

**METODOLOGÍA  
DE LA ENSEÑANZA  
DE LA MATEMÁTICA  
TOMO II**

**Autores:**

Lic. Bernardino Almeida	Capítulo 11
Dra. Aida Alvarez	Capítulo 10
Dra. Clara Arango	
Dr. Sergio Ballester	Capítulos 9 y 15
Dr. Luis Carlos Batista	Capítulos 8 y 15
Dr. Ismael Cruz	Capítulo 12
Dra. María García	Capítulo 11
Dr. José Manuel González	Capítulo 13
Prof. Silvia Hernández	Capítulo 14
Prof. Hilario Santana	Capítulo 14
Lic. Paul Torres	Capítulo 14
Dr. Eduardo Villegas	Capítulo 11
Prof. Antonio Machado	Capítulo 10

© Sergio Ballester Pedroso y Coautores, 2000  
© Editorial Pueblo y Educación, 2000

ISBN 959-13-0620-2 Obra completa  
ISBN 959-13-0621-0 Tomo II

**EDITORIAL PUEBLO Y EDUCACIÓN**  
Ave. 3ra. A No. 4605 entre 46 y 60,  
Playa, Ciudad de La Habana,  
Cuba. CP 11300.

## INDICE

Prólogo .	<a href="#">1</a>
8. Tratamiento metodológico de los Dominios Numéricos .	<a href="#">2</a>
8.1 Significación del trabajo con los números en la escuela .	<a href="#">2</a>
8.2 Consideraciones generales sobre el trabajo con los diferentes Dominios Numéricos.	<a href="#">3</a>
8.3 Algunos aspectos metodológicos esenciales relacionados con el tratamiento de los Dominios Numéricos en la escuela	<a href="#">13</a>
8.4 Tareas del tema.	<a href="#">43</a>
9. Tratamiento metodológico del trabajo con variables.	<a href="#">45</a>
9.1 La realización de la línea directriz Trabajo con variables en la escuela cubana .	<a href="#">45</a>
9.2 Aspectos metodológicos esenciales del complejo de materia "Trabajo con variables"	<a href="#">50</a>
9.3 Tareas del capítulo.	<a href="#">66</a>
10. Tratamiento metodológico del cálculo con magnitudes y valores aproximados.	<a href="#">69</a>
10.1 Panorámica de la línea directriz "Cálculo con magnitudes y valores aproximados".	<a href="#">69</a>
10.2 Puntos metodológicos esenciales .	<a href="#">73</a>
10.3 Tareas del capítulo .	<a href="#">89</a>
11. Tratamiento metodológico de la Geometría y la Trigonometría .	<a href="#">91</a>
11.1 Realización de la línea directriz Geometría .	<a href="#">92</a>
11.2 Formación y asimilación de los conceptos congruencia y movimiento .	<a href="#">96</a>
11.3 Tratamiento metodológico de la circunferencia .	<a href="#">113</a>
11.4 Aspectos metodológicos esenciales del tratamiento de la semejanza.	<a href="#">123</a>
11.5 Aspectos metodológicos esenciales del complejo de materia trigonometría	<a href="#">139</a>
11.6 Tratamiento metodológico de la geometría analítica .	<a href="#">164</a>
11.7 Tareas del capítulo .	<a href="#">215</a>

<b>12.</b>	<b>Tratamiento de las ecuaciones e inecuaciones .</b>	<b><a href="#">221</a></b>
<b>12.1</b>	<b>Descripción de la línea directriz Ecuaciones e inecuaciones. Sistemas de ecuaciones</b>	<b><a href="#">222</a></b>
<b>12.2</b>	<b>Aspectos metodológicos esenciales del complejo de materia Ecuaciones e de ecuaciones</b>	<b><a href="#">224</a></b>
<b>12.3</b>	<b>Tareas del capítulo .</b>	<b><a href="#">241</a></b>
<b>13.</b>	<b>Tratamiento metodológico de las funciones.</b>	
<b>13.1</b>	<b>Panorámica sobre el desarrollo de la línea directriz "Correspondencia , transformación, función .</b>	<b><a href="#">243</a></b>
<b>13.2</b>	<b>Aspectos metodológicos esenciales en el tratamiento de las funciones</b>	<b><a href="#">243</a></b>
<b>13.3</b>	<b>Tratamiento metodológico de las clases de funciones .</b>	<b><a href="#">262</a></b>
<b>13.4</b>	<b>Tareas del capítulo.</b>	<b><a href="#">272</a></b>
<b>14</b>	<b>Tratamiento metodológico do los elementos del Análisis matemático</b>	<b><a href="#">274</a></b>
<b>14.1</b>	<b>Panorámica de la línea directriz Procesos de aproximación, Límite y cálculo infinitesimal.</b>	<b><a href="#">274</a></b>
<b>14.2</b>	<b>Panorámica de los conocimientos y habilidades a asimilar por los alumnos en los complejos de materia: Límite, cálculo diferencial y cálculo infinitesimal.</b>	<b><a href="#">276</a></b>
<b>14.3</b>	<b>Límites .</b>	<b><a href="#">280</a></b>
<b>14.4</b>	<b>Formación y asimilación del concepto de derivada .</b>	<b><a href="#">289</a></b>
<b>14.5</b>	<b>Tratamiento metodológico de las integrales sencillas.</b>	<b><a href="#">299</a></b>
<b>14.6</b>	<b>Tareas del capítulo.</b>	<b><a href="#">304</a></b>
<b>15</b>	<b>La planificación y evaluación de la enseñanza por el profesor</b>	<b><a href="#">306</a></b>
<b>15.1</b>	<b>Documentos básicos y medios auxiliares de la planificación de la enseñanza por el profesor.</b>	<b><a href="#">307</a></b>
<b>15.2</b>	<b>Etapas fundamentales en la planificación de la enseñanza por el profesor</b>	<b><a href="#">309</a></b>
<b>15.3</b>	<b>Consideraciones sobre la evaluación de la enseñanza de la Matemática por el profesor.</b>	<b><a href="#">331</a></b>

## PROLOGO

Este libro constituye el tomo 2 del texto para la disciplina Metodología de la Enseñanza de la Matemática, en los Institutos Superiores Pedagógicos de la República de Cuba. Su contenido abarca la dirección del proceso de enseñanza aprendizaje de los alumnos en unidades o capítulos correspondientes a diferentes complejos de materia de la Matemática.

Este segundo tomo tiene la característica de integrar, en la estructuración metodológica y didáctica de las unidades o capítulos del curso escolar, los contenidos del primer tomo.

Los ejemplos del texto ilustran diversas posibilidades de aplicación de los conocimientos de la disciplina. Entre ellos se incluyen parcialmente recomendaciones contenidas en las orientaciones metodológicas.

Al final de cada capítulo se incluyen propuestas de tareas con el propósito de contribuir a la fijación de los conocimientos, así como a la formación, desarrollo y mantenimiento de las habilidades y capacidades de los estudiantes de los institutos superiores pedagógicos.

Los autores agradeceremos a todas aquellas personas que utilicen este libro, nos envíen criterios y sugerencias para su perfeccionamiento al Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona", Calle 108 No. 29E08, entre 29E y 29F, Marianao, Ciudad de La Habana, Cuba.

Los autores

## CAPITULO 8. TRATAMIENTO METODOLOGICO DE LOS DOMINIOS NUMERICOS.

### 8.1. SIGNIFICACION DEL TRABAJO CON LOS NUMEROS EN LA ESCUELA

La aparición del concepto de número es resultado de un largo proceso de desarrollo y de la relación constante del hombre en su medio. Con la ayuda de los números pueden ser abarcados de forma cuantitativa importantes partes de la realidad objetiva.

Los números han encontrado también aplicación en la práctica social considerándose de esta forma en la nueva concepción para el curso escolar de la Matemática (1), el poder de cálculo de los alumnos como parte del núcleo clásico de su formación matemática general.

El término "poder de cálculo" o "cultura del cálculo" se emplea en algunos países en el sentido de destacar importantes aspectos de la materia de enseñanza de la Matemática tales como:

- La realización de la comparación de números y las operaciones de cálculo tanto de forma oral, escrita como medios de cálculo.
- Realización de la estimación y el redondeo.
- Trabajo con magnitudes (longitud, área, volumen, tiempo masa)
- Indicación de los resultados con una exactitud razonable.
- Selección de una vía de solución efectiva y representación de la solución en forma exacta.
- Realización de controles de cálculo.

Es evidente que con una insuficiente comprensión de los

---

(1) Proyecto de Matemática. Concepción general de la asignatura en el Subsistema de la Educación General, Politécnica Laboral. MINED, 1987, Pág. 33.

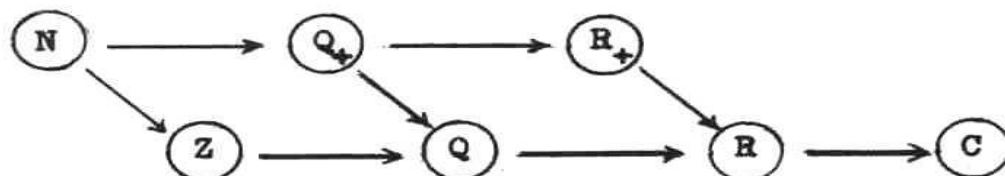
números y una falta de solidez, durabilidad y aplicabilidad en el poder de cálculo se hace casi imposible el avance en la enseñanza de la Matemática, por ejemplo en el trabajo con ecuaciones e inecuaciones, funciones, trabajo con variables y magnitudes, demostraciones, etc. Todo esto influye incluso negativamente en la aplicación de la Matemática en la enseñanza de las ciencias naturales y politécnicas. Por otro lado la formación de un saber y poder sólidos de los alumnos en el cálculo numérico debe contribuir al desarrollo de su personalidad y a su preparación para enfrentar la vida y poder resolver numerosos problemas que les plantea la práctica.

### 8.2 CONSIDERACIONES GENERALES SOBRE EL TRABAJO CON LOS DIFERENTES DOMINIOS NUMERICOS EN LA ESCUELA.

#### 8.2.1. Vías para la ampliación de los dominios numéricos.

Para la ampliación de los diferentes dominios numéricos a partir de los números naturales existen diferentes vías:

Diagrama 8,1



La escuela emplea la vía  $N \longrightarrow Q_+ \longrightarrow Q \longrightarrow R \longrightarrow C$ . Esta decisión se fundamenta en lo siguiente:

- Esta secuencia corresponde en general a la vía tradicional utilizada de acuerdo al desarrollo histórico de la matemática y es la más utilizada en la enseñanza en muchos países.
- Los niños están desde muy temprano, incluso antes de su comienzo en la escuela, en contacto con objetos que exigen la introducción de los números fraccionarios y el cálculo con ellos (medio litro de leche, dividir una naranja en partes iguales, etc) que con los números enteros (positivos, negativos).
- Para el tratamiento de determinados aspectos del análisis matemático (cálculo aproximado, proceso de aproximación,

etc) en los cuales los alumnos demuestran dificultades en los grados superiores es más ventajoso tratar primero los números fraccionarios (conjunto denso ordenado) que los números enteros.

La vía  $N \rightarrow Z \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow C$  es muy utilizada en la ciencia Matemática. Se orienta fundamentalmente en el tratamiento de las operaciones adición y multiplicación y en la posibilidad de realizar ilimitadamente sus operaciones inversas (sustracción y división). Desde el punto de vista de la teoría de estructuras algebraicas (grupos, anillos, cuerpos) es muy apropiada esta vía. Muchos países han estructurado sus planes de enseñanza teniendo en cuenta el estudio de las estructuras algebraicas y por lo tanto emplean esta vía para la ampliación de los diferentes dominios numéricos. Las ventajas o desventajas que pueda tener dicha vía esta en dependencia de los objetivos que se persiguen en la enseñanza de la Matemática y su contribución a la formación matemática de los alumnos. En este sentido en nuestra concepción para la enseñanza de la Matemática se plantea al respecto "...que si bien es cierto que la enseñanza de la Matemática debe poner de manifiesto el carácter abstracto de esta ciencia y familiarizar a los alumnos con el razonamiento abstracto, resulta contraproducente enfrentar a los alumnos demasiado pronto con conceptos y métodos abstractos, para los cuales no existe una suficiente base de conocimientos concreto-sensoriales en su experiencia anterior" (1). Y en otra parte concluye que "... se puede diferenciar una tendencia a lo abstracto, que predomina en los países capitalistas y rompe completamente con la enseñanza tradicional de la Matemática, al extremo de abandonar, en muchas ocasiones, los procedimientos sólidamente establecidos para

---

(1) Proyecto de Matemática. Concepción general... pág. 34

el desarrollo de habilidades de cálculo..." (1)

Con respecto a la vía  $N \rightarrow Q^+ \rightarrow R^+ \rightarrow R \rightarrow C$  utilizada en algunas obras matemáticas (2) se plantean también buenas posibilidades para la preparación de los alumnos para el tratamiento de algunos elementos del análisis matemático. Su empleo en la escuela puede tener el inconveniente de que los números negativos sean tratados muy tarde.

#### 8.2.2. BREVE PANORAMICA SOBRE LA CONSTRUCCION DE LOS DOMINIOS NUMERICOS EN LA ESCUELA. TRANCURSO DE LA LINEA DIRECTRIZ "DOMINIOS NUMERICOS".

El tratamiento de los números comienza en la escuela desde el primer grado, abordándose en el ciclo propedéutico (1. a 4. grado) los números naturales.

Aquí se introduce el concepto de número natural como números cardinales de conjuntos finitos, es decir como clase de conjuntos finitos equipotentes. Naturalmente estos términos no son empleados ya que su tratamiento se realiza teniendo en cuenta determinadas simplificaciones didácticas.

Una vez formado el conjunto de los números naturales se abordan el orden (relación "menor que", "mayor que") y las operaciones de cálculo (adición y multiplicación). Estos son tratados a partir de las relaciones existentes entre los conjuntos, por ejemplo, el orden mediante la comparación de dos conjuntos según la cantidad de elementos con el establecimiento de la correspondencia entre sus elementos y la adición como la unión de conjuntos disjuntos. Para las operaciones de cálculo son consideradas también sus propiedades. Con el establecimiento del orden y las operaciones de cálculo en  $N$  podemos hablar entonces del dominio de los números naturales.

---

(1) Idem, pág. 32

(2) Ver: Apóstol, Tom M.: Calculus. Volumen I. Pág.

Los conocimientos y habilidades en el trabajo con los números se amplian y profundizan en el segundo ciclo de la escuela primaria (5. y 6. grado). Aquí se construye además el dominio de los números fraccionarios siendo esta la primera ampliación de los dominios numéricos. La necesidad de la ampliación del "viejo dominio" ( $N$ ) tiene como objetivo buscarle solución a problemas prácticos no siempre posibles en  $N$  (repartición en partes iguales) y motivos de naturaleza intramatemática (poder realizar ilimitadamente la división, excepto por cero).

Especial importancia debe prestársele en el tratamiento de este dominio a:

- El trabajo con materiales concretos (naranjas, discos, superficies rectangulares, etc).
- El trabajo con fracciones comunes
- El trabajo con expresiones decimales

En el ciclo de la Secundaria Básica (7. - 9. grdo) se continúa el desarrollo de las habilidades de cálculo con números fraccionarios y se construye el dominio de los números racionales como una ampliación del dominio de los números fraccionarios. Aquí también se parte para dicha ampliación de problemas prácticos que no pueden ser resueltos, desde el punto de vista matemático, sólo con los conocimientos sobre los números fraccionarios.

El principio de construcción que se sigue para obtener el dominio de los números racionales difiere notablemente de la vía genético-conjuntista empleada en nuestra escuela hace unos años. La práctica escolar demostró que el tratamiento de los números racionales según clases de equivalencias no permitía formar en los alumnos un poder seguro y aplicable en el trabajo con dichos números, no lográndose así satisfactoriamente este objetivo central de nuestra escuela. Ahora se utiliza para obtener el dominio de los números racionales una simetrización de  $Q_+$ , es decir, se forma el conjunto de los números racionales "añadiendo" a los

números fraccionarios los elementos de un conjunto apropiado formado por los números opuestos a dichos números fraccionarios. Mediante este principio se logra un sustancial aligeramiento en cuanto al tratamiento teórico conceptual, en comparación con su tratamiento a través de la formación de clases de equivalencia. Entre los aspectos más importantes que se reducen tenemos:

- Se eliminan las consideraciones de isomorfismo entre el dominio de los números fraccionarios y el dominio de los números racionales no negativos.
- La forma simplificada de notación, es decir, no empleo del signo " + " para los números racionales no negativos no se introduce al final del tratamiento de las operaciones de cálculo, sino desde un inicio, ya que se identifican los números racionales no negativos con los números fraccionarios.
- Para los números racionales no negativos no se definen de nuevo las operaciones de cálculo ya que éstas se reducen a las operaciones de cálculo del dominio  $Q_+$  los números fraccionarios.
- Las propiedades de las operaciones de cálculo no tienen que ser justificadas nuevamente para los números racionales no negativos debido a la identificación de éstos con los números fraccionarios.

Todo esto posibilita que en el proceso de enseñanza la relación contenido-tiempo esté a favor de la formación de habilidades seguras en el trabajo con los números racionales.

Estrechamente ligado a la posibilidad de poder extraer raíz cuadrada a todo número racional no negativo y a la ne-

cesidad de utilizar esto en determinadas situaciones prácticas (por ejemplo para calcular el lado de un cuadrado cuya área es 2) se plantea la conveniencia de ampliar el dominio de los números racionales. Para esto se introducen los números irracionales y luego se forma el conjunto de los números reales como unión del conjunto de los números racionales y los números irracionales. Con la formación del conjunto de los números reales se puede ahora hacer corresponder a cada punto de la recta un número y viceversa. Esto posibilita en lo adelante el trabajo, por ejemplo, con las funciones.

En el ciclo de profundización, sistematización y generalización (10. al 12. grado), concluye la construcción de los dominios numéricos con el tratamiento de los números complejos (  $C$  ).

En la ciencia matemática existen varias teorías para la construcción del dominio de los números complejos. Por ejemplo, sobre la base de la aplicación de puntos de un plano, o sea, mediante pares ordenados de números reales; a través de suma y multiplicación de matrices; por adjunción de un elemento a un cuerpo (1). En los actuales programas de Matemática de nuestra escuela se ha establecido seguir la vía que se basa en la adjunción de un elemento a un cuerpo. Esta vía consiste en la hipótesis plausible de que exista un cuerpo, que denotaremos por  $C$ , que contenga a un tal elemento  $i$  y a todo el cuerpo  $R$ . De esta manera se obtienen los números de la forma  $a + ib$  ( $a, b \in R$ ). Con ello no sólo se persigue hacer prevalecer una cierta tradición en el tratamiento de estos números en la escuela (tradición que está condicionada por el desarrollo histórico de estos números y por la posibilidad de trabajar con unos pocos conceptos adicionales), sino que tiene en cuenta también en que forma se utilizan concretamente estos números en el cálculo numérico.

---

(1) Kurosch, A.G. Curso de algebra superior. Editorial Mir, 1977. Pág. 288

En el siguiente diagrama se muestra, de forma resumida la sucesión en que son tratados los diferentes dominios numéricos en la escuela. (Ver diagrama 8.2)

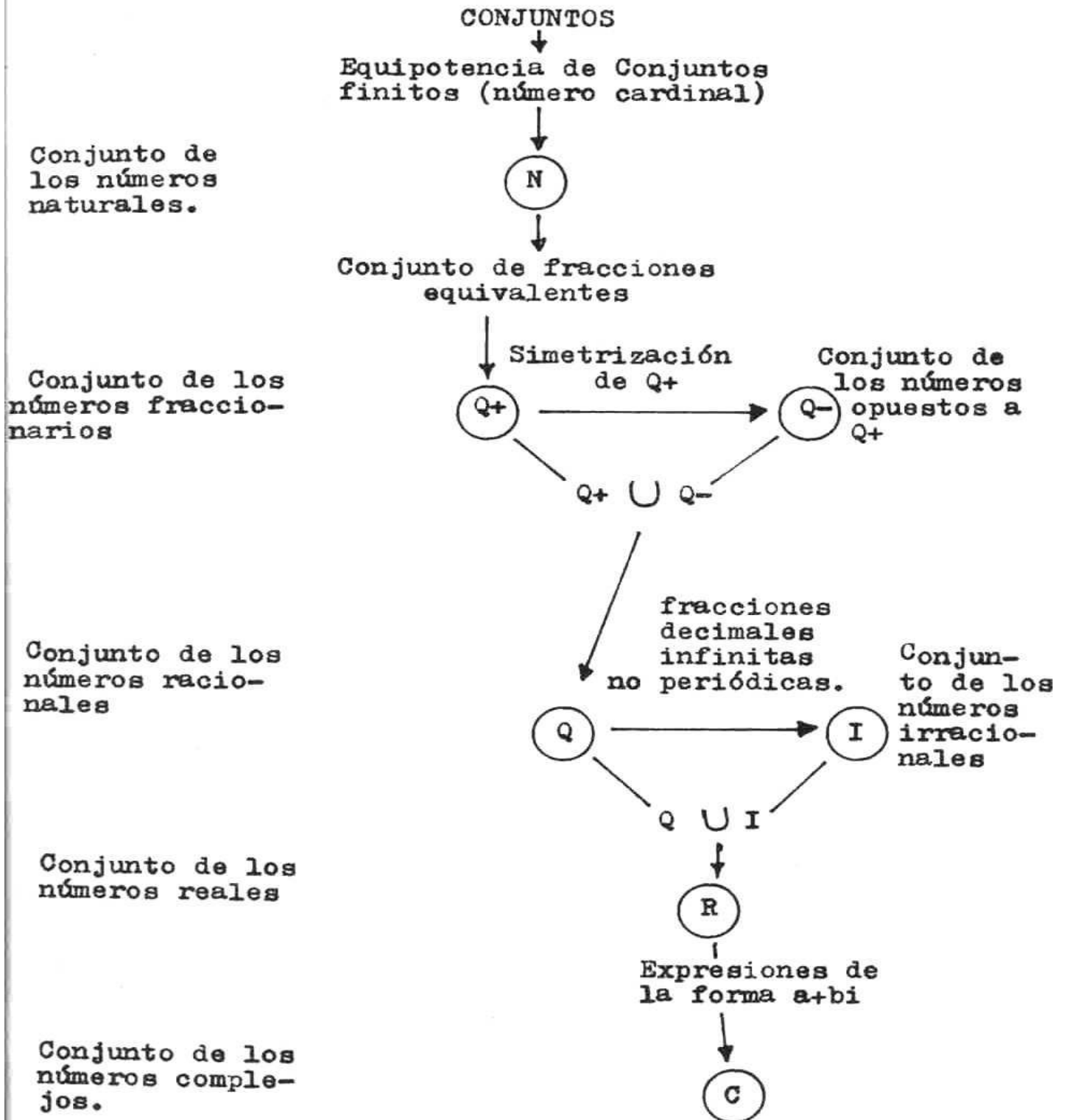
Un aspecto de importancia singular lo constituye el transcurso de la línea directriz "dominios numéricos" a través de todo el curso de la Matemática. En el cuadro 8.1 se destacan los principales contenidos y objetivos por ciclos, relacionados con esta línea directriz.

En correspondencia con los objetivos que deben alcanzarse por los alumnos durante el tratamiento de los dominios numéricos en la escuela podemos concluir lo siguiente:

- En primer plano se encuentra el desarrollo de las habilidades de cálculo y la aplicación de los conocimientos adquiridos en la propia Matemática, en otras disciplinas, en la vida diaria y en su futura profesión.
- En relación al saber adquirido sobre los diferentes dominios numéricos los alumnos deben disponer de conocimientos en el sentido siguiente:
  - . Existen números naturales, fraccionarios, racionales, reales y complejos;
  - . Los números naturales se emplean para indicar cantidades de objetos concretos, ordenamientos, medidas de conocidas magnitudes;
  - . Los números fraccionarios se escriben en forma de fracciones o en notación decimal, un número fraccionario se puede identificar con cualquiera de las fracciones que lo forman, se emplean para describir partes de un todo y procesos de distribución, para indicar una medida de una magnitud, para representar determinados puntos en el rayo numérico;
  - . los números racionales se emplean para representar magnitudes en sentido contrario, segmentos orientados (mediante flechas) en la recta numérica, para describir la posición de un punto de la recta respecto a un punto de referencia (punto 0);

- con la existencia de los números reales se puede hacer corresponder a cada punto de la recta un número y viceversa;
- los números complejos son expresiones de la forma  $a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), su representación geométrica en el plano nos indica que a cada punto del plano se le hace corresponder un número complejo y viceversa, y además posibilita representarlo en forma trigonométrica; se emplean para darle solución a toda ecuación de grado  $n$ .

DIAGRAMA 8.2



CUADRO 8.1

Ciclo	Contenidos	Objetivos fundamentales
Propedéutico (1. -4. grado)	Números naturales operaciones fundamentales de cálculo con números naturales; cálculo oral y procedimientos de cálculo escrito.	Adquisición de conocimientos y capacidades relacionadas con los números naturales, así como el desarrollo de habilidades sólidas y seguras en el cálculo con dichos números tanto oral como escrito.
Segundo ciclo	Fracciones, comparación y operaciones con fracciones expresiones decimales, operaciones con expresiones decimales; expresiones decimales finitas e infinitas; fracciones equivalentes; concepto de número fraccionario.	Desarrollo de habilidades sólidas y seguras en el cálculo con fracciones así como en las operaciones fundamentales, con números fraccionarios en diferentes formas de representación.
Secundaria Básica	Número racional: orden y operaciones de cálculo con números racionales; propiedades de las operaciones, números irracionales, números reales.	Familiarización con los conceptos "número racional", "número irracional" y "número real". Conocimiento seguro sobre las reglas algorítmicas para la realización de las operaciones de cálculo básico con números racionales, habilidades sólidas y seguras en el cálculo con números racionales.
Ciclo de Profundización sistematización y generalización.	Concepto de número complejo, operaciones con los números complejos, representación geométrica de los números complejos; forma trigonométrica del número complejo; aplicaciones.	Capacitación para la realización de cálculos con números complejos.

