. Entre los teoremas demostrados por él se tiene, por ejemplo: si una función analítica $f(x)$ en todo el plano complejo esta acotada en valor absoluto, entonces $f(x) = \text{const}$. Puiseaux elaboró la teoría de las funciones algebraicas y realizó el desarrollo de las funciones algebraicas multiformes según potencias fraccionarias. El carácter de los nuevos descubrimientos y su nivel se hicieron ya muy próximos a los actuales.

Uno de los criterios de que una teoría ya se formó es la aparición de monografías, las cuales contienen su exposición sistemática en un estilo próximo al axiomático y que tienen además un objetivo docente. En la teoría de funciones de variable compleja este momento acaeció a mediados del siglo XIX. El profesor de la Universidad de Petersburgo I. I. Somov en el año 1850 publicó los "Fundamentos de la teoría de las funciones elípticas". Seis años después en 1856, Briot y Bouquet editaron una pequeña memoria "Investigación de las funciones de variable imaginaria", que resultó, en esencia, el primer manual. Desde el año 1861 en la Universidad de Berlín comenzaron los cursos de lecciones de Weierstrass sobre la teoría de funciones analíticas.

Creación de la teoría geométrica de funciones de variable compleja. En los años 40 del siglo pasado, simultáneamente con la culminación de la formación de los fundamentos de la teoría de las funciones analíticas, en esta teoría fueron introducidas nuevas ideas, las cuales variaron esencialmente su composición, carácter y objetivos. Un gran grupo de ideas se introdujeron con los trabajos de B. Riemann (1826—1866).

Las investigaciones de Riemann en el dominio de la teoría de funciones de variable compleja se caracterizan por la presencia de amplias analogías, las cuales vinculan esta teoría con otros muchos campos de las matemáticas. Así mismo fue superado, en grado considerable, el aislamiento de las ideas sobre funciones de variable compleja. Simultáneamente en los marcos de esta misma teoría se conformaron nuevos capítulos, vinculados estrechamente con otras disciplinas. Los resultados fundamentales de Riemann están contenidos en su tesis "Fundamentos de la teoría general de funciones de variable compleja" (1851) y en la "Teoría de las funciones de Abel" (1857). Se sabe que una función analítica $w = u + iv$ del argumento compleja $z = x + iy$ satisface (además de las condiciones naturales de dife-

renciabilidad respecto al conjunto de variables reales y de continuidad) las ecuaciones de D'Alembert-Euler:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

De aquí evidentemente se obtienen las condiciones

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

En la época de Riemann surgieron muchas interpretaciones de este notable resultado. Helmholtz trató a u como el potencial de la velocidad del movimiento de un líquido incompresible en el plano (x, y) ; para esto v era la función de corriente. En electrotecnia cuando se trataba de la corriente estacionaria. Kirchhoff introdujo la función u y la denominó potencial electrostático. Ohm la definió como intensidad y Fourier interpretó a u como la temperatura en la resolución del problema sobre el movimiento estacionario del calor. Finalmente, Gauss trató el hecho señalado como la condición de que el valor

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d(u + iv)}{d(x + iy)}$$

dependa sólo del punto $x + iy$ y no de la dirección $dx + i dy$, esto es la transformación del plano (x, y) en el plano (u, v) es una transformación conforme.

Riemann también partió de que las partes real e imaginaria de la función satisfacen la ecuación de Laplace:

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0,$$

esto es, son armónicas. Si se conoce la función u entonces la función conjugada v se determina con exactitud de hasta una constante aditiva:

$$v = \int \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right).$$

Riemann decidió que se creaban las condiciones para el paso de las ideas de la física matemática a la teoría de funciones. Además, los métodos de resolución de la ecuación de Laplace estaban en aquella época lo suficientemente bien elaborados. El problema de contorno correspondiente, denominado problema de Dirichlet se formula así: encontrar los valores de una función en los puntos de un recinto, dados sus valores en la frontera del recinto. Las resoluciones del problema de Dirichlet para una serie de casos especiales fueron elaborados por Gauss (años 1813 y 1840), Green (1828), Kirchhoff, Dirichlet y otros. En estas investigaciones más tarde cristalizó el

teorema de existencia: si en la frontera de un recinto G simplemente conexo se da una función continua $u(x, y)$, entonces existen una función $f = u + iv$, analítica dentro de G , cuya parte real se aproxima continuamente a valores de frontera dados.

En este círculo de cuestiones Riemann investigó el problema: en qué medida las funciones analíticas se determinan por sus condiciones en la frontera. Rápidamente se aclaró en aquella época que en el caso de un recinto finito acotado por una curva cerrada única, para la determinación de la función $w = u + iv$ de $z = x + iy$ es suficiente dar la distribución frontera de los valores u y el valor de v en un punto del recinto. Se puede, inversamente, dar la distribución frontera de v y los valores de u en un punto; se puede, en fin dar en cada punto del contorno una relación $\varphi(u, v)$ o para cada par de puntos frontera dos reglas que relacionen los valores de u y v en estos puntos.

En todos los razonamientos Riemann se apoyaba en el denominado principio de Dirichlet: entre todas las funciones posibles que tienen idénticas distribuciones frontera en el recinto G , aquella función que satisface

$$\min I = \min \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz$$

será armónica en el recinto dado. Esta proposición Riemann la conoció, al parecer, de las conferencias de Dirichlet. No obstante, ésta era conocida además por Gauss, Thompson, Kirchhoff, en relación con la resolución de problemas de la física matemática (teoría del potencial). Le fue dado un sentido físico completamente definido: la integral I expresa la energía cinética del flujo estacionario de un líquido incompresible homogéneo, donde u es el potencial de velocidades.

Sea, por ejemplo, dado el caso bidimensional: la integral

$$\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

está definida para el área del círculo, además está dada una distribución frontera continua u . Esta integral no es negativa. Entonces existe, según Riemann, el extremo inferior no negativo de los valores de la integral, el cual se alcanza. Así mismo se afirma la existencia de la función u con distribución frontera dada que comunica un mínimo a la integral dada. Para esta función

$$\delta \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0$$

de aquí como condición necesaria se deduce

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Sin embargo Riemann no logró dar la demostración de la existencia de la función u , la cual hace mínima la integral I . Además, Weierstrass, conociendo los razonamientos de Riemann anteriormente señalados, citó un ejemplo de un conjunto de funciones admisibles (continuas, diferenciables, que toman en la frontera valores dados) las cuales no contienen la función correspondiente al extremo inferior. Así, es por ejemplo, el conjunto de todas las curvas con curvatura continua que unen los puntos A, B, C . La menor línea es la quebrada ABC que no se incluye en el conjunto considerado, ya que la continuidad de la curvatura se viola en el punto C (ver fig. 56).

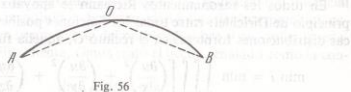


Fig. 56

Los teoremas de Riemann de existencia, surgidos de analogías físicas, los cuales fueron objetos de discusiones, durante largo tiempo pendieron en el aire. Fueron demostrados por Schwarz (1870) y Neumann (1884) por otros caminos y la fundamentación de las ideas de Riemann la logró demostrar sólo D. Hilbert (1901—1909), aplicando para lograr este objetivo los métodos directos del cálculo variacional. En una forma más general esta cuestión fue investigada por R. Courant y H. Weyl.

Otro grupo de analogías, introducidas por Riemann, tiene su punto de partida en la interpretación geométrica de los números complejos y de las funciones de variable compleja. En esta época ya se sabía que las funciones analíticas de variable compleja determinan una transformación conforme de un plano en otro, además no siempre biunívoca. Con esto se interrelaciona la representación de las funciones analíticas, obtenida de un elemento inicial, mediante prolongaciones continuas determinadas por las ecuaciones de D'Alembert—Euler. La posible variedad de las prolongaciones y también la tendencia a superar la no univocidad de las transformaciones conformes, al parecer llevaron a Riemann a la idea de superficies especiales en casos necesarios de varias hojas; para estas superficies se consolidó, manteniéndose aun en nuestros días, la denominación de superficies de Riemann.

Los resultados de la teoría de funciones de variable compleja, cuando

son extendidos a las superficies de Riemann, adquieren gran generalidad. Además, Riemann estableció la relación entre ambos tipos de analogías, utilizando la interpretación física para la obtención de los teoremas de existencia para las funciones sobre superficies de Riemann cerradas y de varias hojas. Estas superficies se consideran como conductores homogéneos. Cuando se conecta a éste una batería surge un campo, cuyo potencial u es unívoco, continuo y satisface la ecuación $\Delta u = 0$ sobre toda la superficie. Los puntos de contacto con la batería son puntos de discontinuidad de la función u , la cual se comporta en estos puntos como $\ln r_1$ y $\ln r_2$ respectivamente. De esta forma se obtiene el teorema de existencia: en cada superficie de Riemann cerrada existe la función potencial u , continua en cualquier lugar a excepción de dos puntos elegidos de antemano, donde u se hace infinita como el logaritmo. La parte imaginaria v en la superficie de Riemann dada se encuentra después de los cortes correspondientes, los cuales garantizan la uniformidad de las ramas de la función $u + iv$, que conduce a la necesidad del cálculo del módulo de periodicidad.

Este ciclo de trabajos de Riemann, que tratamos aquí, pusieron el inicio a un amplio e importante campo de la teoría de funciones actual, conocida ahora bajo la denominación unificada de geométrica. En estos trabajos están contenidos la teoría, profundamente elaborada de las transformaciones conformes; entre ellos el teorema fundamental sobre la existencia y unicidad (bajo condiciones adecuadas) de la transformación conforme en el círculo de un recinto simplemente conexo arbitrario (cuya frontera contiene más de un punto).

En estos trabajos están contenidos una serie de resultados que en esencia son topológicos, por ejemplo, el teorema de que el número de cortes de la superficie necesario para su conversión en simplemente conexa, no depende de la elección del sistema de cortes. Después de algunos decenios en los límites de los siglos XIX y XX, las ideas topológicas de Riemann las cuales no recibieron de su autor una formulación lo suficientemente rigurosa se diluyeron en la topología que se formaba.

A Riemann le pertenece otra idea notable. Se trata de la aplicación de la función de variable compleja

$$\zeta(S) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^S}$$

(hoy ampliamente conocida como ζ -función de Riemann) a la determinación de la cantidad de números primos en un segmento dado de la serie natural. Junto con las investigaciones de Chebishev, los resultados obtenidos aquí por Riemann, dieron comienzo a la teoría analítica de los números. Las hipótesis de Riemann sobre las propiedades de la ζ -función, en especial

la hipótesis de que todos sus ceros no triviales yacen en la recta $x = +\frac{1}{2}$, a pesar de los enormes esfuerzos, está aún sin demostrar.

Finalmente, no podemos dejar de llamar la atención del lector aún hacia otro ciclo de trabajos de Riemann, de contenido próximo a su teoría geométrica de las funciones de variable compleja. Se trata de las investigaciones de las diversas clases de funciones, las cuales satisfacen ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes algebraicos. Se considera la familia de funciones

$$y = \sum_{i=1}^n c_i y_i.$$

Las funciones y_j ($i = 1, 2, \dots, n$) son analíticas en todo el plano complejo, con excepción de un número finito de puntos a_j ($j = 1, 2, \dots, k$). Cuando se realiza un recorrido en torno a estos puntos, las funciones dadas sufren una transformación lineal, también determinada para cada punto. A continuación se considera la totalidad de todos los posibles caminos cerrados que no pasan a través de los puntos a_j . A ellos les corresponde un conjunto de transformaciones lineales de la familia dada de funciones, esto es su grupo de monodromía. El problema consiste en construir una ecuación diferencial cuyas soluciones sean todas las funciones de la familia dada.

Estas investigaciones de Riemann, aunque también quedaron incompletas, (pudieron ser culminadas sólo en el siglo XX por D. Hilbert), dan la base para considerarlo como uno de los fundadores de la teoría analítica de las ecuaciones diferenciales. No podemos aquí tocar otras ideas y trabajos de Riemann para no alejarnos demasiado del sentido principal del presente capítulo.

La teoría geométrica de funciones de variable compleja obtuvo un rápido desarrollo después de la muerte a destiempo de Riemann. Ya a fines de los años 60 del siglo pasado surgieron una gran cantidad de trabajos cuyos autores elaboraban diferentes aspectos de la teoría de funciones de variable compleja, partiendo de las ideas de Riemann. En relación con esto surgió la necesidad de un estudio lo más completo posible de la herencia científica de Riemann y la edición de sus obras. Así en el año 1876 H. Weber y R. Dedekind editaron las obras completas de Riemann. En el año 1902 surgieron importantes suplementos a estas obras completas preparadas por W. Wirtinger y M. Noether. En ruso un tomo de las obras de Riemann fue publicado en el año 1948. Fue preparado por V.L. Goncharov. Remitimos al lector a su interesante resumen de los trabajos científicos de Riemann y comentarios.

Dirección analítica del desarrollo de la teoría de funciones de variable compleja. Otra dirección en el desarrollo de la teoría de funciones de variable compleja en el siglo XIX, a la cual se le consolidó en la historia la de-



K. Weierstrass (1815—1897)

nominación de “analítica”, se formó en los trabajos de K. Weierstrass (1815—1897). En la esfera de los intereses científicos de éste se incluían preferentemente los problemas del análisis matemático: sus fundamentos clásicos, la teoría de funciones de variable compleja, el cálculo variacional, la geometría diferencial. Para este amplio campo de K. Weierstrass toda la vida elaboró un sistema de fundamentación lógica, apoyándose en la rigurosa teoría de los números reales, como un medio en el cual funcionan todos los conceptos y métodos fundamentales. Precisamente en sus conferencias fue construido en lo fundamental el estándar actual de rigor en el análisis matemático y la estructura que se ha hecho tradicional.

Estos mismos objetivos de construcción rigurosa y sistemática perseguía K. Weierstrass cuando fundaba consecuente y perseverantemente la teoría de funciones. Ya en el año 1841, pudo generalizar el teorema de Cauchy sobre el desarrollo en serie de potencias de la función de variable

compleja, continua y diferenciable en el anillo, generado por dos circunferencias concéntricas. La serie buscada contenía términos con exponentes positivos y negativos y era en esencia una serie de Laurent. Este último, como fue notado antes, encontró esta serie en el año 1843 y la tradición histórica conservó para esta serie su nombre. Los resultados de K. Weierstrass, los cuales durante largo tiempo no fueron publicados, eran menos conocidos. Se extendieron preferentemente entre los oyentes de sus conferencias. Alrededor del año 1842, K. Weierstrass dominaba la idea de prolongación analítica.

No obstante, en estos años los intereses principales de K. Weierstrass se concentraban en el estudio de clases concretas de funciones: elípticas, hiperelípticas y abelianas y con las cuestiones colaterales con ellas. Las concepciones generales en la teoría de funciones de variable compleja comenzaron a elaborarse en las conferencias que dictó K. Weierstrass en el transcurso de largos años en la Universidad de Berlín. Junto a las conferencias sobre funciones elípticas, sus aplicaciones a los problemas geométricos y mecánicos, sobre las funciones abelianas y el cálculo variacional, comenzaron a aparecer sus cursos sobre la teoría de funciones analíticas. Desde el año 1856, K. Weierstrass dictó conferencias sobre la representación de funciones mediante series convergentes y desde 1861 sobre la teoría general de funciones. Finalmente aparecieron las obras especiales de K. Weierstrass: "Hacia la teoría de funciones analíticas uniformes" (1876) y "Hacia el estudio sobre las funciones" (1880), en los cuales su teoría de las funciones analíticas adquirió el conocido acabado.

En la base de la teoría de K. Weierstrass yace el concepto de serie de potencias. Para ella se define el círculo de convergencia y se introduce la definición de convergencia uniforme. A continuación se consideran sólo las series uniformemente convergentes. Respecto a éstas se demuestra sucesivamente una serie de teoremas; en particular se demuestra que si la serie converge uniformemente en una vecindad de cada punto yacente en el interior o en la frontera del dominio dado, entonces converge uniformemente en todo el dominio.

Weierstrass introduce el concepto de elemento de una función

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x).$$

Para ello, en el dominio de convergencia de la serie, él elige un punto a_0 . En su vecindad tanto la función $f_k(x)$, como $F(x)$ se expresan por series de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x - a_0)^k = P_0(x - a),$$

el cual recibió en las obras de Weierstrass la denominación de elemento de la función $F(x)$.

Supongamos ahora que el punto a_1 yace en una vecindad de a_0 y $P_1(x - a_1)$ es el elemento correspondiente de la función $F(x)$. Para aquellos x , que yacen tanto en una vecindad de a_0 como en una vecindad de a_1 , tiene lugar

$$P_1(x - a_1) = P_0(x - a_0) = \sum_{\mu=0}^{\infty} P_0^{(\mu)}(a_1 - a_0) \frac{(x - a_1)^\mu}{\mu!},$$

donde

$$P_0^{(\mu)}(a_1 - a_0) = \left[\frac{d^\mu P_0(x - a_0)}{dx^\mu} \right]_{x=a_1}.$$

Si a es un punto arbitrario del campo de convergencia, entonces entre a_0 y a se puede colocar una sucesión de puntos: a_1 de una vecindad de a_0 , a_2 en una vecindad de a_1 , etc., incluso hasta a_n , el cual ya está situado en una vecindad de a . Para los elementos correspondientes de la función $F(x)$ tiene lugar:

$$P_1(x - a_1) = \sum_{\mu=0}^{\infty} P_0^{(\mu)}(a_1 - a_0) \frac{(x - a_1)^\mu}{\mu!}$$

$$P_2(x - a_2) = \sum_{\mu=0}^{\infty} P_0^{(\mu)}(a_2 - a_1) \frac{(x - a_2)^\mu}{\mu!}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$P(x - a) = \sum_{\mu=0}^{\infty} P_n^{(\mu)}(a - a_n) \frac{(x - a)^\mu}{\mu!}$$

Tal es el algoritmo de formación, a partir de un elemento arbitrario en el campo de convergencia, de cualquier otro elemento $F(x)$ en este mismo campo.

Puede suceder que el campo de convergencia de la serie de $P(x - a)$ salga del campo inicial. Entonces de $P_0(x - a_0)$, aplicando el algoritmo indicado, se puede constituir un conjunto de series, cuyos campos de convergencia salen de los límites del campo inicial. Así se construye la función analítica completa $F(x)$, como el conjunto de todas las prolongaciones de

cualquier elemento. Después se realizan las investigaciones: de los puntos singulares en la frontera del círculo de convergencia, de la uniformidad o multiforidad de las funciones, del comportamiento de una función entera en el infinito, del desarrollo de la función en productos y otras cuestiones concretas de la teoría. El aparato se distingue por su uniformidad; son las series de potencias, las operaciones con ellas, apreciaciones, frecuentemente muy exactas.

Tras los trabajos de K. Weierstrass, en el transcurso del último cuarto del siglo XIX surgieron una gran cantidad de trabajos sobre la teoría analítica de las funciones de variable compleja. Entre ellos un lugar notable lo ocupan los trabajos de los discípulos de Weierstrass, S.V. Kovalevskaya y Mittag-Leffler y también Ch. Hermite, E. Picard, E. Laguerre, H. Poincaré y otros. Las conferencias de Weierstrass sirvieron, durante muchos años, de modelo de textos sobre la teoría de funciones de variable compleja, las cuales comenzaron a surgir desde entonces muy frecuentemente.

Transformación de la teoría de funciones de variable compleja en un conglomerado de disciplinas analíticas. A fines del siglo XIX, la teoría de funciones de variable compleja se ramificó enormemente, convirtiéndose en un amplio conglomerado de disciplinas. Actualmente se incluyen en ella la teoría geométrica de funciones, basada en la teoría de las transformaciones conformes y de las superficies de Riemann. Obtuvieron una forma completa la teoría de los diferentes tipos de funciones: enteras y meromorfas, elípticas y modulares, automorfas y armónicas, algebraicas. En estrecha relación con esta última clase de funciones se desarrolló la teoría de las integrales abelianas. Con este complejo lindaba la recién creada teoría analítica de las ecuaciones diferenciales y la teoría analítica de los números. La teoría de las funciones analíticas estableció y fortaleció las relaciones con otras disciplinas matemáticas.