- En cuanto a las potencialidades que brindan estos contenidos para la educación político e ideológica los objetivos deben estar encaminados a que los alumnos:

- . Reconozcan que las circunstancias reales de su propio medio, o sea, las necesidades sociales, motivan la formación de los conceptos y la formación de nuevos números:
- . Reconozcan que las operaciones con los nuevos números están motivadas por circunstancias prácticas, y que hay que definir las conforme a las condiciones de estas circunstancias;
- . Reconozcan que las formas de pensar y trabajar en la Matemática se comprueban en la práctica;
- . Reconozcan las relaciones que existen entre los dominios numéricos, la estrecha relación entre sus conceptos y operaciones y comprendan los efectos que puedan tener un desarrollo exitoso o no del poder de cálculo en otras ramas;
- . Reconozcan que la colocación correcta de determinados símbolos ( ; = ; + ; - ; raya de una fracción; etc) no debe ser visto solo como una exigencia a la estética, sino a la influencia que puede tener esto para un cálculo seguro.

### 8.3. ALGUNOS ASPECTOS METODOLOGICOS ESENCIALES RELACIONADOS CON EL TRATAMIENTO DE LOS DOMINIOS NUMERICOS EN LA ESCUELA

La construcción de cada uno de los dominios numéricos objeto de estudio en los ciclos de Secundaria Básica y de Preuniversitario se lleva a cabo teniendo en cuenta los siguientes pasos que constituyen los puntos metodológicos esenciales a considerar en su tratamiento:

1. Motivación de la necesidad de construir el "nuevo dominio.
2. Formación del "nuevo" conjunto numérico.
3. Definición del orden y las operaciones de cálculo. Pro-

iedades de dichas operaciones.

#### 4. Desarrollo de las habilidades.

##### 1. MOTIVACION DE LA NECESIDAD DE CONSTRUIR EL "NUEVO DOMINIO.

Después de la construcción del dominio de los números fraccionarios se plantea, en el ciclo de la Secundaria Básica, la necesidad de ampliar este dominio con el objetivo de que se satisfagan las siguientes exigencias:

- . Posibilidad de poder realizar la medición en dos sentidos opuestos debido a su empleo en diferentes tareas prácticas.
- . Posibilidad de dar solución a toda ecuación de la forma  $a+x=b$  ( $a, b \in \mathbb{Q}^+$ ).

En la escuela se realiza este paso haciendo más énfasis en la primera exigencia, es decir, a partir de una motivación extramatemática se plantean ejemplos prácticos relacionados con accidentes geográficos para medir alturas y profundidades tomando con referencia el nivel del mar y también se utilizan ejemplos que representan desplazamientos de móviles en sentidos opuestos. Es importante destacar que independientemente de los ejemplos utilizados en el texto se pueden emplear otros que también son familiares a los alumnos tales como:

- Situaciones relacionadas con deudas y haber.

Ejemplo: Para expresar que la América Latina y el Caribe en 1990 tenían una deuda de \$428 636 000 000 lo podemos escribir de la siguiente forma:

- \$ 428 636 000 000.

- Hechos ocurridos antes y después de nuestra era.

Ejemplo: Para expresar que la escuela pitagórica, fue fundada por Pitágoras alrededor del año 550 a.n.e. se puede escribir dicho año en forma mas breve poniendo - 550.

- Escalas del termómetro.

Ejemplo: Para expresar que un determinado lugar del mundo hay una temperatura de  $40^{\circ}$  C bajo cero, lo podemos escribir en forma más breve de la siguiente manera:  $-40^{\circ}$  C.

Otro aspecto de sumo interés en este paso está relacionado con la posibilidad de conjugar con la motivación extramatemática la intramatemática, ya que esta última posibilita crear en los alumnos una visión más clara y profunda acerca de la Matemática y su desarrollo interno (necesidad de realizar ilimitadamente la sustracción o de poder resolver siempre ecuaciones de la forma  $a + x = b$  para cualesquiera números fraccionarios  $a$  y  $b$ ). Para esto se puede plantear un problema tomado de la vida práctica cuya solución conduzca a un planteo matemático como en el ejemplo siguiente:

Dos de las cámaras de frío de uno de los frigoríficos construidos en La Habana para la conservación de carnes y productos de la agricultura tenían una temperatura de  $6^{\circ}$  C a las 2 de la tarde. ¿Qué temperatura tenían a las 2 de la mañana si la temperatura en una bajó  $3^{\circ}$  C y en la otra  $9^{\circ}$  C?

Una representación gráfica de la situación mediante dos termómetros lleva a los alumnos a determinar que en una cámara la temperatura era de  $3^{\circ}$  C y en la otra  $-3^{\circ}$  C. En el primer caso se llega a la solución del ejercicio 6 - 3 y en el otro caso al ejercicio 6 - 9. Este último ejercicio no es posible resolverlo en el dominio de los números fraccionarios aspecto este que debe ser aprovechado para motivar la necesidad de ampliar dicho dominio numérico.

La motivación de la necesidad de ampliar el dominio de los números racionales se puede plantear a partir del conocimiento que han adquirido los alumnos, a través del cálculo de raíces cuadradas de números racionales no negativos, en relación a que existen números racionales que no tienen como raíz cuadrada un número racional y la exigencia de

determinar la medida del lado de un cuadrado construido a partir de cuatro triángulos isósceles de área igual a 0,5 u (ejemplo utilizado en la escuela para representar en la recta los números irracionales). Con éstas dos situaciones se les da a conocer que se necesita construir "nuevos" números mediante los cuales se pueda representar por ejemplo la raíz cuadrada de cualquier número racional no negativo así como poder representar el número de medida cuando esta no es racional.

Tanto para la motivación de la construcción de los números reales como para la de los números complejos no es posible, en contraste con otras ampliaciones de los dominios numéricos, realizar una motivación práctica directa, o sea, esta tiene que efectuarse desde el punto de vista intramatemático. Así tenemos que para motivar la construcción del dominio de los números complejos es apropiado partir de la necesidad de poder realizar ilimitadamente la operación de radicación, lo cual no es siempre posible en el dominio de los números reales, ó de la necesidad de resolver ecuaciones cúbicas en su forma reducida, o sea

$$x^3 + px + q = 0,$$

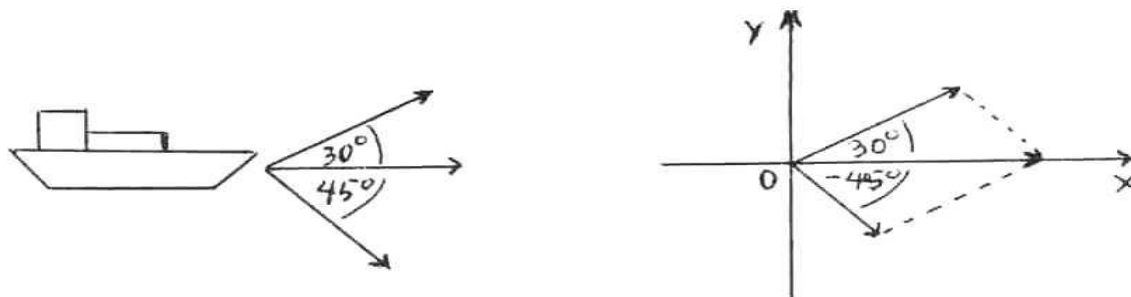
que conducen a ecuaciones de segundo grado con discriminante negativo como se realiza actualmente en nuestra escuela. Independientemente de la decisión que se tome por el profesor en cuanto al empleo de una u otra de estas posibilidades es importante tener en cuenta lo siguiente:

Comúnmente los alumnos se preguntan acerca de la utilidad de estos números en determinados problemas de la práctica social. Como se sabe los números complejos son empleados en la ciencia aplicada para expresar el movimiento vibratorio, las oscilaciones armónicas, las vibraciones amortiguadas, las corrientes alternas y otros fenómenos ondulatorios. Aunque no es posible, de acuerdo a los conocimientos adquiridos por los alumnos, el planteamiento de determinados ejemplos en cada una de las esferas mencionadas,

si se puede apoyándose en el saber y poder adquiridos por éstos en relación con el estudio de la Mecánica plantear una situación como la siguiente:

Dos remolcadores trasladan un barco hacia un muelle de descarga. El cable de uno de los remolcadores forma con el eje del barco un ángulo de  $30^\circ$  y desarrolla una fuerza de 3 600 N y el del otro forma un ángulo de  $45^\circ$  y ejerce una fuerza de 2 850 N. Calcular la fuerza resultante que ejercen ambos remolcadores sobre el barco. (1)

Mediante una representación de la situación, como se ilustra en la gráfica B.1, se le plantea a los alumnos que con el estudio de los números complejos también se le puede dar solución a este problema (conocimientos sobre la representación trigonométrica, la adición de números complejos, módulo de un número complejo, entre otros). Esta motivación puede ser empleada incluso en el trabajo posterior con los números complejos (motivación a largo plazo).



Gráfica B.1

En sentido general también se podría estructurar una motivación para la ampliación de cada uno de los dominios numéricos a través de consideraciones con carácter histórico y con esto contribuir también a la educación ideológica de los alumnos (ver capítulo 2 en el primer tomo).

(1) Otros ejemplos similares se encuentran en: Arias García, D.; García Muñoz, M.: Números Complejos. Editorial de libros para la educación. Ciudad de La Habana, 1980.

## 2. FORMACION DEL "NUEVO" CONJUNTO NUMERICO.

En este epígrafe no presentaremos un tratamiento metodológico en detalle sobre la formación del concepto de número en cada uno de los dominios objeto de estudio en la escuela ya que esto no constituye el centro de atención en el trabajo con los números.

Con la formación de los números negativos y luego la introducción del concepto de números opuestos se define el conjunto de los números racionales como la unión de los números fraccionarios y sus opuestos. Esto se representa frecuentemente en la ciencia Matemática a través de conjuntos de la siguiente forma:  $Q = Q+ \cup Q- = Q+ \cup \{-a: a \in Q+\}$ . el concepto de número racional no se define sino que se introduce como los elementos que forman dicho conjunto. Como esta construcción se hace en la escuela muy orientada en el trabajo con la recta numérica hay que destacar que primeramente se logra una ampliación del rayo numérico mediante una simetría con respecto al punto 0. De esta forma se obtiene el conjunto de los números opuestos a los números fraccionarios.

Después de obtenerse los números irracionales y definirse estos como fracciones decimales infinitas no periódicas se forma el conjunto de los números reales como la unión del conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales. La definición del concepto de número real así como la construcción rigurosa de este dominio no constituye una exigencia de los programas de enseñanza.

Para la formación del conjunto de los números complejos, como habíamos planteado anteriormente, se sigue el método de adjunción que naturalmente por razones obvias este no se realiza en su totalidad y con la exactitud como ocurre en la ciencia Matemática. Ya a partir de la definición de los números complejos como expresiones de la forma  $a + bi$ , en donde  $a$  y  $b$  son números reales, e  $i$ , cumple la propiedad  $i^2 = -1$ , o lo que es lo mismo  $i = \sqrt{-1}$ , es convenientemente

explicarle a los alumnos lo siguiente:

Si la motivación que se realizó para la necesidad de la ampliación fue relacionada con la posibilidad de poder resolver ecuaciones de la forma  $x^2 + i = 0$ , se les puede plantear que precisamente  $i$  es la raíz de dicha ecuación cuestión esta que pueden comprobar fácilmente y si la motivación se hizo en la forma a como históricamente se introdujeron estos números, es decir, relacionados con la obtención de la fórmula analítica para las raíces de la ecuación cúbica  $x^3 + px + q = 0$ , entonces se les pueden presentar algunos ejemplos de raíces cuadradas de números negativos expresados mediante la unidad imaginaria tales como  $\sqrt{-25} = \sqrt{25(-1)} = 5i$  ;  $\sqrt{-3} = \sqrt{3(-1)} = i\sqrt{3}$ .

Todo esto posibilitará una mejor comprensión del significado que tiene la unidad imaginaria en el "nuevo" conjunto que se ha construido.

### 3. DEFINICION DEL ORDEN Y LAS OPERACIONES DE CALCULO EN EL "NUEVO" CONJUNTO. PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES.

En este punto metodológico presentaremos sólo algunas reflexiones relacionadas con el tratamiento de los números racionales ya que el trabajo con los números reales en la escuela se reduce al cálculo con valores aproximados racionales y de igual forma se prescinde, por razones de espacio y simplificación en este libro, de consideraciones metodológicas relacionadas con el cálculo con números complejos en forma binómica.

En el conjunto de los números racionales se definen el orden y las operaciones de cálculo como una ampliación del orden y las operaciones de cálculo definidas en  $Q_+$ . De esta forma queda construido el "nuevo" dominio numérico y con la identificación de los números fraccionarios con los números racionales no negativos se logra una ampliación del dominio  $Q_+$ .

Para la definición del orden se parte primeramente, en

analogía a como se había hecho en los dominios numéricos anteriores, de su representación en la recta numérica y se plantea lo siguiente:

"De dos números racionales diferentes, es menor el que está situado más a la izquierda en la recta numérica".

Más adelante se da una regla para comparar números racionales utilizando la definición de valor absoluto o módulo de un número racional.

El tratamiento de las operaciones de cálculo se realiza de la siguiente forma:

La adición de números racionales se lleva a cabo teniendo en cuenta una diferenciación de dos casos. El primer caso trata de la adición de dos números racionales con signos iguales (positivos o negativos) y el segundo caso aborda la adición de dos números racionales con signos diferentes.

En el primer caso cuando los sumandos son positivos se procede como la adición de dos números fraccionarios. Para los casos restantes se parte de una ilustración en la recta numérica y con esto se persigue que los alumnos obtengan primeramente una representación intuitiva sobre la adición de números racionales para que puedan encontrar por sí solos luego las reglas para adicionar números racionales.

Para la multiplicación de dos números racionales se trata un único caso donde se incluye tanto la multiplicación de dos números racionales con signos iguales como la multiplicación de dos números racionales con signos diferentes.

Las propiedades que cumplen la adición y la multiplicación de números racionales se tratan como una ampliación de las propiedades que cumplen estas operaciones en el dominio de los números fraccionarios. Ninguna de estas propiedades se demuestran, solo se ilustran mediante ejemplos.

En el tratamiento de las operaciones inversas de la adición y la multiplicación se aborda para la sustracción pri-

mero un procedimiento basado en adicionar el minuendo el opuesto del sustraendo y más adelante se trata dicha operación como la operación inversa de la adición de números racionales. Para la división de números racionales se trata primero un procedimiento para dividir dos números racionales atendiendo a los signos del dividendo y el divisor y por último se trata la división como operación inversa de la multiplicación de números racionales.

El dominio de las definiciones (reglas) para calcular con números racionales constituye una premisa fundamental para el logro de las exigencias básicas de los programas: el desarrollo de las habilidades de cálculo correspondientes.

La experiencia práctica ha demostrado que en general a los alumnos les cuenta más trabajo adicionar y sustraer números racionales que multiplicar y dividir. En lo siguiente presentaremos algunas recomendaciones metodológicas para el tratamiento de la adición y sustracción de números racionales.

#### VARIANTES PARA LA ELABORACION DE LA ADICION DEL NUMEROS RACIONALES.

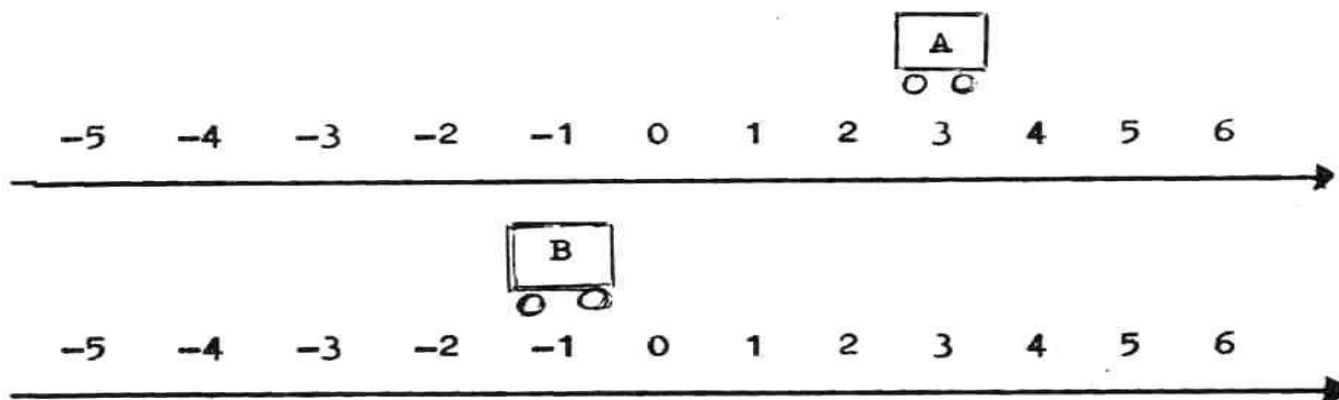
La enseñanza de la Matemática se debe estructurar didáctica y metodológicamente teniendo en cuenta las experiencias de los alumnos para activarlos en la asimilación de conceptos, relaciones, procedimientos y formas de pensar y trabajar matemáticas y con ello fomentar su independencia, desarrollar la flexibilidad del pensamiento y la creatividad. Esto significa que en la elaboración de la nueva materia deben considerarse situaciones de la realidad que estén al nivel de las experiencias de los alumnos. Las sugerencias que se presentan a continuación responden en cierta medida a este empeño.

Las definiciones o reglas para los distintos casos de la adición de dos números racionales se pueden preparar a

largo plazo mucho antes de su definición. Después de la introducción del concepto de número racional a través de ejemplos prácticos, se le pueden plantear ejercicios a los alumnos que contribuirán a su preparación para la comprensión de las reglas para adicionar números racionales. Por ejemplo, a los alumnos se les podrían indicar, después de haberse formado el conjunto de los números racionales, ejercicios como el siguiente.

- Diga qué posición, con respecto al punto de origen 0, ocuparían los móviles A y B en cada uno de los casos siguientes:

1. Si se desplazan 3 unidades hacia la derecha.
2. Si se desplazan 4 unidades hacia la izquierda.



A continuación veamos algunas variantes para elaborar este concepto.

**Variante 1: Representación de segmentos orientados (mediante flechas) en la recta numérica.**

En este caso se deben tener en cuenta los siguientes pasos:

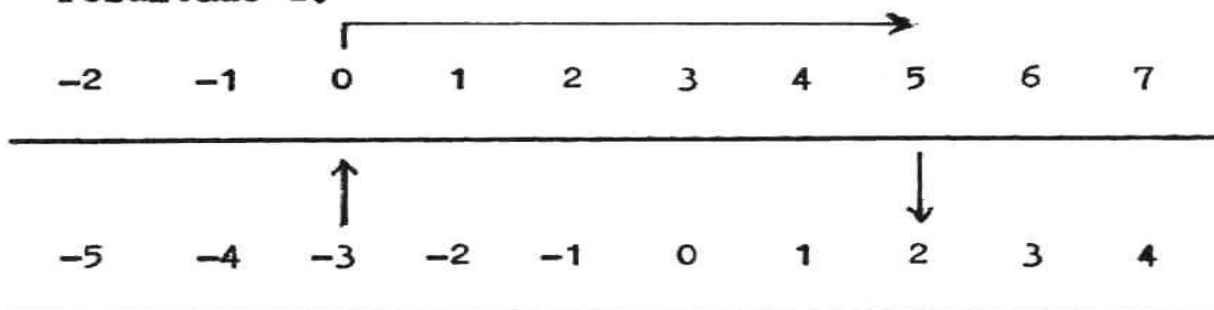
1. Repaso de la adición de segmentos orientados (flechas) en el rayo numérico.
2. Transferencia del procedimiento anterior a la recta numérica. Resolución de suficientes ejercicios.

3. Análisis del signo y del valor absoluto del resultado.
4. Formulación de la definición (regla).

Para la ilustración de esta operación de cálculo se podría considerar también, si las condiciones de la clase lo permiten, utilizar una regla de cálculo con dos escalas, la que puede ser confeccionada por los propios alumnos con cartón. Este procedimiento se emplea en algunos libros de texto de otros países y consiste en lo siguiente:

Para adicionar, por ejemplo,  $-3 + 5 = 2$  se procede de esta forma:

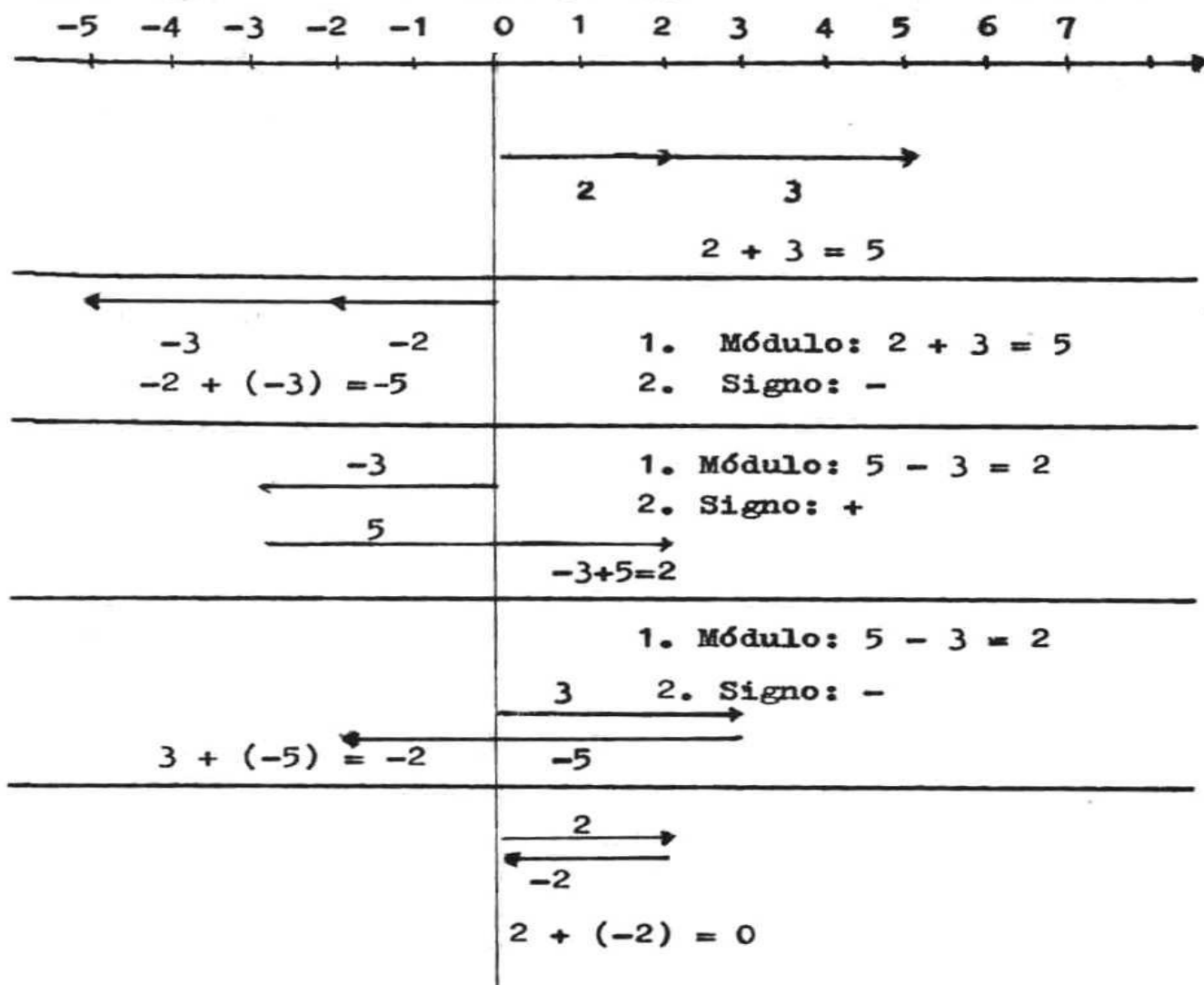
- Se mueve la escala superior de manera que el punto 0 quede sobre el punto  $-3$  que está ubicada en la escala inferior.
- Se lee luego en la escala inferior el punto que corresponde al punto 5 de la escala superior y se obtiene el resultado 2.



Sería provechoso al finalizar el tratamiento de esta operación, reflejar en la pizarra el cuadro 8.2, (u otro medio en que se desee presentar) como forma de sistematización del procedimiento seguido (los sumandos positivos se pueden presentar con color rojo y los negativos en azul).

Junto a este cuadro se puede presentar también un diagrama de bloques panorámico como el que aparece en el libro de Conferencias sobre Metodología de la enseñanza de

la Matemática (1). El profesor puede elaborar, para alumnos con marcados intereses por la Matemática, estos algoritmos en otras formas tales como diagramas de bloques ramificados. Todo esto posibilitaría contribuir al desarrollo de las formas de trabajo algorítmico en los alumnos.



CUADRO 8.2

(1) Jungk, W.: Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2 (segunda parte), p. 61.

**Variante 2:** Elaboración del concepto sobre la base de situaciones prácticas familiares a los alumnos.

En esta variante se puede proceder de la siguiente forma:

1. Solución de suficientes ejercicios donde se presentan magnitudes en ambos sentidos (medición de temperaturas bajo y sobre cero; planteo de accidentes geográficos bajo y sobre el nivel del mar; movimientos rectilíneos de móviles hacia la izquierda y hacia la derecha de un punto fijo; entre otros).
2. Análisis del signo y el valor absoluto de las sumas a que conducen los ejemplos prácticos.
3. Formulación de la definición (regla).

Veamos a manera de ejemplo, como se podría estructurar metodológicamente esta variante considerando el caso en que los sumandos tengan signos diferentes.

El aseguramiento del nivel de partida estará relacionado especialmente con el saber y poder adquiridos por los alumnos en el trabajo con los números fraccionarios así como en el trabajo con valores absolutos de números racionales y en el dominio de la adición de números racionales con signos iguales.

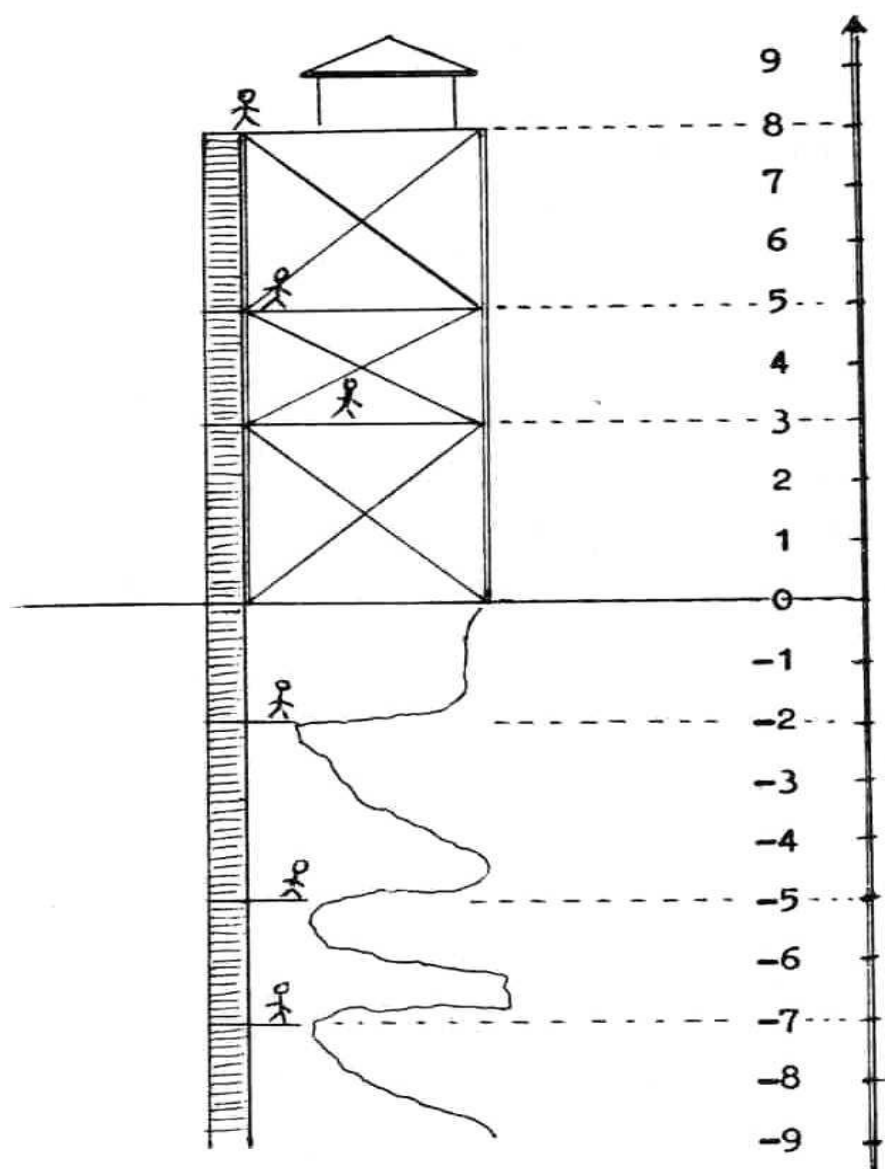
La motivación y orientación hacia el objetivo se puede vincular al planteamiento del siguiente problema representado en la gráfica 8.2 donde se presenta un túnel y un punto de observación construido por las MTT así como la posición tomada por un soldado luego de realizar algunos movimientos. Esta se puede presentar mediante una lámina (pancarta) ó una retrotransparencia si existen las condiciones materiales. Luego, a través de una exposición interesante del profesor sobre aspectos relacionados con la preparación de todo el pueblo para la defensa, se plantea a los alumnos el siguiente ejercicio que propiciará la participación activa de los mismos en su solución:

Ejercicios: Basándote en la gráfica completa la siguiente tabla:

	Posición inicial	Movimiento realizado	posición final	Representación Matemática
a)	3m	2m hacia arriba	5m	$3 + 2 = 5$
b)	-2m	3m hacia abajo	-	-
c)	8m	3m hacia abajo	-	$8 + (-3) =$
d)	-5m	10m hacia arriba	-	-
e)	5m	12m hacia abajo	-	-
f)	-7m	5m hacia arriba	-	$-7 + 5 =$
g)	8m	8m hacia abajo	-	-

Con la realización del ejercicio se puede plantear la motivación y el objetivo en el siguiente sentido:

"Como ustedes habrán observado, en la última columna de la tabla aparece en cada caso la adición de dos números racionales. La regla para los incisos a) y b) es ya conocido; sin embargo para los restantes aun la desconocemos. Dado que en cada caso se ha resuelto una situación práctica planteada sería de interés conocer también una regla para proceder en el caso que los sumandos tengan signos diferentes".



GRAFICA 8.2

En la fase de la elaboración de la nueva materia, que ya se comenzó con la solución de ejercicios de manera intuitiva en el trabajo con la tabla anterior, se debe centrar la atención de los alumnos en el análisis de los incisos c), d), e) y f). Aquí los alumnos deben reconocer que la suma de un número racional positivo y otro negativo es un número racional positivo ó un número racional negativo ó cero. Para la obtención de la definición (regla)

son apropiados los siguientes impulsos:

- Observa los sumandos correspondientes a los incisos del c) al f). ¿Cómo son dichos números entre sí?
- ¿Cuál tiene mayor valor absoluto?
- ¿Cómo se podría obtener el valor absoluto de la suma a partir de los sumandos?
- Observa el signo de los sumandos y del resultado. ¿A qué conclusión llegas?

Todas las posibles respuestas de los alumnos deben quedar siempre precisadas por el profesor.

Luego de formularse la definición (regla) se debe exigir a los alumnos su enunciado en forma precisa (contribución al desarrollo de sus capacidades lógico-lingüística), ya que frecuentemente la plantean de la siguiente forma:

"Para adicionar dos números racionales se restan los sumandos y se pone el signo del mayor?"

El análisis del inciso g) conduce a que la adición de dos números opuestos es cero.

Para la fase de fijación (primera fijación) son apropiados ejercicios para la identificación, y fundamentalmente para la realización del concepto, por tratarse de un concepto de operación.

Para la identificación se pueden plantear algunos ejercicios para que los alumnos lo fundamenten como el siguiente:

- Fundamente en cada caso si los resultados son correctos o no.

a)  $-3 + 5 = 8$

b)  $-6,45 + 2,25 = -4,20$

c)  $2/3 + (-1/3) = -1/2$

Tanto para la identificación como la realización del

concepto se pueden tomar ejercicios del libro de texto y plantear otros tales como:

- Diga en cada caso tres posibilidades para expresar los números dados como suma de dos números racionales con signos diferentes:

a)  $-12$                       b)  $23$                       c)  $0$

- Completa los espacios en blanco, de modo que se cumpla la igualdad:

a)  $6 + \quad = -4$                       b)  $-3 + \quad = 0,1$                       c)  $27/31 + \quad = 0$

Variante 3: Elaboración del concepto utilizando sucesiones inductivas y haciendo uso del principio de permanencia (1).

A manera de ejemplo vamos a presentar panorámicamente como se podría estructurar metodológicamente la formación del concepto "adición de dos números racionales con signos diferentes". En su estructuración se tendrán en cuenta las fases del trabajo en un problema.

---

(1) Hermann Hankel (1839-1873), matemático alemán, presentó en 1876 el principio de permanencia mediante el cual amplía dominios numéricos en los cuales ciertas operaciones no son realizables ilimitadamente. A través de la inclusión de "nuevos" elementos a los elementos del dominio de partida se obtiene el dominio "nuevo" ampliado con la siguiente propiedad:

En el "nuevo" dominio debe ser realizable siempre la operación referida y deben satisfacerse las mismas leyes formales de cálculo como en el dominio "viejo". De ello resulta luego la definición, por necesidad, de la operación en el "nuevo" dominio.

Orientación  
hacia el  
problema

Nivel de partida: Dominio de las operaciones de cálculo en  $N$  y en  $Q +$ . Definición de la adición de números racionales con signos iguales.  
Definición de módulo.

Motivación: A partir de ejercicios conocidos plantear ejercicios hasta ahora no conocidos:  $4 + (-2)$ ;  $5 + (-3)$ .

Orientación hacia el objetivo y planteamiento del objetivo: Encontrar una definición (regla) para la adición de dos números racionales con signos diferentes. Esta definición no puede estar en contradicción con las definiciones establecidas anteriormente.

Trabajo  
en el  
problema

Disposición de objetos de investigación:  
Partimos de ejercicios conocidos:

$$4 + 3 = 7$$

$$4 + 2 = 6$$

$$4 + 1 = 5$$

Estrategia: Vamos a utilizar "sucesiones inductivas" como aparece arriba. Se observa en las sumas anteriores que si permanece un sumando fijo y el otro disminuye en 1, la suma disminuye en la misma cantidad. Esta regularidad debe seguirse cumpliendo (principio de permanencia).

Solución  
del  
problema

Determinación de las características comunes y búsquedas de relaciones:

$$4 + 1 = 5$$

$$4 + 0 = 4$$

$$4 + (-1) = 3$$

$$4 + (-2) = 2$$

$$4 + (-3) = -1$$

$$4 + (-4) = 0$$

$$4 + (-5) = -1$$

$$4 + (-6) = -2$$

Característica del resultado:

1. Valor absoluto del resultado: Es igual a la diferencia que resulta de restar el sumando de menor módulo del sumando de mayor módulo.
2. Signo del resultado: El del sumando con mayor módulo.

Definición (regla)

Para adicionar dos números racionales con signos diferentes:

1. Se sustrae del mayor módulo de estos números el menor.
2. Al resultado se le pone el signo del número de mayor módulo.

Consideraciones  
retrospectivas  
y  
perspectivas

Considerar el caso especial: Sumando con el mismo módulo.

Posibilidad de aplicar la estrategia en la definición de otras operaciones de cálculo (por ejemplo en la multiplicación).

Inclusión de la regla de cálculo en el sistema de reglas para la adición de números racionales.

La decisión o no del empleo de esta variante en la enseñanza está en dependencia del grado de desarrollo alcanzado por los alumnos con respecto a su formación matemática. Esta variante tiene también la ventaja de desarrollar ampliamente las capacidades mentales generales y específicas de los alumnos. En sentido general, en las variantes presentadas, se ha seguido para la formación del concepto, una vía inductiva; no obstante se puede también estructurar dicho concepto a partir de una vía deductiva.

#### ELABORACION DEL CONCEPTO DE SUSTRACCION DE NUMEROS RACIONALES

La sustracción de números racionales tiene, en comparación con el resto de las operaciones de cálculo en  $Q$ , mucha importancia ya que la motivación intramatemática que condujo a la necesidad de ampliar el dominio de los números fraccionarios, y con esto construir el dominio de los números racionales, fue precisamente la limitación de poder resolver siempre dicha operación en  $Q$ . Como este objetivo no se ha alcanzado aún con el tratamiento de la adición de números racionales y el mismo se ha seguido recordando a los alumnos, la elaboración de este concepto debe constituir el punto metodológico esencial en el tratamiento de esta unidad temática.

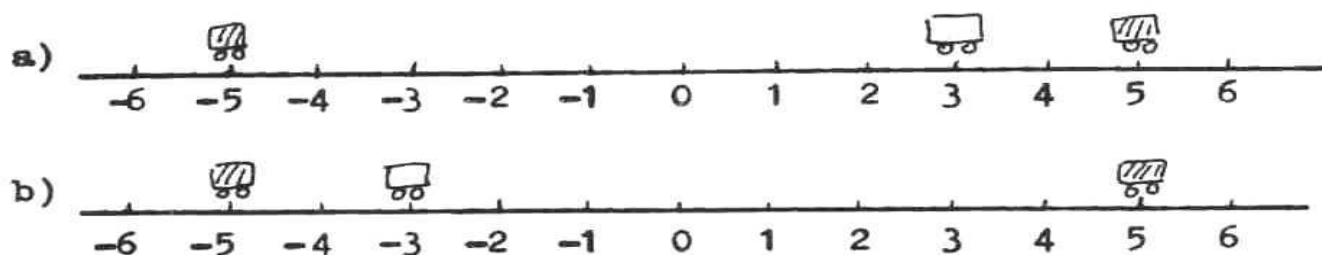
A continuación brindamos algunas sugerencias para la formación de este concepto, para lo cual partiremos de una situación práctica sencilla y comprensible para los alumnos, lo que posibilita un trabajo intuitivo antes de llegar a la definición.

Las posibilidades para el aseguramiento del nivel de partida así como de la motivación y orientación hacia el objetivo pueden ser elaboradas por el profesor sin muchas dificultad, partiendo fundamentalmente de los conocimientos adquiridos por los alumnos en el trabajo con las operaciones de cálculo en  $Q$  +, la adición en  $Q$  y el motivo que condujo a la necesidad de ampliar el dominio  $Q$  +.

En la fase de la elaboración de la nueva materia se puede partir del siguiente ejercicio:

- En cada uno de los gráficos aparece un móvil situado a cierta distancia del punto 0. El móvil sin sombrear representa la posición inicial que este tenía y el sombreado la posición final después de haber realizado un movimiento.

¿En cuántos metros consistió el cambio efectuado por dicho móvil en cada caso teniendo en cuenta que si el cambio fue hacia derecha es positivo y si fue hacia la izquierda negativo?



La solución de esta situación se puede ir relleando con la ayuda del profesor en una tabla como la siguiente:

Posición inicial	Posición final	Cambio experimentado	Representación Matemática
3m	5m	2m	$5 - 3 = 2$
3m	-5m	-8m	$-5 - 3 = -8$
-3m	5m	8m	$5 - (-3) = 8$
-3m	-5m	-2m	$-5 - (-3) = -2$

El completamiento de la última columna debe ocurrir después de llenar cada una de las columnas anteriores. Para esto el profesor puede a partir de la primera fila de la tabla orientar a los alumnos en el sentido siguiente:

Si observamos los datos dados y el resultado buscado, podríamos expresar el cálculo de dicho resultado también

como una sustracción, donde el valor de la posición final se le sustrae el valor de la posición inicial. De la misma forma se plantean las restantes sustracciones.

Y nuevamente ligado a la orientación hacia el objetivo se le plantea a los alumnos que la solución del ejercicio práctico nos ha llevado a la sustracción de números racionales, sin conocer aun una definición para poder efectuar esta operación para todos los números racionales. Por lo tanto se debe encontrar una definición que cumpla las siguientes condiciones:

1. La sustracción debe ser realizable siempre.
2. La sustracción debe ser la operación inversa de la adición (como en  $Q^+$ ).

Teniendo en cuenta ahora que esta operación se va a definir a partir de la transformación de la sustracción en una adición se debe dirigir la atención de los alumnos hacia las correspondientes adiciones a que conducen cada uno de los ejercicios de la última columna de la tabla. Para esto se puede plantear la siguiente pregunta a los alumnos:

¿Cómo se podría expresar cada uno de los ejercicios de sustracción dados teniendo en cuenta las reglas estudiadas para la adición de números racionales?

La respuesta de esta pregunta debe conducir a las siguientes igualdades y a la explicación de la relación entre el sustraendo de la sustracción y el segundo sumando de la adición correspondiente.

$$\begin{aligned} 5 - 3 &= 2 = 5 + (-3) \\ 5 - (-3) &= 8 = 5 + 3 \\ -5 - 3 &= -8 = -5 + (-3) \\ -5 - (-3) &= -2 = -5 + 3 \end{aligned}$$

$\uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow$

Y de aquí por generalización se llega a la definición:

"Para sustraer un número racional de otro, adicionamos

al minuendo el opuesto del sustraendo".

Esto se puede plantear también mediante el empleo de variables de la siguiente forma:

$$a - b = a + (-b) \quad (a, b \in \mathbb{Q})$$

Una vez elaborada esta definición se debe valorar si las dos condiciones anteriores se satisfacen. La primera condición se cumple, dado que la sustracción se reduce a la adición de números racionales y como se había estudiado anteriormente esta es siempre posible. Con respecto a la segunda condición se debe ejemplificar a los alumnos el significado que tiene el calcular, por ejemplo,  $5 - 8 = x$ , es decir, el número buscado debe cumplir con la condición  $x + 8 = 5$ , de donde aplicando los conocimientos sobre las reglas de adición de números racionales se llega a  $x = -3$ , ya que  $-3 + 8 = 5$ .

Durante el transcurso de la clase sería muy apropiado ir elaborando, paso a paso en la pizarra las igualdades y la generalización a que estas conducen.

Con respecto a la fase de fijación, como se ha elaborado un concepto de operación, predominan las acciones de realización del concepto y para esto se presentan suficientes ejercicios en el libro de texto correspondiente. Uno de los ejercicios que se podría seleccionar es el siguiente:

- Copia la siguiente tabla y complétala:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
x	7	-8			-1	-3/4
y	-3		1,1	-3,2		-5/6
x-y			2,8			
y-x		3		-3,2	-0,5	

Este tipo de ejercicio contribuye al desarrollo de la movilidad del pensamiento de los alumnos (Ver MEM, 1 parte).

#### 4. DESARROLLO DE LAS HABILIDADES DE CÁLCULO.

Como se ha expresado con anterioridad, la exigencia sobre el desarrollo de las habilidades en el trabajo con los números; como uno de los componentes más importantes del poder de cálculo, constituye uno de los objetivos centrales del tratamiento de este complejo de materia. Tomando como ejemplo la adición de números racionales, abordaremos algunos aspectos que pueden contribuir al cumplimiento de este objetivo. Las reflexiones que se presenten en este epígrafe pueden ser también aplicadas, con algunas modificaciones, a las demás operaciones de cálculo.

Para el logro de las habilidades de cálculo en la adición de números racionales se deben observar dos aspectos fundamentales:

1. El poder y saber que deben tener los alumnos en cuanto al trabajo con los dominios numéricos precedentes, y especialmente en el trabajo con los números fraccionarios (nivel de partida).
2. El dominio de las reglas formuladas para la adición de números racionales.

Con respecto al 1.º aspecto debemos destacar que en cuanto al saber y poder que deben poseer (los alumnos en el trabajo con los números fraccionarios se destacan entre otros:

- habilidades en la comparación de números fraccionarios;
- habilidades para adicionar números fraccionarios en forma de fracciones comunes, lo que exige el dominio de las definiciones correspondientes para adicionar fracciones;
- habilidades para adicionar números fraccionarios cuando aparezcan en forma de fracciones y/o en forma de expresiones decimales y/o en forma de números mixtos.

Investigaciones realizadas en nuestro país en los últimos años han demostrado que entre las dificultades que

presentan los alumnos en el trabajo con los números racionales inciden notoriamente los conocimientos adquiridos por ellos en relación al trabajo con los números fraccionarios. Esto no es, sin embargo, un problema que se presenta sólo en nuestra escuela, ya que internacionalmente se ha comprobado, en muchos países, que a los alumnos les cuesta bastante trabajo lograr un saber y poder sólidos en el tratamiento de este dominio numérico. Así por ejemplo Del Río Sánchez (1) describe algunas de las dificultades detectadas por Tatsuoka (2) en una investigación llevada a cabo en Estados Unidos con 600 alumnos de Secundaria Básica, donde se pudo comprobar entre otras cuestiones lo siguiente:

- " 1. La ignorancia de la fracción en las operaciones con números mixtos, por ejemplo:

$$4 \frac{7}{12} - 2 \frac{4}{12} = 2$$

2. Consideración de que el numerador y el denominador son elementos independientes en una fracción y, por lo tanto, puede operarse con ellos aisladamente, por ejemplo:

$$5/4 + 3/2 = 8/6 \quad \& \quad 3/5 - 1/10 = 2/5.$$

---

(1) Del Río Sánchez, José: Concepciones erróneas en Matemática. Revisión y evaluación de las investigaciones En Educar No. 17. Revista del Departamento de Pedagogía y Didáctica. Publicaciones de la Universidad Autónoma de Barcelona. España, 1990, p. 207.

2) Tatsuoka, K. K.: Analysis of Errors in Fraction, Addition and Subtraction Problems. Final Report. National Inst. of Education, Washington, D. C., 1984.

3. Aprendizaje memorístico de las reglas lo que produce fallos frecuentes; por ejemplo, en una suma de fracciones con denominadores distintos, multiplican los denominadores y suman los numeradores.
4. Incomprensión del significado del cero y del uno que se manifiesta en errores como los siguientes:

$$2/3 - 2/3 = 1; 3/4 - 3/8 = 0/4 = 4; 6/7 - 4/7 = 2/0 = 2''$$

De la misma forma Flade (3) de la Universidad alemana "Martin Luther" señala entre algunas de las dificultades típicas presentadas por los alumnos en el trabajo con los números fraccionarios las siguientes:

- No identificar fracciones de la forma  $n/n$  ( $n > 0; n \in \mathbb{N}$ ) con el número 1.

Ejemplo:  $4/4 + 8/8 = \frac{32 + 32}{32} = \dots$  en lugar de

$$1 + 1 = 2.$$

- No identificar fracciones de la forma  $k \cdot n/n$  ( $n > 0$  y  $n, k \in \mathbb{N}$ ) con el número  $k$  (es decir no simplifican).

Ejemplo:  $8/4 + 6/3 = \frac{24 + 24}{24} = \dots$  en lugar de  $2 + 2 = 4$ .

- Fracciones con el mismo denominador las vuelven a llevar a otro denominador común.

Ejemplo:  $7/8 + 3/8 = \frac{56 + 24}{64} = \dots$  en lugar de  $\frac{7 + 3}{8} = 5/4$ .

Todos estos resultados nos demuestran que para poder alcanzar el desarrollo de las habilidades en el cálculo con los números racionales se debe garantizar, en primer lugar,

---

(1) Flade, L.: Sobre el mejoramiento de las habilidades de cálculo en el dominio de los números racionales.

¿Ejercitamos siempre convenientemente? En *Mathematik in der Schule* 7/8 (1989). Berlin, R.D.A. (en alemán). p. 51.

el nivel de partida de los alumnos, teniendo siempre en cuenta que un saber sólido y un poder aplicable pueden ser sólo resultado de un proceso de desarrollo a largo plazo y dirigido consecuentemente en la enseñanza.

En relación al 2. aspecto las principales dificultades que comúnmente presentan los alumnos están relacionadas con la determinación del signo del resultado ya que las dificultades que se presentan con el trabajo en los valores absolutos de los sumandos están relacionadas con lo planteado en el 1. aspecto. También influye en cierta medida la exigencia de que se aplique la regla para el cálculo en la forma que se define.

La observación, en la estructuración metodológica de la enseñanza, de las exigencias siguientes puede contribuir al logro de las habilidades en la adición de números racionales.

1. Elaboración de sucesiones de indicaciones para la acción.

De acuerdo a como se plantea la definición (regla) para el cálculo con números racionales se hace necesario que el profesor decida en qué momento se puede exigir la aplicación de dicha regla en forma más corta. Por ejemplo para adicionar dos números racionales con signos diferentes se pueden plantear los dos pasos siguientes:

1. Coloque el signo del resultado.
2. Reste los módulos de los sumandos.

Se plantea en el primer paso la determinación del signo del resultado, ya que es frecuente el olvido de éste por parte de los alumnos. Una sucesión de pasos para el cálculo como la anterior, debe contener siempre lo esencial y se debe utilizar cuando se esté seguro de que el alumno ha comprendido de forma consciente el contenido de la definición.

## 2. Graduación de los ejercicios atendiendo a su grado de dificultad.

A continuación presentaremos una posibilidad para el planteamiento diferenciado de los ejercicios atendiendo a los distintos grupos tipológicos (1) de alumnos que tenemos generalmente en un aula.

En las primeras clases de fijación deben presentarse ejercicios de la forma "calcular  $a + b$ ", donde  $a$  y  $b$  se deben seleccionar de acuerdo a las deficiencias en el saber y poder de los alumnos en el trabajo con los números fraccionarios. Así por ejemplo para alumnos del grupo III se pueden plantear ejercicios como: Calcular:

- a)  $2 + (-5)$ ,    b)  $-3 + (-10)$ ,    c)  $250 + (-125)$ ,  
d)  $-2,41 + 3,20$ , e)  $2/3 + (-1/3)$ ,...

A los alumnos del grupo II se le podrían presentar de esta forma: Calcular:

---

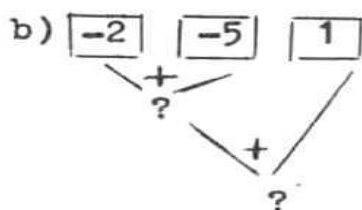
(1) Grupos tipológicos: Consideramos bajo este término los diferentes grupos de alumnos que el profesor atendiendo a las características individuales de los alumnos en cuanto al desarrollo de su saber, poder y las cualidades del pensamiento, los clasifica en alumnos con un saber y poder sólido (grupo I); alumnos con algunas deficiencias en su saber y poder (grupo II) y alumnos con marcadas deficiencias en cuanto al desarrollo del saber y poder (grupo III). Frecuentemente en la literatura pedagógica y psicológica, estos grupos se clasifican también en cuanto a su rendimiento en: alumnos de alto aprovechamiento; alumnos de aprovechamiento promedio y alumnos de bajo aprovechamiento.



- Ejercicios de cálculo mediante esquemas.

En muchas publicaciones internacionales se presentan a menudo ejercicios formales de cálculo utilizando diferentes diagramas. También en los libros de texto de Matemática para el 5. y 6. grado de nuestra Escuela se plantean ejercicios formulados de esa forma. Veamos a continuación algunos ejemplos relacionados con la adición de números racionales:

a)  $3 \xrightarrow{+(-5)} ? \xrightarrow{+ ?} -2 \begin{matrix} \nearrow +2 \\ \searrow +0 \end{matrix} \begin{matrix} ? \\ ? \end{matrix} \begin{matrix} \nearrow +? \\ \searrow +? \end{matrix} -3$



- Ejercicios de la forma:  $x + a = b$  ó  $a + x = b$

Ejemplo: Hallar x en:

a)  $-2 + x = 4$ ;                      b)  $x + (-3) = -2$

La solución de estos ejercicios se debe exigir a través de reflexiones lógicas sobre el contenido.

- Ejercicios mediante tablas:

En este caso se podrían plantear diferentes ejercicios que además de contribuir al desarrollo de las habilidades de cálculo permiten también destacar importantes relaciones por ejemplo, entre los términos de una determinada operación como se muestra en el ejemplo siguiente:

Complete la siguiente tabla:

a	b	a + b	¿Es $a + b < a$ ?	¿Es $a + b > a$ ?
4		9	no	sí
2,5	-3			
-7,2		-7,2	no	no
-5	-3,4			
9/2	-4,5			

Es importante tener claro que aunque los libros de texto para la enseñanza de la Matemática presentan suficientes ejercicios, no siempre se puede esperar que satisfagan las necesidades de cada clase, por lo que esto exige del profesor un trabajo profundo para decidir cuáles son los apropiados para su clase, cuáles debe transformar o elaborar para lograr los objetivos que se ha propuesto.