En esta época cambió también el carácter de las investigaciones científicas en el campo de la teoría de funciones de variable compleja. Inicialmente, como se mostró antes, la mayoría de estas investigaciones se realizaban en el plano de desarrollo de una de las tres direcciones: la teoría de las funciones monogéneas o diferenciales de Cauchy, las ideas geométricas y físicas de Riemann, la dirección analítica de Weierstrass. Sólo gradualmente, las diferencias y discusiones relacionadas con ellas se superaron. En los albores del siglo XX surge y crece rápidamente el número de trabajos en los cuales se realiza una síntesis de las ideas y métodos, al parecer diferentes. Se crea una concepción única general de la teoría de funciones de variable compleja, la cual encontró su expresión en la estructura de las monografías, textos y en el carácter de los métodos de investigación. Uno de los conceptos fundamentales donde se notó claramente la relación y la correspondencia de las ideas geométricas y del aparato de las series de po-

tencias fue el concepto de prolongación analítica. De los numerosos ejemplos que podrían citarse como confirmación de esta tesis el más relevante es el trabajo de Hadamard "La serie de Taylor y su prolongación analítica" (1901). En una serie de trabajos de Poincaré, Klein y Koebe fue demostrada la relación de la geometría de Lobachevsky con las superficies de Riemann y el significado de la geometría no euclídeana en el estudio de estas superficies y de las propiedades de las funciones analíticas relacionadas con ellas.

F. Klein desarrolló las interpretaciones física de las funciones de variable compleja en el trabajo "Sobre la teoría de Riemann de las funciones algebraicas y sus integrales" (1881). Los trabajos de N.E. Zhukovski y S.A. Chaplignin jugaron un enorme papel en la historia de las funciones analíticas, ellos descubrieron el inabarcable dominio de sus aplicaciones a la aere e hidrodinámica. La teoría analítica de las ecuaciones diferenciales resultó un peculiar abastecedor de diferentes funciones especiales, elaboradas con los recursos de la teoría de las funciones analíticas, las funciones modulares de Hermite, las automorfas de Klein y Poincaré, las funciones de Schwarz, etc. En la construcción de la teoría analítica de las ecuaciones diferenciales se utilizaron, ampliamente, materiales de diferentes ramas de la teoría de funciones analíticas. Así procedió, por ejemplo, Fuchs, discípulo de Weierstrass.

En la teoría de las funciones analíticas, en calidad de elementos de base única fue introducida una serie de conceptos de la teoría de conjuntos de Cantor, de la teoría de funciones de variable real (C. Jordan, E. Borel, H. Lebesgue, T. Stieltjes, R. Baire), de la teoría de grupos y topología. El conjunto de los conceptos fundamentales tales como recinto, su frontera, límite, conexidad, convergencia, analiticidad, continuidad y otros, sufrió un profundo análisis lógico y especificación lo que consolidó la unidad de criterios sobre todas las cuestiones de la teoría.

La teoría general de las funciones de variable compleja penetró también en la práctica pedagógica, generando dos tipos de manuales: a) libros, dedicados especialmente a esta cuestión; b) cursos generales de análisis matemático, donde esta teoría se incluye como una parte componente. Los textos del segundo tipo, hacia comienzos del siglo XX, al parecer, predominaron. Como ejemplo pueden servir los cursos de Bertrand, Picard y finalmente Goursat, el cual en el "Curso de análisis matemático" (1902) incluyó la teoría de las funciones analíticas (tomo segundo, parte primera).

Más tarde, con la ampliación de los programas de estudio en la parte relativa a la teoría considerada, ambos tipos de literatura docente obtuvieron iguales derechos y se aplican en dependencias de los problemas generales del centro de enseñanza.

7.6. Transformación de la geometría

Las ciencias geométricas hacia comienzos del siglo XIX. La geometría hacia comienzos del siglo XIX representaba ya un gran complejo de disciplinas, surgidas del análisis y generalizaciones de los datos sobre las formas espaciales de los cuerpos, utilizando los métodos de otros campos de las matemáticas y en virtud de esto, estrechamente entrelazadas con ellas. Junto a las partes elementales, en la geometría se incluyeron casi todas aquellas partes las cuales aun actualmente conforman la estructura de sus ramas superiores, cuyo desarrollo constituye un problema actual de las matemáticas modernas.

La geometría analítica, surgida ya en el siglo XVII, realizó un gran camino de desarrollo y determinó su lugar como parte de la geometría que estudia las figuras y transformaciones dadas por ecuaciones algebraicas con ayuda del método de coordenadas utilizando los métodos del álgebra. Además de sus papeles docente y aplicado, en ella misma se advirtió una tendencia del desarrollo consistente en el perfeccionamiento y generalización del método de coordenadas y además en la intensificación de la analiticidad en la investigación de las imágenes geométricas, lo que es especialmente importante para las aplicaciones. La primera de estas tendencias encontró, como se sabe su realización en la introducción de diferentes coordenadas. Tenemos en cuenta las coordenadas homogéneas, que representan las relaciones de dos variables hacia la tercera, las proyectivas, esto es, lineales, combinaciones de coordenadas homogéneas introducidas por G. Darboux, las coordenadas tetracíclicas y pentaesféricas, etc. La segunda tendencia llevó a la inclusión en la geometría analítica de los métodos vectoriales.

La geometría diferencial ocupó, como fue mostrado, un notable lugar en la geometría hacia fines del siglo XVIII. Lo característico para esta parte de la geometría, la utilización de los conceptos y métodos del cálculo diferencial, condicionó relaciones estables y a largo plazo con el análisis matemático y con numerosos problemas aplicados. A comienzos del siglo XIX, para la geometría diferencial se abrieron nuevas posibilidades de desarrollo, gracias a la introducción por Gauss (1824) de la geometría interior de las superficies. En el proceso de creación de la teoría general de las superficies, la geometría diferencial adquirió nuevas relaciones especialmente con las geometrías no euclidianas.

Los métodos aparentemente detenidos en su desarrollo desde la época de Desargues y Pascal, de estudio de las propiedades de las figuras, invariantes respecto a la proyección en los años 20 del siglo XIX se conformaron en los trabajos de J. Poncelet y otros en una nueva rama de la geometría, la geometría proyectiva. La separación de las propiedades proyectivas de las figuras en una clase independiente y el establecimiento de las

correspondencias entre las propiedades métricas y proyectivas fueron objeto de muchas investigaciones, realizadas tanto por métodos sintéticos (Steiner, Chasles, Standt y otros) como por analíticos (Möbius, Study, Cartan y otros). En el sistema de la geometría moderna, la geometría proyectiva se incluye como la parte que goza de una gran generalidad, con la posibilidad de incluir en un sistema único muchas teorías geométricas. Tal situación, la geometría proyectiva se la debe, a la influencia de la geometría de Lobachevski y las investigaciones posteriores de A. Cayley y F. Klein.

Los cambios introducidos en la geometría desde el lado de las ramas indicadas es muy significativo. Sin embargo, una reconstrucción radical de todo el contenido de la geometría y de su estructura se determinó no por estos cambios. El contenido fundamentalmente nuevo fue introducido en ella por la geometría de Lobachevski. Por ello, fundamentalmente nos dedicaremos en lo que sigue a la exposición de la historia de la geometría de Lobachevski y, en general, a las geometrías no euclidianas y también a su influencia en la formación de la geometría moderna.

Descubrimiento de la geometría de Lobachevski y algunas de sus particularidades características. El fundador de la geometría no euclidea Nicolai Ivanovich Lobachevski (1792—1856) nació en el Bajo Novgorod (actualmente ciudad de Gorki) en la familia de un funcionario pobre. Terminó estudios en la Universidad de Kazán (1811) y trabajó en ella muchos años. Enseguida (desde el año 1816) fue ya profesor y después de algunos años rector (desde 1827 hasta el año 1846) de esta Universidad. Gracias a sus esfuerzos, la Universidad de Kazán se convirtió en un centro de enseñanza de primera clase. Muchas fuerzas N.I. Lobachevski dedicó al mejoramiento de la actividad de las escuelas.

La concepción del mundo de Lobachevski era materialista. En sus ideas sobre los conceptos fundamentales de las matemáticas, en particular de la geometría, subrayaba fuertemente su procedencia material, considerándolos como reflejo de relaciones existentes realmente entre los objetos del mundo real. Las abstracciones matemáticas no pueden originarse arbitrariamente, ellas surgen como resultado de la interrelación del hombre con el mundo material. El conocimiento científico tiene un objetivo único: estudio del mundo real. El criterio de verdad del conocimiento científico es según Lobachevski la práctica, la experiencia.

Lobachevski no era un especialista en el dominio estrecho de las matemáticas. Su herencia científica incluye trabajos serios sobre álgebra ("El álgebra o el cálculo de finitos" 1834 y otros) y sobre análisis matemático ("Sobre la desaparición de las líneas trigonométricas", 1834; "Sobre la convergencia de series infinitas", 1841; "Sobre el valor de ciertas integrales definidas", 1852; etc.). Fue el primero que introdujo la diferencia entre continuidad y diferenciabilidad de funciones, encontró un método de reso-



N.I. Lobachevski (1792—1856)

lución numérica de ecuaciones algebraicas, conocido bajo su nombre, etc. Sin embargo, la mayor, se puede decir que inmortal, gloria de Lobachevski la merecen sus trabajos sobre geometría.

El punto de partida de las investigaciones de Lobachevski sobre geometría no euclídeana fue el axioma sobre las paralelas. Como se sabe el sistema, construido deductivamente, de la geometría euclídeana se apoya en cierto conjunto de axiomas. Como posteriormente mostró D. Hilbert, estos axiomas introducen diferentes aspectos de los conceptos: de enlace o pertenencia, de orden, de movimiento o de congruencia, de continuidad y de paralelismo. El último de estos axiomas (el cual figura en los "Elementos" de Euclides en calidad de quinto postulado) es como si estuviera aparte. Para él, en virtud de la complejidad de su formulación, no se le reconocía la propiedad de evidencia, y en el transcurso de muchos siglos se realizaron esfuerzos para dar su demostración, naturalmente, sin éxito.

La geometría, en dependencia de que se utilice o no el axioma sobre las paralelas se divide en dos partes. Aquella parte, donde se incluyen proposiciones que no se apoyan en este axioma, lleva el nombre de geometría absoluta. Lobachevski, el cual inicialmente se esforzó por dar la demostración del mencionado axioma, enseguida se convenció de la posibilidad de dividir la geometría en absoluta y no absoluta y lo llevó a cabo. Tras esto probó sustituir el axioma sobre las paralelas por su negación: supuso que a través de un punto que no está sobre una recta dada puede pasar más de una recta que yace en un plano con la recta dada y no se intercepta con ella cuando se prolonga. Además advirtió que no se obtiene una contradicción formal y el sistema de deducción se conforma en una nueva geometría diferente de la euclídeana, pero tan lógicamente rigurosa y consecuente, a pesar de lo desacostumbrado y extraño de sus afirmaciones.

El 11 (23) de febrero del año 1826 puede ser considerado el día de nacimiento de la geometría no euclídeana, cuando en la reunión de la sección de ciencias físico-matemáticas de la Universidad de Kazán, Lobachevski informó sobre su obra "Exposición breve de los fundamentos de la geometría con una demostración lógica del teorema de las paralelas". Después de tres años, en 1829, editó su obra, en forma ampliada, bajo la denominación: "Sobre los elementos de geometría". En lo sucesivo Lobachevski desarrolló su nueva geometría, publicando una serie de trabajos: "Geometría imaginaria" (1835), "Aplicación de la geometría imaginaria a ciertas integrales" (1836), "Nuevos elementos de la geometría con una teoría completa de las paralelas" (1834—1838), un pequeño libro "Investigaciones geométricas" en alemán (1840), "Pangeometría" (1855).

Los esfuerzos por demostrar el axioma sobre las paralelas por reducción al absurdo tuvieron lugar antes de los trabajos de Lobachevski. I. Sacheri (1733), incluso, obtuvo una serie de proposiciones, las cuales después, equivocadamente, reconoció como contradictorias y por consiguiente el axioma sobre las paralelas como demostrado. I. Lambert alrededor del año 1766 (publicado en el año 1786), siguiendo por este mismo camino, no pudo conciliarse con el sistema de deducciones obtenidas ni tampoco refutarlas. Investigaciones análogas realizaron F. Schweikart (1818) y F. Taurinus (1825). Sin embargo, sólo el matemático húngaro J. Bolyai (1802—1860) expresó claramente la misma idea de Lobachevski y hacia el año 1832 independientemente de este último desarrolló el sistema de la geometría no euclídeana, publicando la obra: "Apéndice, esto es, anexo, el cual contiene la ciencia sobre el espacio absolutamente verdadero". Después de la muerte de Gauss (1855) se aclaró que él también descubrió los resultados iniciales de la geometría de Lobachevski pero los calló por temer a comprometer su reputación científica. Incluso no se decidió apoyar al joven J. Bolyai, cuando éste le mandó su trabajo. El verdadero valor del

científico, propio de Lobachevski, se reflejó de forma especialmente brillante en el ambiente de no reconocimiento y ataques creados alrededor de sus trabajos, lo cual se prolongó hasta su muerte.

La geometría de Lobachevski en su parte absoluta no se diferencia en esencia de la geometría de Euclides. En aquella parte, la cual utiliza el axioma de las paralelas la cuestión es diferente. Con esta parte se relacionan los teoremas sobre: a) la disposición de las rectas paralelas; b) la su-

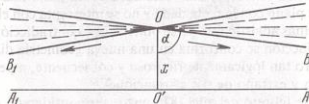


Fig. 57

ma de los ángulos en triángulos y polígonos; c) las áreas; d) los polígonos inscritos y circunscritos en la circunferencia; e) la semejanza y congruencia de figuras; f) la trigonometría; g) el teorema de Pitágoras; h) las mediciones del círculo y sus partes. En estos puntos la geometría bidimensional de Lobachevski se diferencia de la planimetría euclídeana. Consideremos más concretamente algunas particularidades de la geometría de Lobachevski.

La suposición de que a través del punto O fuera de la recta se puede trazar más de una recta, la cual no se encuentra con la dada, lleva a la conclusión de que hay número infinito de tales rectas. Estas constituyen un haz. En el haz de estas rectas hay dos rectas extremas: OB y OB_1 (fig. 57). Ellas se denominan también paralelas a la recta O_1A . Ahora surge la necesidad de introducir la dirección de paralelismo. En la dirección de paralelismo las rectas se acercan, en la opuesta se alejan. El ángulo de paralelismo α depende de la distancia entre las paralelas, esto es, de la longitud de la perpendicular correspondiente x del siguiente modo:

$$\alpha = \pi(x); \operatorname{tg} \frac{\pi(x)}{2} = e^{-\frac{x}{k}},$$

donde k es una constante que depende de la elección de la unidad de longitud. Si $x \rightarrow 0$, entonces $\pi(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, en el caso que $x \rightarrow \infty$, $\pi(x) \rightarrow 0$. Finalmente, las rectas que tienen una perpendicular común divergen a ambos lados.

Tras esto resulta que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que $2d$. Cuando se aumentan los lados del triángulo esta suma disminuye.

Un razonamiento análogo es correcto también para los polígonos. Como consecuencia de esto resultó necesario agregar un criterio de igualdad de triángulos, partiendo de la igualdad de los tres pares de ángulos correspondientes.

Las áreas de todos los triángulos constituyen un conjunto con arista superior $c\pi$, donde c es una constante que depende de la unidad de medida del área y es igual a la relación entre el área del triángulo y su defecto (la diferencia de la suma de los ángulos exteriores, del triángulo y $4d$). En la geometría de Lobachevski no existen triángulos y polígonos semejantes. La suposición de semejanza es equivalente al postulado de Euclides sobre las paralelas. La longitud de la circunferencia l crece más rápido que el radio r y es

$$l = \frac{\pi}{k} (e^{kr} - e^{-kr}).$$

El desarrollo ulterior de la geometría de Lobachevski está vinculado con la introducción de haces de rectas convergentes, divergentes y paralelos (fig. 58). Relativo a los haces de rectas se introducen los ciclos (llamados de otra manera c -líneas, o líneas fundamentales). Estos son los lugares geométricos de los puntos que constituyen las trayectorias ortogonales al haz

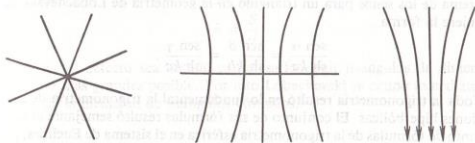


Fig. 58

de rectas. Su posición se determina por el punto inicial elegido sobre una de las rectas del haz. Estos ciclos se denominan, respectivamente para los tres tipos de haces: circunferencia, equidistante (o hiperciclo) y oriciclo (la imagen de la circunferencia limite cuando $R \rightarrow \infty$). Las imágenes espaciales correspondientes formadas al girar los ciclos alrededor de una recta elegida serán: la esfera, hiperesfera y oriesfera respectivamente. Lobachevski estableció que si las rectas se sustituyen por oriciclos sobre la oriesfera tiene lugar la planimetría de Euclides y la trigonometría.

En todas las correlaciones de la geometría de Lobachevski se incluye la unidad de longitud (escala) y los ángulos y longitudes dependen unos de otros. La unidad de longitud es OR , esto es la longitud del arco absoluto

del oriciclo (fig. 59). Este arco, medido desde el punto elegido O sobre una de las rectas paralelas del haz hasta R , que es la intersección del oriciclo con la recta del haz, paralela a la tangente al oriciclo en el punto O . En la actualidad el segmento igual en longitud al arco absoluto se denomina también radio de curvatura del espacio de Lobachevski.

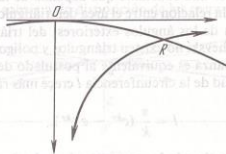


Fig. 59

El aparato de cálculo en la geometría de Lobachevski se basa en las operaciones con funciones hiperbólicas. Por ejemplo, el teorema análogo al teorema de los senos para un triángulo en la geometría de Lobachevski adquiere la forma

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sh} ka} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sh} kb} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sh} kc}$$

Toda la trigonometría resultó en lo fundamental la trigonometría de funciones hiperbólicas. El conjunto de sus fórmulas resultó semejante al conjunto de fórmulas de la trigonometría esférica en el sistema de Euclides, pero para la esfera de radio imaginario Ri . Tras la trigonometría Lobachevski elaboró en su sistema las geometrías analítica y diferencial.

En las obras de Lobachevski se construye un sistema que no contiene faltas lógicas y tan rico en resultados como la geometría de Euclides. Así mismo se muestra que es imaginable no sólo un sistema de geometría y que se pueden obtener otros sistemas por medio de la generalización y modificación de las cuestiones fundamentales de la geometría de Euclides. No obstante la acogida proporcionada a la geometría de Lobachevski fue más que desalentadora. Los académicos (entre ellos Ostrogradski) les daban a sus obras valoraciones negativas, se editaban libelos sobre Lobachevski. Se requería una valentía poco común y una fe en la veracidad científica y en el significado de sus investigaciones para hacer frente a esto. Lobachevski reveló las cualidades necesarias, luchó insistentemente, pero murió en el año 1856 incomprendido y no reconocido.

El problema de la interpretación de la geometría de Lobachevski y de los sistemas geométricos en general. El problema que no pudo resolver Lobachevski fue el problema de la fundamentación de la nueva geometría. Se puede ir tan lejos como se quiera por el camino de la acumulación de sus resultados pero no obtener la seguridad en el rigor de su base lógica, en su significación para las aplicaciones prácticas y relativo a su lugar en la ciencia. Lobachevski advirtió que para dimensiones infinitesimales su geometría se transformaba en euclídeana. Además la semejanza de las relaciones trigonométricas en ambas geometrías permitió tener la esperanza en un pronto descubrimiento de las relaciones entre ellas.

El camino de Lobachevski en la resolución del problema de la fundamentación era la búsqueda de objetos materiales para los cuales se realizara su geometría. La vía auxiliar de aplicación de los hechos de la geometría al análisis matemático y en especial al cálculo de integrales difíciles fue también utilizado por Lobachevski.

Pero volvamos a los intentos fundamentales. Se requiere, digamos, midiendo los ángulos de los triángulos advertir si su suma σ se diferencia de $2d$, esto es, advertir el defecto $\delta = 2d - \sigma$. Lobachevski demostró que este defecto debe ser directamente proporcional al área del triángulo S e inversamente proporcional al cuadrado del radio de curvatura del espacio, esto es

$$\delta = \frac{S}{r^2}$$

Para que el defecto sea notado es necesario elegir triángulos de dimensiones lo más grandes posible. Por esto Lobachevski se ocupó inmediatamente de la medición de triángulos cósmicos.

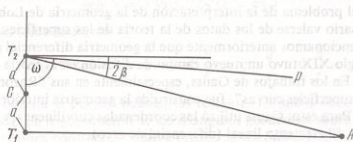


Fig. 60

Desde la posición T_1 de la Tierra en la órbita (fig. 60) se fija cierta estrella A la cual se elige de modo que

$$\angle CT_1A = \frac{\pi}{2}$$

Si se fija esta misma estrella A desde el punto opuesto T_2 de la órbita, entonces $\angle CT_2A = 2d = 2\beta$. La magnitud β es el paralaje de la estrella, medida usualmente con gran exactitud. Si el espacio cósmico tiene la geometría de Lobachevski, entonces se puede definir el ángulo ω de paralelismo. Sin embargo, todas las desviaciones medidas invariablemente resultaban en los límites de exactitud de la observación y el experimento de Lobachevski no tuvo éxito.