#### TAREAS DEL TEMA:

1. De una panorámica sobre el transcurso de la línea directriz "dominios numéricos" en los grados 5to. al 7mo. de la EGPL. Ejemplifique cómo se pone de manifiesto esta línea en el tratamiento de otras unidades de materia en dichos grados.
2. Qué vías se pueden tener en cuenta para la ampliación de los diferentes dominios numéricos. Explique las ventajas o desventajas que pudiera tener la aplicación de cada una de ellas en la enseñanza.
3. Realice un trabajo investigativo en diferentes fuentes bibliográficas relacionadas con la historia de la Matemática acerca del surgimiento de los números racionales (números negativos); números irracionales; números complejos y elabore una posible motivación extramatemática con carácter histórico para los alumnos.
4. En el proceso de enseñanza de la Matemática tiene una gran importancia la utilización de cuadros de pizarra. Haga una propuesta de un cuadro de pizarra para la elaboración del concepto "multiplicación de números racionales" y elabore además una sucesión de indicaciones para la acción relacionada con esta operación.
5. Proponga diferentes posibilidades de ejercicios para contribuir al desarrollo de las habilidades en el cálculo con:
  - a) números racionales,

b) números complejos.

Tenga en cuenta para la selección de los ejercicios las distintas formas de la fijación y posibilidades para la estructuración diferenciada de la enseñanza.

7. Sobre la base del estudio de los Programas, Libros de Texto y Orientaciones Metodológicas vigentes para la enseñanza de la Matemática en relación con las unidades "Números Racionales" y "Números Complejos" realice las siguientes actividades:

- a) Plantee los objetivos fundamentales que deben lograr los alumnos en el tratamiento de estas unidades. Ponga ejemplos relacionados con las exigencias mínimas que deben ser alcanzadas por los alumnos.
- b) Seleccione una unidad temática de cada una de las unidades y haga una propuesta de la planificación de las mismas a partir de los conocimientos adquiridos sobre la planificación de la enseñanza.
- c) Seleccione una clase de cada una de las unidades temáticas y haga la preparación escrita de la misma destacando las funciones didácticas, la materia y su estructuración metodológica atendiendo a las actividades del profesor y de los alumnos.

8. ¿Qué dificultades podrían afrontar, según su opinión, los alumnos en la solución de los siguientes ejercicios? ¿Cómo se podrían preveer dichas dificultades?

- Calcular (para cálculo con números racionales).

a)  $-3/4 - 4/5 \cdot (-2/3) + 13/60$ .

b)  $0,25 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} : \frac{5}{6} - 1$

- Calcular (para cálculo con números complejos)

$$\frac{(2 + 5i)(2 - i)}{1 - i} + 5 - 3i$$

## CAPITULO 9. TRATAMIENTO METODOLOGICO DEL TRABAJO CON VARIABLES.

Pasaron muchos siglos antes que los matemáticos se pusieran de acuerdo sobre cómo designar ciertas "cosas" y cantidades variables o no conocidas; sobre cómo determinar un conjunto, expresar una relación (mediante una ecuación o fórmula) o generalizar una regularidad. La introducción de las variables se convirtió así en una necesidad para el desarrollo de la Matemática. Las variables, unidas a los símbolos constituyen un elemento importante de la envoltura material del pensamiento matemático, sin la cual el entendimiento y la comprensión entre matemáticos, así como la interpretación de la realidad objetiva, a través de la Matemática, podría resultar en extremo complicada.

Comprender el trabajo con variables como la utilización casi irreflexiva o automática de transformaciones de términos y estructuras puede conducir al formalismo y mecanicismo, si no se presta atención al significado y la interpretación que corresponde a las transformaciones y estructuras expresadas mediante variables. En este sentido se requiere una enseñanza y cuidadosa de las variables.

Ello justifica la importancia del estudio sistemático de las variables en la escuela y la existencia de la línea directriz que lleva su nombre.

### 9.1 La realización de la línea directriz trabajo con variables en la escuela cubana.

En el nivel primario se inicia el trabajo con las variables aunque no hay unidades de enseñanza dedicadas específicamente a ello. Su estudio se encuentra vinculado al aprendizaje de los dominios numéricos y de los elementos básicos de la geometría.

Las variables aparecen como algo que puede ser sus

Las variables aparecen como algo que puede ser sustituido por números. Ello se evidencia cuando los niños aprenden, "si  $a = 2$ , entonces  $3 + a = 5$ "; averiguan, "quién puede ser  $n$ , si  $n < 9$ "; o aprenden que, "si  $x$  está entre 18 y 23, se escribe  $18 < x < 23$ ".

Las variables también se utilizan, de modo natural, para modelar problemas de la práctica y la vida circundante del escolar. Por ejemplo, en el problema:

"Luis va al correo, compra un sello de 30 centavos y una tarjeta postal. El paga 50 centavos. ¿Cuánto pagó Luis por la tarjeta?"

se identifica la  $x$  con el valor de la postal y se plantea  $30 + x = 50$ , de donde  $x = 20$ .

Al estudiar los dominios numéricos los alumnos emplean las variables como representantes de números cualesquiera, ya sean naturales o fraccionarios. Así las variables aparecen formando parte de ciertas generalizaciones, como por ejemplo:

"Dos fracciones  $a/b$  y  $c/d$  son equivalentes cuando se cumple:  $a \cdot d = b \cdot c$ ".

Las variables se presentan además formando parte de ecuaciones, inecuaciones y tablas unidas a ejercicios, como se aprecia en el ejemplo 9.1.

#### EJEMPLO 9.1:

- i) Determina el valor de  $x$  y comprueba:
  - a)  $180 + x = 200$
  - b)  $x - 30 = 150$
- ii) Determina los valores que puede tener  $z$  en las siguientes desigualdades:
  - a)  $z + 89 > 106$
  - b)  $z - 7 < 8$
- iii) Para qué valores de  $n$  se cumplen las igualdades siguientes:
  - a)  $n - n = 0$
  - b)  $n - n = 37$
  - c)  $n + 0 = n$

IV) Completa la siguiente tabla:

x	y	x + y	x - y	y - x
3	2			
-	-			
5	10			
7			5	
1 -			-	
9			18	
5	37			
1 -	-			
12	60			

Las variables también penetran la enseñanza de la geometría. Los alumnos las utilizan para denotar puntos (A, B, C...); conjuntos de puntos (rectas: r, AB; segmentos: AB, BC); ángulos ( $\sphericalangle$  BAC,  $\sphericalangle \alpha$ ); triángulos ( $\triangle$  ABC) y otros entes geométricos.

Las variables continúan apareciendo en ejercicios y unidas a tablas.

EJEMPLO 9.2:

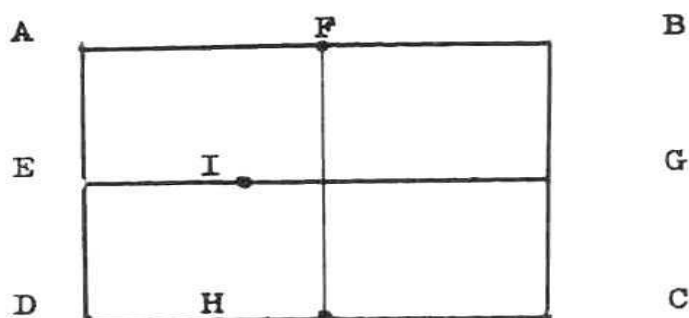
- i) Completa la tabla conociendo que los datos corresponden a rectángulos.

a	b	Area
16,6 cm	8,4 cm	
25 m		275 m <sup>2</sup>
3,3 cm		198 mm <sup>2</sup>

En este caso las variables representan cantidades de magnitud.

- ii) En la figura ABCD es un cuadrado. Considera FH eje de simetría y completa la siguiente tabla.

ORIGINAL	IMAGEN
A	
	G
I	
	$\overline{AE}$
$\sphericalangle$ ADC	



iii) Traza dos rectas  $p$  y  $q$  que sean perpendiculares a un vector a cualquiera.

a) Halla la imagen de las rectas  $p$  y  $q$  por la traslación  $a$ .

b) ¿Qué relación existe entre las rectas  $p'$  y  $q'$ ?

En la secundaria básica, en unidades de enseñanza dedicadas especialmente al trabajo con variables, se inicia su estudio sistemático tomando como base el trabajo realizado en primaria y en particular los conocimientos sobre el cálculo con números. Los alumnos formalizan el concepto de variable; término (como sinónimo de monomio), binomio, trinomio, polinomio y expresión algebraica.

Las variables ahora no sólo deben y pueden utilizarse para representar elementos de conjuntos o como parte de la notación de entes geométricos, ellas también son útiles para interpretar, en el lenguaje matemático, situaciones cada vez más complejas, de la vida, la práctica y otras ramas del saber. La traducción del lenguaje común al algebraico y viceversa, tratada como parte del contenido de estas unidades de enseñanza, constituye un medio de particular significación para solucionar problemas a partir de la modelación de situaciones.

Los alumnos aprenden a calcular el valor numérico de términos, aspecto este que tiene gran significación para el desarrollo de las habilidades de cálculo numérico; para el control de la validez de ciertas proposiciones y formas

proposicionales (eventualmente la demostración de proposiciones existenciales ; para el trabajo con fórmulas; para la comprobación de las soluciones de ecuaciones y sistemas de éstas; así como para el cálculo de imágenes de funciones; entre otros aspectos.

Al concluir la secundaria básica los alumnos deben dominar las operaciones fundamentales con expresiones algebraicas (adición, sustracción y multiplicación de polinomios, división por un binomio) y desarrollar habilidades en este cálculo. Ellos deben conocer los casos fundamentales de descomposición factorial (básicamente de binomios y trinomios) y aplicarlos al trabajo con cocientes.

En el preuniversitario el desarrollo de la línea directriz trabajo con variables se caracteriza por el repaso, la sistematización y profundización de lo aprendido en la secundaria básica, así como por su aplicación constante y sistemática en el estudio de los contenidos de este nivel.

Al concluir el nivel medio superior debe lograrse que los alumnos:

- ⊙ profundicen sus conocimientos sobre los procedimientos de descomposición factorial mediante el estudio de métodos aplicables a polinomios enteros con más de tres términos y desarrollen habilidades en su uso,
- ⊙ amplien sus conocimientos sobre los polinomios y sus propiedades, y sus habilidades para trabajar con ellos, así como sus habilidades en el trabajo con fracciones algebraicas,
- ⊙ apliquen estos conocimientos al trabajo con ecuaciones, funciones, la geometría y el cálculo diferencial e integral.

En resumen el trabajo con variables permite:

- ⊙ expresar en un lenguaje simbólico (mediante la habilidad de modelar) diversas relaciones de la vida diaria, la

producción, la técnica y las ciencias, auxiliados del traslado de las expresiones del lenguaje común al matemático; e interpretar los resultados obtenidos por el proceso inverso. Esto permite ver la matemática como un medio para interpretar y contribuir a transformar el medio que nos rodea. En múltiples oportunidades esto ocurre vinculando variables mediante ecuaciones,

- ☐ contribuir a la capacitación de los alumnos para el trabajo correcto con la terminología y simbología matemáticas, preparando así condiciones para el entendimiento de conocimientos cada vez más complejos,
- ☐ contribuir al desarrollo del pensamiento lógico, deductivo, creativo con fantasía de los alumnos, a su flexibilidad y agilidad mental, entre otros aspectos, a través de la solución de ejercicios de demostración, de cálculo, de construcción y problemas, donde intervienen las variables.

## 9.2 Aspectos metodológicos esenciales del complejo de materia "Trabajo con variables".

La materia de enseñanza que abarca la línea directriz Trabajo con Variables incluye entre sus aspectos metodológicos esenciales:

- la introducción del concepto de variable y la elaboración de los conceptos de términos o monomio, binomio, trinomio y polinomio; términos semejantes y expresión algebraica;
- la obtención y fijación de los procedimientos para:
  - introducir y eliminar paréntesis en expresiones algebraicas,
  - reducir términos semejantes,
  - descomponer en factores expresiones algebraicas (en particular polinomios),
  - calcular con expresiones algebraicas enteras y frac-

cionarias (hasta lograr el desarrollo de las habilidades correspondientes).

El trabajo con las ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones constituye un campo importante de aplicación del trabajo con variables que se tratará con detenimiento en el tema 12.

De este modo las situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática que con mayor frecuencia se presentan en el complejo de materia Trabajo con Variables son el tratamiento de conceptos y sus definiciones y el tratamiento de las sucesiones de indicaciones con carácter algorítmico

Con frecuencia los profesores consideran que la forma más rápida y eficaz de enseñar estos conocimientos a los alumnos es proporcionarles los conceptos y el "modo de proceder" en forma ya elaborada y de inmediato pasar a la resolución de ejercicios. En este proceder (que es una deformación del tratamiento de conceptos y sucesiones de indicaciones con carácter algorítmico por vía deductiva) "el apuro" por lograr que los alumnos resuelvan los ejercicios, hace olvidar el necesario trabajo con el contenido de los conceptos (características invariantes que lo definen) y la precisión con los alumnos de las operaciones a realizar (pasos a seguir o base orientadora para la acción). De este modo se limita el carácter consciente y activo de los alumnos en el aprendizaje y sus posibilidades de aplicar los conocimientos en "situaciones nuevas". Se ha comprobado que ésta es una forma rápida de transmitir la información a los alumnos, pero muy poco eficaz para lograr un aprendizaje duradero.

En la fase de aplicación de los procedimientos propios del trabajo con variables se requiere tener en cuenta las consideraciones ya hechas para la fijación de las sucesiones de indicaciones con carácter algorítmico, en el capítulo 3 y sobre la función didáctica fijación en el capítulo 2.

En la selección de los ejercicios a incluir en una ejercitación se deben considerar cuidadosamente todos los elementos que intervienen en ellos y que pueden tener influencia en el surgimiento de situaciones diversas, el cambio de condiciones que propicien el desarrollo de la habilidad correspondiente y promover la reflexión y movilidad del pensamiento de los alumnos. Así en este caso se deben considerar:

- La aparición de signos iguales y diferentes para los términos con que se opera.
- La utilización en los coeficientes numéricos de diferentes formas de representar los números, considerando los diferentes dominios numéricos estudiados por los alumnos (naturales, enteros, fracciones comunes, decimales y mixtos, así como combinaciones de ellos).
- La cantidad de variables, así como diferentes denominaciones para las mismas.
- La cantidad de términos a trabajar con ellos (en particular para realizar las operaciones).
- Los valores que se asignen a los exponentes de las variables (que deben ser variados).
- La variedad en la formulación y exigencias de los ejercicios en relación a los elementos dados y buscados.

Las dos primeras condiciones son necesarias para el perfeccionamiento de las habilidades logradas por los alumnos en el cálculo numérico.

Los procedimientos para el trabajo con variables tienen mucha semejanza con los procedimientos de trabajo con números.

#### EJEMPLO 9.3:

La reducción de términos semejantes nos conduce a efectuar sumas y restas combinadas de los coeficientes de

los términos, que posean en su parte literal las mismas variables, relacionadas de la misma forma. A lo conocido hasta ahora se agrega el considerar la parte literal.

$$4,5 a x^3 - 3,8 a x^3 + 0,75 a x^3 = (4,5 - 3,8 + 0,75) a x^3$$

La multiplicación de un monomio por un polinomio tiene una forma de realizarse muy parecida a la ya conocida aplicación de la propiedad distributiva.

$$38 \overbrace{(25 - 43)} = 38 \cdot 25 - 38 \cdot 43$$

$$2y \overbrace{(3y - 2,7z)} = (2y) (3y) - (2y) (2,7z)$$

$$= 6 y^2 - 5,4 y z$$

Algo similar ocurre con la división de polinomios.

$2x^2 - 9x - 15$	$2x + 1$	$564$	$21$
$-2x^2 - x$	$x - 5$	$-42$	$26$
$-10x - 15$		$144$	
$10x + 5$		$-126$	
$-10$		$18$	

comprobación

$$2x^2 - 9x - 15 = (x - 5) (2x+1) - 10 \qquad 564 = 21 \times 26 + 18$$

Estos hechos justifican que los principios heurísticos de reducción a un problema ya resuelto y de analogía resulten adecuados en el tratamiento metodológico del trabajo con variables.

En este complejo de materia la estructuración metodológica de la orientación hasta el objetivo y la motivación no siempre son tomadas en cuenta. Es este sentido es conveniente hacer ver a los alumnos que el trabajo con variables es una continuación y ampliación del trabajo que se venía realizando con los dominios numéricos.

Cuando se inicia el estudio de las variables los alumnos ya han conocido diferentes dominios numéricos (naturales, fraccionarios, racionales y reales), en cada caso se han estudiado siempre los números que forman parte del do-

minio y las operaciones que se pueden realizar con estos números (se ha sido cuidadoso que cada vez el dominio anterior esté incluido en el nuevo y las operaciones definidas no entren en contradicción con las ya conocidas).

Esta situación constituye un hecho ventajoso para orientar a los alumnos hacia los objetivos y motivarlos a largo plazo para el desarrollo de los contenidos de este complejo de materia y hacer su tratamiento metodológico en analogía con el modo de proceder en los dominios numéricos. Se trata ahora de introducir a los alumnos en el "Trabajo con las variables" y en particular que aprendan a calcular y a resolver problemas con ayuda de variables, como representantes de un dominio determinado.

**EJEMPLO 9.4** Posibilidad de motivar la reducción de términos semejantes, los productos notables y la descomposición en factores.

Una vez que se introduce el concepto de término vale la pena reflexionar sobre la pregunta: ¿Se pueden sumar términos? Cuando se pretendía sumar números esta operación sólo tenía sentido si se referían a cantidades "de la misma especie". ¿Cómo deberán ser entonces los términos para que podamos sumarlos? ¿Qué nos permitiría referirnos a "términos de una misma especie"?

En el estudio de los dominios numéricos fue muy conveniente aprender ciertos productos (productos básicos) para poder realizar cálculos más complejos, y también se necesitó de la descomposición en factores para facilitar (simplificar) los cálculos complejos. ¿Existirá tal posibilidad también para las variables?

Una variante de tratamiento metodológico muy recurrida en este complejo de materia, aprovechando las posibilidades que ofrece la analogía con los conocimientos obtenidos sobre los dominios numéricos es la de obtener los procedimientos de solución a partir del trabajo con ejercicios.

Es decir utilizar la misma ejercitación de contenidos anteriores para arribar de forma natural a los nuevos procedimientos.

A continuación se ofrecen algunas sugerencias para el tratamiento de algunos puntos metodológicos esenciales en el trabajo con las variables.

**EJEMPLO 9.5:** Propuesta de tratamiento metodológico para el producto de términos o monomios.

Al aseguramiento de las condiciones previas para tratar este contenido hay que lograr que los alumnos puedan calcular con números (algo que ya se viene trabajando a través del cálculo de valores numéricos de términos) y que puedan aplicar la propiedad del producto de potencias de igual base. Esto último puede investigarse mediante el ejercicio:

Calcula, aplicando propiedades de las potencias, siempre que sea posible:

a)  $y^2 y^3$

b)  $a^4 a^{\frac{1}{2}}$

c)  $x^5 y^3$

La solución de este ejercicio resulta adecuada para destacar que en el producto de potencias si las bases son iguales se adicionan los exponentes, pero si las bases son diferentes el producto queda indicado.

La orientación hacia el objetivo o precisión del problema a resolver puede ocurrir como sigue:

**Profesor:** Si analizamos los factores en los productos calculados. ¿Podemos decir que se trata del producto de términos?

**Alumnos:** Participan expresando sus opiniones.

**Profesor:** En la clase de hoy vamos a precisar cuál es el procedimiento, en gran parte ya conocido por nosotros, para hallar el producto de términos. ¿Cómo debemos proceder para hallar el producto

de dos términos? El análisis de algunos casos particulares nos podría ser útil.

Calcula los productos siguientes:

$$a) 4,05 \quad (-3) = \qquad b) - 0,3 \quad (2a) =$$

$$c) 25 a^2 \quad (8 b^3) \qquad d) - 1/4 c \quad (c^3)$$

En el caso (a) la situación es completamente conocida y se reafirman los números como términos; los restantes casos incluyen paulatinamente las variables (iguales y diferentes) en los términos.

Estos ejercicios se resuelven en elaboración conjunta con los alumnos. En cada caso se precisa primeramente que se trata de términos, luego se busca el producto aplicando los conocimientos que fueron previamente reactivados. Una vez resueltos los ejercicios se retoma la pretunta: ¿Cómo debemos proceder para calcular el producto de dos términos?

La exigencia de una formulación precisa y acorde con el proceder empleado, constituye una buena contribución al desarrollo del pensamiento de los alumnos, que se ven obligados a analizar como se trabajó en cada ejercicio, comparar la vía seguida en cada caso, generalizar el "modo de proceder" adecuado para hallar el producto de dos términos o monomios y finalmente formular sus conclusiones. De este modo se concreta una aporte al adiestramiento lógico-lingüístico de los alumnos.

Los alumnos por sí solos deben expresar que para calcular el producto de dos términos (monomios) se multiplican los coeficientes numéricos y se multiplican las partes literales, aplicando propiedades del cálculo con potencias.

Con esta base orientadora para la acción de los alumnos se procede entonces a iniciar la fase de aplicación. En ella, además de los ejercicios ya acostumbrados reco-

mendamos incluir ejercicios como los siguientes:

- a) Determina el término que multiplicado por  $-2,8 x^3 y^2$  da por resultado  $1,4 x^2 y^2 z$ .
- b) ¿Qué términos multiplicados dan por resultado  $12 a^4 mn^5$ ?

El ejercicio (a) obliga a los alumnos a reflexionar "al revés" de cómo lo hacía hasta ahora, lo cual favorece su movilidad y reversibilidad de pensamiento. En el (b) hay que considerar si se trata de dos, tres o más términos, y además en cada caso existen varias soluciones. Se aprecian aquí las potencialidades de estos ejercicios para contribuir al desarrollo intelectual de los alumnos, al tiempo que se combate la monotonía, que trae como consecuencia la falta de atención.

**EJEMPLO 9.6:** Posibilidades para el tratamiento metodológico de la introducción y eliminación de paréntesis.

La introducción y eliminación de paréntesis es un aspecto del trabajo con variables que frecuentemente apareja dificultades a los alumnos. Su estudio generalmente aparece vinculado a las operaciones de adición y sustracción de polinomios.

En este caso al aseguramiento del nivel de partida corresponde la reactivación del procedimiento utilizado para la adición y sustracción de polinomios. Para ello el profesor puede invitar a los alumnos a la pizarra a resolver el siguiente ejercicio, planteado como estudio individual en la clase anterior.

1. Sean  $A = 9x - 3y + 5$                        $B = 2,4y - 5x - 9,5$   
 $C = 7x + 2,3y - 9$                        $D = 1,4x - 7y + 8$
- Calcula: a)  $A + B$       b)  $C - D$       c)  $D - A - B$

Una vez resuelto el profesor puede preguntar: ¿Cómo se procedió en cada caso?

**Alumnos:** Se sustituye y se reducen términos semejantes. En la adición se escribe cada uno con su signo, y en la sustracción se cambian los signos del que se resta.

**Profesor:** Con ayuda de los alumnos hace rectificaciones a la expresión oral y la aplicación correcta de los procedimientos.

Una motivación intramatemática, buscando rapidez y seguridad en el trabajo podría tener lugar como sigue.

**Profesor:** Observemos detenidamente el trabajo efectuado en la pizarra. ¿Cómo han sido utilizados los paréntesis en la resolución del ejercicio?

$$\begin{aligned} A + B &= (9x - 3y + 5) + (2,4y - 5x - 9,5) \\ &= 9x - 3y + 5 + 2,4y - 5x - 9,5 = \underline{4x - 0,6y - 4,5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C + D &= (7x + 2,3y - 9) - (1,4x - 7y + 8) \\ &= 7x + 2,3y - 9 - 1,4x + 7y - 8 = \underline{5,6x + 9,3y - 17} \end{aligned}$$

**Alumnos:** Para indicar los polinomios A, B, C y D dados, para diferenciar uno del otro.

**Profesor:** Los paréntesis se emplean para indicar que las cantidades o términos encerrados entre ellos deben considerarse como una sola cosa. En este caso como un polinomio. Ahora bien, los paréntesis primero "se introducen" para facilitar la aplicación de la regla de cálculo, sobre todo la sustracción, pero luego "se eliminan" para efectuar la reducción de términos semejantes. En la práctica suelen presentarse situaciones donde resulta conveniente agrupar determinados términos en una expresión con ayuda de paréntesis, como en el ejercicio anterior, y situaciones en que aparecen expresiones que contienen uno o varios paréntesis precedidos de signos "-" ó "+" con los cuales debemos calcular, como por ejemplo:

2. Simplifica las expresiones siguientes:

a)  $2m^2 - (-m + 5m^2) + (0,5m + 2m^2)$

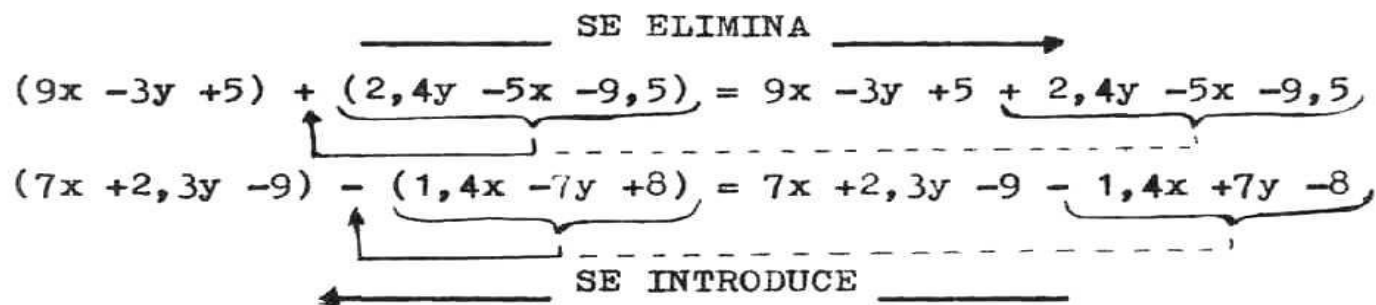
b)  $1,5y^2 + (-3,4y^2z + 6,7y^2) - (-4,3y^2z + 8,1z)$

Cómo podemos proceder entonces en la introducción y eliminación de paréntesis para realizar con rapidez y seguridad cálculos como éstos? Para ello conviene analizar el trabajo efectuado en los ejercicios anteriores y se remite a la pizarra.