Esto ahora no resulta sorprendente. Se sabe que en el año 1931 Schilling demostró que los recursos actuales de la técnica astronómica no pueden ni demostrar ni refutar las suposiciones de Lobachevski sobre la geometría del espacio cósmico, si se supone que el radio de curvatura del espacio supera a 60 años luz. Los datos desconoladores observados por la astronomía los complementa la teoría general de la relatividad, la cual para un mundo isotrópico da como valor del radio de curvatura $1,8 \cdot 10^9$ años luz. Si se tiene en cuenta que la geometría del espacio cósmico está estrechamente vinculada con la distribución y el movimiento de las masas que lo componen y que poseen las propiedades de atracción, entonces esta geometría toma una forma muy compleja.

No obstante, a pesar de los fracasos con los experimentos, Lobachevski se encontraba en el camino correcto. Su idea es la idea de la interpretación: los datos de cada teoría deben ser comprobados mediante el experimento. La geometría de Euclides surgió como generalización de la experiencia multisecular de los hombres y se confirma con la práctica. La posible construcción, creada por Lobachevski debe apoyarse en un sistema de objetos realmente existentes para ser reconocida como no contradictoria.

Como ocurre frecuentemente en la historia de las matemáticas, la solución se encontraba cerca; los matemáticos tenían ya todo lo necesario para resolver el problema de la interpretación de la geometría de Lobachevski. Era necesario valerse de los datos de la teoría de las superficies.

Ya mencionamos anteriormente que la geometría diferencial a comienzos del siglo XIX tuvo un nuevo campo de difusión en la teoría de las superficies. En los trabajos de Gauss, especialmente en sus "Razonamientos sobre las superficies curvas", fue construida la geometría interior de las superficies. Para esto, Gauss utilizó las coordenadas curvilíneas u y v sobre la superficie. El elemento lineal (diferencial de arco)

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

y la curvatura gaussiana $K = \frac{1}{R_1 R_2}$ dieron la posibilidad de encontrar todos los elementos de la superficie. Los resultados de la geometría interna resultaron invariantes respecto a las flexiones de las superficies, esto es, tales deformaciones de las superficies, bajo las cuales el elemento lineal

queda invariante. Desde entonces, durante más de un siglo los problemas de las flexiones y de la geometría interior de las superficies resultan problemas importantísimos de la geometría diferencial.

Alrededor del año 1840, F. Minding, profesor de la Universidad de Tartu (Dorpat) estudió las superficies de curvatura gaussiana constante. Entre las superficies de curvatura negativa constante Minding, en particular, destacó la superficie de revolución de la tratriz

$$y = \pm \left[\sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right],$$

esto es, la curva cuya longitud del segmento a de tangente, desde el punto de tangencia hasta la base OY es constante. La curvatura de esta superficie es

$$K = -\frac{1}{a^2},$$

por ello a tal superficie se le denomina seudoesfera.

Minding demostró que para cualquier triángulo cuyos lados sean líneas geodésicas sobre la superficie de curvatura constante K tiene lugar la relación

$$\text{ctg } A \cdot \text{sen } C + \cos C \cdot \cos \sqrt{K} \cdot b = \text{ctg } \sqrt{K} a \cdot \text{sen } \sqrt{K} b.$$

En el caso $K > 0$ ésta es una de las fórmulas de la trigonometría esférica. Si $K < 0$, entonces después de la sustitución $\sqrt{K} = \frac{1}{ri}$ como consecuencia de

$$\text{sen } ix = i \text{ sh } x, \cos ix = \text{ch } x$$

la fórmula toma la forma

$$\text{ctg } A \cdot \text{sen } C + \cos C \cdot \text{ch } \frac{b}{r} = \text{cth } \frac{a}{r} \cdot \text{sh } \frac{a}{r}.$$

De esta fórmula se pueden deducir las restantes fórmulas de la geometría hiperbólica. La trigonometría de los triángulos geodésicos sobre la superficie de curvatura constante negativa resultó la trigonometría hiperbólica.

Cinco años antes de la publicación del trabajo de Minding en 1835, Lobachevski en la "Geometría imaginaria" mostró que la existencia del axioma de paralelismo se puede reducir a la cuestión sobre la veracidad de las relaciones de la trigonometría hiperbólica. El resultado de Minding significó en esencia que la geometría interna de la seudoesfera es isomorfa a la planimetría de Lobachevski. Sin embargo ni Minding ni Lobachevski lo advirtieron.

Este hecho fue advertido por primera vez por el geómetra italiano E. Belltrami. Estudió atentamente la obra de Lobachevski por sus traducciones al francés e italiano. El notó que los resultados de una de sus investigaciones geométrico-diferenciales contenían la buscada interpretación de la geometría de Lobachevski.

Belltrami estudió el problema de cartografía: reflejar una superficie en un plano de tal manera que todas las líneas geodésicas sobre la superficie se representen mediante rectas en el plano. Advirtió que tal representación se puede establecer para las esferas y para las superficies de curvatura constante negativa y además encontró entre estas últimas la pseudoesfera (ver fig. 61). Los elementos lineales (formas métricas fundamentales) del plano de Lobachevski y de la superficie pseudoesférica resultaron expresados por

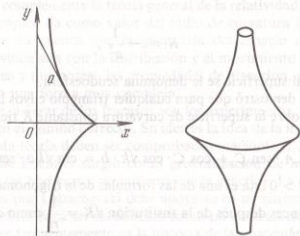


Fig. 61

una misma fórmula. Esto significaba que la geometría interior de la pseudoesfera es isomorfa a la geometría interior del plano hiperbólico de Lobachevski. Las imágenes de las rectas de Lobachevski eran las geodésicas sobre la superficie y los movimientos se interpretaban mediante las flexiones de la superficie en sí misma.

Belltrami publicó sus resultados en el año 1868 en el artículo "Experiencia en el tratamiento de la geometría no euclidéana". Esta fue la primera interpretación de la geometría de Lobachevski. Ella produjo una gran impresión. Después de ella la situación de esta parte de la geometría varió. Las dudas sobre su no contradicción se eliminaron ya que el plano de Lobachevski se interpretaba sobre la superficie de un espacio euclidéano. Sin embargo, la interpretación era incompleta, ya que la superficie de la pseudoesfera refleja sólo una parte del plano de Lobachevski, lo que se advierte en

la fig. 62. Es también evidente que ninguna combinación de las superficies de Belltrami elimina la incompletitud.

Belltrami logró, de esta manera, demostrar lo no contradictorio de la geometría de Lobachevski sólo para cierta parte acotada del plano. Quedó abierta la cuestión sobre la interpretación de todo el plano de Lobachevski.

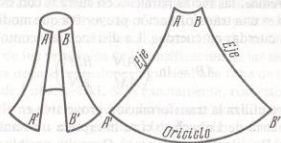


Fig. 62

Sólo en el año 1901 D. Hilbert demostró que en el espacio tridimensional no existe superficie analítica de curvatura constante negativa que no tenga singularidades en ninguna parte y que sea en todas partes regular. Por esto llevar a cabo una interpretación del tipo de Belltrami de todo el plano de Lobachevski es imposible.

La siguiente interpretación, en el tiempo, realizada en el año 1871 por F. Klein en el trabajo "Sobre la llamada geometría no euclidéana", se basa en la definición de medida proyectiva en el plano introducida por Cayley. Cayley introdujo este concepto en el año 1859 en la "Sexta memoria sobre las formas" de la siguiente manera: las formas son polinomios homogéneos. Para el tratamiento geométrico de la teoría de las formas, Cayley se sirvió de la geometría analítica del espacio proyectivo, construido por Plucker. Con una forma binaria relacionó un sistema de puntos de la recta, cuyas coordenadas homogéneas anulan esta forma. Análogamente una forma ternaria se representa por una curva del plano proyectivo; si esta forma es cuadrática, la curva correspondiente es una sección cónica. A continuación Cayley fija una de las formas cuadráticas binarias y un par de puntos correspondientes a ella sobre la recta. Su definición de absoluta, en esencia se introduce como imagen respecto a la cual se consideran los automorfismos. Para la definición de la distancia entre dos puntos Cayley construye la relación anarmónica de estos dos puntos y los puntos de la absoluta. El logaritmo de la relación anarmónica es, según Cayley, la distancia. En el plano, absoluta es una curva de segundo orden; su intersección con cualquier recta del plano determina sobre ella la absoluta de la métrica proyectiva.

Klein, en el trabajo mencionado antes, demostró que la métrica proyec-

tiva de Cayley definida por una curva real de segundo orden coincide con la métrica del espacio de curvatura constante negativa. Ahora Klein puede (y precisamente lo realiza) reflejar el plano de Lobachevski en el interior de la absoluta, por ejemplo dentro del círculo. Los puntos del plano se reflejan en los puntos interiores de la absoluta, las rectas se transforman en cuerdas sin los puntos extremos, las rectas paralelas en cuerdas con extremos comunes. El movimiento es una transformación proyectiva que modifica el círculo en sí mismo y las cuerdas en cuerdas. La distancia es, como la de Cayley,

$$AB = \ln \left(\frac{AN}{AM} \cdot \frac{BM}{BN} \right).$$

En el espacio se utiliza la transformación proyectiva en el interior de la esfera. La geometría de Lobachevski se interpreta mediante la absoluta de Klein (fig. 63). Por ejemplo, del punto O resulta posible trazar dos rectas

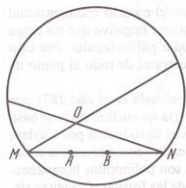


Fig. 63

OM y ON que no se interceptan con la recta dada MN y así mismo son paralelas a ella en el sentido de Lobachevski. La geometría de Lobachevski resulta desde estas posiciones la geometría de los subgrupos de todas las transformaciones proyectivas bajo las cuales la absoluta se transforma en sí misma. El modelo de Klein resultó la demostración completa, largamente esperada, de la no contradicción de la geometría de Lobachevski y la existencia para ella de un sentido real.

Después de este trabajo de Klein aparecieron y continúan apareciendo nuevas interpretaciones, advirtiéndose nuevas relaciones de la geometría de Lobachevski con otras ramas de las matemáticas. Citemos como ejemplo el modelo de H. Poincaré, propuesto por él en el año 1882 en relación con los

problemas de la teoría geométrica de las funciones de variable compleja. El plano de Lobachevski se representa también por el interior del círculo (fig. 64), las rectas, por arcos de circunferencias, perpendiculares a la circunferencia dada y por los diámetros. Los movimientos se interpretan por combinaciones de inversiones. Aquí tenemos en cuenta la inversión hiperbólica, esto es, tales transformaciones de los puntos del plano respecto a la circunferencia con centro en O y radio r cuando cada punto M sobre el rayo OM se pone en correspondencia con el punto M' tal que $OM \cdot OM' = r^2$.

Elaboración de los principios de la clasificación de las teorías geométricas. La existencia de interpretaciones significaba la falta de contradicciones en la geometría de Lobachevski. Más exactamente, con esto fue demostrada la posibilidad de reducción del problema indicado a la cuestión sobre la falta de contradicciones en la geometría de Euclides, y a través de ella a los datos de la experiencia. A su vez, la determinada validez de por lo menos dos geometrías, la euclidénea y la de Lobachevski, condujo a la aparición de diferentes sistemas geométricos, a la necesidad de elaborar un principio único de clasificación de estos sistemas, a la elaboración del método axiomático y al fortalecimiento de su posición como método importantísimo de toda la geometría y en general de las matemáticas de la actualidad.

F. Klein introdujo en la clasificación del sistema de la geometría las ideas de la teoría de grupos. Brevemente, advirtió que todos los movimientos considerados en la geometría forman un grupo: el producto de dos movimientos es un movimiento, cada movimiento se puede poner en correspondencia con su inverso. La geometría de Euclides y la geometría de Lobachevski tienen grupos de movimientos diferentes. Si se propone la cuestión más generalmente, entonces resulta que la geometría del espacio se caracteriza por las propiedades del grupo de los movimientos de este espacio. Precisamente el movimiento es aquella transformación la cual permite comparar figuras con propiedades idénticas. De esta manera se destacan un conjunto de propiedades de los objetos espaciales invariantes respecto al movimiento. La ciencia sobre estas propiedades es precisamente la geometría.

Estas ideas fueron expuestas y desarrolladas por F. Klein en una exposición realizada por él en el año 1872 durante una intervención en la cátedra en la ciudad alemana de Erlangen, "Panorama comparativo de las novísimas investigaciones geométricas". Posteriormente ésta se hizo mucho más conocida a los matemáticos como "Programa de Erlangen de F. Klein".

Según F. Klein para la construcción de la geometría es necesario dar: a) cierta variedad de elementos; b) un grupo de transformaciones que den la posibilidad de aplicar los elementos de una variedad dada, el uno en otro.

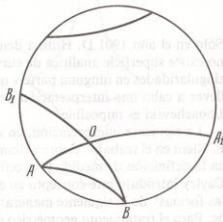


Fig. 64

La geometría deberá estudiar aquellas relaciones de los elementos, las cuales son invariantes ante todas las transformaciones del grupo dado.

Desde estas posiciones son posibles, por ejemplo, las siguientes geometrías: a) la geometría de Euclides, que estudia los invariantes de la traslación; b) la geometría afín, cuyo objeto de estudio está constituido por los invariantes de las, así llamadas, transformaciones afines

$$\begin{aligned}x'' &= a_1x + b_1y + c_1, \\y'' &= a_2x + b_2y + c_2\end{aligned}$$

bajo la condición

$$\det = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

(en el caso particular cuando se consideran transformaciones ortogonales siempre tendremos: $\det = \pm 1$); c) la geometría proyectiva, esto es la ciencia sobre los invariantes de las transformaciones lineales fraccionarias

$$\begin{aligned}x'' &= \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3}; \\y'' &= \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3};\end{aligned}$$

$$\det = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ante tal formulación del problema, la geometría de Lobachevski se trata como parte de la geometría proyectiva, donde se estudian los invariantes del subgrupo de las transformaciones proyectivas que transforman en sí mismo los puntos de una cierta circunferencia.

En la clasificación de Klein, junto a los indicados, se incluyen muchos otros sistemas geométricos. Por ejemplo, la geometría conforme la cual abarca el grupo de tales transformaciones que convierte círculos en círculos y que conservan los ángulos. Como otro ejemplo puede servir la topología, es decir la geometría de los grupos de transformaciones continuas, esto es, con las cuales se conserva la proximidad infinita de los puntos.

Hace ya más de cien años que la idea de Klein, acerca de que la geometría se puede construir sobre cualquier variedad en la cual está establecido un grupo de transformaciones, es directriz no sólo para la clasificación de las teorías geométricas, sino que también para la construcción de nuevos sistemas de la geometría. No obstante, esta idea no es única. A mediados del siglo XIX apareció aún un principio general de consideración de

las teorías geométricas. Este fue el principio, el cual en lo sucesivo vendremos en denominar métrico. Por primera vez fue expuesto en forma general en el año 1854 por Riemann en la conferencia que después resultó famosa "Sobre las hipótesis que yacen en los fundamentos de la geometría" (publicado en el año 1867).

Las ideas iniciales de las investigaciones geométricas de Riemann en una primera aproximación son las siguientes. Para la construcción de una teoría geométrica es necesario dar: a) una variedad de elementos; b) las coordenadas de estos elementos (en un caso general n); c) la ley de medición de las distancias entre elementos de la variedad infinitamente próximos. Esta última se da partiendo de la premisa que el espacio geométrico en partes infinitesimales es euclideo. Esto significa que en su forma más general se da el elemento lineal de arco, definido por la forma diferencial cuadrática

$$ds^2 = \sum_{i,k} g_{ik} dx_i dx_k.$$

Aquí

$$\begin{aligned}g_{ik} &= g_{ik}(x_1, \dots, x_n); \\g_{ik} &= g_{ki}; ds^2 \geq 0.\end{aligned}$$

La forma indicada evidentemente es la generalización de la forma cuadrática gaussiana en la geometría interior de superficies

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Los movimientos se definen como transformaciones, respecto a las cuales el elemento lineal ds es invariante. De aquí

$$\sum_{i,k} g_{ik} dx_i dx_k = \sum_{i,k} g'_{ik} dx'_i dx'_k.$$

Tras ds quedan invariantes en este caso la longitud de la curva y otras relaciones relativas a la denominada métrica del espacio. El propio concepto de espacio, después de tan amplia generalización del concepto de distancia entre dos puntos, adquirió un tratamiento muy general (por ejemplo, el espacio de colores, el espacio de fase, etc.). Este concepto evolucionó rápidamente incluso hasta la idea actual de espacios de Riemann como variedades geométrico-diferenciales generales con las precisiones necesarias. La teoría de los espacios de Riemann lleva en la actualidad el nombre de geometría de Riemann.

Riemann no creó el aparato analítico, adecuado a una geometría ideada tan ampliamente sobre la base del principio métrico. Sólo a comienzos del siglo XX, cuando en los trabajos de los matemáticos italianos R. Ricci-Curbastro y T. Levi-Civita se conformó el cálculo tensorial como síntesis

de la teoría de las formas algebraicas y la teoría de las formas geométrico-diferenciales cuadráticas, resultó que este cálculo era el aparato más cómodo para la elaboración de los problemas de la geometría de Riemann. Las amplias generalizaciones del concepto de distancia entre dos elementos y correspondientemente de todos los razonamientos métricos llevaron a la introducción del concepto de espacio métrico. Una formulación más estrecha de la cuestión en el plano de la aclaración de las posibles variedades de geometría no euclídeana, las geometrías de los espacios de curvatura constante positiva, obtuvo la denominación de geometría de Riemann.

Establecimiento del método axiomático en la geometría. La idea de Lobachevski sobre que, lógicamente pensada, la geometría de Euclides no es única, tuvo en la segunda mitad del siglo XIX confirmación; surgieron numerosos sistemas geométricos. Se introdujeron en la vida en forma de diferentes interpretaciones y después también de aplicaciones; y otra de sus ideas, que la veracidad de la geometría se comprueba sólo por la experiencia y que la experiencia que se amplía exige la introducción no sólo de la geometría euclídeana. La naturaleza verdadera del espacio puede resultar también no euclídeana.

La tercera idea de Lobachevski, como fue indicado, consistía en que las geometrías nuevas pueden ser construidas por medio de la variación y la generalización del sistema de axiomas y en general, de los puntos de partida de la geometría euclídeana. Ya en el año 1866 H. Helmholtz introdujo el movimiento en calidad de concepto fundamental de la geometría. G. Cantor (1871) y R. Dedekind (1872) investigaron el axioma de continuidad. Pasch (1882) logrando la resolución del problema de la inclusión de la geometría métrica en la proyectiva, investigó profundamente dos grupos de axiomas: de orden y de pertenencia (según la posterior clasificación de los axiomas realizada por D. Hilbert). Tras Pasch, estos grupos de axiomas los investigó D. Peano (1889) y Pieri (1899). Finalmente, en 1899 apareció la primera edición de los "Fundamentos de la geometría" de D. Hilbert, en la cual por primera vez el sistema de axiomas de la geometría se expone en forma completa y lo suficientemente rigurosa.

De esta manera, hacia fines del siglo XIX, en la geometría se estableció el método axiomático. Desde esta misma época el método axiomático se extendió también a otras ramas, constituyéndose en uno de los métodos fundamentales de las matemáticas modernas. Las teorías geométricas resultaron prácticamente la parte de las matemáticas más cómoda para el establecimiento del método axiomático. En lugar del voluminoso sistema de definiciones, axiomas y postulados, tomados en los "Elementos" de Euclides, ahora se hizo posible introducir sólo un conjunto de axiomas los cuales también sirven de descripción de los conceptos fundamentales y sus propiedades. En la geometría se formaron las primeras exigencias de rigor ló-

gico, las cuales deben satisfacer los axiomas: las exigencias de su compatibilidad y completitud. La compatibilidad incluía la exigencia de independencia y falta de contradicciones. Esta última se demuestra mediante la construcción de interpretaciones y en esencia es equivalente a esta construcción. La independencia de cualquier axioma se establece mediante la sustitución por su negación con la subsiguiente construcción de sus interpretaciones con el objeto de demostrar la falta de contradicciones del sistema. La completitud del sistema de axiomas empezaron a comprender como la propiedad de definir un sistema de objetos con exactitud de hasta un isomorfismo. A diferencia de la geometría la axiomática de la teoría de grupos, por ejemplo, no puede ser completa ya que existen grupos con estructura no isomorfa.

Los axiomas de la geometría, como en general los axiomas matemáticos, no son verdades apriorísticas eternas. El criterio de su veracidad yace en la práctica; en cada etapa del desarrollo histórico de las matemáticas se aclara su relatividad. El gran papel del método axiomático no puede cubrir el origen real de los axiomas, no puede servir de base para sus valoraciones idealistas. Según la justa expresión de F. Engels, "... la deducción de las magnitudes matemáticas una de otras, al parecer apriorística, demuestra no su procedencia apriorística, sino sólo su interrelación racional" ¹⁾.

El desarrollo de la geometría en el siglo XX, debido al enorme volumen de resultados y la complejidad de sus relaciones, no fue posible incluirlo en el contenido del presente capítulo. Una idea elemental sobre esta materia el lector puede obtenerla, por ejemplo, en el artículo de A.D. Alexandrov "Geometría" ²⁾ al que se le ha añadido una bibliografía bien seleccionada.

¹⁾ К. Маркс, Ф. Энгельс. Собр. соч., т. 20, стр. 37. (К. Marx, F. Engels. Obras completas.)

²⁾ А.Д. Александров. Геометрия. БСЭ, изд. 2, т. 10, стр. 533—550. (A.D. Alexandrov. Geometría.)

LAS MATEMÁTICAS EN RUSIA

Estado de las investigaciones científicas sobre matemáticas a comienzos del siglo XIX. En los capítulos anteriores se ha citado una cantidad comparativamente grande de hechos sobre los más importantes aportes a la ciencia introducidos por los matemáticos más eminentes de Rusia. Estos materiales evidencian sobre el crecimiento del volumen y el peso específico de las investigaciones de nuestros científicos y pueden dar cierta idea sobre el nivel y el carácter del desarrollo de las matemáticas en Rusia en los siglos XVIII y XIX.

No obstante los hechos citados resultaron fragmentados ya que su elección estaba subordinada a los objetivos de carácter general presentados al autor durante la escritura de uno u otro capítulo, por ello es necesario complementar las informaciones indicadas con un bosquejo corto, pero, en lo posible, conexo del desarrollo de las matemáticas en Rusia. Durante este trabajo nos esforzaremos por eludir la repetición de los materiales anteriormente citados.

En el siglo XVIII, en Rusia existían sólo dos centros científico-docentes: la Academia de Ciencias de Petersburgo (fundada en el año 1725) y la Universidad de Moscú (abierta en el año 1755). La actividad científica en el dominio de las matemáticas y las disciplinas afines se agotan totalmente con los trabajos de L. Euler y sus pocos discípulos. Los resultados de Euler, gigantes por su cantidad e importancia, resultaron así y todo un caso aislado, no encontraron gran repercusión científica en Rusia, donde las personas instruidas eran aun poco numerosas. Tampoco encontraron el desarrollo inmediato las numerosas ideas notables de M.V. Lomonósov sobre las matemáticas, su significado y el carácter de sus métodos. La propia Universidad de Moscú, en el siglo XVIII, cumplía fundamentalmente funciones docentes.

La situación comienza a variar en la primera mitad del siglo XIX, cuando bajo la presión de la nueva producción capitalista en Rusia, a pesar de la resistencia del zarismo fueron realizadas algunas reformas. El aumento del papel de la ciencia y la instrucción para la economía de Rusia encontró su expresión, en particular en la fundación de una serie de universidades. El comienzo del siglo XIX fue conmemorado por el surgimiento de las univer-

sidades de: Tartú (1802), Vilnius (1803), Kazán (1804), Járkov (1805), Petersburgo (1819) y Kiev (1834). En la segunda mitad del siglo XIX fueron abiertas tres universidades más: la de Odessa (1865), Varsovia (1869) y la de Tomsk (1888). En la época de la Gran Revolución Socialista de Octubre, en Rusia se contaban en total 11 universidades (en el año 1909 fue abierta la Universidad de Sarátov).

En cada una de las universidades, desde el momento de su organización se instituyeron facultades físico-matemáticas y departamentos de matemáticas (en la Universidad de Sarátov esto ocurrió sólo en el año 1918).

La actividad de las universidades, las cuales en aquella época dirigían también todos los centros de enseñanza media y elemental, era una parte importantísima de la creación de las bases de la ramificación de las investigaciones científicas sobre matemáticas. Otras partes de este importante proceso fueron: elevación del nivel de enseñanza de las matemáticas en los centros de enseñanza media, edición de literatura matemática, entre ellos revistas, surgimiento de sociedades científicas matemáticas.

En las universidades, a mediados del siglo XIX comenzó a desenvolverse una actividad científica seria. A esto siguió la unión en una serie de ciudades de los científicos matemáticos sobre la base de una temática general, la cual condujo a la formación de escuelas científicas. Este término lo aplicaremos a grupos de científicos, comparativamente numerosos, los cuales mantenían lazos científicos y estaban unidos por lo común de una orientación científica, o por la clase de problemas teóricos que se resolvían o por la especificidad de los métodos aplicados.

El primer centro científico en el campo de las investigaciones matemáticas resultó ser el de Petersburgo, más exactamente la Academia de Ciencias de Petersburgo. Tras este, alrededor de las universidades comenzaron a formarse otros centros y escuelas matemáticas: en Kazán, Moscú, Kiev, Járkov y otras ciudades. En lo que sigue podemos prestar fundamental atención sólo al desarrollo de las escuelas matemáticas de Petersburgo y Moscú.

Escuela matemática de Petersburgo. Después de la muerte de L. Euler (1783) el nivel de las investigaciones matemáticas en Petersburgo disminuyó. Un nuevo ascenso se notó sólo en los años 20 del siglo XIX. Este estuvo relacionado con la actividad de M.V. Ostrogradski y V.Y. Bunyakovski. Ambos eran de origen ucraniano, ambos obtuvieron una seria preparación científica en París, el más notable centro, en aquella época, de la ciencia matemática. Esta circunstancia determinó la afinidad en las ideas y el vínculo de los trabajos de los matemáticos de Petersburgo con las ideas de los mejores matemáticos de aquella época.

Mijail Vasilievich Ostrogradski (1801—1861) terminó la Universidad de Járkov en 1820. Fue discípulo del científico progresista, rector de la univer-

sidad T.F. Osipovski. La lucha de este último contra la mayoría reaccionaria de los profesores, la cual terminó con la expulsión de Osipovski de la universidad, se reflejó también en el destino de Ostrogradski, el cual no recibió su diploma. Ostrogradski continuó su preparación en París (1822—1828) y regresó a la Patria siendo ya un hombre de ciencia de alta reputación científica. Se radicó en Petersburgo, siendo inicialmente, (1828) profesor adjunto y a continuación (desde 1830) académico. Además, Ostrogradski enseñó en una serie de centros de enseñanza superiores técnicos y militares.

Los intereses científicos de Ostrogradski se desarrollaron en estrecha relación con los problemas de actualidad para los matemáticos de París. Incluso la mayoría de sus trabajos los escribió y publicó en francés.

La recopilación de las obras de M.V. Ostrogradski en ruso fue editada sólo en los años 1959—1961 por la Academia de Ciencias de la R.S.S. de Ucrania.

Así como sus contemporáneos (Fourier, Laplace, Cauchy, Poisson y otros) Ostrogradski dirigió sus esfuerzos fundamentales a la resolución de problemas aplicados. La mayoría de sus trabajos estaban relacionados con el dominio de la mecánica, la física matemática y los problemas del análisis matemático con ellos vinculados. Además dejó trabajos de primera categoría sobre álgebra, teoría de números y teoría de probabilidades.

Un lugar central en la actividad científica de Ostrogradski lo ocupan sus trabajos sobre física matemática. La construcción de la teoría matemática de diferentes fenómenos de la naturaleza, estaba en el centro de atención de los más grandes matemáticos de París en aquella época, cuando Ostrogradski estudiaba en París. En el año 1822 apareció "La teoría analítica del calor" de Fourier, en 1825 fue concluida la publicación de la obra en cinco tomos "Mecánica celeste" de Laplace, en 1826 fue editada la "Teoría de los fenómenos electromagnéticos" de Ampère. En el año 1826 fue escrito también el primer trabajo de Ostrogradski (publicado en 1832). Este trabajo estaba dedicado al problema sobre la difusión de las ondas sobre la superficie de un líquido en un tanque cilíndrico. Algo después (1829) Ostrogradski resolvió el mismo problema para un tanque con forma de sector circular.

Al regresar a Petersburgo, Ostrogradski publicó la "Nota sobre la integral que se encuentra en la teoría de la atracción", donde dio una deducción original de la ecuación de Poisson, la cual encontró y comunicó a Cauchy ya en el año 1826. Tras esto Ostrogradski dedicó algunas memorias a la teoría matemática del calor. Aquí desarrolló el método de Fourier para los cuerpos sólidos en forma general y además por primera vez dio una resolución rigurosa del problema sobre la difusión del calor en un líquido. Su



M. V. Ostrogradski (1801—1861)

nota "Sobre la teoría del calor" (año 1828, publicado en 1831), contiene una generalización del método de Fourier. Esta generalización consiste fundamentalmente en: a) la determinación de los números característicos del problema de contorno y las funciones fundamentales correspondientes al mismo (en general, no trigonométricas); b) la investigación de la descomposición de funciones en serie de funciones fundamentales. Además de esto Ostrogradski descubrió la propiedad de ortogonalidad mutua de las funciones fundamentales y además encontró la fórmula de desarrollo en funciones fundamentales

$$f(x, y, z) = \sum \frac{u \int f(x, y, z) u' \omega}{\int u u' \omega}.$$

Aquí, según Ostrogradski, las integrales son, naturalmente, triples según la región, ω es la diferencial de volumen, μ es la función fundamental correspondiente al sumando dado de la suma y la relación entre las integrales son los coeficientes generalizados de Fourier.

Una particularidad de este trabajo de Ostrogradski, es que se apoyó además en el principio de localización que mencionamos antes. La demostración de un desarrollo general en funciones fundamentales no se realizó rigurosamente. A propósito, las subsiguientes generalizaciones del método de Fourier, logradas en los trabajos de Lamé y Duhamel tenían aun menos generalidad y demostrabilidad que la de Ostrogradski.

Muchas obras de Ostrogradski están dedicadas a la resolución de otros problemas de la física matemática: sobre la magnetización de placas aisladas, sobre la atracción de esferas y esferoides, sobre la integración de ecuaciones de oscilaciones pequeñas de los medios elásticos, etc.

Con las investigaciones sobre física matemática, se relaciona también un gran grupo de trabajos de Ostrogradski en diferentes ramas de la mecánica. N.E. Zhukovski, famoso matemático y mecánico ruso, divide estas investigaciones de Ostrogradski en tres partes: las relacionadas con el análisis del principio de los desplazamientos virtuales y los principios variacionales de la mecánica, con la resolución de las ecuaciones diferenciales de la mecánica y las dedicadas a los problemas particulares de la mecánica. En particular, entre las generalizaciones del principio de Lagrange se encuentran: la extensión de este método a sistemas con enlaces libres, el método general de búsqueda de las velocidades de los puntos elásticos, con un golpe sobre un enlace rígido de los puntos y otros. Se encuentran también trabajos, de carácter puramente palicado, sobre balística y técnica artillera.

En el campo del análisis matemático a Ostrogradski le pertenecen grandes descubrimientos. En su mayoría estos descubrimientos están relacionados con sus trabajos aplicados y surgieron como perfeccionamientos necesarios para un planteamiento lo suficientemente general del problema. Así, por ejemplo, la famosa fórmula de Ostrogradski

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dy dx$$

fue deducida por primera vez en el año 1828. Su generalización al caso de una integral múltiple fue encontrada en el año 1834 por Ostrogradski para la determinación de la variación de una integral múltiple. En los artículos sobre cálculo variacional se encuentra además la importante fórmula de diferenciación de una integral múltiple según un parámetro

$$\frac{d}{d\alpha} \int_L U dx dy dz \dots = \int_L \frac{\partial U}{\partial \alpha} dx dy dz \dots - \int_S U \frac{\partial L}{\partial \alpha} \frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \dots}}$$

donde el parámetro está incluido tanto en la función subintegral U , así como también en la ecuación que define la frontera S del dominio de integración L .

En el artículo "Sobre la transformación de las variables en integrales múltiples" (1836, publicado en el año 1838) expone el método que se utiliza aun en la actualidad.

Una serie de artículos de Ostrogradski están dedicados a la integración de funciones algebraicas. Por ejemplo, en ellos se demuestra que, la integral algebraica de una función racional puede ser sólo una función racional. Esto deriva (cuando $n = 1$) de un resultado más general demostrado por Ostrogradski: supongamos dada la función racional $R(x, y)$ donde

$$y^n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x) y^k, A_n = 1.$$

Si, además, $\int R(x, y) dx$ es una función algebraica, entonces es una función racional entera de y de grado $n - 1$, cuyos coeficientes son funciones racionales de x . Está demostrado además que la integral de una función algebraica no puede contener ni exponenciales ni funciones trigonométricas. Fue encontrado el procedimiento para separar la parte algebraica de la integral de una fracción racional denominada actualmente en los textos sin base alguna, "regla de Hermite".

Estos y muchos otros resultados de Ostrogradski en el campo de la teoría de integración, junto a sus vínculos con los problemas prácticos reflejaron una nueva etapa del desarrollo del cálculo integral. Ya indicamos que la separación de la clase de funciones integrables en funciones elementales, fundamentalmente, fue culminada en la época de Euler y en mayor parte gracias a sus esfuerzos. Una nueva problemática constaba de problemas más generales respecto a la naturaleza de clases de funciones que se obtienen por integración de una u otra clase de funciones: racionales, algebraicas, elementales, trascendentes, etc. Junto a Ostrogradski en este campo trabajaron Abel, Liouville y otros. Sus resultados en ocasiones

estuvieron próximos y a veces incluso se superpusieron. Más adelante la teoría general de integración fue exitosamente desarrollada por P.L. Chebishev.

En el plan de revisión de los trabajos de Ostrogradski sobre análisis matemático señalemos algunos de sus resultados en el campo de la teoría de ecuaciones diferenciales. En el año 1838, publicó "Nota sobre las ecuaciones diferenciales lineales", donde para las ecuaciones de la forma

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0$$

dedujo el discriminante, ahora denominado wronskiano (H. Wronski (1775—1853) introdujo este determinante en el año 1812),

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

(y_1, y_2, \dots, y_n son integrales parciales de la ecuación).

Anteriormente (1835) Ostrogradski introdujo mejoramientos en el método de Newton de resolución aproximada de un sistema de ecuaciones diferenciales.

En relación al problema de integración de fracciones racionales, Ostrogradski encontró un nuevo procedimiento de separación de las raíces múltiples de los polinomios. Sus "Lecciones sobre análisis algebraico y trascendente" (1837) jugaron un gran papel en el desarrollo de la formación matemática en Rusia.

En la esfera de intereses científicos de Ostrogradski se encontraba también la teoría de probabilidades, a la cual dedicó seis artículos en diferentes épocas (desde el año 1834 hasta 1859). En éstos estudió las cuestiones de la teoría de los seguros, los juegos de azar, el control estadístico de la calidad de la producción, las funciones generatrices y otras cuestiones actuales en su época, de la teoría de probabilidades, elaborándolas desde la posición de las aplicaciones prácticas. No eludió en uno de sus trabajos el error, característico para los matemáticos de aquella época (en primer término para Laplace), consistente en la no fundamentación de las aplicaciones de las consideraciones de la teoría de probabilidades a la resolución de los problemas de la práctica judicial y otros problemas especiales. Otro de sus errores fue la subestimación con relación a los trabajos de Lobachevski. Esta falta de un notable matemático enseña, que es inadmisibile en la ciencia la revelación de limitaciones teóricas, la falta de atención o presunción, cómo perjudican el desarrollo de la ciencia. No se les puede justificar con ningún, incluso los mayores méritos, ni teóricos, ni prácticos.

Victor Yakovlevich Buniakovski (1804—1889) también recibió enseñanza de matemáticas superiores en París, donde en el año 1825 le fue otorgado el grado de Doctor en matemáticas. Regresó a Rusia en el año 1827. Durante largos años fue profesor de la universidad y otros centros de enseñanza superior de Petersburgo. Enseguida después de su llegada Buniakovski fue elegido (1828) profesor adjunto y después (1830) académico. Desde el año 1864 y casi hasta su misma muerte fue vicepresidente de la Academia de Ciencias.

En la gran y heterogénea herencia científica de Buniakovski (le pertenecen cerca de 130 trabajos) se tienen grandes resultados científicos. En los trabajos sobre teoría de números (más de 40) encontramos la demostración de la ley cuadrática de reciprocidad, la resolución de una serie de problemas del análisis diofántico, un estudio sobre los números primos, etc. Más de 20 trabajos, Buniakovski los dedicó a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones. Resolvió muchos problemas importantes surgidos en la organización de los seguros, de cajas de préstamos, del análisis de la población de Rusia (tablas y la fórmula empírica de mortalidad, cálculos de los contingentes de reclutamiento y otros), de la industria. En calidad de experto oficial en estadística y seguros (desde el año 1858) Buniakovski cooperó gradualmente a la penetración de los métodos matemáticos en la práctica de la construcción económica. Su obra "Bases de la teoría de las probabilidades" (1848), abarcó todos los aspectos de la teoría de probabilidades y sus aplicaciones y resultó el primer gran manual sobre esta ciencia en Rusia.

En los trabajos de Buniakovski sobre análisis fue resuelto un gran número de problemas concretos, en particular de la teoría de integración, de convergencia de series, etc. A Buniakovski le pertenece, en particular (1859) el honor del descubrimiento de la conocida desigualdad:

$$\left[\int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b \varphi^2(x) dx,$$

la que en ocasiones se denomina como desigualdad de K. Schwartz, aunque este último la encontró y publicó sólo 16 años después que Buniakovski. Las investigaciones geométricas de Buniakovski están dedicadas principalmente a los problemas de la fundamentación de la geometría. Investigó detalladamente la historia de las demostraciones del postulado de las paralelas, advirtió claramente las imperfecciones de todas estas demostraciones. No obstante, con relación a los trabajos de Lobachevski, Buniakovski relacionándose negativamente, compartió el error de Ostrogradski y continuó buscando una demostración lógicamente rigurosa del postulado. La geometría no euclídeana se la figuraba como lógicamente sin sentido.



P.L. Chebishev (1821—1894)

Los trabajos de Buniakovski, así como de la gran mayoría de los matemáticos del siglo XIX, resultaron olvidados, incorporados y transformados en cierta experiencia generalizada de la ciencia. La asimilación y generalización de esta experiencia para los matemáticos de nuestro siglo es aún un problema que está lejos de su resolución completa. Pero en aquella época (hacia mediados del siglo XIX) la actividad de Ostrogradski, Buniakovski y sus discípulos, muchos de los cuales se convirtieron en grandes especialistas en diferentes ramas de las matemáticas y la técnica determinó un nuevo ascenso de las matemáticas en Rusia, especialmente en Petersburg. Se comenzó a formar un colectivo de matemáticos que trabajaban creadoramente, un prominente lugar en éste lo ocupó, a finales de la vida de Ostrogradski, P.L. Chebishev que había venido desde Moscú.

Chebishev (según su propia indicación debe pronunciarse Chebishov) Pafnuti Lvovich (1821—1894) terminó en el año 1841 la Universidad de

Moscú. En el concurso de trabajos estudiantiles por la obra sobre el tema “Cálculo de las raíces de ecuaciones” fue premiado con medalla de plata. Dejado a trabajar en la Universidad, defendió en el año 1846 la tesis de maestría: “Experiencia del análisis elemental de la teoría de probabilidades”. En el año siguiente Chebishev se trasladó a Petersburg y comenzó a trabajar en la universidad. En esta universidad defendió en el año 1849 la tesis de doctorado “Teoría de las congruencias” y trabajó en el transcurso de muchos años (1850—1882) como profesor. La actividad de Chebishev en la Academia de Ciencias comenzó en el año 1853, cuando fue elegido profesor adjunto. El crecimiento de la autoridad científica de Chebishev se nota en lo sucesivo por haber sido elegido académico (en el año 1856, extraordinario; en 1859, ordinario).

La herencia científica de Chebishev cuenta con más de 80 trabajos. Esta ejerció una enorme influencia en el desarrollo de las matemáticas y en particular en la formación de la Escuela Matemática de Petersburg. Los trabajos de Chebishev se caracterizan por una relación estrecha con la práctica, un amplio contenido de problemas científicos, rigor en la exposición, economía de medios matemáticos en el logro de grandes resultados.