Los alumnos deben dar alguna idea, de no ser así...

Profesor: ¿Qué casos pueden diferenciarse?

El cuadro de pizarra puede convertirse en un medio heurístico auxiliar de utilidad si se complementa del siguiente modo. Pueden emplearse tizas de colores para destacar par relaciones entre los signos.



Profesor: Describan con sus palabras la situación inicial (donde se inicia la flecha) y la situación final (dónde apunta la flecha). Si fuera necesario otro impulso este puede ser: "Evidentemente estamos en presencia de dos casos, paréntesis precedidos del signo "+" ó del signo "-". ¿Qué ocurre en cada caso con los términos incluidos en los paréntesis? Compara sus componentes (parte literal, coeficiente y signo) ¿Qué conclusión puedes extraer?

Así los alumnos deben llegar a expresar que:

En cualquier expresión algebraica:

1. Se introduce o elimina un paréntesis precedido del signo "+" dejando los mismos signos a cada término de la expresión incluida en el paréntesis.
2. Se introduce o elimina un paréntesis precedido del signo "-" cambiando el signo a cada término de la expresión incluida en el paréntesis.

Alumnos: Resuelven el ejercicio 2.

Esta forma de trabajar permite que los alumnos reflexionen conjuntamente con el profesor sobre la obtención del procedimiento.

Esta es una posibilidad de determinar la sucesión de indicaciones mediante el trabajo conjunto, con ayuda de impulsos que promueven al análisis, la comparación y la generalización del proceder utilizado, al tiempo que estimula al máximo la expresión oral de los alumnos.

Otra variante para el tratamiento de este procedimiento puede ser con ayuda de hojas de trabajo y apoyados en el trabajo independiente de los alumnos. Luego de una introducción a la nueva materia, similar a la descrita con anterioridad podría proponerse a los alumnos una hoja de trabajo como la que se muestra en el cuadro 9.1.

La discusión de las actividades planteadas en esta hoja deben conducir a la obtención del procedimiento buscado.

Otra variante para el tratamiento de este procedimiento puede consistir en realizar la introducción a la nueva materia y transmitir la sucesión de indicaciones ya elaborada a los alumnos. Esta variante no es la más recomen-

da por las pocas posibilidades que ofrece al desarrollo del pensamiento de los alumnos, que pueden con relativa facilidad "llegar a descubrirla". Algunos profesores la prefieren porque les permite arribar rápidamente a la solución de los ejercicios y "ganar tiempo". Tal decisión se puede tomar en un momento determinado por ciertas circunstancias, pero no sistemáticamente, porque ganar tiempo en este sentido equivale a comprometer el desarrollo intelectual de los alumnos.

## CUADRO 9.1

## HOJA DE TRABAJO

1. Analiza las soluciones dadas a los ejercicios siguientes y realiza las actividades que se proponen a continuación.

Calcula:

$$\text{a) } (2p^2q - 5pq^2) + (3pq^2 - 7p^2q) \quad \text{b) } (2x + 3x^2y) - (2z - 4xy^2)$$

$$\text{c) } (a^2b + 3b^2) + (-10b^2 + 8a^2b) \quad \text{d) } (a^2b + 3b^2) - (-4a^2b - 6b^2)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } (2p^2q - 5pq^2) + (3pq^2 - 7p^2q) &= 2p^2q - 5pq^2 + 3pq^2 - 7p^2q \\ &= -5p^2q - 2pq^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (2x + 3x^2y) - (2z - 4xy^2) &= 2x + 3x^2y - 2z + 4xy^2 \\ &= 2x + 7x^2y - 2z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (a^2b + 3b^2) + (-10b^2 + 8a^2b) &= a^2b + 3b^2 - 10b^2 + 8a^2b \\ &= 9a^2b - 7b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } (a^2b + 3b^2) - (-4a^2b - 6b^2) &= a^2b + 3b^2 + 4a^2b + 6b^2 \\ &= 5a^2b + 9b^2 \end{aligned}$$

1. Revisa los cálculos. ¿Están efectuados correctamente?
2. Subraya los términos incluidos en los paréntesis precedidos del signo "+".
3. Busca estos mismos términos a la derecha de cada igualdad y compáralos. (Considera en tu comparación los coeficientes con su signo y las partes literales).

¿Cómo quedan los términos al eliminar los paréntesis?

4. Realiza las actividades 1, 2 y 3 con los términos incluidos en los paréntesis precedidos del signo "-".
5. A qué conclusión puedes llegar? Completa los espacios en blanco.

Todo paréntesis precedido del signo "+" se puede eliminar

---

Todo paréntesis precedido del signo "-" se puede eliminar

---

II. Dado el polinomio  $2c^2d - 4cd^2 + c^2 - 3d$  encierra el segundo y tercer término en un paréntesis.

- a) precedido del signo "+"      b) precedido del signo "-"
- Cómo proceder para introducir un paréntesis en una expresión algebraica?

El proceso parcial aplicación de la sucesión de indicaciones en este caso deberá incluir ejercicios del tipo de los considerados en las explicaciones anteriores y cómo los siguientes:

⊕ Prueba que

$$(m+2n-5) - (-3p+6m) + (-m-n-p) - (-2n-5m+8) = 3n+2p-(m+13)$$

⊕ Sean  $A = p+q+r$ ;     $B = 2p+6q-3r$      $C = 8r-p-5q$

Demuestra que  $A - B + C = 12r - (10q+2p)$

que obligan a introducir y eliminar paréntesis precedidos de signos "+" y "-", combinan la adición y sustracción de polinomios y tienen términos con todos los signos "+", todos "-" y diferentes combinaciones de éstos.

**EJEMPLO 9.7** El trabajo con otros signos de agrupación y la eliminación de paréntesis superpuestos.

La labor realizada en el desarrollo del ejemplo anterior constituye el aseguramiento del nivel de partida para la introducción de otros signos de agrupación y el uso de paréntesis superpuestos que bien podría tratarse como parte del proceso parcial correspondiente a la aplicación, incluyendo ejercicios como los siguientes:

1. Simplifica tanto como sea posible.

$$18 - (7x^2 + 3) - \{4xy^2 + 9\} - [-2x^2y + xy^2 + 1]$$

Este ejercicio puede aprovecharse para orientar hacia el objetivo. Mediante el mismo se presentan las llaves y corchetes como otros signos de agrupación y se informa que con ellos se trabaja del mismo modo que con los paréntesis, ya sea para introducirlos o para eliminarlos. En este caso bien podrían haberse empleado sólo paréntesis, pero no siempre ocurre así.

Para motivar y continuar la orientación hacia el objetivo puede emplearse el ejercicio siguiente:

2. Sean  $A = t - r$        $B = 2r + 3t$

a) Sustituye A y B en  $E = r + B - [-2r - A]$

b) Simplifica la expresión obtenida.

La solución del inciso a) requiere del empleo de los signos de agrupación. Aquí conviene discutir con los alumnos la necesidad de emplear signos de agrupación diferentes, pues los términos que se agrupan aparecen "incluidos en otro signo de agrupación". En tales casos matemáticamente hablamos de "paréntesis superpuestos".

$$E = r + (2r - t) - [-2r - (t - r)]$$

Profesor: Hay alguna dificultad para resolver el inciso b)? Cómo podríamos proceder para eliminar signos de agrupación superpuestos? Vamos a tratar de darle solución a

este problema: Alguien tiene alguna idea?

En caso que los alumnos aporten alguna idea que no resulte buena o no aporten idea alguna, puede ser recomendable encauzar el análisis orientados por el principio heurístico de analogía.

Profesor: Cómo actuamos en el caso que no había superposición? Esto quizás pueda ayudarnos. Reflexionemos detalladamente en el proceder, Conjuntamente con los alumnos se precisan los siguientes pasos.

CUADRO 9.2

<ol style="list-style-type: none"><li>1. precisar el signo que precede al paréntesis</li><li>2. si el signo es "+", no hay cambios en los términos que incluye el paréntesis.</li><li>3. si el signo es "-", entonces los términos que se incluyen en el paréntesis cambian de signo.</li></ol>	$\square + (-\triangle + \circ) = \square - \triangle + \circ$ $\square - (-\triangle + \circ) = \square + \triangle - \circ$
---	---

Un cuadro de pizarra como el anterior puede ayudar a los alumnos a entender que un signo de agrupación se identifica con un "todo", e incluido dentro de otro signo de agrupación puede ser interpretado como un término" al que también se le mantiene o cambia el signo, en dependencia si es un "+" o un "-" quién precede al signo de agrupación que lo incluye.

Ahora se puede orientar nuevamente hacia el objetivo. Cómo podemos eliminar entonces los signos de agrupación y simplificar en el ejercicio que nos ocupa?

$$E = r + (2r-t) - [-2r - (t-r)]$$

$$= \boxed{r + 2r - t} - \left[ \triangle - 2r - \textcircled{(t-r)} \right] = r + 2r - t + \triangle + \textcircled{\phantom{(t-r)}}$$

Profesor: En este caso se eliminó primero el paréntesis exterior (de afuera) y luego el interior. Realicemos otros ejercicios.

3. Simplifica suprimiendo los signos de agrupación

a)  $3x + [x - (y + x)]$       b)  $3m - [(m-n) - \{m+n\}]$

A través de la solución de estos ejercicios se puede entonces precisar con los alumnos.

#### CUADRO 9.3

Para eliminar diferentes signos de agrupación superpuestos se puede proceder "de afuera hacia adentro" para lo cual:

1. Precisar el signo de agrupación de "afuera" (el más abarcador) y el signo que le precede, así como los términos u otras agrupaciones que una a continuación de las otras están incluidas en él.
2. Eliminar el signo de agrupación de "afuera" (el más abarcador) según se eliminan paréntesis.
3. Repetir el proceso hasta eliminar todos los signos de agrupación existentes.

Profesor: Es esta la única manera en que podemos proceder para eliminar los paréntesis?

Alumnos: Reflexionan al respecto.

Profesor: No podrían eliminarse los paréntesis de "adentro hacia afuera"? Qué se les ocurre hacer?

Los alumnos pueden ser invitados a describir el proceso de eliminación de paréntesis de adentro hacia afuera en analogía con la descripción anterior.

La realización de este trabajo con los mismos incisos a) y b) del ejercicio 3 es útil para hacer reflexionar a los alumnos sobre la posibilidad de emplear cualquiera de los dos procedimientos y decidirse por aquel que considere le resulta más fácil o conveniente. Tal idea puede completarse si se agregan al ejercicio los incisos:

c)  $-\{a^2b - [ab^2 - 3a^2b] + 2ab^2\}$

d)  $2x + [-5x - \{2y + (-3 + y) - x\}]$

### 9.3 Tareas del capítulo

1. Dados los ejercicios siguientes:

- ① a) Demuestre que para cada a, b enteros positivos se cumple:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

b) Expresa con palabras la propiedad demostrada

- ② Se pudo comprobar que un trapecio ABCD tiene doble longitud en la base menor, en la base mayor y en la altura que el trapecio PQRS. Si el área de PQRS es de 28,32 cm<sup>2</sup>. Cuál es el área del trapecio ABCD?

- ③ Resuelve y comprueba:

$$\frac{2x + 4}{x - 2} - \frac{3(x - 2)}{2x + 3} = \frac{x^2 - 52}{2x^2 - x - 6}$$

- ④ De una hoja de cartón cuadrada de 18 cm de lado, hay que hacer una caja abierta que tenga el mayor volumen posible, recortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando después los salientes como en la figura 9.

Cuál debe ser la longitud del lado de los cuadrados cortados?

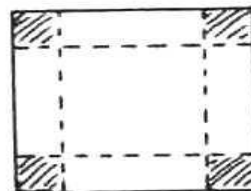


Fig. 9

A) Resuelva los ejercicios

- B) A partir de qué grado pueden plantearse estos ejercicios a los alumnos? Fundamente su respuesta
- C) Explica qué conocimientos y habilidades del trabajo con variables se utilizan en la resolución de estos ejercicios y con qué otros conocimientos y habilidades matemáticas están estrechamente relacionados?
2. Trabaja con los programas, el libro de texto y las orientaciones metodológicas de matemática para la secundaria básica y:
- a) Determina las unidades dedicadas específicamente al trabajo con variables y los objetivos fundamentales que deben lograr los alumnos en cada una de ellas. Da ejemplos de ejercicios y tareas que permiten valorar el logro de estos objetivos por los alumnos.
  - b) Explica mediante ejemplos, cómo se aplican los conocimientos y habilidades adquiridos por los alumnos en el trabajo con variables en cada una de las restantes unidades.

**Sugerencia:** Realiza esta tarea para el nivel preuniversitario.

3. Considere el sistema de clases dedicado a que los alumnos aprendan a calcular el cociente de dos términos (monomios) y de un polinomio por un término.
- a) Haga una propuesta para la dosificación del sistema de clases y una propuesta de objetivos para cada una de las clases que forman esta unidad temática.
  - b) Prepare el sistema de clases y fundamente su propuesta. Tenga en cuenta:
    - el máximo aprovechamiento de las potencialidades intelectuales de los alumnos durante el tratamiento de la nueva materia.
    - la selección, variedad y graduación de los ejercicios propuestos a los alumnos en las clases de

## fijación

NOTA: Realiza esta tarea considerando las unidades temáticas donde se traten:

- Productos y cocientes notables, descomposición en factores,
- Operaciones con fracciones algebraicas.

4. Elabore un trabajo de control para evaluar la unidad "Trabajo con variables" en el 8vo, grado. En la presentación del proyecto incluya los objetivos a evaluar, las preguntas, las respuestas y la clave para la calificación.
5. Considera el sistema de clases dedicados al cálculo algebraico en la unidad de Sistematización del 9no. grado.
  - a) Haga una propuesta de dosificación y determine los objetivos para este sistema de clases.
  - b) Proponga un sistema de ejercicios diarios para el cálculo oral, relacionados con el tema, a realizar durante aproximadamente 5 minutos al inicio de cada clase, de modo que se contribuya al mantenimiento de las habilidades y el desarrollo mental de los alumnos al tiempo que eventualmente se asegure el nivel de partida para clases posteriores.
  - c) Fundamente la selección, graduación y variedad de los ejercicios propuestos.

## 10. TRATAMIENTO METODOLOGICO DEL CALCULO CON MAGNITUDES Y VALORES APROXIMADOS.

### 10.1. Panorámica de la línea directriz "Cálculo con magnitudes y valores aproximados.

#### Primer ciclo del nivel primario

En la primera mitad de este ciclo se crean las bases para el estudio de las magnitudes y los valores aproximados. Los alumnos llegan a familiarizarse con algunas magnitudes tales como: monetarios (el peso y el centavo), de longitud (m, cm), de masa (Kg) y de tiempo (hora y minuto). Con respecto a los valores aproximados se crean las bases para el redondeo, buscando números entre 2 múltiplos de 10 ó 100.

Ya en la segunda mitad del primer ciclo se comienzan con las conversiones de unidades monetarias, de longitud y de masa; donde se amplían por ejemplo al gramo y la tonelada en las de masa y al segundo en las de tiempo. Con respecto a los dominios numéricos se introduce la coma decimal en el tratamiento de cantidades con dos unidades de medida, ejemplo: \$2,75 se lee 2 pesos 75 centavos.

El redondeo se comienza a realizar de forma intuitiva con la búsqueda de múltiplos de 10, 100 ó 1000 más cercanos al número, apoyándose en el rayo numérico.

Al finalizar este ciclo se sistematizan las unidades estudiadas, sus conversiones, el cálculo con magnitudes y problemas. El redondeo se realiza por medio de la regla: Si el orden al cual se va a redondear está seguido de 0; 1; 2; 3; 4 se redondea por defecto. Si está seguido de 5; 6; 7; 8; 9 se redondea por exceso. Esta regla no es más exacta que la del número par.

#### Segundo ciclo del nivel primario

Se utiliza el redondeo para realizar una estimación del cociente en la división. Con respecto a las magnitudes se

estudian las unidades del Sistema Internacional de Unidades (S.I.U.) de masa, longitud y superficie. También se imparten algunas medidas aún usadas en Cuba y sus equivalencias en el S.I.U. como: la onza, libra, arroba, quintal español, la pulgada y la caballería.

Se calcula el perímetro de polígonos y el área del rectángulo (por vía inductiva), así como el área total del ortoedro.

También se ejercitan cálculos y se resuelven problemas sobre medidas de tiempo. El concepto de ángulo se describe como la intersección de dos semiplanos, se estudian las unidades de medida de amplitud de ángulos (grado, minuto y segundo) y se miden ángulos en grados.

Al finalizar este ciclo se generaliza la regla para el redondeo a expresiones decimales y se comienza con el cálculo con valores aproximados, se dan los conceptos de cifras correctas y significativas, así como la regla para el cálculo con valores aproximados:

regla: "El resultado se expresa con tantas cifras significativas como el dato que menos cifras significativas tiene.  
- Los resultados intermedios se expresan con una cifra más."

Hay que señalar que la regla para la adición y sustracción no aparece en los actuales programas (con el objetivo de realizar una simplificación didáctica).

Es muy importante que el alumno reconozca cuando es que tiene que utilizar el cálculo aproximado es decir, cuando se han realizado aproximaciones por redondeo o cuando las cantidades son producto de mediciones. Por último en este nivel se estudian las unidades de volumen, partiendo del ortoedro y de la comparación con cubos unidad, este es un trabajo análogo al área del rectángulo partiendo de cuadrados unidad. Se generaliza el concepto de ángulo a: la unión o intersección de dos semiplanos.

### Nivel medio (Secundaria Básica)

Esta línea directriz tiene mucha significación en las unidades dedicadas a la geometría plana, en la determinación de perímetros y áreas de figuras planas, así como, en problemas de aplicación.

En la unidad Geometría Plana se obtienen las fórmulas para el área del paralelogramo, triángulo y trapecio a partir del concepto de figuras equivalentes, reduciendo en los 3 casos el problema dado, al área ya conocida del rectángulo.

En la unidad la circunferencia se obtiene la fórmula de la longitud de la circunferencia y el área del círculo, así como la longitud de un arco, el área de un sector y de un anillo circular.

La unidad semejanza completa el estudio de la geometría plana en ella también se encuentran problemas de perímetros y áreas aplicando el teorema de las transversales y la semejanza. También se introduce la trigonometría y las razones trigonométricas, con las cuales se comienzan a resolver problemas de resolución de triángulos rectángulos. Este es un punto muy importante de esta línea directriz, ya que el alumno, conoce un nuevo medio que le permitirá el cálculo de magnitudes auxiliares desconocidas.

Las unidades dedicadas al cálculo de cuerpos se caracterizan por estar vinculadas a unidades de geometría plana que tienen mucha relación con el cálculo de dichos cuerpos, así primero se estudian los prismas y pirámides ligados fuertemente a los polígonos y cuadriláteros. Después el cilindro, cono y esfera ligados a la circunferencia y el círculo.

En el trabajo con las tablas (cuadrados, cubos y raíces) hay que mostrarle a los alumnos que casi todos los números que aparecen en esta, son números aproximados y que por tanto tenemos que proceder mediante el cálculo aproximado

al igual que cuando este se realizaba, porque las cantidades eran producto de una medición. Si el número a determinar no aparece en la tabla por tener más cifras se debe utilizar el redondeo.

### Nivel medio (Pre Universitario).

En este nivel se continúa trabajando en esta línea directriz, pero no hay grandes aportes. Se calculan figuras geométricas planas y cuerpos, para lo cual se aplican los conocimientos de niveles anteriores y se profundiza en las vías de solución y cálculo mediante la aplicación de medios trigonométricos, así como, la aplicación de propiedades de la Geometría del espacio.

El trabajo con las tablas de las razones trigonométrica y de logaritmos se realiza de forma análoga al realizado con las de los cuadrados y raíces, donde hay también que destacar el carácter aproximado de casi todos sus elementos.

Podemos resumir de esta línea directriz los siguientes aspectos:

- En el primer ciclo del nivel primario, se realiza un trabajo propedéutico, familiarizando al alumno con diferentes magnitudes y con el redondeo.
- En el segundo ciclo se sistematiza el cálculo con unidades de medida para las magnitudes fundamentales que se estudian en la escuela, así como se introduce el cálculo aproximado mediante una regla.
- En el nivel medio (secundaria y Pre), se siguen sistematizando y aplicando el trabajo con magnitudes y se continúa con el cálculo aproximado. En especial los objetivos en estos niveles son:
  - Distinguir cuando se tiene que trabajar con el cálculo aproximado y cuando no.

- ⊙ Reconocer mediante ejemplos el por qué cuando el cálculo se realiza con números aproximados es más exacto el trabajo con la regla del cálculo aproximado.
- ⊙ Desarrollar habilidades en la estimación, medición y cálculo aproximado de los resultados.
- ⊙ Utilizar el trabajo con las magnitudes y sus reducciones de unidades en el proceso de solución de problemas.
- ⊙ Apreciar la vinculación de los contenidos de esta línea directriz con otras disciplinas como: Educación Laboral, Física, Química, etc.
- ⊙ Representar bocetos y gráficos mediante la utilización de la estimación o medición de los datos.

Hay que resaltar que no existe en la escuela ninguna unidad de enseñanza en específico dedicada a esta línea directriz.

## 10.2. Puntos metodológicos esenciales.

### 10.2.1 Tratamiento de la estimación y la medición

En la enseñanza primaria se desarrolla el cálculo aproximado del resultado mediante la estimación, la cual se entiende por: la determinación de valores aproximados para representantes de magnitudes sin utilizar instrumentos de medición. La estimación se realiza comparando con objetos, los cuales conocemos su medida, por ejemplo el alumno debe conocer que una cuadra promedio es de 100 m, que una manzana es aproximadamente una ha, que el tiempo en pronunciar un número de 3 cifras es un segundo, etc.

La estimación no sólo tiene objetivos docentes, sino que prepara al alumno para enfrentarse a problemas de la vida por Ejemplo: Estimar velocidades de autos; para cruzar la calle, estimar masas para comprar en la tienda, etc. La estimación debe ser comparada con el cálculo para que sirva de control y para que fije esta mediante la compara-

ción con valores exactos.

Para realizar la estimación en el nivel medio hay que transformar o construir problemas de aplicación relacionados con el cálculo de perímetros, áreas o volúmenes, Ejemplo. Calcular la capacidad del aula, área de la superficie de la mesa de trabajo del alumno, etc.

Mediante una buena estimación se pueden hacer bocetos que sirvan como medio heurístico por Ejemplo construir un ángulo de  $120^{\circ}$  (sin semicírculo). El profesor cuando realiza bocetos en la pizarra debe de dar la información de porqué se hace de esa forma y no dejar que los alumnos reproduzcan mediante el método de ensayo error.

La medición es la determinación de valores aproximados utilizando instrumentos de medición.

Decimos que es aproximado por varias razones:

- Por la precisión de los instrumentos de medida.
- Por el proceso de medición (condiciones atmosféricas, error de paralaje)
- Por la propia naturaleza de los objetos a medir.

Si se quieren mostrar estas razones, se pueden desarrollar actividades como las siguientes:

Medir un segmento con una cinta de las usadas para la costura, que son de tela, estas se estiran, si hacemos fuerza además, no están graduadas en milímetros. Después de realizar la medición con la cinta, la hacemos también con una regla graduada en milímetros y realizamos la comparación.

Para la segunda se puede poner a medir el ancho del aula: con el mismo instrumento a varios alumnos. Se comprobará que los resultados no son iguales.

Para el tercer aspecto se puede hacer una comprobación experimental en el aula con objetos de una misma clase Ej. Medir el largo de una libreta.

Los alumnos de la secundaria en muchas ocasiones aprenden a trabajar formalmente, es decir, ellos resuelven algunos problemas, pero si se les brinda una figura por ejemplo un paralelogramo y le pedimos el área, obteniendo los datos por medición, no reconocen los datos que tienen que medir o no saben como hacerlo.

Por esta razón es recomendable desarrollar actividades con hojas de trabajo en las cuales se dan las figuras planas y se les pide el perímetro o áreas. En estos ejercicios se puede o no aclarar el tipo de figura, si no se hace el alumno primero tiene que comprobar a qué clase pertenecen.

En el cálculo de cuerpos se puede hacer algo similar con cuerpos plásticos u otro material de los que cuente la escuela.

Con respecto a la medición queremos destacar un problema que para muchos alumnos y profesores no está claro y es la utilización en los datos de cantidades, por ejemplo 2,0 cm. Estos datos se toman así para que el trabajo con las cifras significativas sea más cómodo. Pero qué quiere decir 2,0 cm y que diferencia tiene con 2 cm: 2,0 cm quiere decir que en el proceso de medición el instrumento tenía precisión hasta los mm y que el error que se comete es en las décimas de mm; por el contrario 2 cm nos dice que el error está en los mm, por esta razón la primera medición se ha realizado con más exactitud que la segunda.

#### 10.2.2. Actividades para apoyar la fundamentación de la regla del cálculo aproximado.

Hallar el área del rectángulo de lados  $a = 14,3$  cm  
 $b = 2,7$  cm

2,7 puede ser un valor aproximado de  $\begin{cases} 2,65 \\ 2,74 \end{cases}$

14,3 puede ser un valor aproximado de  $\begin{cases} 14,25 \\ 14,34 \end{cases}$

$$\begin{array}{r}
 2,65 < b < 2,74 \\
 \hline
 14,25 < a < 14,34 \\
 \hline
 37,7625 < a \cdot b < 39,2916
 \end{array}$$

$$a \cdot b = 38,61$$

aquí se puede apreciar que solamente hay 2 cifras que son exactas por lo que se debe aproximar en las decenas, es decir  $a \cdot b = 39 \text{ cm}^2$

Esto también hay la posibilidad de visualizarlo mediante

14,3 ?	
<u>  x 2,7 ?</u>	
286 ??	El signo ? quiere decir que esa
100 1?	cifra es desconocida
<u>  38 ???</u>	

### 10.2.3 Áreas de figuras geométricas y volúmenes de cuerpos.

La determinación del área del rectángulo en el segundo ciclo de la enseñanza primaria, se hace por un procedimiento inductivo consistente en la descomposición de varios rectángulos de diferentes formas en cuadrados unidad y llegando a partir de estos objetos a la generalización de la fórmula. De forma análoga también en este nivel se busca el volumen del ortoedro. En el tratamiento de estas fórmulas se trabaja de forma intuitiva las 3 condiciones de la medida.