Un estudio más concreto de la creación de Chebishev en nuestra época se facilita ya que la Academia de Ciencias editó sus obras completas. Junto a esto en el año 1945 fue editada la colección “Herencia científica de P.L. Chebishev”. Dos tomos de esta colección se componen de artículos de revisión, en los cuales se caracterizan los trabajos de Chebishev sobre matemáticas (1er. tomo) y cinemática de mecanismos (2do. tomo).

Los resultados matemáticos de Chebishev, en lo fundamental, se pagan a cuatro ramas: la teoría de números, la teoría de probabilidades, la teoría de la mejor aproximación de funciones y la teoría general de los polinomios, la teoría de integración.

La obra de Chebishev en la rama de la teoría de números comenzó en los años 40 del siglo pasado. El académico Buniakovski atrajo al joven científico a la comentación y la edición de las obras de Euler sobre teoría de números. Simultáneamente, Chebishev preparó una monografía sobre la teoría de las comparaciones y sus aplicaciones en calidad de tesis de doctor. Hacia el año 1849 ambas tareas fueron cumplidas y los libros correspondientes fueron publicados.

En calidad de aplicación a la “Teoría de las comparaciones” Chebishev publicó, en particular, la memoria “Sobre la determinación de la cantidad de números primos que no superan a una magnitud dada”. Enseguida aparecieron algunos otros artículos de Chebishev sobre este tema.

El problema de la distribución de los números primos en la serie de los números naturales es uno de los más viejos problemas en la teoría de números. Es conocido desde la época de la ciencia griega antigua. El primer paso

para su resolución lo realizó Euclides, demostrando el teorema de que en la serie natural se tienen infinitos números primos. Hasta que Euler no aplicó los recursos del análisis matemático, su resolución prácticamente no avanzó. Euler logró dar una nueva demostración de este teorema, partiendo de la definición de la ζ -función:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)}$$

(n es natural y p primo) y de las consideraciones de que la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ con $s > 1$ y $s - 1$ crece indefinidamente. Consecuentemente el producto

$$\prod_{p=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

tiene un número infinitamente grande de factores. Sólo en el año 1837 Dirichlet generalizó el teorema de Euclides, demostrando que cualquier progresión aritmética $[a + nb]$, donde a y b son primos entre sí, contiene infinitos números primos. En los años 1798—1808 Legendre estudiando las tablas de números primos hasta 10^6 , dedujo empíricamente que la cantidad de números primos en el segmento $[2, x]$ se expresa por la fórmula

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x - 1,08366}$$

Chebichev demostró que la fórmula de Legendre no es cierta, estudió profundamente las propiedades de la función $\pi(x)$ y mostró que el verdadero orden de crecimiento de esta función es el mismo que el de la función $\frac{x}{\ln x}$. Además Chebichev dio las valoraciones exactas

$$0,92129 < \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} < 1,10555.$$

Este descubrimiento de Chebichev produjo una enorme impresión. Muchos matemáticos trabajaron en el perfeccionamiento de sus métodos y el mejoramiento de los resultados. Silvester en artículos de los años 1881 y

1892 estrechó la desigualdad antes mencionada:

$$0,95695 < \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} < 1,04423.$$

Aproximaciones ulteriores fueron obtenidas por Schur (1929) y Brench (1932).

Chebichev encontró además, evaluaciones integrales de $\pi(x)$. Logró demostrar que con el crecimiento de x el valor de la función $\pi(x)$ oscila alre-

dedor de $\int_2^x \frac{dz}{\ln z}$, satisfaciendo infinitas veces las desigualdades

$$\pi(x) > \int_2^x \frac{dz}{\ln z} - \frac{\alpha x}{\ln^n x}$$

y

$$\pi(x) < \int_2^x \frac{dz}{\ln z} + \frac{\alpha x}{\ln^n x} \quad (\alpha > 0, n \geq 1).$$

Sólo en el año 1896 Hadamard y Vallee-Poussin demostraron el teorema límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\int_2^x \frac{dz}{\ln z}} = 1.$$

Ya en nuestros días A. Selberg encontró (1949) una demostración elemental de esta ley asintótica. En el año 1955, A.G. Postnikov y N.P. Romanov simplificaron la voluminosa deducción de Selberg.

La investigación de la distribución de los números primos en la serie natural condujo a la aparición de los trabajos de Chebichev sobre la teoría de las formas cuadráticas. En el año 1866 apareció su artículo "Sobre una cuestión aritmética", dedicada a las aproximaciones diofánticas, esto es, a la solución aproximada, en números enteros, de ecuaciones diofánticas, lo que realizó con ayuda del aparato de las fracciones continuas.

Las ideas de Chebichev en el campo de la teoría de los números fueron elaboradas por sus discípulos A.N. Korin, E.I. Zolotariev, A.A. Markov,

G.F. Voronoi y otros ¹⁾. La escuela soviética de teoría de números es muy competente y numerosa, actualmente está encabezada por el académico I.M. Vinogradov. Además en el puesto de director del Instituto de Matemáticas de la Academia de Ciencias de la URSS (desde 1932), I.M. Vinogradov dirige el mayor y más relevante colectivo de científicos-matemáticos soviéticos.

Chebyshev se dedicó a la teoría de probabilidades aún en sus años de juventud, dedicándole su tesis de maestría. En aquella época la teoría de probabilidades sufría una crisis singular. Sus leyes fundamentales: la ley de los grandes números y el teorema límite de Moivre—Laplace

$$G\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

(ley límite de probabilidades para la desviación del número x de ocurrencias de un suceso casual, de la esperanza matemática a de este número x , durante n experimentos con probabilidad constante p ; varianza $\sigma^2 = np(1-p)$) fueron fundamentalmente encontradas ya en el siglo XVIII. El reconocimiento de la importancia general de estas leyes condujo a su amplia aplicación, incluso a los intentos de utilizarlas en el dominio de la práctica social. Esto provocó un gran número de juicios sin fundamentos y erróneos lo que repercutió en la reputación científica de la propia teoría de probabilidades. Sin una fundamentación sólida de los conceptos y resultados, el desarrollo ulterior de esta ciencia era imposible.

Chebyshev escribió en total cuatro trabajos sobre teoría de probabilidades (en los años 1845, 1846, 1867, y 1887), pero según el reconocimiento universal, estos trabajos llevaron la teoría de probabilidades nuevamente al rango de ciencia matemática y sirvieron de base para la creación de toda una escuela matemática.

Los puntos de partida del autor se revelaron ya en su tesis de maestría donde se propuso el objetivo de dar tal construcción de la teoría de probabilidades, la cual en la menor medida necesitara del aparato del análisis matemático. Esto lo logró negándose al paso al límite y sustituyendo este paso por un sistema de desigualdades en los que se encierran todas las relaciones. Las estimaciones numéricas de los errores y desviaciones siguieron siendo un rasgo característico también para los trabajos siguientes de Chebyshev sobre teoría de probabilidades.

¹⁾ Véase B. Делонс. Петербургская школа теории чисел. М., Изд-во АН СССР, 1947. (La escuela de la teoría de números de Petersburg.)

Posteriormente Chebyshev amplió el aparato de la teoría de probabilidades. Para ello hizo uso de las fracciones continuas algebraicas, cuyas propiedades estudió inicialmente en relación con los problemas de integración de funciones algebraicas. Sobre la base del algoritmo de las fracciones continuas construyó la teoría general del desarrollo de una función arbitraria en serie por polinomios ortogonales. Complementando el aparato con las definiciones rigurosas de las propiedades de las esperanzas matemáticas y otras definiciones y razonamientos, Chebyshev en el año 1866 encontró la demostración de la ley de los grandes números en la formulación clásica, más general para aquella época: si las esperanzas matemáticas de las magnitudes $x, y, z, \dots, x^2, y^2, z^2, \dots$, son respectivamente $a, b, c, \dots, a_1, b_1, c_1, \dots$, entonces la probabilidad de que la media aritmética N de las magnitudes x, y, z, \dots , se diferencie de la media aritmética de las esperanzas matemáticas de estas magnitudes en una magnitud menor que

$$\frac{1}{t} \sqrt{\frac{a_1 + b_1 + c_1 + \dots}{N} - \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \dots}{N}},$$

para cualquier t , será mayor que $1 - \frac{t^2}{N}$.

Una demostración suficientemente general y rigurosa del teorema central del límite Chebyshev la logró encontrar sólo hacia el año 1887. Para demostrar que "si las esperanzas matemáticas de las magnitudes u_1, u_2, u_3, \dots son cero, y las esperanzas matemáticas de todas sus potencias tienen una magnitud numérica inferior a cierto límite fijo, la probabilidad de que la suma de n magnitudes $u_1 + u_2 + \dots + u_n$, dividida por la raíz cuadrada del doble de la suma de las esperanzas matemáticas de sus cuadrados se encuentre entre dos magnitudes cualesquiera t y t' , con el crecimiento de n hasta ∞ , tiene como límite la magnitud de la integral

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^{t'} e^{-x^2} dx^n,$$

Chebyshev se vio obligado a encontrar el método, conocido en la literatura actual como método de los momentos.

En la demostración de este teorema Chebyshev dejó una laguna lógica. Resultó que junto a la condición de independencia de las variables aleatorias es necesario suponer que la media aritmética de la dispersión, cuando $n \rightarrow \infty$, tiende a cierto límite positivo. Esta insuficiencia fue corregida por su discípulo A.A. Markov.

Los discípulos de Chebyshev, Markov y Liapunov, desarrollaron con sus trabajos la orientación en la teoría de probabilidades de Chebyshev has-

ta tal punto que según las palabras de A.N. Kolmogórov, actualmente estos trabajos se consideran en todas partes como el punto de partida de todo el desarrollo contemporáneo ulterior de la teoría de probabilidades. En sus trabajos se desarrollaron el método de los momentos (Markov) y el método de las funciones características (Liapunov). Entre los logros de la Escuela de Petersburgo de teoría de probabilidades, en especial, merece ser señalada la teoría de las cadenas de Markov. Los trabajos de Chebishev, Markov y Liapunov constituyen, según clasificación de A.N. Kolmogorov una etapa completa en la historia de la teoría de probabilidades. Esta etapa abarca la segunda mitad del siglo XIX. En el transcurso de este período, la teoría de probabilidades, en Europa Occidental, no fue sometida a tan activa elaboración.

Un grupo notable de trabajos de Chebishev está dedicado a la teoría de aproximación de funciones. Este grupo de trabajos es notable por sus enormes consecuencias teóricas, lo que condujo al surgimiento de la actual teoría constructiva de funciones. Esta última estudia, como se sabe, la dependencia entre las propiedades de diferentes clases de funciones y el carácter de su aproximación por otras funciones más sencillas en una región finita o infinita.

Durante una comisión científica en el extranjero en el año 1852 Chebishev se interesó por diferentes tipos de mecanismos articulados, mediante los cuales se realiza la transformación del movimiento de traslación rectilínea de los émbolos de una máquina de vapor en el movimiento circular del volante. Una de las variedades de semejantes mecanismos es el conocido ampliamente paralelogramo de Watt. Chebishev construyó, en general, una gran cantidad de mecanismos y les dedicó muchas investigaciones.

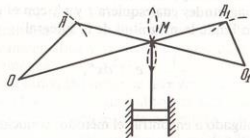


Fig. 65

Consideremos, por ejemplo, el mecanismo donde alrededor de O y O_1 pueden girar OA y O_1A_1 (fig. 65). El movimiento del punto M que transmite los impulsos del émbolo a las partes giratorias no es rectilínea. Tiene el carácter de pulsaciones. El problema de calcular el mecanismo de tal manera que las desviaciones del punto M de la vertical sea mínima (para evitar



A. A. Markov (1856—1922)

una influencia perjudicial en el trabajo de la máquina), conduce al problema matemático: determinar el movimiento del punto M como la función que tiene una mínima desviación de cero en un intervalo dado. La función más cómoda para operar es el polinomio. De aquí surgen los problemas de la determinación de polinomios que tienen una mínima desviación de cero y también la aproximación de funciones mediante polinomios. Este último problema según Chebishev se plantea así: en el segmento $[a, b]$ está dada una función continua. Se considera para ese mismo segmento el conjunto de todos los polinomios $P_n(x)$ de grado no mayor que N . Se consideran

$$\max |f(x) - P_n(x)|$$

para todos los polinomios dados y de ellos se elige aquel que da el menor valor de la expresión dada.

Chebishev estudió las propiedades y encontró la forma de una clase en-

tera de polinomios especiales, los cuales llevan su nombre aun en nuestros días. Los polinomios de Chebishev, de Chebishev—Laguerre, Chebishev—Hermite y sus variantes juegan un gran papel en las matemáticas, teniendo diversidad de aplicaciones. No mencionando la cinemática de mecanismos, que sirvió de punto de partida para la teoría de la mejor aproximación de Chebishev, ésta se aplica a la resolución de ecuaciones algebraicas, la interpolación, aproximantes de cuadraturas, problemas geodésicos y cartográficos, etc.

En la teoría de Chebishev de la mejor aproximación de funciones están contenidas las ideas de la teoría general de los polinomios ortogonales, de la teoría de los momentos y de los métodos de cuadraturas. Los polinomios ortogonales con peso aparecen en su obra en el desarrollo de la integral

$$\int_a^b \frac{P(x)}{z-x} dx \quad (p(x) \geq 0)$$

en serie de la forma

$$\frac{S_0}{Z} + \frac{S_1}{Z^2} + \frac{S_2}{Z^3} + \dots,$$

y después en la fracción continua correspondiente a esta serie

$$\frac{b_0}{z-a_1} + \frac{b_1}{z-a_2} + \frac{b_2}{z-a_3} + \dots$$

Si se forma una sucesión de fracciones conveniente

$$\frac{Q_n(x)}{P_n(x)},$$

entonces los denominadores constituyen un sistema de polinomios ortogonales en (a, b) con peso $p(x) \geq 0$.

Chebishev relacionó los polinomios ortogonales con el método de los cuadrados mínimos. Encontró que el polinomio $P_n(x)$ que minimiza

$$\int_a^b p(x)[f(x) - P_n(x)]^2 dx,$$

puede ser representado como una suma

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n A_k P_k(x),$$

donde $P_k(x)$ son los polinomios ortogonales antes indicados y los coeficientes

$$A_k = \frac{\int_a^b f(x)P_k(x)p(x)dx}{\int_a^b P_k^2(x)p(x)dx}.$$

Una serie de artículos de Chebishev está dedicada a la teoría de integración. En ellos se trata de la integración de irracionales algebraicos y de los métodos de cálculo aproximado de integrales definidas. Aquí le pertenece la solución definitiva de la cuestión sobre la integrabilidad del binomio diferencial

$$\int x^m(a + bx^n)^p dx$$

(m, n, p son números racionales) en funciones elementales. Más precisamente, estableció que los casos encontrados ya en el siglo XVIII de integrabilidad: p es número entero; $\frac{m+1}{n}$ o $\frac{m-1}{n} + p$ son números enteros, los únicos posibles. El presente ciclo de trabajos de Chebishev está relacionado con los trabajos de I.J. Somov. También en este campo, como en los anteriores, las ideas de Chebishev fueron elaboradas por sus discípulos y otros científicos: E.I. Zolotariov, I.P. Dolbnya, I.L. Ptachitski, D.A. Grave y otros.

A la actividad científica de Chebishev la hemos dedicado comparativamente mucho espacio, ya que ella es la base, el comienzo de un desarrollo rápido de las matemáticas en la segunda mitad del siglo XIX en Petersburgo. Chebishev y sus discípulos A.A. Markov, A.M. Liapunov, E.I. Zolotariov, A.N. Korkin, G.F. Voronoi y otros constituyeron el núcleo del colectivo científico de matemáticos para los cuales en la literatura se ha consolidado la denominación de Escuela Matemática de Petersburgo. Este colectivo, en el año 1890, organizó la Sociedad Matemática de Petersburgo, la cual funcionó hasta el año 1905.

Los matemáticos peterburgueses ejercieron influencia decisiva en la formación de escuelas científicas en otras ciudades. Así, A.M. Liapunov, quien trabajó varios años (1885—1902) en Járkov, posibilitó en gran medida, la ramificación de la actividad científica y la unión de los matemáticos. Cuando se fue a Petersburgo, dejó a su discípulo V.A. Steklov en el puesto de presidente de la Sociedad de Matemática de Járkov. D.A. Grave, trasladándose en el año 1902 de Petersburgo a Kiev creó allí al cabo de algunos años, una escuela científica algebraica de donde salieron O.Y. Schmidt, N.G. Chebotariov y otros.



S. V. Kovalevskaya (1850—1891)

Los intereses científicos de los matemáticos petersburgueses, y del propio Chebishev, en particular no se limitaron a la teoría de los números, teoría de probabilidades y problemas aislados del análisis matemático (teoría de integración, teoría de aproximación de funciones). De los otros campos de las matemáticas se elaboraron más intensamente las ecuaciones diferenciales (Liapunov, Imshenetski, Sonin y otros) y la teoría de funciones de variable compleja (Sojotski).

La Escuela Matemática de Petersburgo a fines del siglo pasado y a comienzos del presente se transformó en un conjunto de varias escuelas científicas matemáticas, las cuales ejercieron gran influencia en el desarrollo de las matemáticas en Rusia. Las relaciones de los matemáticos leningradenses (petersburgueses) con otras escuelas científicas de Rusia, después de la Gran Revolución Socialista de Octubre se fortalecieron tanto y los intereses científicos se entrelazaron tanto que el propio término "Escuela de Petersburgo" perdió su sentido aislante.

La obra matemática de S.V. Kovalevskaya. Antes de pasar a las características de otros colectivos matemáticos, aclaremos la actividad científica de la primera mujer en el mundo profesor de matemáticas, que constituye una gloria de la ciencia rusa, pero la cual quedó trágicamente aislada, Sofia Vasilievna Kovalevskaya (1850—1891).

S.V. Kovalevskaya creció en una familia de un general rico que después del retiro se hizo hacendado. Su instrucción la recibió en casa, pero fue educada por buenos pedagogos. El interés por las matemáticas se manifestó en ella muy temprano. Ya que la entrada a la universidad en Rusia para las mujeres estaba cerrada, ella siguió el ejemplo de las mujeres progresistas de aquella época y partió al extranjero para recibir la instrucción. Obtener el pasaporte para el extranjero le ayudó su matrimonio con V.O. Kovalevski, el cual posteriormente fue ampliamente conocido por sus trabajos sobre paleontología. El amor a la ciencia y ante todo a las matemáticas, las ideas progresistas armoniosas a la inclinación de los pensadores y luchadores de vanguardia contra la autocracia, ayudaron a S.V. Kovalevskaya a superar los convencionalismos y prejuicios de los parientes y en general de la gente de su círculo.

S.V. Kovalevskaya partió para Alemania en el año 1869. Después de una breve estancia temporal en Heidelberg, donde trabajaban en aquella época Kenigsberger, Du Bois Reymond, Kirchhoff, Helmholtz, arribó a Berlín y convenció a K. Weierstrass para que dirigiera sus estudios sobre matemáticas. El talento de Sofia Vasilievna se desarrolló bajo una hábil dirección y ya en el año 1874 su maestro envió a la universidad en Gotinga tres trabajos: "Sobre la teoría de ecuaciones en derivadas parciales", "Sobre la forma de un anillo de Saturno" y "Sobre la reducción de una clase de integrales abelianas de 3er. rango a integrales elípticas". Estos trabajos fueron más que suficientes para otorgarle el grado de doctor en filosofía sin la defensa de tesis.

En la primera de las obras Kovalevskaya demostró la existencia de una solución analítica única del problema de Cauchy para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de la forma

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} = f\left(x, x_1, x_2, \dots, x_n, \varphi, \dots, \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r} \varphi}{\partial x^{\alpha_1} \partial x^{\alpha_2} \dots \partial x^{\alpha_r}}\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i \leq N, \alpha < n\right)$$

bajo las condiciones: a) analiticidad de la función f en una vecindad de (x_0, a_1, \dots, a_r) y de las funciones incluidas en las condiciones iniciales; b) la

ecuación tiene la forma normal, esto es $\alpha + \sum_{i=1}^r \alpha_i < n + N$. Aquí también

encontró, independientemente de Cauchy, la transformación lineal de los argumentos que lleva la ecuación a una forma normal. Un notable descubrimiento de Kovalevskaya en esta rama es el ejemplo de una ecuación del tipo de la conducción del calor

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

con condiciones iniciales $x = a$, $\varphi = \varphi_0(y/b)$ ¹⁾. Para esta ecuación el problema de Cauchy no tiene solución holomorfa, ya que la serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^{2k} \varphi_0(y/b)}{dy^{2k}} \cdot \frac{(x-a)^k}{k!}$$

que satisface formalmente las condiciones del problema, converge sólo bajo condiciones muy especiales respecto a

$$\varphi_0(y/b).$$

Estos resultados, Kovalevskaya los extendió a sistemas normales de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, dándoles una forma próxima a la actual.

En el segundo trabajo, Kovalevskaya encontró un grado mayor de aproximación en comparación con la solución de Laplace, lo que le permitió afirmar que los anillos de Saturno tienen en la sección la forma no elíptica (según Laplace) sino oval. Más tarde fue establecida la discontinuidad de la estructura de estos anillos.

Finalmente en el tercer artículo ella encontró las condiciones de reducción de una integral ultraelíptica, que contiene un polinomio de 8-vo. grado, a una integral elíptica de primer género.

En este mismo año 1874, Kovalevskaya regresó a Rusia. Intervino con informes científicos, conoció a Chebishev, Markov, Zhukovsky, Bugaev y otros científicos matemáticos, llevó a cabo una actividad literaria. No obstante, a pesar de la notable autoridad científica, y ayuda de los científicos, para Kovalevskaya resultó imposible obtener trabajo en la universidad, ni incluso dar los exámenes de maestría (los grados obtenidos en el extranjero no se reconocían en las universidades rusas). El gobierno zarista no admitía de ninguna forma mujeres en la escuela superior.

Sólo en el año 1883, después de la muerte de V.O. Kovalevski, ella recibió una invitación para ocupar el puesto de la docente en la recién abierta

universidad de Estocolmo y emigró a Suecia, donde después de un año (1884) se hizo profesora. Aquí, ante ella, se abrieron las posibilidades de trabajo científico. Año tras año dictaba cursos de conferencias. Su alto nivel científico y maestría pedagógica de conferencista provocaron comentarios favorables. Es conocido que S.V. Kovalevskaya dictó los siguientes cursos de conferencias: teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (1884, 1890), teoría de Weierstrass de las funciones algebraicas (1885), abelianas (1885—1887), elípticas (1888), y ζ -función (1888), teoría del potencial (1886), teoría del movimiento de un cuerpo sólido (1886—1887), teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales según Poincaré (1887—1888), métodos analíticos de la teoría de números (1890) y otros.

La enérgica actividad científica de Kovalevskaya produjo en aquella época nuevos frutos. En el año 1888 recibió el premio de la Academia de Ciencias de París por la mejor solución del problema, en un concurso convocado, de la rotación de un cuerpo sólido alrededor de un punto fijo, donde fue considerado el caso de un giróscopo cargado (no totalmente simétrico). Por otro trabajo en esta rama le fue otorgado un premio de la Academia Sueca de Ciencias.

La esencia de la cuestión aquí consiste en que las ecuaciones del movimiento de un cuerpo sólido pesado alrededor de un punto fijo en el caso general no tienen soluciones unívocas con cinco constantes arbitrarias y tales que en todo el plano complejo, tengan en calidad de puntos singulares, sólo polos. Estableciendo esto, Kovalevskaya encontró, a continuación, que en ciertos casos todos los elementos del movimiento pueden expresarse a través de funciones elípticas del tiempo t . Estas funciones, como se sabe, en el plano complejo tienen, en calidad de puntos singulares, sólo polos, y por consiguiente son unívocas.

El primero de tales casos, cuando el centro del movimiento se encuentra en un punto fijo, fue estudiado por Euler y Poinsot. Ellos demostraron que para determinar completamente el movimiento, es suficiente tener las integrales de las fuerzas vivas y de las áreas.

El segundo caso fue destacado y resuelto por Lagrange. Este caso, cuando el elipsoide de inercia, respecto al punto fijo es un elipsoide de revolución y el punto fijo yace en el eje de revolución de este elipsoide. Lagrange añadió a la integral de las fuerzas vivas y a la integral de las áreas respecto a la vertical que pasa por el punto de apoyo, una tercera integral que expresa la constancia de las condiciones de velocidad respecto al eje de revolución del elipsoide de inercia. Esto le dio la posibilidad de expresar todos los elementos del movimiento por medio de las trascendentes elípticas.

El tercer caso fue resuelto por Kovalevskaya. Este es el caso cuando el centro de gravedad del cuerpo yace en el plano del ecuador del elipsoide de

¹⁾ Este símbolo denota la analiticidad de la función en una vecindad de $y = b$.

inercia, construido para el punto fijo, el cual sirve de elipsoide de revolución y satisface la condición $A = B = 2C$ (A, B, C , son los momentos principales de inercia).

N.E. Zhukovsky interpretó claramente estos tres casos (ver fig. 66).

Tres años después de la muerte de S.V. Kovalevskaya, en 1894, A.M. Liapunov dio a estos resultados una forma muy general. No obstante este problema aún no ha sido resuelto en forma general. Los métodos generales de estudio de las ecuaciones correspondientes, para parámetros cualesquiera y condiciones iniciales dadas, aún no existen.



Fig. 66

Los más eminentes matemáticos rusos, Chebishev, Buniakovski y Imshenetski, lograron en 1889 la elección de S.V. Kovalevskaya miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de Petersburgo. No obstante a un miembro correspondiente de la Academia con un nombre científico reconocido, el gobierno zarista no le permitió llevar a cabo trabajos en la Academia o las universidades; a las mujeres esto le estaba prohibido. Murió S.V. Kovalievskaya en el año 1891 en la plenitud de sus fuerzas e ideas creadoras; fue sepultada en Estocolmo, en el cementerio Norte.

Escuela matemática de Moscú. Finalmente, consideremos las etapas fundamentales de la formación de la Escuela Matemática de Moscú. A diferencia de la Escuela de Petersburgo, donde el centro de las investigaciones matemáticas era la Academia de Ciencias, los matemáticos de Moscú se agrupaban en torno a la universidad. La historia de las matemáticas en el siglo XIX en Moscú debe comenzarse desde el año 1804, desde el momento de la organización de la facultad Físico-Matemática y departamentos de Matemáticas Puras y Aplicadas. La primera mitad del siglo se caracteriza, fundamentalmente, por la elevación del nivel de la enseñanza y el crecimiento de la calificación de los profesores y docentes. En las difíciles condiciones de la opresión autocrática crecía lentamente la cantidad de estudiantes, en 11 años (1825—1836) la facultad Físico-Matemática la termi-

naron 119 individuos, esto es como promedio 11 individuos por año; en los 18 años siguientes (1837—1854) la terminaron ya 453 individuos lo que constituye alrededor de 25 personas al año. Las posibilidades de utilización de los talentos científicos eran muy limitadas. No obstante, entre los egresados de la universidad de Moscú durante medio siglo surgieron no pocos científicos prominentes: los académicos P.L. Chebishev, I.I. Somov, F.A. Bredijin, los profesores V.Ya. Tsinger, A.Yu. Davidov, M.F. Jandrikov, N.A. Liubimov, A.G. Stoletov y otros.

En el año 1811, en Moscú fue realizado el intento de crear la primera sociedad matemática en Rusia. El iniciador fue el teniente coronel N.N. Muraviov. El objetivo de la sociedad, como se indicaba en su reglamento era difundir la ciencia matemática. A propósito, prácticamente el asunto se redujo a la enseñanza de ciencias militares aplicadas. Después de cinco años, en 1816, sobre la base de la Sociedad surgió un centro de enseñanza militar, el cual preparaba oficiales de estado mayor general. En el año 1826 fue trasladado a Petersburgo.

Un cambio brusco en la organización de una actividad científica seria en Moscú se señala sólo en los años 60 del siglo XIX. Está totalmente vinculado con la organización de la Sociedad Matemática de Moscú. Las sociedades matemáticas, así como cada sociedad científica son formas del trabajo colectivo de los científicos una de cuyas partes componentes más importante, es la información y discusión científica recíproca. El surgimiento de sociedades científicas designa un nuevo nivel, más alto, de las investigaciones científicas. En nuestra época además de las sociedades existen muchas otras formas organizativas del trabajo colectivo de los científicos (laboratorios, seminarios, institutos, centros coordinadores, etc.), pero el papel de las sociedades científicas no disminuye. Puede pensarse, que en la futura sociedad comunista las formas sociales de uniones científicas ocuparán aún mayor lugar.

La Sociedad Matemática de Moscú comenzó su actividad en el año 1864. Al comienzo ésta era un pequeño grupo de científicos, predominantemente docentes de la universidad, los cuales se reunían en el apartamento, del profesor N.D. Brashman (1796—1866) el cual era maestro de varios de ellos y muy respetado por todos, que en este mismo año 1864 pasó a retiro.

En la primera reunión, el 15 de septiembre de 1864, N.D. Brashman fue elegido presidente de la sociedad, A.Yu. Davidov, vicepresidente. Fue resuelto que el objetivo de esta nueva sociedad sería la interacción en las tareas de las ciencias matemáticas. Para ello los 13 miembros de la sociedad se repartieron entre sí las ramas de las ciencias físico-matemáticas para seguir sus logros y desarrollo y comunicarlos en las reuniones. En matemáticas, estas tareas referativas se repartieron de la siguiente manera (se han conser-



N. D. Brashman (1796—1866)

vado las formulaciones): A. Yu. Davidov, integración de ecuaciones en derivadas parciales; A. V. Letnikov, ecuaciones diferenciales; N. N. Alexieiev, integración de funciones irracionales y funciones elípticas; K. M. Peterson, geometría analítica; S. S. Urusov, teoría de las diferencias finitas; F. A. Sludski y después desde el año 1865 N. V. Bugaiev, teoría de números. Los otros miembros de la sociedad se encargaron de las referencias sobre mecánica, astronomía y física.

Después de un año, en octubre de 1865, los miembros de la sociedad solicitaron el reconocimiento oficial de su organización. Antes de esto, en abril de 1865 decidieron editar las "Colecciones Matemáticas"; el primer número de esta revista apareció en octubre de 1866. La constitución oficial de la sociedad se realizó el 28 de enero de 1867. La sociedad experimentaba grandes dificultades financieras y organizativas, pero marchaba. Hacia el año 1901 constaba de 101 individuos y en 1913 de 112. Con interrupciones,

pero salía, la "Colección Matemática", la más vieja publicación rusa especial periódica sobre matemáticas que existe aun en nuestros días. Se acordó en el año 1873 el intercambio de publicaciones con organizaciones extranjeras. La autoridad científica de la sociedad y las relaciones de sus miembros se fortalecían. Gran ayuda a la sociedad la brindó su influyente miembro P. L. Chebishev.

Gradualmente en la sociedad transcurría la diferenciación, la cual llevó a la transformación de las matemáticas y mecánica (que llevaba en aquel entonces el nombre de matemáticas aplicadas) y prácticamente al aislamiento de otras ciencias. Hasta el año 1917 de los 971 informes científicos leídos en las reuniones de la sociedad, 640 (66%) eran sobre matemáticas, 217 (22%) sobre mecánica y 114 (12%) sobre física y astronomía.

Los intereses científicos de los matemáticos moscovitas abarcaban numerosos campos. No obstante, enseguida cristalizaron las direcciones más productivas, constituyéndose en escuelas científicas. En la segunda mitad del siglo XIX tales escuelas eran dos: matemáticas aplicadas (mecánica) y geometría diferencial. Notable era también la dirección de las ecuaciones diferenciales.

El iniciador de la organización de la sociedad matemática y su primer dirigente N. D. Brashman terminó en Viena el Instituto Politécnico y la universidad. Después del trabajo en Petersburgo y en Kazán (1825—1834) llegó a la Universidad de Moscú como profesor de matemáticas aplicadas. Durante 30 años de trabajo en la universidad, sentó las bases científicas de la enseñanza de la mecánica teórica y práctica. Dictó también conferencias sobre disciplinas matemáticas. Sus intereses científicos estaban relacionados con la investigación del principio de acción mínima y la hidrodinámica. Fue maestro de muchos matemáticos (P. L. Chebishev, I. I. Somov y otros) y mecánicos (A. S. Ershov, A. Yu. Davidov, F. A. Sludski y otros) eminentes.

El sucesor de Brashman en la enseñanza de la mecánica en la universidad y en el puesto de presidente de la Sociedad Matemática de Moscú A. Yu. Davidov (1823—1885) fue un sabio de amplias ideas científicas, que conjugaba felizmente los estudios teóricos y prácticos. Sus trabajos sobre mecánica se relacionan con dos problemas: teoría de equilibrio de los cuerpos sumergidos en un líquido y fenómenos de capilaridad. A Davidov le pertenece el método de búsqueda de la posición de equilibrio de cuerpos flotantes con ayuda de la superficie de los centros (superficie sobre la cual están ubicados todos los centros de gravedad para diferentes secciones del cuerpo de un volumen seccionado constantemente). Davidov se esforzó en relacionar la teoría de los fenómenos capilares con la teoría general de equilibrio de los líquidos y estudiarla con los recursos de la mecánica analítica, con ayuda del principio de las traslaciones virtuales, pero tenien-

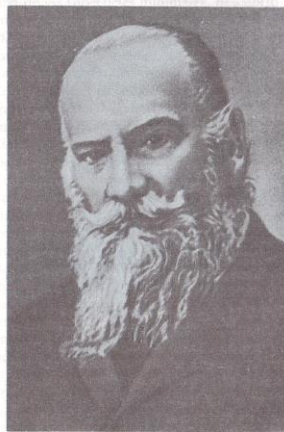
do en cuenta la variación de la densidad en las fronteras. Las investigaciones matemáticas de Davidov se relacionan a las aplicaciones de la teoría de probabilidades, ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, teoría de integración.

A finales del siglo XIX, en la universidad y en la escuela técnica superior trabajaban un número comparativamente grande de matemáticos de orientación aplicada: F.A. Sludski, D.N. Lebedev, F.E. Orlov, V.L. Tsinger. Nikolai Egorovich Zhukovsky (1847—1921) se convirtió en la cabeza reconocida por todos de esta dirección científica. Terminó la universidad en el año 1868 en matemáticas aplicadas. Durante muchos años Zhukovsky enseñó en la universidad y en la escuela técnica superior. Ingresando en la sociedad matemática (1876), se convirtió en uno de sus miembros más activos y respetados; fue elegido vicepresidente (1903—1905) y a continuación presidente (1905—1921) de la sociedad.

En las obras y en toda la actividad de Zhukovsky encontró su expresión más brillante la conjugación del científico-teórico y el ingeniero-práctico. En las matemáticas sus investigaciones fundamentales se concentraban alrededor de las ecuaciones de la física matemática, además un gran lugar fue dedicado a los métodos aproximados de resolución. Trabajó mucho sobre los problemas de la teoría de funciones de variable compleja descubriendo aplicaciones de esta teoría a la resolución de problemas complejos de la hidrodinámica y aeromecánica.

Entre los numerosos trabajos (alrededor de 80) de N.E. Zhukovsky escritos hasta el año 1900 predominan los trabajos sobre hidromecánica. En ellos se investigan los problemas del balanceo de los barcos, de los motores reactivos de eyección de agua, la fricción del líquido en la cavidad de un cuerpo, etc. Vinculado a las consultas técnicas sobre la conducción del agua en Moscú, Zhukovsky descubrió el fenómeno del golpe hidráulico y elaboró su teoría. Además, le pertenece una gran cantidad de investigaciones sobre mecánica: la teoría del movimiento de un cuerpo sólido alrededor de un punto fijo, estabilidad del movimiento, etc.

En los últimos años del siglo XIX Zhukovsky concentró fuerzas para la elaboración de los problemas de la aerodinámica y aviación. Sus trabajos sobre la teoría de la navegación aérea aparecen desde el año 1889. Enseñando pasó a los experimentos en este campo, construyendo en la Universidad de Moscú (1902) el primer tubo aerodinámico. Dos años después en 1904, descubrió el método de anejeo de remolinos, convirtiéndolo en base de los cálculos aerodinámicos. Tras esto prosiguió la elaboración de la teoría de la fuerza de suspensión del ala y la teoría del torbellino de las hélices. Simultáneamente se ampliaron también los experimentos. Junto a sus discípulos y colaboradores (cuyo número creció rápidamente) N.E. Zhukovsky, en el año 1904, tomó parte en el proyecto y construcción del pri-



N. E. Zhukovski (1847—1921)

mer instituto de aerodinámica en Rusia, en Cúchino (en los alrededores de Moscú). En el año 1910, organizó un laboratorio aerodinámico en la Escuela Técnica Superior de Moscú. Los innumerables méritos científicos, teóricos y experimentales de Zhukovsky dieron motivo a V.I. Lenin para denominarlo "padre de la aviación rusa".

Zhukovsky educó una enorme cantidad de científicos-teóricos, experimentadores, ingenieros, pilotos-oficiales. Fue rodeado de atención y preocupación de parte del Gobierno Soviético. Después de su muerte, en el año 1921, las investigaciones fueron continuadas y desarrolladas por sus discípulos, en especial por S.A. Chapluguin. De las matemáticas aplicadas se desarrollaron numerosas ramas de la mecánica, ciencia multiforme, la cual conjuga estrechamente los métodos matemáticos de investigación teórica con el experimento y por ello es especialmente importante para las ramas modernas de la nueva técnica. La mecánica soviética introduce actual-



K. M. Peterson (1818—1881)

mente valiosos aportes a la construcción de la base científico-técnica del comunismo y tiene numerosos representantes eminentes (M.V. Keldish, M.A. Lavrentiev y otros).

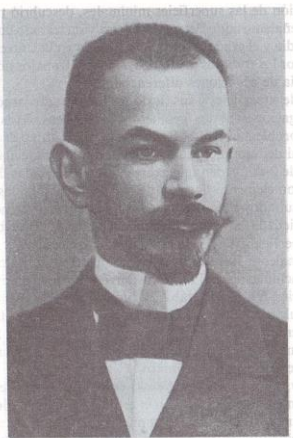
Otra escuela científica, que ya mencionamos anteriormente tiene su comienzo en los trabajos de K.M. Peterson sobre geometría diferencial clásica. Peterson (1818—1881) terminó en el año 1852 la Universidad en Tartu. Sus maestros fueron Zenf y Minding, los que, al parecer, le inculcaron el interés por los problemas de la geometría diferencial. En la tesis de candidato a doctor "Sobre la flexión de superficies" (1853) y en trabajos sucesivos, Peterson en esencia se adelantó al desarrollo de la teoría de superficies en varios años. Investigó la flexión de las superficies, introdujo la flexión en la base principal, resolvió el problema, vinculado con la flexión, de determinación de una superficie dada su forma cuadrática, deduciendo las condiciones analíticas las cuales determinan la superficie con exactitud de hasta su posición en el espacio. Estas condiciones se conocen como fórmulas de Maynardi-Codazzi aunque éstos obtuvieron sus resultados respectivamente cuatro y quince años con posterioridad a Peterson. Además en-

contró la flexión de las superficies minimales, descubrió nuevas clases de superficies. Señalemos que Peterson toda su vida trabajó como profesor de enseñanza media y el grado de doctor lo obtuvo en la Universidad de Odesa (1879) no por los trabajos señalados, sino por trabajos no tan significativos en la teoría de ecuaciones diferenciales.

La teoría de superficies y sus flexiones fue durante largo tiempo objeto de las investigaciones de los géometras moscovitas. Tras Peterson estudiaron estos problemas B.K. Mlodzeievski, el cual les dedicó su tesis de maestría. Aquí dedujo la ecuación general de flexión (ecuación en derivadas parciales de 2-do. orden que expresa las coordenadas de los puntos de la superficie con elemento lineal dado ds^2 en función de las magnitudes u , v). Obtuvo resultados en la teoría de los invariantes diferenciales de las superficies y variedades multidimensionales y además relativo a clases particulares de superficies. D.F. Egórov (1869—1931) estudió sistemas triplemente ortogonales e introdujo las denominadas superficies potenciales (que fueron incluidas en la literatura universal por iniciativa de Darboux como superficies E). Estos trabajos fueron posteriormente continuados por sus discípulos L.N. Sretenski y S.P. Finikov. La escuela moscovita de geometría diferencial después de Egorov, la encabezaron S.P. Finikov y S.S. Biushguens. En la actualidad esta escuela es un importante colectivo creador encabezado por S.P. Finikov.