- aditividad: La medida de la figura o del cuerpo es igual a la suma de las medidas de las figuras o cuerpos parciales.
- Invarianza respecto a movimientos: a figuras congruentes les corresponde la misma medida.
- Está normada: El cuadrado de lado de longitud 1 le corresponde la medida 1.

Hay que dejar claro que solamente el concepto de área es

aplicable a figuras planas cerradas. Ejemplo poligonales cerradas, a esta idea se llega presentando ejemplos y contra ejemplos de figuras geométricas.

En este nivel se comienza de forma muy simple el área de figuras compuestas, descomponiéndola en figuras conocidas, esto crea las bases para la obtención, en este mismo nivel del área total del ortoedro al realizar su desarrollo. Con este concepto y con la forma ventajosa para la determinación del área total se crean las bases para el concepto de figuras equivalentes en la secundaria.

#### 10.2.4 Superficies equivalentes

El trabajo realizado en el punto anterior puede ser retomado por los profesores de la secundaria para lograr un nivel de partida para elaborar el concepto de figuras equivalentes. Esto se realiza tomando como base el desarrollo de un ortoedro de 2 formas distintas.

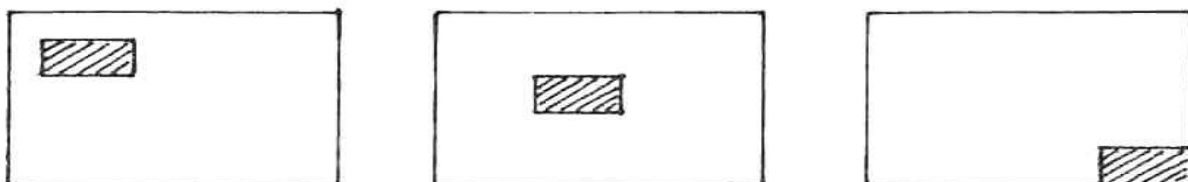
Por ejemplo:



- Las superficies congruentes tienen la misma área (forma ventajosa)
- Se han realizado 2 desarrollos diferentes del ortoedro y por descomposición y adición se llega a que tienen igual área.

Faltaría la tercera condición para llegar al concepto y se puede partir del siguiente problema.

En qué patio hay más espacio libre si se pone un banco en las distintas posiciones indicadas en la figura



Esto se puede lograr con láminas de cartulina en que se presente un rectángulo, y que se le suponga el otro rectángulo (banco) en distintas posiciones. Con el mismo objetivo podemos partir de comparar las áreas 1 y 2 de la figura



Si queremos comparar las áreas 1 y 2 podemos agregar la sup. 3 a ambas y se forman figuras congruentes.



Entonces retomando los medios vistos los alumnos deben llegar a una definición aproximada.

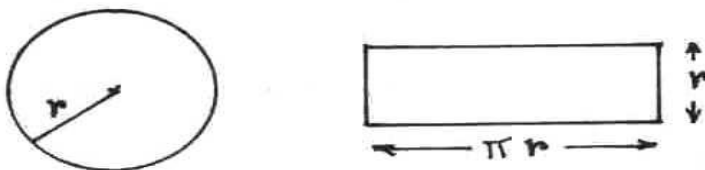
Dos superficies son equivalentes si para ellas se cumple.

- son iguales
- se pueden descomponer en el mismo número de superficies iguales dos a dos
- se pueden completar mediante el mismo número de superficies iguales dos a dos para obtener superficies iguales

Esta tercera propiedad no se hace necesaria para la deducción de las fórmulas de las áreas de las figuras que se tratan en la unidad. Pero si es la base para el procedimiento de sustracción de áreas en la determinación de áreas sombreadas.

Después de visto el concepto se llega a la conclusión que las figuras equivalentes tienen igual área. El profe-

Por lo tanto, debe saber que el recíproco no se cumple, pues un rectángulo y un círculo pueden tener la misma área y no ser equivalentes.



10.2.5. Fórmulas para el área de figuras planas.

Para la obtención de las fórmulas de las áreas se trabaja con el principio heurístico de reducción a un problema conocido, en el texto se hace reduciendo en los casos del paralelogramo, triángulo y trapecio el área conocida de rectángulo.

Nivel de partida: Área del rectángulo, elementos del rectángulo y del paralelogramo, concepto de figuras equivalentes, habilidad en la demostración de congruencias de triángulos.

Motivación: Puede ser extra matemática por ejemplo hallar el área destinada a pasto de terreno en forma de paralelogramo.

Orientación hacia los objetivos: Buscar una fórmula para determinar el área del paralelogramo partiendo de sus elementos (lados, altura etc.)  
Preguntar como son las áreas de figuras equivalentes.

Objetivo parcial: Buscar un rectángulo equivalente al paralelogramo.

Condición: Que tengan elementos comunes para poder relacionar uno con el otro.

Se puede partir de vías que no nos lleven a una solución por ejemplo:



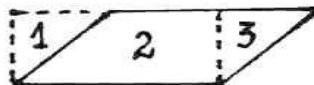
El rectángulo formado es mayor que el paralelogramo.

Este rectángulo tiene la misma altura que el paralelogramo pero las bases son diferentes.



En este caso el rectángulo es menor.

Los alumnos solos deben llegar a la construcción



De esta forma coinciden las bases y las alturas.

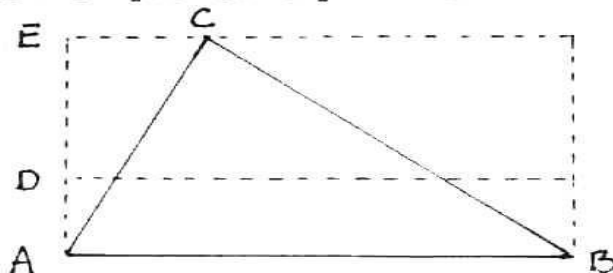
Ya tenemos la idea ahora hay que concretar las condiciones planteadas en el objetivo. Debemos probar que son equivalentes.

El rectángulo se puede descomponer en las superficies 1 y 2 y el paralelogramo en las 2 y 3. Como la figura 2 coincide en las 2 figuras tendremos que probar que la figura 1 y la figura 3 son congruentes. Esta demostración se puede realizar verbalmente y dejar su formalización como tarea.

Por último se busca la fórmula utilizando las variables que están en relación con la figura inicial.

Para el caso del triángulo se trabaja de forma análoga.

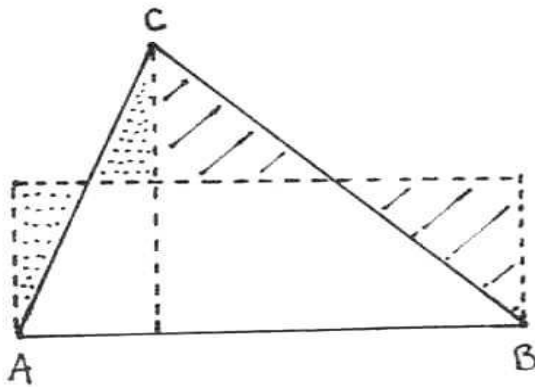
Se destacan los elementos del triángulo, lados, altura otros (recordar que cualquier lado se puede tomar como base).



Primero probamos con rectángulos de base AB y de alturas AD o AE. El alumno ve a simple vista que en un caso es menor el área y en el otro mayor.

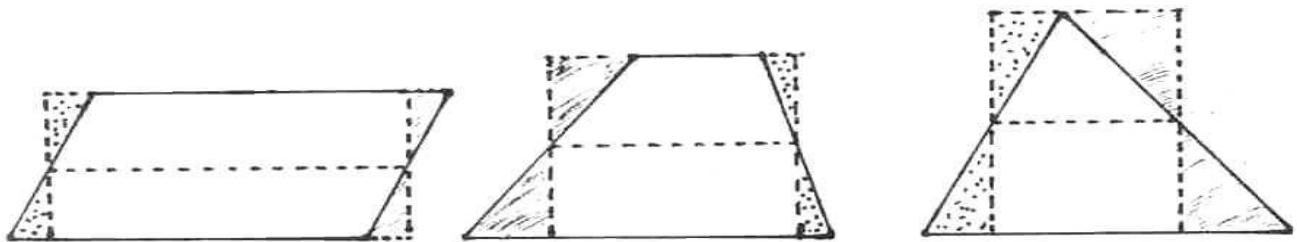
Ahora el alumno está en condiciones de llegar sólo a que la altura del rectángulo que se tome debe ser la mi-

tad de la altura del triángulo.

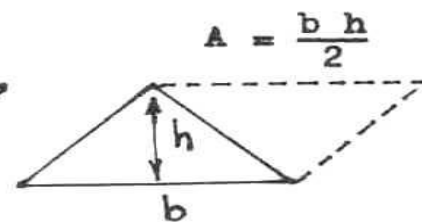
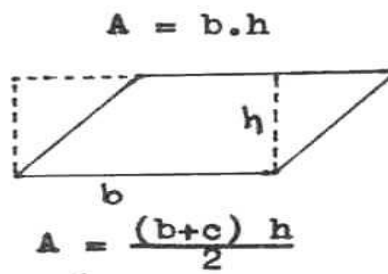
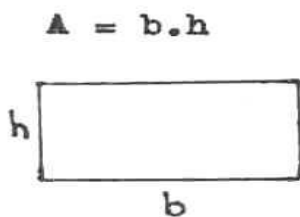


Si la altura del rectángulo coincide con la del triángulo ¿Cómo son sus áreas? ¿Cómo debemos considerar entonces la altura del rectángulo? En este caso queda una parte del área del triángulo sin cubrir por el rectángulo y una parte del rectángulo que no cubre el triángulo ¿Qué altura debería tener el rectángulo para que estas áreas fueran iguales?

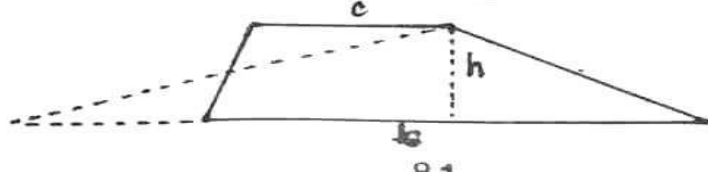
Otra vía para la obtención de las fórmulas es basándonos en el concepto de paralela media.



Otra variante es el procedimiento lineal que es obtener las fórmulas partiendo de la anterior, tiene la ventaja que se fijan las fórmulas de las otras.



$A = \frac{(b+c) \cdot h}{2}$



### 10.2.6. Tratamiento del área total del cono.

Para las áreas laterales y totales se trabaja de forma análoga al área total del ortoedro, con el desarrollo del cuerpo y la aditividad.

#### Nivel de partida

El concepto fundamental es la suma de las áreas de las caras y bases, así como el cálculo ventajoso en el caso de existir caras iguales.

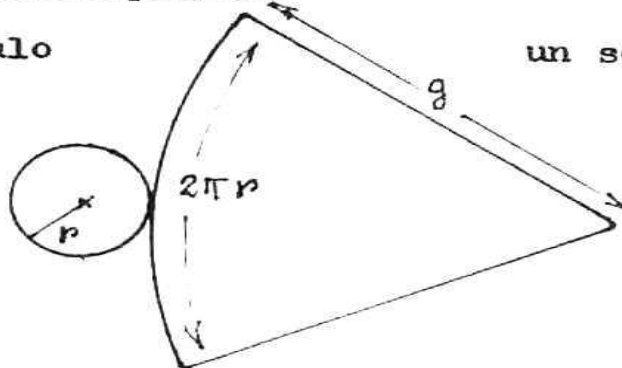
Otros aspectos son: el área del sector circular, la longitud de un arco y el área del círculo. Aunque si es necesaria la reactivación se recomienda se realice de forma implícita.

La motivación y orientación hacia los objetivos se puede realizar de forma conjunta en base a las analogías con todos los cuerpos estudiados anteriormente.

Medios de enseñanza: Cono de cartulina cortado por una generatriz.

Los alumnos realizan independientemente el desarrollo y deben llegar al reconocimiento de las figuras conocidas en que se ha descompuesto.

un círculo



un sector circular

Se pregunta por la fórmula del área del círculo y se llega al área de la base.  $A_B = \pi r^2$

Para determinar la fórmula del área lateral primero hay que partir de cuales son los elementos conocidos del cono, generatriz, base, radio de la base y altura.

Objetivo: Buscar fórmula del área del sector circular en

función de algunos de los elementos del cono. (No tienen que ser todos como es con el área de la base.

Se pregunta por la fórmula del área del sector.

$$\frac{A_s}{A_c} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

$A_s$ : Area sector

$A_c$ : Area círculo

Hay que distinguir muy bien que cuando nos referimos al  $A_c$  este no tiene radio  $r$  sino radio  $g$

$$(1) \frac{A_s}{\pi g^2} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

Pero en esta proporción desconocemos  $\alpha^\circ$ , luego tenemos que seguir buscando relaciones. Preguntemos que si de este sector circular podemos buscar alguna otra relación con los elementos del cono.

Se puede dar el impulso: "La longitud del arco"

$$\frac{b}{L} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ}$$

$$(2) \frac{2 \pi r}{2 \pi g} = \frac{\alpha^\circ}{360}$$

Sistematizar, mediante las analogías y diferencias existentes entre  $b$  y  $L$  en este caso en función de los elementos del cono.

También en esta proporción se desconoce  $\alpha^\circ$  Podemos despejar en (2) y sustituir (1) (Si los alumnos han dado sistemas).

Si no aplicando carácter transitivo entre (1) y (2)

$$\frac{A_s}{\pi g^2} = \frac{2 \pi r}{2 \pi g}$$

$$A_s = \pi r g$$

Luego

$$A_t = A_L + A_B$$

$$A_T = \pi r^2 + \pi r g$$

### 10.2.7. Tratamiento de la obtención de fórmulas de volumen de cuerpos.

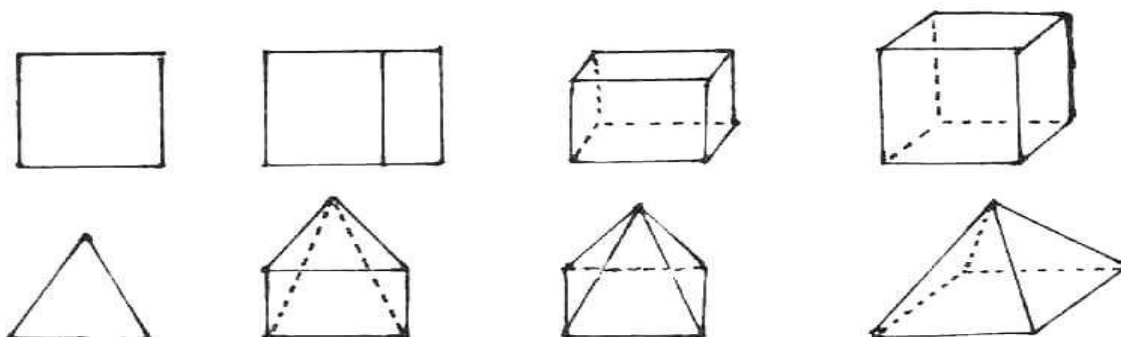
Antes de comenzar con el tratamiento de la obtención de las fórmulas queremos señalar algunas recomendaciones para la representación de cuerpos.

En las representaciones se observan los siguientes niveles.

- Trabajos con cuerpos (materiales) figuras tridimensionales
- Trabajo con maquetas donde se puedan visualizar elementos como la altura en el caso del cono.
- Trabajo con dibujos en perspectiva.

Con respecto a la representación en perspectiva, es sólo, para que los alumnos vayan creando habilidades en realizar esbozos.

No se debe dar la perspectiva caballera como una regla para realizar las representaciones, sin que el alumno valore que esta es una forma de realizarla con estética y comodidad. Para esto se pueden llevar 2 cuerpos. Ejemplo, un cubo y una pirámide y una lámina con varias representaciones de esos cuerpos y que sean los propios alumnos los que escojan cuál es la que más le gusta y cuál nos brinda más información del cuerpo.



En el caso de la proyección paralela oblicua se trabaja de forma análoga.

En la actualidad para el tratamiento de las fórmulas para el volumen hemos renunciado a la aplicación del Teorema de Cavalieri, ya que tiene un alto grado de abstracción y la formalización de la deducción de las fórmulas por esta vía se hace muy complicada, para el grado de madurez del alumno.

El volumen del prisma se obtiene de forma intuitiva en la comparación con el ortoedro ya conocido por los alumnos.

Para el volumen de la pirámide se les pide a los alumnos qué elementos debe tener el prisma con el que se quiere hacer la comparación. Para esto se deben llevar varios prismas de distintas bases y alturas. Por analogía con el trabajo de las áreas los alumnos deben llegar a que es el que tiene la misma base y la misma altura.

Se pregunta cuál es mayor y cuántas veces, entonces se realiza el experimento de vertir la arena contenida en la pirámide 3 veces en el prisma.

A la fórmula del cilindro se lleva intuitivamente en analogía con el prisma. El procedimiento para el volumen del cono es también análogo a la pirámide.

#### 10.2.8. Tratamiento de ejercicios de cálculo de áreas o volúmenes y problemas.

Acciones a tener en cuenta en los problemas de cálculo de perímetros, áreas o volúmenes.

1. Realiza un boceto de la figura (cuerpo), si no es dado.
2. Representa los datos en la figura, introduce variables auxiliares si hacen falta.
3. Descomponer la figura dada en figuras (cuerpos) conocidos y que tengan relación con los datos. En este caso aplicar la adición, sustracción o su combinación.

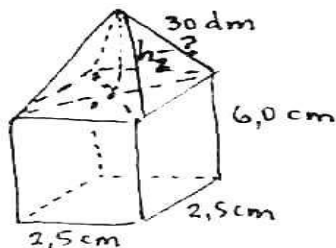
4. Utilización de la vía esquema de Descartes (Trabajo hacia adelante y hacia atrás)

Si lo pedido no se obtiene directamente de los datos, utilizar variables auxiliares que relacionen los elementos de las fórmulas pedidas, con otros elementos de la figura (no tienen que ser los datos) y que estos se puedan a su vez relacionar con las magnitudes dadas.

5. Las magnitudes intermedias halladas se deben representar en el boceto.
6. Como medios para encontrar la vinculación entre lo pedido y los datos son frecuentes
- . Teorema de Pitágoras
  - . Utilización de la semejanza o teorema de las transversales
  - . Utilización de propiedades de la geometría del espacio
7. Conversión de unidades, si hace falta, tener en cuenta la cantidad de cifras significativas del resultado antes de hacer las conversiones.
8. Trabajar con las reglas del cálculo aproximado (si es necesario) y tener en cuenta las unidades en el cálculo
9. Comprobar las operaciones, comparar con la estimación y formular la respuesta.

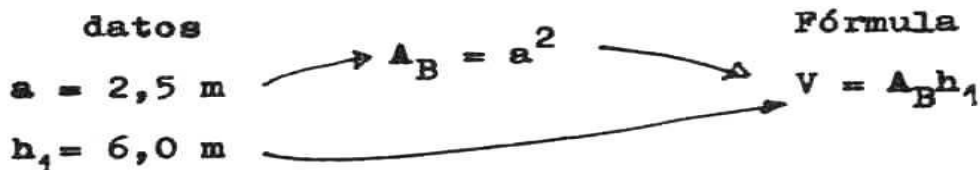
Ejemplo. Un monumento está formado por un prisma de base cuadrada de 2,5 m de lado de la base y 6,0 m de altura y por una pirámide apoyada sobre la base superior del prisma de modo que ambas bases coinciden. Halla el volumen del monumento si sabemos que una arista lateral de la pirámide mide 30 dm

Boceto

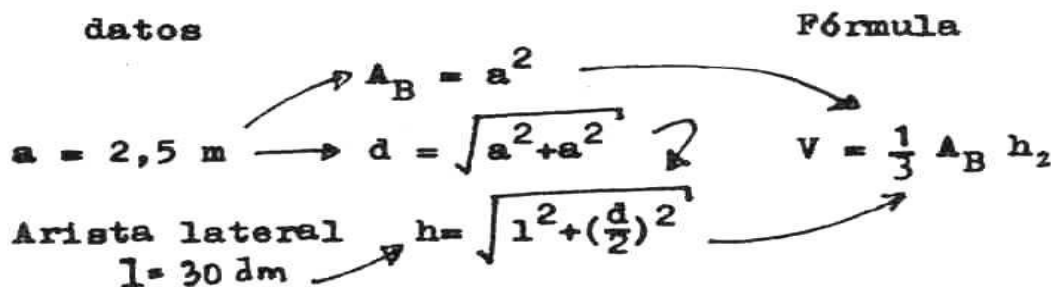


Se descompone en un prisma más una pirámide de base cuadrada.

**Volumen Prisma**



**Volumen de la Pirámide**



Nos falta la altura y no está en los datos. Buscamos variables auxiliares que establezcan el nexo entre datos y el objetivo pedido medio a utilizar Teo. de Pitágoras.  
 1er. variante: Resolver el triángulo rectángulo formado por la altura, la diagonal de la base y la arista lateral.

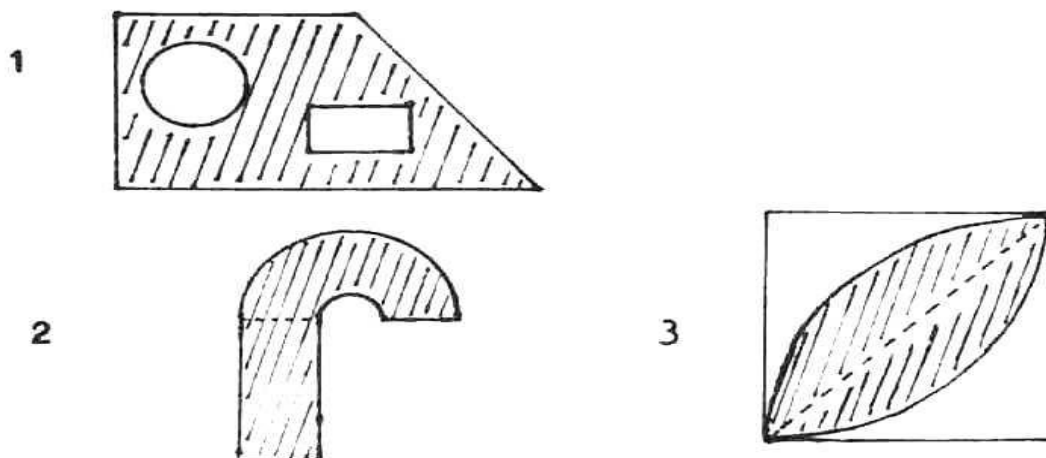
2da. variante: Resolver el triángulo rectángulo formado por la altura de la pirámide, la apotema del cuadrado y la altura de una cara. (Esta vía hace buscar primero el cálculo de la altura de la cara en función de la arista lateral y la mitad de la arista de la base) lo cual la hace más compleja.

Si en el problema se varía por ejemplo no dando la longitud de la arista de la pirámide sino que el ángulo diedro entre una cara y la base es de  $30^\circ$ . Entonces los medios a utilizar para las magnitudes intermedias serían los conceptos de la geometría del espacio y la trigonometría.

Por último queremos señalar que hay acciones que se pueden desarrollar sin llegar a resolver el problema completo, sino que nuestro objetivo solamente puede ser que el alumno desarrolle habilidades en la utilización de una regla heurística. Por ejemplo: En las ejercicios de áreas

sombreadas o cuerpos compuestos se puede ejercitar solamente, cual sería la descomposición de la figura y la estrategia a seguir.

Por ejemplo se dan varias figuras como



El objetivo que se persigue en 1 es que el área de trapecio se le resta la suma de la del círculo y el rectángulo.

En 2 descomponer en un rectángulo (por la línea de puntos) y un semianillo circular. Además se piden las ideas para el área del semi-anillo.

En 3 trazar la línea discontinua que divide el área pedida en 2 segmentos circulares y estos se determinan por el área del sector menos la del triángulo.

Antes de finalizar el capítulo presentemos dos problemas aún no resueltos en esta línea directriz.

1ro. En los textos de Matemática se ponen las unidades de magnitud al finalizar el ejercicio o en la respuesta. En los textos de Física se trabaja desde la sustitución con las unidades lo que les representa una vía de verificación dimensional de los resultados.

En nuestra opinión al comienzo del trabajo se debe exigir el trabajo con las unidades tal y como hacen los físicos.

2do. Las reglas del cálculo aproximado no son utilizadas en otras disciplinas que trabajan con magnitudes como Química y Física.

Si revisamos los textos de estas disciplinas notaremos que no se usa la regla o no está bien utilizada (esto en el caso de utilizar la notación científica, pero sin tener en cuenta las cifras significativas).

Por esto es una tarea de los matemáticos influir en otras cátedras para lograr la uniformidad del trabajo.

### Tareas del capítulo

1. Planificar una actividad docente con el objetivo de que el alumno realice la estimación y medición de objetos del aula o su cercanía.
2. Elaborar una actividad que permita valorar la regla del cálculo aproximado para la adición (en estos momentos no se trabaja en la escuela) y las ideas para su tratamiento metodológico.
3. Elaborar una regla heurística especial para resolver problemas de áreas sombreadas o cálculo de cuerpos.
4. Escoger un problema del nivel (secundaria básica), donde se utilice la regla del punto 3 y realizar su tratamiento metodológico.
5. Análogo al punto 4, para un ejercicio de geometría del espacio del pre universitario donde se apliquen las propiedades de esta y se utilice la trigonometría entre otros medios.
6. a) Confeccionar un problema vinculado con la práctica donde se utilicen unidades de medida usadas en Cuba que no sean de SI. y que para su solución se tengan que determinar primeramente al menos una variable auxiliar.  
b) Resolverlo y argumentar los pasos metodológicos.
7. Analizar entrelazamiento de esta L. Directriz con las restantes y realizar una exposición de la vinculación de la línea directriz, trabajo con magnitudes y cálculo

aproximado con las prácticas sobre medición del capítulo 3 Física grado 12.(2da. parte).