Zhukovsky, Egorov y Mlodzeievski en su forma más relevante reflejaron y en gran medida determinaron el estilo de trabajo de los matemáticos de Moscú de fines del siglo XIX — comienzos del XX. Este estilo se caracterizaba por la amplitud de los intereses científicos, la ausencia de una especialización estrecha, la tendencia a la investigación de ideas generalizadoras. Primero Zhukovsky y después Egórov y Mlodzeievski introdujeron en la práctica de la enseñanza seminarios científicos y conferencias dedicadas a las nuevas ramas de las matemáticas. Esto aceleró el proceso de desarrollo de científicos jóvenes. En los seminarios de la universidad surgieron N.N. Luzin, V.V. Golubev, I.J. Privalov, V.V. Stepanov y después P.S. Alexandrov, A.N. Kolmogórov, D.E. Menshov, L.N. Sretenski, P.S. Urison, A.Y. Jinchin y otros, los cuales crearon las bases de la Escuela Matemática de Moscú después de la Gran Revolución Socialista de Octubre y conquistando con sus trabajo un lugar importante en la ciencia.

La unión temática de los intereses científicos de una parte considerable de los matemáticos moscovitas (si no la mayoría) ocurrió a comienzos del siglo XX alrededor de los problemas de la teoría de conjuntos y teoría de funciones. La atención fue dirigida al estudio de los conceptos fundamentales del análisis (función, derivada, integral, etc.) y las operaciones (por ejemplo, desarrollo de funciones en serie) desde un punto de vista más general. En momento característico de muchas investigaciones se convirtió la tendencia al esclarecimiento total del sentido real del volumen de los con-



D. F. Egorov (1869—1931)

ceptos comunes y a su generalización, cuando con su ayuda no se logra obtener una respuesta exhaustiva a la cuestión planteada. En esto se notaron muchos rasgos comunes con la creación de los eminentes matemáticos franceses (Borel, Lebesgue, Baire y otros), a los que Egorov y Mlodzievski conocieron durante comisiones científicas en Francia.

El comienzo de un desarrollo tempestuoso de esta nueva dirección en Moscú lo motivó la tesis de I. J. Zhegalkin sobre números transfinitos y el trabajo de D. F. Egorov "Sobre sucesiones de funciones medibles" (1911). El resultado fundamental de este último lo constituyó el teorema: cada sucesión, convergente casi en todo lugar, de funciones medibles ¹⁾ converge uniformemente en un conjunto cerrado cuyo complemento tiene medida tan pequeña como se quiera. Este teorema inmediatamente subrayó la importancia de las investigaciones sobre teoría de funciones para todo el análisis matemático, permitiendo desarrollar aquellas cuestiones donde la difi-

¹⁾ Funciones medibles son aquellas funciones tales que para cualquier número real M el conjunto de los valores de x para los que $f(x) < M$ es medible.



N. N. Luzin (1883—1952)

cultad estriba en el estudio del carácter de la continuidad y de la convergencia.

Un año después, en 1912, el discípulo de D. F. Egorov, N. N. Luzin (1883—1952), estableció una relación aún más estrecha entre las propiedades estructurales de las funciones medibles con una clase más estrecha de funciones continuas, descubriendo la notable propiedad C : cada función medible, finita casi en todo lugar en cierto segmento, puede modificarse en un conjunto de medida tan pequeña como se quiera de modo que se convierta en una función continua en todo el segmento. La denominación de esta propiedad fue elegida por la inicial de la palabra francesa: *continuité*, lo que significa continuidad.

El descubrimiento de la propiedad C creó inmediatamente amplias posibilidades en diversos sentidos, descubiertas y en grado considerable realizadas en el libro de Luzin "Integral y serie trigonométrica" (1915) presentado por él en la Universidad de Moscú en calidad de tesis de maestría. El significado de este libro, el cual se adelantó en muchos años a la línea de desarrollo de la teoría métrica de funciones (esto es, la parte de la teoría de

funciones que basa sus deducciones, en el concepto de medida de un conjunto) fue valorado enseguida después de su aparición con el otorgamiento a su autor del grado científico de doctor, sin pasar por el de maestría. Por esto dedicaremos cierto espacio a su característica.

El esclarecimiento de las interrelaciones de la nueva teoría de funciones con el análisis matemático era el objetivo fundamental de este libro. Un planteamiento más concreto del problema consiste en un estudio conjunto de las propiedades estructurales de determinadas clases de funciones y del aparato analítico que describe esta clase y las operaciones con ellas. Entonces son posibles dos planteamientos del problema recíprocos entre sí: a) partiendo de la propiedad estructural de la función, determinar el aparato analítico que la describe; b) partiendo de una clase de expresiones analíticas, buscar la propiedad estructural de las funciones correspondientes.

En el primero de los seis capítulos del libro de Luzin se da una revisión general a las propiedades de los conjuntos medibles y funciones medibles y la deducción de la propiedad C. El segundo capítulo está dedicado a la búsqueda de la función primitiva. Primitiva, según Luzin, es una función continua, la cual tiene a la función dada por su derivada casi en todo lugar (esto último está condicionado por la necesidad de abarcar la generalización del concepto de integral introducido por Lebesgue y Danjoi). Resultó que cada función medible, finita casi en todo lugar, tiene primitiva. Luzin buscaba aquí ejemplos de aplicación del teorema de existencia de la primitiva. Consideró el problema de Dirichlet para el círculo. Para una función medible arbitraria, finita casi en todo lugar en la circunferencia, demostró la existencia de una función armónica holomorfa en el interior del círculo y que toma los mismos valores de esta función casi en todo el contorno. Esta circunstancia abrió el camino para las investigaciones en el futuro de las propiedades en la frontera de las funciones analíticas.

El estudio de las propiedades características de las funciones primitivas lo cual constituye el contenido de los capítulos tercero y cuarto, condujo a la separación de la integral (en el sentido de Riemann, Lebesgue y Danjoi) con límite superior variable del conjunto de primitivas de una función dada.

La clase de las expresiones analíticas, estudiadas por Luzin en el desarrollo del planteamiento del problema es la clase de las series trigonométricas, ante todo las series de Fourier. A sus propiedades está dedicado el quinto capítulo de la tesis. Ya en el año 1912 Luzin publicó un ejemplo de una serie trigonométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx \quad (A_n \rightarrow 0, B_n \rightarrow 0, \\ n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty)$$

desmostrando que las condiciones indicadas no se garantizan con la convergencia de la serie trigonométrica casi en todo lugar y la cual casi en todo

lugar diverge. Reproduciéndolo aquí, dedujo posteriormente las condiciones necesarias y suficientes para la convergencia casi en todo lugar de la serie de Fourier para una función con cuadrado integrable (esto es, tal que existe la integral de Lebesgue de su cuadrado en el segmento de 0 a 2π). La integral singular, introducida aquí

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{2\pi - \varepsilon} \frac{g(x + \alpha) - g(x - \alpha)}{\alpha} \cos n\alpha \, d\alpha$$

(donde la función $g(x)$ es de cuadrado integrable) se convirtió en un fuerte instrumento de investigación. Con su ayuda Luzin, en particular, descubrió la propiedad de casi simetría de las funciones medibles.

El sexto capítulo está dedicado a la determinación de las condiciones de representabilidad de las funciones en series trigonométricas. Aquí se investigan los diferentes métodos de adición de series trigonométricas, no uniformidad (e incluso infinitiformidad) de la representación de una función mediante series trigonométricas. La selección de un único método de desarrollo de una función en serie trigonométrica, Luzin lo relacionó con la generalización del concepto de integral. Consideró que la integral indefinida de $f(x)$ debe denominarse a la función $\Phi(x)$, la cual es la suma de la serie que se obtiene después de integrar la serie que representa a $f(x)$.

La riqueza de las ideas contenidas en la tesis de Luzin es asombrosa. Podíamos dar aquí sobre ellas sólo una idea preliminar. Todos los conceptos fundamentales del análisis: función (incluso la medible), derivada, integral y otros sufrieron un estudio profundo desde el punto de vista de la medida de los conjuntos correspondientes. La teoría métrica de funciones en Rusia y en la URSS tiene en Luzin su fundador.

En el año 1915, Luzin y sus discípulos, en primer lugar P.S. Alexandrov y M.Ya. Suslin, comenzaron a estudiar la teoría descriptiva de funciones, aquella dirección en la cual se estudian las representaciones de amplias clases de funciones con ayuda del paso al límite, partiendo de las funciones continuas.

En el histórico momento, cuando Rusia estaba ante la Gran Revolución Socialista de Octubre, la Escuela de Moscú de teoría de funciones era una unión de científicos, poco numerosos, pero que trabajaban de forma desudadamente activa y fructífera, en su mayoría jóvenes (A.Ya. Hinchin, V.V. Golubiev, D.E. Menshov, P.S. Alexandrov, M.Ya. Suslin, P.S. Urison y otros). Ellos y sus compañeros más jóvenes y discípulos garantizaron en el futuro la introducción de las ideas de la teoría de funciones en la topología, la teoría de números, la teoría de probabilidades, la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, la teoría de las funciones analíticas y en otras ramas de las matemáticas.

Tres escuelas científicas: de mecánica, de geometría diferencial y de teoría de funciones inscribieron las páginas más brillantes en la historia de las matemáticas moscovitas del período 1860—1917. Sin embargo un estudio muestra que éstas no agotan todas las facetas de la actividad de los matemáticos de Moscú, unidos en su mayoría en la sociedad científica. Además, muchas facetas significativas de la actividad de la Sociedad Matemática de Moscú de este período, las cuales ejercieron una determinada y efectiva influencia en el desarrollo de las matemáticas aún están poco estudiadas. Se puede esperar que en el futuro surjan nuevas investigaciones, que descubran más completamente la actividad, el papel y el valor de los matemáticos de Moscú.

Resumamos. Hacia comienzos del siglo XX en Rusia se tenía ya cierta cantidad de científicos-matemáticos. Estos se concentraban en la Academia de Ciencias y en los pocos centros de enseñanza superior. En Moscú y Petersburgo ellos formaron asociaciones científicas. Colectivos fuertes de científicos-matemáticos trabajaban en una serie de ciudades de Rusia. Entre ellos habían representantes eminentes, los cuales glorificaron la ciencia patria con sus logros. No obstante también esta rama de la ciencia patria (tenemos en cuenta las matemáticas) portaba huellas de la influencia opresora de la estructura socio-económica absoluta de la Rusia zarista.

La actividad de los notables científicos-matemáticos resultaba aislada. Las secciones matemáticas de las universidades eran muy poco numerosas, los científicos-matemáticos y los docentes eran unidades. El acceso a las matemáticas, así como a toda otra ciencia estaba cerrado a las masas populares. Un desarrollo armónico de todo el frente de la ciencia matemática, que en algo relacionara su amplitud con la economía no existía. Entre los matemáticos habían científicos con ideas reaccionarias.

Después de la Gran Revolución Socialista de Octubre, cuando el pueblo bajo la dirección del Partido Comunista acometió la construcción del socialismo, llegó el momento de un nuevo desarrollo de las matemáticas. Este período del desarrollo de las matemáticas soviéticas, período de notables logros que la situaron en las primeras filas de la ciencia mundial, encuentra su expresión en los trabajos colectivos de autores: "Las Matemáticas en la URSS después de 15 años" (1933), "Las Matemáticas en la URSS después de 30 años" (1948), "Las Matemáticas en la URSS después de 40 años" (1959), "Las Matemáticas en la URSS, 1958—1967" (1970), y además en numerosos libros y artículos.

Los matemáticos soviéticos constituyen actualmente un numeroso contingente de la intelectualidad. Junto a todo el pueblo soviético luchan por la paz en todo el mundo, por un futuro mejor para toda la humanidad. El estudio y la generalización de la experiencia de su actividad práctica y teórica es una tarea importante de las investigaciones científicas sobre historia de las matemáticas.

I. Manuales, guías y otras publicaciones

1. История математики с древнейших времен до начала 19 столетия. Под ред. А.П. Юшкевича. Тт. 1—3. М., Наука, 1970—1972. (Historia de las matemáticas desde la antigüedad hasta comienzos del siglo XIX, bajo la redacción de A. Yushkevich, en ruso.)
2. Математика 19 века (математическая логика, алгебра, теория чисел, теория вероятностей). Под ред. А.Н. Колмогорова и А.П. Юшкевича. М., Наука, 1978. (Las matemáticas del siglo XIX, bajo la redacción de A. Kolmogórov y A. Yushkevich, en ruso.)
3. Математика 19 века (геометрия, теория аналитических функций). М., Наука, 1981. (Las matemáticas del siglo XIX — geometría, teoría de las funciones analíticas, en ruso.)
4. Математика в СССР за 15 лет. М., ГИТИ, 1938. (Las matemáticas en la URSS en el período de 15 años, en ruso.)
5. Математика в СССР за 30 лет. М., ГИТИ, 1948. (Las matemáticas en la URSS en el período de 30 años, en ruso.)
6. Математика в СССР за 40 лет. Тт. 1—2. М., Физматгиз, 1959. (Las matemáticas en la URSS en el período de 40 años, en ruso.)
7. Математика в СССР, 1958—1967. М., Наука, тт. 1, 2, 1969—1970. (Las matemáticas en la URSS, de 1958 a 1967, en ruso.)
8. История отечественной математики, тт. 1—4, изд. АН УССР, 1966—1970. (Historia de las matemáticas rusas, en ruso.)

II. Publicaciones periódicas soviéticas

1. Сборник «Историко-математические исследования». М., ГИТИ — Наука. Выходят с 1948. Всего вышло 30 т. Том 30 вышел в 1986. (Colecciones de "Investigaciones histórico-matemáticas", en ruso.)
2. Тематические сборники «История и методология естественных наук». Изд. МГУ. Выходят с 1960. Математике посвящены выпуски: 5, 1966; 9, 1970; 11, 1971; 14, 1973; 16, 1974; 20, 1978; 25, 1980; 29, 1982; 31, 1985; 32, 1986. (Colecciones temáticas "Historia y metodología de las Ciencias Naturales, en ruso.)
3. Сборник «Вопросы истории естествознания и техники» (часть времени выходил как журнал). Изд. Института истории естествознания и техники АН СССР с 1956. Историю математики посвящены отдельные статьи. (Colecciones "Cuestiones de historia de las Ciencias Naturales y de la técnica", en ruso.)

III. Monografías

1. Рыбников К.А. Введение в методологию математики. М., изд. МГУ, 1979. Переиздана в 1982 г. изд. «Знание» под названием: «Очерки методологии математики». (K. Ribnikov, Introducción a la metodología de las matemáticas, en ruso.)
2. Хрестоматия по истории математики под ред. А.П. Юшкевича, тт. 1, 2. М., Просвещение, 1976, 1977. (Antología de la historia de las matemáticas, bajo la redacción de A. Yushkevich, en ruso.)
3. Вилейтнер Г. Хрестоматия по истории математики. М., ОНТИ, 1935. (Wieleitner, Antología de la historia de las matemáticas, en ruso.)
4. Колмогоров А.Н. Математика — статьи в БСЭ. 2 изд., т. 26. (A. Kolmogórov, Matemáticas, en ruso.)
5. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М., ИЛ, 1963 (собрание очерков пополняется с каждым выходившим томом серии Н. Бурбаки Н.). (N. Bourbaki, Ensayos de historia de las matemáticas, en ruso.)
6. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины 19 столетия. М., Физматгиз, 1960. (G. Wieleitner, Historia de las matemáticas desde Descartes hasta mediados del siglo XIX, en ruso.)
7. Кантор Г. Труды по теории множеств. М., Наука, 1983. (G. Cantor, Trabajos sobre la teoría de los conjuntos, en ruso.)
8. Бернулли И. О законе больших чисел. М., Наука, 1986. (J. Bernoulli, Sobre la ley de los grandes números, en ruso.)
9. Wussing H. Vorlesung zur Geschichte der Mathematik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin, 1979.

Abel, N. H. (1802-1892) 130, 254, 334, 343, 347, 348, 349, 356, 364, 417, 418, 419, 453
 Al-Baki (m. aprox. 1100) 111
 Al-Biruni (973-aprox. 1060) 114
 Alexandrov, A. O. (n. 1912) 19, 447
 Alexandrov, P. S. (n. 1896) 19, 477, 481
 Alkhatayam, O. (aprox. 1040-aprox. 1123) 112
 Ampère, A. (1775-1836) 304, 368, 378, 450
 Andronov, A. A. (1901-1952) 397
 Apolonio de Pérgamo (aprox. 260-170 a.n.e.)
 66, 91, 92, 93, 95, 98, 104, 105, 107, 117, 164, 165, 286
 Appel, P. (1885-1930) 304
 Arago, D. (1786-1853) 378
 Argand (1768-1822) 314, 409
 Ariabhata (n. 476 a.n.e.) 45, 47
 Aristarco de Samos (310-230 a.n.e.) 96
 Aristóteles (384-322 a.n.e.) 65
 Arnold, I. V. (1900-1948) 374
 Arquímedes de Siracusa (aprox. 287-212 a.n.e.)
 65, 66, 76-86, 88, 89, 91, 96, 97, 98, 104, 105, 106, 108, 117, 121, 141, 169, 170, 171, 177, 180
 Arquitas de Tarento (aprox. 428-365) 54, 65

 Bacon, R. (1214-1294) 120
 Bachet de Méziriac (1587-1638) 102
 Baire, R. (1874-1932) 373, 429, 478
 Bari, N. K. (1901-1961) 230
 Barrow, J. (1630-1677) 86, 168, 187, 189, 200, 204
 Bashmakov, I. G. (n. 1921) 319, 345
 Bayes, Th. (m. 1763) 337
 Beltrami, E. (1835-1900) 440, 441
 Berezina, E. I. (n. 1931) 32, 37
 Berkeley, G. (1684-1753) 15, 232, 233
 Bernoulli, Daniel (1700-1782) 81, 213, 214, 215, 218, 228, 248, 258, 279, 337, 379
 Bernoulli, Jacob (1654-1705) 155, 202, 209, 210, 213, 215, 272, 273, 338
 Bernoulli, Johann (1667-1748) 202, 206, 209, 214, 215, 220, 224, 250, 255, 257, 258, 272, 402, 403
 Bernoulli, Nicolas (1695-1726) 213, 215, 258
 Bertrand, J. (1822-1900) 363, 429
 Bessel, F. W. (1784-1846) 218, 254, 267, 386, 291, 410
 Betti, E. (1823-1892) 352
 Bezout, E. (1730-1783) 309
 Bhaskara, A. (1114-aprox. 1185) 45, 46, 48
 Biot, J. B. (1774-1862) 378, 409
 Birkhoff, G. (1884-1944) 400
 Bogolubov, N. N. (n. 1909) 285
 Bolyai, J. (1802-1860) 339, 433
 Bolzano, B. (1781-1848) 230, 325, 365-372, 387

D'Alembert, J. le R. (1717-1783) 208, 212, 222, 224, 226, 227, 233, 234, 240, 246, 248, 254, 258, 259, 260, 263, 265, 307, 309, 313, 318, 344, 358, 359, 363, 391, 404, 405, 412, 413, 421, 422
 Dantzig, Van 356
 Darboux, G. (1847-1917) 84, 294, 430
 Davidov, A. Yu. (1823-1885) 471-473, 474
 De Broglie, L. V. (n. 1892) 356
 Dechales (1621-1678) 211
 Dedekind, R. (1831-1916) 65, 70, 371, 373, 424, 426
 Deloné, B. N. (n. 1890) 103, 365
 Demócrito de Abdera (aprox. 460-370 a.n.e.) 74
 Denjou, A. (n. 1884) 230, 479, 480
 Deoedes (S. II a.n.e.) 99
 Desargues, G. (1593-1662) 155, 205, 212, 305, 306, 430
 Descartes, R. (1596-1650) 58, 104, 106, 153, 154-164, 166, 168, 182, 184, 186, 187, 200, 210, 220, 225, 286, 318, 325, 344
 Dinóstrato (S. IV a.n.e.) 87, 88
 Diofanto (S. III d.n.e.) 101-104, 141, 324, 325
 Dirac, P. (n. 1902) 356
 Dirichlet, P. G. (1805-1859) 229, 282, 283, 284, 285, 330, 377, 380, 382, 383, 388, 421, 421b
 Dolbnya, I. P. (1853-1912) 465
 Du Bois Reymond, E. (1818-1896) 230, 467
 Duhamel (1797-1872) 452
 Dupin, P. Ch. (1781-1873) 297, 304

 Egorov, D. F. (1896-1931) 477-479
 Engels, F. (1820-1895) 49, 98, 154, 55, 447
 Eranóstenes (aprox. 276-194 a.n.e.) 66, 79
 Ermatkov, V. F. (1845-1922) 363, 391
 Euclides (época de su actividad 322-285 a.n.e.)
 43, 53, 65-69, 71-75, 78, 89, 98, 104, 105, 106, 108, 117, 120, 121, 177, 307, 309, 330, 432, 435, 436, 438, 443, 444, 446, 458
 Eudoso de Cnido (aprox. 408-aprox. 355 a.n.e.)
 63, 64, 70, 75
 Euler, L. (1707-1783) 103, 148, 167, 205, 208, 212, 213, 218-225, 228, 233, 234, 240, 244, 24-255, 258-263, 265, 267, 271-281, 284, 289, 290-322, 295-298, 311, 313-315, 319-320, 325-334, 337, 355, 358, 362, 365, 374, 387, 389, 391, 392, 404-408, 412, 413, 415, 420, 422, 449, 453, 457-469
 Eutocio de Ascalón (S. VI d.n.e.) 104

 Faddeev, D. K. (n. 1907) 103
 Falke 415
 Feodosio (S. I. a.n.e.) 104
 Fermat, P. de (1601-1665) 103, 136, 148, 154, 164, 165, 166, 168, 179, 180, 184, 185, 205, 206, 210, 244, 286, 311, 325, 326, 327, 329
 Ferrari, L. (1522-1565) 129, 130, 314
 Ferro, Scépcion del (1465-1526) 128

 Finck, P. S. (1883-1964) 43, 477
 Fiódorov, S. E. (1853-1919) 354
 Fourier, J. B. (1768-1830) 229, 230, 304, 311, 377, 384-388, 420, 450, 451, 452, 480, 481
 Frechet, R. (n. 1878) 376

 Fredholm, E. (1866-1927) 382
 Freund, W. (1757-1841) 313
 Frenel, O. (1788-1827) 255
 Fremet, E. E. (1816-1900) 304
 Frisch (1833-1902) 429

 Galilei, G. (1564-1642) 153, 168, 173, 182, 225, 396
 Galois, G. (1811-1832) 130, 131, 310, 320, 324, 339, 343
 Gauss, K. F. (1777-1855) 103, 132, 162, 213, 214, 254, 282, 304, 311, 314, 327-329, 334, 335, 339, 343, 344, 356, 377, 379, 380, 409, 410, 414, 420, 421, 430, 433, 438
 Gémines de Rodas 104
 Gerardo de Cremona (1114-1187) 120
 Giordano (940-1023) 111
 Glivenko, V. I. (1896-1940) 243
 Gindenko, B. V. (n. 1912) 19
 Goldbach, Ch. (1690-1764) 258, 326
 Góubéuv, V. V. (1884-1954) 419, 481
 Grassman, G. (1809-1877) 357
 Grave, D. A. (1663-1939) 465
 Green (1793-1841) 383, 377, 379, 420
 Gregory, J. (1638-1675) 187
 Gurov, V. de (1712-1785) 311
 Guelton, A. O. (1906-1966) 103, 334, 346
 Gudlin 104
 Gunther, E. 147
 Curie, S. E. (1766-1813) 234, 359
 Gurs 415

 Hadamard, J. (1865-1963) 331, 363
 Halley, E. (1656-1742) 92, 95, 96, 311, 317
 Hamilton, W. R. (1805-1865) 357, 377, 389
 Hardy, G. G. (1877-1947) 333
 Harriot, Th. (1606-1621) 135, 136
 Heine, H. (1821-1881) 373
 Heiirat, G. van (n. en 1693) 367
 Helmholtz, H. (1821-1894) 387, 420, 446, 467
 Helmstádt 344
 Heron, Ch. (1822-1901) 293, 334, 428, 429, 453, 464
 Heron de Alejandria (aprox. entre S. II a.n.e. y S. I. d.n.e.) 65, 99, 100
 Hilbert, D. (1862-1943) 280, 284, 329, 333-335, 355, 424, 432, 441, 446
 Hirsch, A. Ya. (1894-1959) 481
 Hindenburg, K. F. (1741-1808) 338
 Hipatia (370-415) 99, 104
 Hipócrates de Quilos (S. V. a.n.e.) 53, 57, 58, 61, 66
 Hippias de Elis (S. V. a.n.e.) 59
 Horner (n. en 1819) 39, 109, 110, 324
 Hudde, J. (1628-1704) 184
 Huygens, Ch. (1629-1695) 155, 200, 205

 Imshenetski, G. G. (1832-1892) 470

 Janakovi, K. (1804-1851) 254, 266, 280, 389, 392
 Jandríkov, M. F. (1837-1915) 471
 Jinchin, A. Ya. (1894-1959) 477
 Jirard, A. (1595-1632) 132, 162, 314, 344
 Jordan, C. (1838-1922) 231, 354, 355, 395, 414, 429
 Joule, J. (1818-1889) 387, 390

- Kashi (m. aprox. 1530) 109, 114, 140
 Kästner (1719—1800) 246, 367
 Keldish, M. V. (1911—1970) 476
 Kepler, J. (1571—1630) 139, 141, 142, 143, 147, 150, 153, 155, 168, 169—173
 Khwarizmi (Muhammad abn Musa al) (c. IX d.n.e.) 111, 113, 114, 121
 Kirilof, G. (1824—1887) 420, 421, 467
 Kirkyby, J. 235
 Klausen, T. (1801—1885) 62
 Klein, F. (1849—1925) 355, 356, 395, 431, 441—444
 Klengel, G. S. (1739—1812) 308, 309
 Kolman, E. (m. 1892) 367
 Kolmogorov, A. N. (n. 1903) 16, 18, 43, 206, 462, 477
 König (1849—1913) 345, 459
 Korkin, A. N. (1873—1928) 391, 465
 Kovalévskaya, S. V. (1850—1891) 394, 395, 428, 467—470
 Kramer (1704—1752) 311
 Krilov, A. N. (1863—1945) 250
 Krilov, N. M. (1879—1955) 285
 Kronecker, L. (1823—1891) 345, 346, 352, 375
 Kummer, E. (1810—1893) 329, 363, 374
- Lacroix, S. (1764—1848) 167, 266, 293, 306, 309
 Lagrange, J. L. (1736—1813) 13, 49, 60, 103, 208, 213, 234, 236, 238, 240, 249, 251, 257, 262, 263, 265, 266, 269, 271, 280, 298, 311, 314, 318, 319, 321, 322, 323, 333, 334, 353, 358, 365, 379, 389, 469
 Laguerre (1834—1886) 428, 464
 Lahire, F. de la (1640—1718) 166, 205, 430
 Lambert, J. (1728—1777) 60, 213, 298, 334, 433
 Lame, G. (1795—1870) 254, 391, 452
 Laplace, P. S. (1749—1827) 208, 213, 248, 263, 265, 268, 269, 314, 337, 378, 379, 381, 396, 411, 450, 454, 460, 468
 Laurent, P. A. (1813—1858) 414, 425
 Lavrentiev, A. A. (m. 1900) 285, 476
 Lebesgue, E. N. (1842—1880) 474
 Lebesgue, A. (1875—1941) 285, 478, 481
 Legendre, A. M. (1752—1833) 60, 203, 248—250, 309, 327, 330, 334, 337, 391
 Leibniz, G. W. (1646—1716) 15, 16, 87, 89, 151, 153, 154, 160, 179, 189, 196—200, 218, 220, 232—234, 248, 249, 251, 257, 258, 272, 273, 325, 338, 359, 372, 402, 403
 Lenin, V. I. (1870—1924) 11, 475
 Leonardo Pisano (Fibonacci) (1170—1250) 120, 121, 322, 331
 Lentinov, A. V. (1837—1888) 472
 Levi-Civita, T. (1873—1941) 445
 L'Hospital (1661—1704) 203, 206
 L'Huilier, S. (1750—1840) 359
 Liapunov, A. M. (1857—1918) 383, 398, 400, 452, 465, 466, 470
 Li Chung Fan (S. VII d.n.e.) 31
 Lie, S. (1842—1899) 342, 355, 356, 395, 396
 Lindeman, F. (1852—1939) 61, 334
 Ling Sing (S. I d.n.e.) 32
 Ling Wang, J. 33
 Liouville, J. (1809—1882) 254, 305, 352, 391, 419, 453
 Lipschitz (1832—1903) 393
- Littlewood, J. (n. 1895) 333
 Liubimov, N. A. 477
 Liu Hui (S. III d.n.e.) 31, 42
 Lüsternik, L. A. (n. 1899) 285
 Lobachevskii, N. I. (1792—1856) 15, 74, 229, 308, 309, 339, 386, 388, 429, 431, 432—443, 446, 448
 Lomonosov, M. V. (1711—1765) 208, 215, 216, 444
 Lorenz, G. (1853—1928) 396
 Lüror, J. (1844—1910) 353
 Luzin, N. N. (1883—1952) 230, 250, 477—481
- Maclaurin, C. (1698—1746) 213, 233, 239, 245, 249, 288, 311, 363, 365
 Mahavira (S. IX d.n.e.) 45
 Mainardi (1800—1879) 476
 Markov, A. A. (1856—1922) 459, 461, 462, 465, 468
 Markushévich, A. I. (n. 1908) 19, 408
 Marx, K. (1818—1883) 156, 197, 203, 232—235, 238—243, 447
 Maupeitrou (1698—1759) 288, 295, 389
 Maxwell, J. (1831—1879) 382, 378, 387
 Mayer, B. (1814—1880) 288
 Mézier, J. (1754—1799) 212, 293, 298
 Menšov, D. E. (n. 1892) 43, 230, 477, 481
 Méry, Ch. (1835—1911) 373
 Mercator, N. (1620—1687) 147, 408
 Mercenne, M. (1538—1648) 225
 Minding, F. C. (1806—1885) 305, 391, 439, 476
 Mittag-Leffler (1846—1927) 428
 Miódziewski, B. K. (1858—1923) 477, 478
 Mobius, A. (1790—1868) 293, 307, 431
 Moivre, A. (1667—1754) 212, 337, 460
 Monge, G. (1746—1818) 112, 213, 263, 265, 266, 293, 298—302, 304—306, 314
- Nasiriddin Tusí (1201—1274) 111, 116, 117
 Navé, A. della 128
 Neuber, W. (1637—1670) 103
 Neomarius (S. XII) 122
 Neper, J. (1550—1617) 142—147
 Neumann, K. (1832—1935) 422
 Neumann, F. (1798—1895) 377, 380—383
 Newton, I. (1642—1727) 15, 16, 111, 112, 116, 117, 151, 153, 154, 166, 167, 187—197, 200—204, 218, 220, 249, 272, 287, 288, 311, 313, 316, 317, 321, 359, 372, 378, 454
 Nicole (1683—1758) 288
 Nicomedes (Siglos III—I a.n.e.) 99
- Oldenburg, G. (1615—1677) 201, 311
 Oresme, N. (1323—1382) 122, 141
 Ostrogradskii, M. V. (1801—1861) 281, 182, 377, 380, 386, 389, 436, 449, 450—454, 456
- Pacioli, L. (1445—1514) 210
 Pappo de Alejandría (S. III d.n.e.) 104, 105, 158, 159, 160
 Paron, A. (1666—1716) 166
 Pascal, B. (1623—1662) 42, 49, 86, 148, 150, 153, 168, 178, 179, 200, 205, 206, 210, 306, 325, 430
 Pache, M. (1843—1930) 68, 446
 Peano, G. (1858—1932) 393, 446
 Pell, I. (1610—1685) 49
- Perron, O. (n. 1880) 382
 Peterson, K. M. (1851—1881) 472, 476, 477
 Petrovski, I. G. (1801—1973) 285
 Pfaff, I. F. (1765—1825) 266, 303, 392
 Picard, E. (1856—1941) 394, 428, 429
 Pieri, E. 68, 446
 Pílagoras (S. VI a.n.e.) 44, 52, 53, 121
 Poincaré, H. (1854—1912) 356, 382, 394, 396—398, 420, 428, 429, 442
 Poisson, L. (1777—1859) 469
 Pissot, S. (1781—1840) 337, 372, 377, 379, 380, 386, 389, 450
 Poncet, J. B. (1788—1867) 112, 306, 307, 430
 Posinikov, A. G. (n. 1921) 459
 Privalov, I. I. (1891—1941) 477
 Proclus (410—485) 104, 105
 Ptolemeo (S. II d.n.e.) 104, 104, 116, 112
 Puisseux, W. (1820—1883) 419
- Raabe, J. L. (1801—1859) 363
 Regiomontanus (1436—1476) 124, 127
 Rheicus (1514—1576) 139
 Riccati, J. (1676—1754) 211, 258
 Ricci, C. G. (1853—1925) 258, 445
 Riemann, B. (1826—1866) 81, 224, 282—285, 331, 347, 354, 386—388, 419—424, 428, 429, 444, 446, 480
 Roberval (1602—1675) 183
 Rolle, M. (1652—1719) 317
 Roomeen, Van 109
 Ruffini, P. (1765—1822) 39, 109, 110, 112, 323, 324, 348, 349, 353
- Saccheri, D. (1667—1773) 308, 309
 Saint-Venant (1797—1886) 147
 Salmon, G. (1819—1904) 288
 Samarski, A. A. (n. 1919) 385
 Sarvasatya 44
 Savart, F. (1791—1841) 378
 Scotton, Van (1615—1660) 162
 Schickard, W. (149—150, 210)
 Schmidt, O. Yu. (1891—1956) 465
 Schrodinger, E. 356
 Schubert, F. (1758—1825) 407
 Schur, J. (1875—1825) 459
 Schwarz, G. (1843—1921) 284, 382, 422, 429
 Serret, J. A. (1819—1885) 304, 352
 Shalarevich, I. (n. 1923) 320, 353
 Sharp, P. (m. aprox. 1785) 265, 266
 Silvester, J. J. (1814—1897) 288
 Simpson, T. (1710—1761) 337
 Slutski, F. A. (1841—1897) 472, 473
 Sojovski, Yu. V. (1842—1929) 466
 Somov, I. I. (1815—1876) 419, 465, 471, 473
 Sonin, I. Ya. (1849—1915) 466
 Spasski, B. I. (n. 1911) 380
 Stretenski, L. M. (1902—1973) 437
 Stoenier, Ya. V. (1796—1863) 288, 431
 Steklov, V. A. (1864—1926) 465
 Stepanov, V. V. (1889—1950) 477
 Stevin, S. (1548—1620) 109, 132, 139, 314
- Stieltjes, T. (1856—1894) 429
 Stieltjes, M. (aprox. 24, 462—1567) 110, 114
 Stokes, J. (1602—1707) 288, 248, 311, 316
 Störmer, G. (1819—1903) 364, 377
 Stourlet, A. G. (1839—1896) 471
 Suetonius (1803—1855) 391
 Sun Tai (S. III d.n.e.) 42
 Suslin, M. Ya. (1894—1919) 481,
- Tartaglia (aprox. 1499—1557) 128—130, 210, 314
 Taurinus, F. 433
 Taylor, B. (1685—1731) 213, 225, 226, 239, 245, 246, 261, 364, 366, 417, 420
 Toletto (S. IV a.n.e.) 54
 Teodoro de Cirene 54
 Teon de Alejandría (S. IV) 104
 Thomson, W. (Lord Kelvin) (1824—1907) 377, 382, 421
 Thomson, A. N. (n. 1906) 385
 Torricelli, E. (1608—1647) 168, 177, 183
 Tschirnhaus, E. V. (1651—1708) 314, 315, 321
 Tsing'er, V. Ya. (1836—1907) 471, 474
 Tsu Chung-Chih (430—501) 33
- Ulug-Begs (1411—1449) 109, 114
 Urison, P. S. (1898—1924) 477, 481
 Urusov, S. S. 472
- Valleé-Poussin (1886—1862) 331, 459
 Van Fu-Chun 43
 Varignon, P. (1654—1722) 246
 Viète, F. (1540—1603) 109, 133, 134, 135—140, 157, 166, 173, 185
 Vinogradov, I. M. (n. 1891) 43, 103, 333, 460
 Vlasca, A. (1600—1667) 43, 146, 147
 Voletto, K. I. (15—895) 396
 Voronoi, G. V. (1868—1908) 460, 465
 Sarvasatya 44
- Waerden, B. L. van der (n. 1903) 29
 Wallis, J. (1616—1703) 103, 168, 180, 181, 187, 200, 244, 252, 374, 375, 419, 422, 425, 426, 427, 428
 Wang Shao Tung (S. VII d.n.e.) 38
 Wantzel, P. L. (1814—1848) 38, 60
 Waring, E. (1734—1798) 315, 321, 333
 Weber, H. (1842—1913) 352, 424
 Weierstrass, K. (1815—1897) 280, 281, 283, 284, 368, 370, 374, 375, 419, 422, 425, 426, 427, 428, 429, 467, 469
 Wesel (1745—1818) 405
 Weyl, H. (1885—1955) 285, 356, 422
 Wronski, H. (1778—1853) 454
- Yang Hui (S. XIII) 40
- Zenf, K. (1810—1849) 476
 Zenodoro (Siglos III—I a.n.e.) 88, 89, 104
 Zenon de Elea (aprox. 490—aprox. 430 a.n.e.) 74
 Zhegalkin, I. I. (1869—1947) 88
 Zhukovskii, N. E. (1847—1921) 389, 429, 452, 468, 470, 474
 Zolotarov, E. I. (1847—1878) 459, 465

... 1984-1985 ... 1986-1987 ... 1988-1989 ... 1990-1991 ... 1992-1993 ... 1994-1995 ... 1996-1997 ... 1998-1999 ... 2000-2001 ... 2002-2003 ... 2004-2005 ... 2006-2007 ... 2008-2009 ... 2010-2011 ... 2012-2013 ... 2014-2015 ... 2016-2017 ... 2018-2019 ... 2020-2021 ... 2022-2023 ... 2024-2025 ...

... 1984-1985 ... 1986-1987 ... 1988-1989 ... 1990-1991 ... 1992-1993 ... 1994-1995 ... 1996-1997 ... 1998-1999 ... 2000-2001 ... 2002-2003 ... 2004-2005 ... 2006-2007 ... 2008-2009 ... 2010-2011 ... 2012-2013 ... 2014-2015 ... 2016-2017 ... 2018-2019 ... 2020-2021 ... 2022-2023 ... 2024-2025 ...

A nuestros lectores:

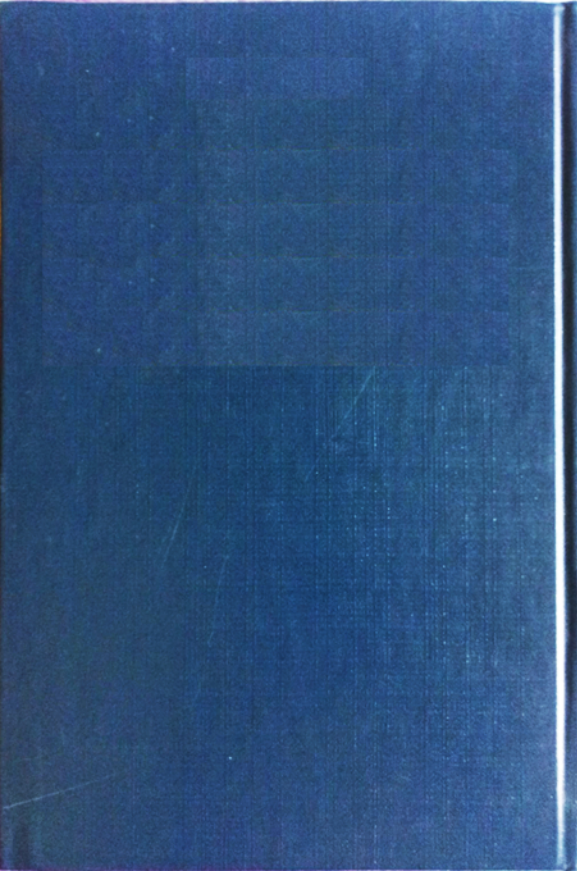
"Mir" edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, 1-100, GSP, URSS.

... 1984-1985 ... 1986-1987 ... 1988-1989 ... 1990-1991 ... 1992-1993 ... 1994-1995 ... 1996-1997 ... 1998-1999 ... 2000-2001 ... 2002-2003 ... 2004-2005 ... 2006-2007 ... 2008-2009 ... 2010-2011 ... 2012-2013 ... 2014-2015 ... 2016-2017 ... 2018-2019 ... 2020-2021 ... 2022-2023 ... 2024-2025 ...

... 1984-1985 ... 1986-1987 ... 1988-1989 ... 1990-1991 ... 1992-1993 ... 1994-1995 ... 1996-1997 ... 1998-1999 ... 2000-2001 ... 2002-2003 ... 2004-2005 ... 2006-2007 ... 2008-2009 ... 2010-2011 ... 2012-2013 ... 2014-2015 ... 2016-2017 ... 2018-2019 ... 2020-2021 ... 2022-2023 ... 2024-2025 ...

Ab



El presente libro está destinado a los estudiantes de las Universidades e Institutos Pedagógicos, así como a amplios círculos de matemáticos, tanto profesores como investigadores, que desean estudiar la historia de las matemáticas y los métodos y caminos de la formación de las matemáticas modernas desde posiciones progresistas.



ISBN 5-03-001912-X