8. a) Haga un estudio de las unidades de enseñanza que se tratan en la secundaria básica y determine en cuáles se trata el cálculo de áreas y volúmenes (precise las figuras y cuerpos objeto de estudio).
- b) Seleccione un sistema de clases sobre este contenido en uno de los grados y realice la preparación de las mismas (Tome en consideración el contenido del capítulo 15).

## CAPITULO 11. TRATAMIENTO METODOLOGICO DE LA GEOMETRIA Y LA TRIGONOMETRIA.

El origen de las primeras nociones geométricas y su estudio sistemático, se pierde en la profundidad de la historia de las civilizaciones primitivas más avanzadas. Testimonios materiales de antes de nuestra era corroboran que los primeros conceptos geométricos surgieron en la actividad práctica del hombre y atravesaron un largo período de perfeccionamiento.

Así, por ejemplo, el papiro matemático de Rhind contiene problemas que para resolverlos requieren del cálculo de áreas de figuras planas, de la determinación de las dimensiones de una pirámide o de los volúmenes de paralelepípedos y cilindros. Análogamente, en otras culturas muy antiguas como la babilónica, la china o la hindú, se han hallado pruebas del surgimiento temprano y el carácter práctico de las primeras nociones geométricas.

La construcción teórica de la Geometría, sin embargo, tiene sus orígenes en las escuelas científicas y filosóficas de la Grecia Antigua. Los trabajos monumentales de Tales, Pitágoras, Euclides y tantos otros, trascendieron su época de manera tan significativa que la referencia a su obra es obligatoria en cualquier curso de Geometría. Con ellos, se alcanzó un nivel de abstracción de los conceptos geométricos cualitativamente superior, se introdujeron y perfeccionaron los métodos de demostración y fueron escritos libros especiales en los cuales se exponían con autonomía y sistematicidad los fundamentos de la Geometría y sus aplicaciones: con Descartes y su método de coordenadas la Geometría encontró nuevos horizontes; después de Lobachevski y Bolyai surgieron las geometrías no euclidianas y tuvo que hablarse de sistemas geométricos en plural; la utilización de los conceptos y métodos del cálculo infinitesimal condujeron al surgimiento y desarrollo de la geometría diferencial; el interés creciente por

el estudio de las propiedades de figuras que se mantienen invariantes después de una transformación, ha dado lugar a ramas de impetuoso desarrollo como la geometría proyectiva.

De todo este magnífico universo de teorías y sus aplicaciones, sólo es posible dar unas tenues pinceladas en las mentes de los escolares (las indispensables para crear sólidas bases generales y avivar el interés hacia el estudio de las ciencias exactas). Significa desde luego un gran reto para los profesores, lograr que después de esta simplificación la Geometría no se convierta en una serie de definiciones complicadas y de interminables cadenas de deducciones de hechos que son más evidentes antes que después de ser demostrados. El éxito está condicionado por el dominio que estos tengan de los contenidos de la geometría escolar y de la metodología de su enseñanza, pero también por el despliegue de su ingenio y creatividad.

### 11.1 Realización de la línea directriz Geometría

Mediante la enseñanza de la Geometría se deben formar en los alumnos ideas claras sobre los objetos geométricos del plano y del espacio, así como sobre las relaciones entre ellos.

Con este fin, deben tratarse en la escuela una cantidad suficiente de figuras planas y cuerpos, de forma tal, que los alumnos sean capaces de describir (definir) los objetos geométricos correspondientes y de explicar (fundamentar) las relaciones entre ellos, en especial aquellas que son esenciales para comprender la estructura de la recta, del plano y del espacio.

El curso de Geometría en la escuela cubana, abarca complejos de materia que se suceden en los distintos grados de la enseñanza primaria, media y preuniversitaria. En ocasiones, los contenidos geométricos se tratan en unidades especiales, esta circunstancia sin embargo no debe conducir a un divorcio entre las clases de geometría y las de aritmética o álgebra.

Para diseñar un curso de Geometría pueden seleccionarse diferentes variantes. Estas variantes pueden diferenciarse por el sistema de axiomas escogidos, pero también por el orden en que se presentan los conceptos o las proposiciones, por la variedad de procedimientos de trabajo, por la calidad de los ejercicios que se realicen, entre otros factores.

De manera que, para dirigir correctamente la enseñanza de la Geometría en cada momento, el profesor de matemática debe tener ineludiblemente una visión total de la materia elaborada con anterioridad e información con respecto a la disposición de los contenidos subsiguientes.

En la realización de la línea directriz "Geometría" en la secundaria básica y en el preuniversitario de la escuela cubana, se trabajan los distintos contenidos desde el punto de vista metodológico siguiendo la misma orientación general:

- Definir de conceptos que el alumno conoce de manera intuitiva desde grados anteriores.
- Estudio de teoremas y sus demostraciones, así como de las relaciones que establecen nuevas propiedades, empleando diferentes procedimientos especiales de demostración y la realización de ejercicios portadores de nueva información.
- Trabajo en la solución de complejos de ejercicios para fijar el contenido, que incluye problemas de cálculo, construcción y demostración convenientemente estructurados para lograr la sistematización de los conocimientos esenciales.
- Vínculo de los conocimientos aritméticos, geométricos y algebraicos que poseen los alumnos, en problemas propios de la Geometría y problemas prácticos de carácter geométrico, así como en función de la visualización y comprensibilidad de los conocimientos aritméticos y algebraicos.

En la selección del sistema de métodos de enseñanza que se utilicen para el tratamiento del contenido, es necesario que se estimule constantemente el trabajo intelectual de los alumnos.

El cuadro 11.1 recoge los objetivos y contenidos de la enseñanza de la Geometría, de acuerdo con la variante escogida para la educación general en nuestro país.

Cuadro 11.1

Ciclos	Objetivos fundamentales	Contenidos principales
Propedeú- tico (1ro a 4to grado.	Adquisición de conocimientos y capacidades relacionadas con los conceptos geométricos y su descripción, así como el desarrollo de habilidades en el trazado y construcción de figuras geométricas.	Familiarización con las figuras y los cuerpos elementales, descripción de sus propiedades. Puntos, rectas, segmentos, semirectas, relaciones de posición, triángulos, cuadriláteros, circunferencia y círculo. Planos y semiplanos. Angulos. Ortoedro, cubo, pirámide y cuerpos redondos. Igualdad de segmentos y de ángulos.
Segundo ciclo de la ense- ñanza primaria (5to y 6to gr.)	Adquisición de conocimientos y capacidades relacionadas con los conceptos geométricos y sus definiciones. Desarrollo de habilidades en el cálculo geométrico y la aplicación de sucesiones de indicaciones para las construcciones.	Profundización de los conceptos y propiedades de las figuras y cuerpos geométricos elementales. Igualdad y movimiento. Reflexión, traslación y simetría central. Relaciones entre ángulos, ángulos entre paralelas. Triángulo, relaciones entre lados, entre ángulos y entre lados y ángulos.

Ciclos	Objetivos fundamentales	Contenidos principales
Secundaria Básica (7mo-9no. grado)	Adquisición de conocimientos y capacidades relacionadas con los conceptos geométricos y sus definiciones. Aplicación de las transformaciones geométricas fundamentales y sus conocimientos aritméticos, algebraicos y trigonométricos a la resolución de ejercicios y problemas.	Perímetros de polígonos, área del rectángulo y volumen del ortoedro. Representación de puntos en el primer cuadrante de coordenadas.  Igualdad de triángulos, teoremas sobre igualdad de triángulos, construcciones de triángulos. Rectas notables de un triángulo, propiedades. Cuadriláteros, propiedades. Circunferencia y círculo sus elementos. Teoremas sobre ángulos en la circunferencia. Polígonos regulares. Representación de puntos y rectas en un sistema de coordenadas rectangulares. Teoremas de las transversales, aplicaciones. Similitud de polígonos, similitud de triángulos, teoremas, aplicaciones. Homotecia, propiedades. Grupo de teoremas de Pitágoras, razones trigono-

Ciclos	Objetivos fundamentales	Contenidos principales
		métricas en el triángulo rectángulo, aplicaciones.
Preuniversitario (10mo.-12mo. grado)	Profundización y sistematización de los conocimientos geométricos elementales. Aplicación de los métodos trigonométricos y analíticos en el estudio de las figuras planas y cuerpos.	Razones y funciones trigonométricas, cálculo en un triángulo cualquiera, aplicaciones a la Geometría plana. Ecuación de la recta en el plano y en el espacio. Vectores, operaciones entre vectores. Secciones cónicas, sus elementos, sus ecuaciones y representación gráfica. Relaciones entre rectas y planos, relaciones entre planos. Poliedros regulares.

### 11. 2 Formación y asimilación de los conceptos de congruencia y movimiento

Las transformaciones geométricas ocupan un lugar destacado en la enseñanza de la Matemática. En el caso de los movimientos en el plano, se exige de los alumnos el dominio de sus propiedades fundamentales, de manera que puedan emplearlas en la resolución de ejercicios de cálculo de magnitudes, construcción y demostración.

La introducción relativamente temprana (en la escuela primaria) del concepto de movimiento y el estudio de sus propiedades crea condiciones para familiarizar a los alumnos con el método de las transformaciones geométricas y

disponer de un recurso teórico de inapreciable valor para la fundamentación de resultados y de algoritmos de solución.

Existen en lo fundamental dos vías metodológicas diferentes para introducir los conceptos de movimiento y congruencia (o igualdad geométrica), atendiendo al orden de precedencia entre estos en el curso escolar. Una de estas vías se remonta a Euclides; en ella, los movimientos y sus propiedades constituyen el punto de partida y la congruencia aparece como un concepto derivado (figuras que se pueden superponer mediante un movimiento, son congruentes). La otra vía está asociada a los trabajos de Hilbert y consiste en introducir como concepto básico el de congruencia, definiendo después como derivado de aquel el concepto de movimiento.

En las consideraciones del presente epígrafe se sigue la segunda vía mencionada. Esta orientación permite en clases una introducción más simple del concepto de congruencia, que parte de las nociones intuitivas obtenidas por los alumnos a través de su experiencia práctica en la observación de objetos del mundo que les rodea.

Los alumnos comienzan a familiarizarse con el concepto de congruencia desde el primer ciclo. En diversas situaciones aprenden a reconocer figuras iguales: segmentos, polígonos, lados de polígonos, radios de una misma circunferencia y otras figuras conocidas. En el segundo ciclo se parte del concepto de congruencia que los alumnos han fijado en grados anteriores; ellos deben comprender ahora, que para comprobar que dos figuras planas son iguales, basta "mover" una de ellas hasta hacerla coincidir con la otra.

Un detalle importante de esta manera de proceder radica en que el concepto de movimiento se introduce antes que sus casos particulares (reflexiones, traslaciones y rotaciones). Se denomina entonces movimiento, toda correspon-

dencia entre los puntos del plano mediante la cual:

- a) Cada punto del plano tiene exactamente un punto correspondiente o imagen.
- b) Una figura y su imagen son iguales.

Dicho de otra manera: Los movimientos del plano son las transformaciones de éste que conservan las distancias entre los puntos.

### Repaso y sistematización de las propiedades de los movimientos

El estudio de la Geometría Plana en la secundaria tiene como premisa un dominio adecuado por los alumnos de los movimientos y sus propiedades. Estos deben ser capaces de construir imágenes de figuras sencillas (segmentos, rectas, ángulos, triángulos, cuadriláteros y circunferencias) por los movimientos estudiados, además de reconocer y aplicar sus propiedades en ejercicios variados.

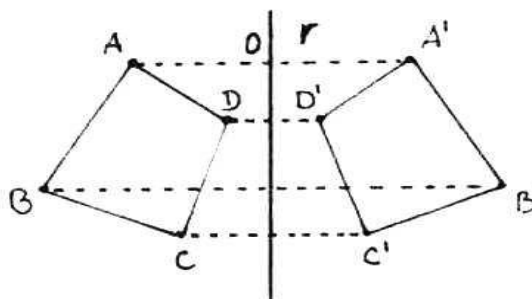
A continuación serán resumidas las propiedades de los movimientos que deben fijar los alumnos al iniciarse el ciclo de secundaria básica. Con la presentación de estas en esquemas, se sugiere un recurso para su sistematización.

#### Cuadro 11.2

##### **REFLEXION**

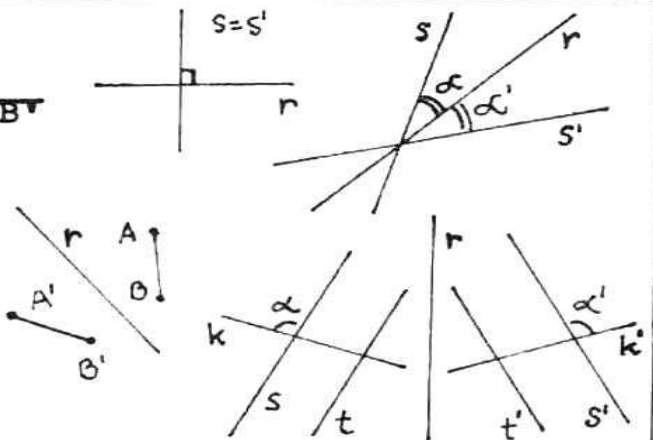
- A' es la imagen de A.
- A es el original de A'.
- r: eje de reflexión.
- r es la mediatriz del segmento determinado por un punto cualquiera y su imagen:

$$\overline{AA'} \perp r, \overline{AO} = \overline{OA'}$$



**Propiedades de la Reflexión**

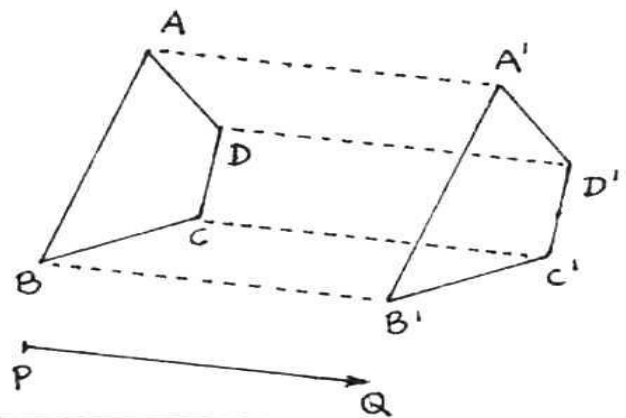
- | <u>Original</u>   | <u>Imagen</u>              |
|---|----------------------------|
| ▪ Recta $s$ .   | Recta $s'$ .               |
| ▪ Segmento $\overline{AB}$  | Segmento $\overline{A'B'}$ |
| Se cumple que $\overline{A'B'} = \overline{AB}$   |                            |
| ▪ Si $s \parallel t$ , entonces $s' \parallel t'$ .   |                            |
| ▪ Si $s$ y $k$ forman al cortarse un ángulo $\alpha$ , entonces $s'$ y $k'$ forman al cortarse un ángulo $\alpha'$ tal que $\alpha = \alpha'$ |                            |



**Cuadro 11.3**

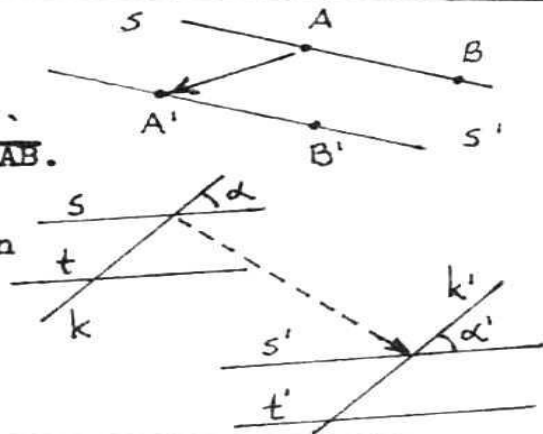
**TRASLACION**

$\overrightarrow{PQ}$ : Vector de traslación.  
 $A'$  es la imagen de  $A$ .  
 $A$  es el original de  $A'$   
 Todos los vectores determinados por un punto y su imagen son iguales a  $\overrightarrow{PQ}$  (tienen la misma dirección, el mismo sentido y la misma longitud).



**Propiedades de la traslación**

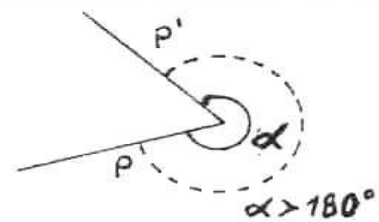
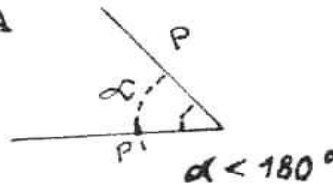
- | <u>Original</u>   | <u>Imagen</u>                |
|---|------------------------------|
| • Recta $s$ .   | Recta $s'$ .                 |
| • Segmento $\overline{AB}$ .  | Segmento $\overline{A'B'}$ . |
| • Se cumple que: $s \parallel s'$ y $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ .   |                              |
| • Si $s \parallel t$ , entonces $s' \parallel t'$   |                              |
| • Si $s$ y $k$ forman al cortarse un ángulo $\alpha$ , entonces $s'$ y $k'$ forman al cortarse un ángulo $\alpha'$ tal que $\alpha = \alpha'$ . |                              |



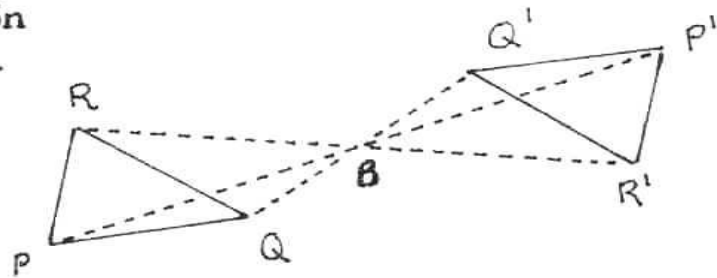
Cuadro 11.4

**ROTACION**

Rotación alrededor de A con el ángulo de rotación  $\alpha \neq 180^\circ$ .



Rotación alrededor de B con el ángulo de rotación  $\beta = 180^\circ$  (Simetría central).



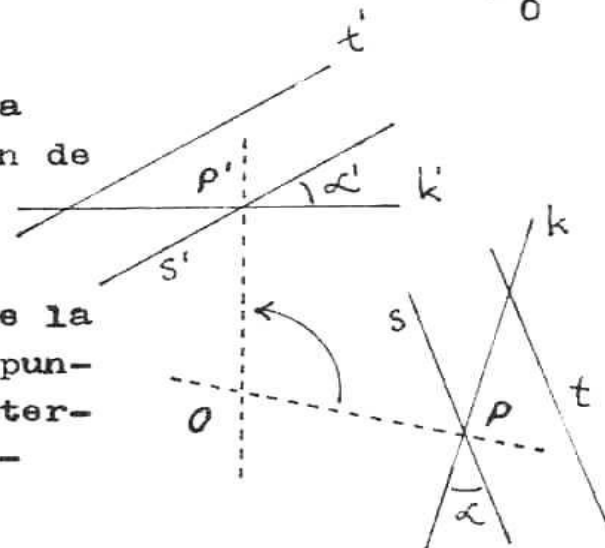
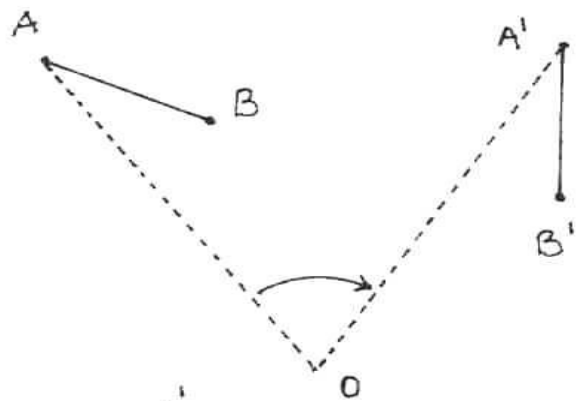
P' es la imagen de P.  
P es el original de P'.

**Propiedades de la rotación**

Original

Imagen

- Recta s. Recta s'.
- Segmento  $\overline{AB}$ . Segmento  $\overline{A'B'}$ .
- Se cumple que  $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ .
- Si  $s \parallel t$ , entonces  $s' \parallel t'$ .
- Si s y k forman al cortarse un ángulo  $\alpha$ , entonces s' y k' forman al cortarse un ángulo  $\alpha'$  tal que  $\alpha' = \alpha$ .
- Si O es el centro de la rotación y P' la imagen de un punto P, entonces  $\overline{OP} = \overline{OP'}$ .



(En el caso particular de la simetría central, O es el punto medio del segmento determinado por un punto cualquiera y su imagen).

## Introducción de los teoremas sobre la igualdad de triángulos

La aplicación del concepto de igualdad de figuras geométricas a los triángulos, requiere una clara noción acerca de los movimientos y sus propiedades, así como ciertas habilidades en el trabajo con ángulos que se basan en el reconocimiento de relaciones entre ellos (adyacentes, correspondientes, alternos y otros).

Para motivar el estudio de los teoremas sobre congruencia de triángulos y lograr que los alumnos comprendan su relevancia, es recomendable seguir una vía inductiva. Una manera de hacerlo consiste en crear una situación problemática que gire en torno a la siguiente interrogante:

Dados dos triángulos, se desea demostrar que son iguales; ¿cuál es el mínimo de igualdades entre elementos (lados o ángulos) de estos triángulos, que se requiere comprobar?

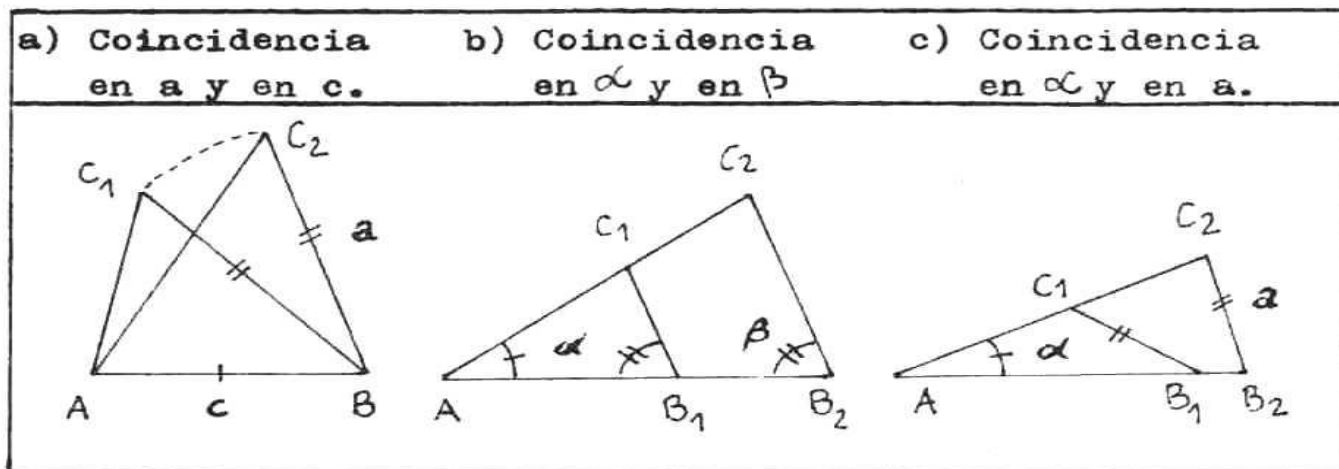
El análisis se puede iniciar presentando construcciones de triángulos que no están determinadas unívocamente cuando se han dado sólo dos elementos.

### Ejemplo 11.1

Fundamenta apoyándote en los esquemas que se dan a continuación, por qué un triángulo no se puede construir unívocamente cuando se han dado solamente:

- a) Dos lados.
- b) Dos ángulos.
- c) Un lado y el ángulo opuesto a él.

Figura 11.1



Mediante este u otros ejercicios similares, los alumnos pueden llegar a la conclusión de que resulta insuficiente considerar dos elementos solamente. De un modo natural se pasa entonces al análisis de los casos en que se dan tres elementos respectivamente iguales. Esta búsqueda de relaciones y dependencias se ilustra en un cuadro donde aparecen todos los casos posibles. Para los casos a y e se pueden hallar contraejemplos, de manera que obtenemos finalmente los teoremas de congruencia b, d y f.

Cuadro 11.5

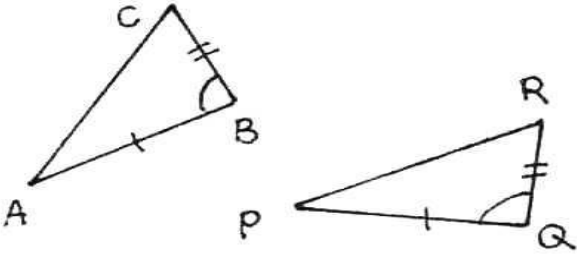
a	(b)	c	(d)	e	(f)
Tres ángulos y ningún lado.	Un lado y dos ángulos.		Dos lados y un ángulo.		Tres lados y ningún ángulo.

La necesidad de realizar las demostraciones de las

proposiciones halladas para los casos b, d y f, resulta del modo en que se han obtenido las suposiciones correspondientes. En cada caso los alumnos deben participar en la búsqueda de una idea de demostración: considerados dos triángulos que cumplen las condiciones del criterio que se va a demostrar, se fundamenta aplicando propiedades de los movimientos por qué estos triángulos necesariamente al superponerse coinciden.

A continuación se ofrecen algunas sugerencias para conducir en clases las acciones de los alumnos en la búsqueda de la demostración del "teorema de la igualdad de triángulos " l.a.l. ".

### Ejemplo 11.2

Impulsos del profesor	Reflexiones de los alumnos
<p>¡Destaca las premisas y la tesis del teorema y explícalas con tus palabras!</p> <p>(R.H. Separar premisa y tesis).</p>	<p>Premisas:</p> <p>Dos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente iguales.</p> <p>Tesis:</p> <p>Estos triángulos son iguales.</p>
<p>¡Representa la relación a través de una figura de análisis!</p> <p>(R.H. Confeccionar una figura de análisis).</p>	<div style="text-align: center;">  </div> <p style="text-align: center;">Figura 11.2</p>
<p>!Formula las premisas y la tesis utilizando las variables de la figura!</p> <p>(R.H. Denominar los datos con variables).</p>	<p>Premisas:</p> <p>En los triángulos ABC y PQR se cumple: <math>\overline{BA} = \overline{QP}</math>, <math>\overline{BC} = \overline{QR}</math> y <math>\sphericalangle ABC = \sphericalangle PQR</math>.</p> <p>Tesis: <math>\triangle ABC = \triangle PQR</math></p>

Impulsos del profesor	Reflexiones de los alumnos
¿Cuándo podemos afirmar que dos triángulos son iguales? (R.H. Sustituir conceptos por sus definiciones).	Si todos sus elementos son respectivamente iguales, o si existe un movimiento que transforma uno en el otro.
¡Vamos a tratar de encontrar este movimiento! ¡Utiliza las premisas! (R.H. Hacer móvil la figura).	Dadas las premisas se puede asegurar que existen movimientos (eventualmente diferentes) que transforman: a) $\overline{BA}$ en $\overline{QP}$ b) $\overline{BC}$ en $\overline{QR}$ c) $\sphericalangle ABC$ en $\sphericalangle PQR$
¿Cuál de estos movimientos nos acerca más a la tesis? (R.H. Buscar relaciones y dependencias)	Si se aplica un movimiento que transforma $\sphericalangle ABC$ en $\sphericalangle PQR$ , entonces: - Q es la imagen de B (1) - La semirrecta QP es la imagen de la semirrecta BA - La semirrecta QR es la imagen de la semirrecta BC
¿Qué condiciones faltan para llegar a la tesis? (R.H. Comparar con la tesis lo obtenido)	Hay que demostrar aún que por este movimiento: P es imagen de A y R imagen de C
¡Trata de deducir de las premisas estas condiciones! (R.H. Sacar conclusiones de las premisas que no se han utilizado)	La semirrecta QP es imagen de la semirrecta BA y Q imagen de B. Como $\overline{BA} = \overline{QP}$ (premisas), entonces: - P es imagen de A (2) - QR imagen de BC - Q imagen de B y $\overline{BC} = \overline{QR}$ luego R es imagen de C (3)

Impulsos del profesor	Reflexiones de los alumnos
¿Qué podemos afirmar entonces? (R.H. Buscar relaciones y dependencias)	Podemos afirmar que existe un movimiento que transforma el $\triangle ABC$ en el $\triangle PQR$ (según (1), (2) y (3))
¡Compara el resultado con la tesis! (R.H. Sustituir conceptos por sus definiciones)	Si existe un movimiento que transforma el $\triangle ABC$ en el $\triangle PQR$ , entonces $\triangle ABC = \triangle PQR$

Si se compara el ejemplo anterior con la representación de la demostración contenida en un libro de texto, se comprenderá por qué resulta necesario que el profesor organice el proceso de búsqueda de manera que los detalles importantes no queden ocultos a los ojos de los alumnos y que estos se percaten del proceder heurístico empleado para hallar la cadena de inferencias que conduce de las premisas a la tesis.

Después de la introducción de los teoremas de la igualdad de triángulos, los movimientos y sus propiedades pasan a un segundo plano pues los criterios obtenidos en estos teoremas simplifican extraordinariamente las fundamentaciones en ejercicios de cálculo, construcción y demostración que se presentan en la enseñanza de la Geometría Plana.

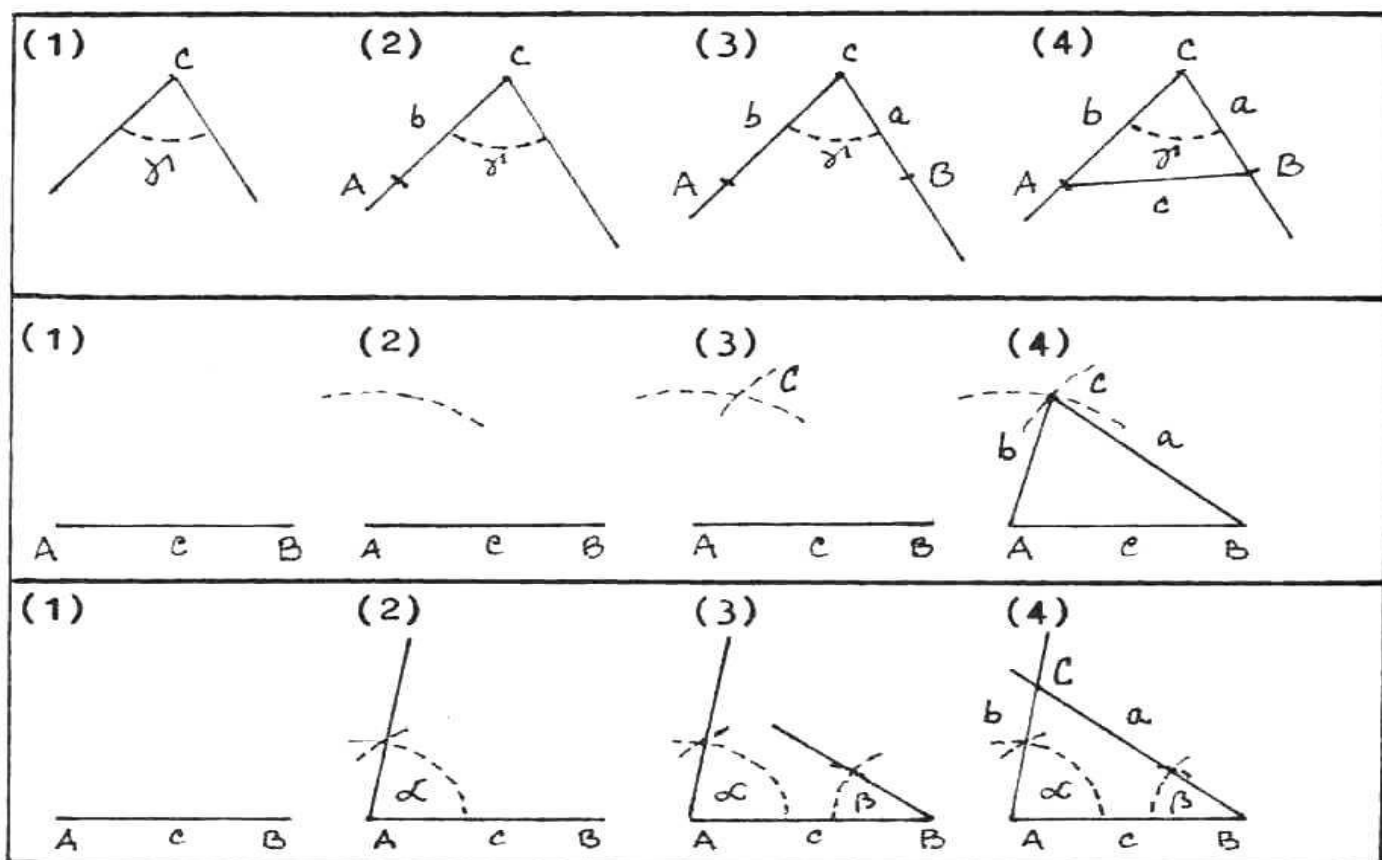
Las construcciones de triángulos representan una buena ocasión para fijar los criterios estudiados. Si se inició el estudio de los teoremas con un ejercicio similar al del Ejemplo 11.1, están creadas las condiciones para fundamentar la unicidad de las construcciones que se

propongan en clases de la asignatura.

En el estudio de las construcciones se deben emplear esquemas apropiados que contribuyan a la memorización de los pasos, así como a la sistematización de los casos que se pueden presentar.

**Cuadro 11.6**

Construcciones de triángulos (1.a.1), (1.1.1), (a.1.a).



Los ejercicios para la fijación de los teoremas de igualdad de triángulos deben ser variados, seleccionados y graduados en atención a ciertas peculiaridades propias del contenido geométrico. En la selección hay que tomar en cuenta incluir:

- ejercicios para la identificación de las premisas de los teoremas unida a la decisión sobre la igualdad de triángulos y la determinación de sus lados homólogos.

Esta identificación no resulta siempre trivial y es una condición necesaria para la aplicación de los criterios de congruencia.

- ejercicios de demostración y vinculados a cálculos.
- ejercicios en los que se presenta una figura y otros donde se requiere de su elaboración.

La variedad en este caso, además de por el intercambio entre los elementos dados y buscados, se logra mediante diversas órdenes o formulaciones que incluyan variados tipos de ejercicios (construcción, cálculo, fundamentación y demostración).

En la graduación de los ejercicios es conveniente tener en cuenta comenzar por identificaciones y construcciones sencillas y pasar después a ejercicios de cálculo y demostración. Un ejercicio aumenta su nivel de dificultad respecto a otros:

- si requiere de la elaboración de la figura correspondiente, o necesita de más medios matemáticos y pasos intermedios para su solución.
- si los conocimientos necesarios para la solución son conocimientos tratados desde hace mucho tiempo y poco utilizados en las clases.
- si la figura necesaria para la solución del ejercicio es compleja (hay triángulos u otras figuras superpuestas que dificultan el reconocimiento de ángulos y/o lados correspondientes a triángulos). Este reconocimiento es más sencillo cuando no hay superposición (figuras simples).
- si los alumnos requieren tomar decisiones sobre los triángulos cuya igualdad debe utilizar en la solución del ejercicio.

Finalmente hay que tener en cuenta que los ejercicios de demostración en que se aplican los teoremas sobre

igualdad de triángulos constituyen un medio importante en el desarrollo de la capacidad para demostrar y estos deben ser propuestos de manera frecuente y sistemática vinculados a los conocimientos que adquieren los alumnos sobre cuadriláteros, mediatrices, bicectricas, medianas y también de otras unidades de contenido geométrico en otros grados.

### Sobre las propiedades de algunas figuras geométricas

Los alumnos conocen de grados anteriores los conceptos de rectas paralelas, de mediatriz de un segmento y de bisectriz de un ángulo; han asimilado incluso procedimientos para el trazado de estas. Antes de dedicarse al análisis de propiedades de las rectas, segmentos y puntos notables en los triángulos, deben profundizar en la caracterización de las paralelas, mediatrices y bisectrices como conjuntos de puntos con características comunes; ellos deben estar en condiciones de operar con las inferencias que se derivan de los siguientes teoremas y sus recíprocos:

- Si un punto  $C$  está en la mediatriz de un segmento  $\overline{AB}$ , entonces los segmentos  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$  son iguales entre sí.
- Si un punto  $P$  está situado en la bisectriz de un ángulo  $AOB$ , entonces sus distancias a los lados del ángulo son iguales.
- Si dos rectas son paralelas, entonces todos los puntos de una de ellas están a la misma distancia de la otra.

El tratamiento adecuado de estos conceptos y teoremas adiestra a los alumnos en el empleo del método de los lugares geométricos. El reconocimiento en diversas situaciones de estos conjuntos de puntos y la aplicación de sus propiedades en la resolución de ejercicios, forma parte de las habilidades básicas a desarrollar a través de la enseñanza de la geometría.

En el siguiente cuadro se resumen las construcciones básicas con regla y compás. La sistematización de las mismas en este contexto, ofrece una oportunidad muy apropiada para insistir en las propiedades de los puntos de mediatrices, bisectrices y paralelas, ya que el procedimiento constructivo empleado se fundamenta en las propias definiciones de estas figuras.

Cuadro 11.7

## Construcciones geométricas básicas

Dado	Construcción		

Durante el estudio de las propiedades de las rectas, segmentos y puntos notables de un triángulo, no se deben perder de vista las dificultades que los alumnos afrontan ante las notaciones introducidas.

Los ejercicios deben seleccionarse cuidadosamente de manera que no se pierda la nueva información que se transmite a través de ellos; en su solución tienen que trabajar de manera activa los alumnos, para familiarizarse con los

métodos de resolución de problemas geométricos y para dominar los recursos heurísticos que guían la reflexión en estos casos. A continuación se muestran ejemplos del tratamiento de tales ejercicios.

### Ejemplo 11.3

Determina la posición del punto  $P$  que equidista de tres puntos no alineados  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

### Solución

El alumno debe percatarse de que dados tres puntos no alineados  $A$ ,  $B$  y  $C$ , se puede construir un triángulo. El conjunto de los puntos que equidistan de  $A$  y  $B$ , es precisamente la mediatriz de  $\overline{AB}$ . Luego  $P$  se encuentra sobre  $M_C$ .

Análogamente se llega a la conclusión de que  $P$  está sobre  $M_a$  (o sobre  $M_b$ ). Por tanto,  $P$  es el circuncentro del triángulo  $ABC$ .

Algunos impulsos que pueden resultar útiles para encontrar la idea de la solución pueden ser los siguientes:

¿Cuáles son las condiciones dadas en el ejercicio?... Consideremos entonces tres puntos cualesquiera no alineados  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

¿Qué es lo que se busca o se pide en el ejercicio?

¿Tienes alguna idea de cómo hallarlo?

¿Cuántos puntos pudiéramos hallar que equidistan de  $A$  y  $B$ ? ¿Cuáles son? ¿Dónde se encuentran?

¿Qué será necesario hacer para encontrar ahora un punto  $P$  que también equidiste de  $A$  y  $C$ ?

### Ejemplo 11.4

Construir un triángulo  $ABC$ , dados el lado  $c$ , la altura

$h_c$  y el ángulo  $\alpha$ .

Descripción de la construcción

Iniciamos la construcción con el lado  $c$ , de manera que obtenemos los puntos  $A$  y  $B$ . Transportamos el ángulo  $\alpha$  de manera que uno de sus lados es el rayo  $AB$  y el otro queda libre.

$C$  tiene que estar:

- sobre el lado libre del ángulo  $\alpha$ .
- sobre la paralela a  $AB$ , a la distancia  $h_c$ .

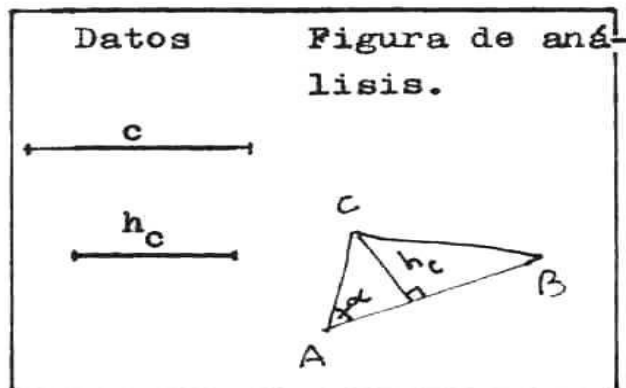
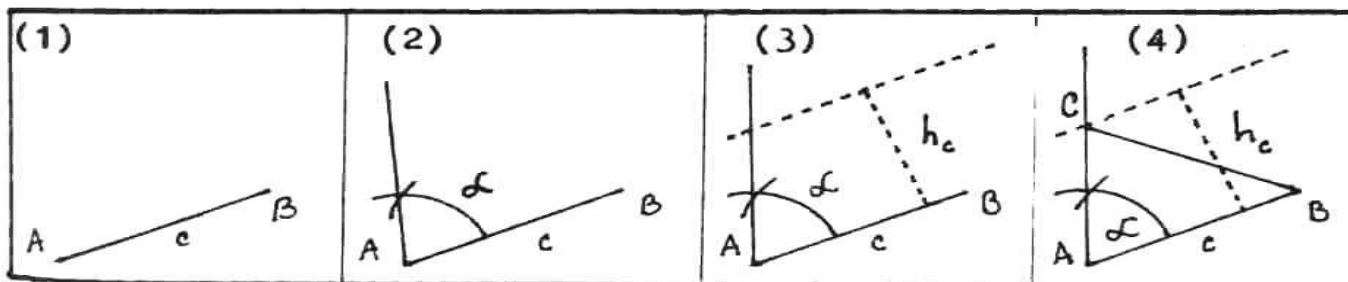


Figura 11.3

Esquema de la construcción:

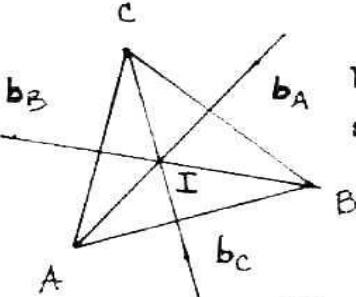


Los impulsos típicos para el tratamiento de las construcciones geométricas fueron tratados en el capítulo 6.

Ejemplo 11.5

Demuestra que las bisectrices de un triángulo  $ABC$  se cortan en un punto  $I$

Impulsos del profesor	Reflexiones de los alumnos
!Destaca las premisas y la tesis!	Premisa: $ABC$ es un triángulo.
!Explicálas con tus palabras!	Tesis: Sus bisectrices se

Impulsos del profesor	Reflexiones de los alumnos
	cortan en un punto I.
¡Confecciona una figura de análisis! ¡Denomina los datos con variables!	 <p>ABC triángulo <math>b_A</math>, <math>b_B</math> y <math>b_C</math> bisectrices</p> <p>Figura 11.4</p>
¿Qué podemos afirmar en un triángulo ABC sobre $b_A$ y $b_C$ ?	Podemos afirmar que $b_A$ y $b_C$ se cortan en un punto al cual llamaremos I.
¿Qué condiciones faltan para llegar a la tesis?	Hay que demostrar todavía que la bisectriz $b_B$ también pasa por I.
¿Qué significa que $b_A$ y $b_C$ se cortan en el punto I? ¡Utiliza la definición de bisectriz de un ángulo!	Significa que: (1) La distancia de I a $\overline{AC}$ es igual a la distancia de I a $\overline{AB}$ , por ser I un punto de $b_A$ . (2) La distancia de I a $\overline{AC}$ es igual a la distancia de I a $\overline{CB}$ , por ser I un punto de $b_C$ .

Impulsos del profesor	Reflexiones de los alumnos
¿Qué conclusiones puedes sacar de (1) y (2)?	De (1) y (2) se obtiene por carácter transitivo que la distancia de I a $\overline{AB}$ es igual a la distancia de I a $\overline{CB}$ .
¡Utiliza la definición de bisectriz para saber de dónde se puede concluir que $b_B$ pasa por I!	Por la definición de bisectriz, I es un punto de $b_B$ ya que equidista de los lados del ángulo $B$ .
	(l.q.q.d.)

### 11.3 Tratamiento metodológico de la circunferencia

Con el estudio del complejo de materia "Circunferencia y círculo" se continúa al estudio sistemático de la Geometría Plana en el nivel secundario básico.

Los alumnos aprendieron en grados anteriores a reconocer estas figuras en diversas situaciones, por ejemplo en las bases de cuerpos redondos. Conocen también los conceptos de radio y diámetro, así como la relación entre sus longitudes. Deben tener nociones acerca de la obtención de imágenes de círculos como resultado de un movimiento (basta mover el centro y trazar otra circunferencia de igual radio que la original) y haber desarrollado destrezas en el trabajo con el compás.

#### Elaboración de los conceptos de circunferencia, círculo y sus elementos

Un propósito didáctico fundamental de este complejo de materia es el desarrollo de habilidades de los alumnos en el trabajo con conceptos.

Los conceptos de circunferencia y círculo se definen como conjuntos de puntos que poseen ciertas propiedades. Esta caracterización permite incorporarlos al arsenal de

que disponen los alumnos para aplicar el método de los lugares geométricos en la resolución de ejercicios.

Con los conceptos de centro, radio, cuerda, diámetro y arco debe operarse sobre una base más bien intuitiva para evitar un exceso innecesario de formalización. No obstante, a través de ejercicios se debe garantizar que los alumnos desarrollen acciones de identificación, realización y aplicación para la asimilación de estos contenidos. Un tratamiento similar debe darse a los conceptos asociados a las relaciones de posición entre una circunferencia y una recta (exterior, secante, tangente), o entre dos circunferencias (exteriores, interiores, concéntricas, tangentes, secantes).

Los conceptos de ángulo central y de ángulo inscrito, se definen a partir de la posición de sus vértices y lados. La introducción previa del concepto "arco de circunferencia" y la determinación de su amplitud a partir de la del ángulo central correspondiente, permite simplificar el tratamiento de algunos teoremas y ejercicios.

Otros conceptos cuya asimilación resulta importante, son los de polígono regular, polígono inscrito, polígono circunscrito y sector circular.

En el tratamiento de los conceptos, los alumnos deben desarrollar con una independencia cada vez mayor ejercicios que conduzcan a su asimilación, pues la comprensión cabal de un concepto va más allá de la reproducción mecánica de su definición, algunas de estos ejercicios exigen:

- Determinar las características comunes y no comunes de un conjunto dado de representantes de un concepto (eventualmente no representantes del mismo o combinaciones de estos).
- Identificar representantes de conceptos conocidos variando las magnitudes, las proporciones entre éstas, las posiciones y notaciones, entre otros elementos.

- Analizar casos límites y casos especiales de un concepto tratado.
- Construir ejemplos (contrajemplos) de conceptos dados.
- Relacionar un concepto con otros conceptos ya conocidos.
- Reconocer diferentes formas de caracterizar un mismo concepto.
- Sustituir conceptos por sus definiciones (Definiendum por Definiens) , sobre todo para buscar soluciones a ejercicios de fundamentación y demostración.

Ejercicios con estas exigencias demandan de la ejecución de las acciones típicas para la fijación de conceptos (identificación, realización y aplicación).

Los ejercicios de fundamentación (entre ellos los denominados de "verdadero o falso") en los cuales hay que acudir a las definiciones para determinar el valor de verdad de ciertas proposiciones, son muy favorables para promover las acciones mencionadas y descubrir eventuales deficiencias en la asimilación de conceptos.

### Ejemplo 11.6

Di si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones y fundamenta tu respuesta:

- a) Si dos cuerdas de una circunferencia son paralelas, entonces hay un diámetro de la circunferencia que pasa por el punto medio de estas cuerdas.

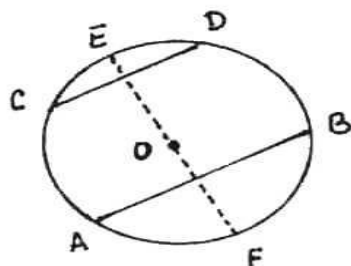


Figura 11.5

### Solución

Para llegar a la conclusión de que esta proposición es verdadera, hay que remitirse a los conceptos de cir-

cunferencia, cuerda, diámetro, mediatriz y rectas paralelas. Así se reconoce en la figura que A y B están sobre la circunferencia, por ser  $\overline{AB}$  cuerda.

De manera que  $\overline{AO} = \overline{OB}$ , porque todos los puntos de la circunferencia están a la misma distancia de su centro. Luego O pertenece a la mediatriz de  $\overline{AB}$ . Si  $\overline{EF}$  es el diámetro contenido en la mediatriz de  $\overline{AB}$ , entonces es un diámetro que pasa por el punto medio de la cuerda  $\overline{AB}$ . Como este diámetro es perpendicular a  $\overline{AB}$ , también lo es a  $\overline{CD}$ , porque  $AB \parallel CD$  (premisa). Luego  $\overline{EF}$  es perpendicular a  $\overline{CD}$  y contiene al punto O que equidista de C y de D. De esto último se deduce que  $\overline{EF}$  está contenido también en la mediatriz de  $\overline{CD}$  y por tanto es un diámetro que pasa por el punto medio de la cuerda  $\overline{CD}$ .

Los alumnos deberán reflexionar si el caso contenido en la figura de análisis se puede generalizar.

### Búsqueda de ideas de solución en demostraciones y ejercicios de determinación en la circunferencia

Otro propósito esencial del complejo de materia "Circunferencia y círculo" es continuar desarrollando capacidades y habilidades en la demostración de proposiciones. Para ello resulta útil que los alumnos tengan sus conocimientos disponibles y listos para ser aplicados, así como organizados y sistematizados de manera que puedan encontrar de modo racional los medios matemáticos necesarios para la solución. Los alumnos deben recibir una instrucción heurística, es decir, una enseñanza consciente y planificada de los procedimientos heurísticos que permitan racionalizar el trabajo en la búsqueda de ideas de soluciones, en particular, ideas de demostración (ver epígrafe 3.3 sobre los procedimientos de solución heurísticos). Además los alumnos se deben familiarizar con las formas de trabajo y de pensamiento matemáticos.

Entre las formas de organizar, sistematizar y tener

disponibles los conocimientos matemáticos, de modo que puedan ser útiles para el empleo de las formas de trabajo y pensamiento que tienen una connotación especial en las demostraciones de este complejo de materia, está el conocimiento por los alumnos de que:

- a) Para la demostración de la igualdad de segmentos o ángulos, se acude frecuentemente a la superposición de figuras mediante movimientos, pero se dispone también de los teoremas sobre igualdad de triángulos y algunas propiedades de figuras conocidas (ángulos bases en triángulos isósceles, radios de una misma circunferencia, etcétera). En el caso de ángulos, además, están los teoremas de paralelas cortadas por una secante y relaciones entre ángulos de un triángulo.

En la medida en que avanza el estudio de los contenidos propios del complejo de materia, se incorporan otras proposiciones que establecen relaciones de igualdad entre ángulos, segmentos y arcos.

- b) La demostración del paralelismo entre rectas o segmentos se apoya en los recíprocos de los teoremas sobre ángulos entre paralelas, pero también en propiedades de los movimientos (conservación del paralelismo).
- c) Como medios de demostración para verificar la perpendicularidad entre segmentos se emplean las propiedades de las mediatrices o proposiciones conocidas en cuya tesis se concluye que un ángulo es recto (por ejemplo: si un ángulo es adyacente a otro igual a él, entonces este ángulo es recto). A estas inferencias se añade en el complejo de materia en cuestión, el teorema de Tales sobre el ángulo inscrito, así como el teorema que establece la perpendicularidad entre las tangentes a una circunferencia y sus radios de contacto.

En cada uno de los siguientes ejemplos se muestra la búsqueda de una idea de solución basada en las explicacio-

nes anteriores.

### Ejemplo 11.7

En una circunferencia de centro  $O$ , se han trazado los diámetros  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$ . Demuestra que las cuerdas  $\overline{CB}$  y  $\overline{AD}$  son iguales y paralelas.

### Idea de solución

Para demostrar la igualdad de las cuerdas, se puede probar que existe una simetría central que transforma  $\overline{CB}$  en  $\overline{AD}$ .

La demostración del paralelismo, se puede apoyar en el recíproco del teorema sobre ángulos alternos entre paralelas.

Al discutir retrospectivamente la demostración se debe analizar otras vías posibles, en este caso por ejemplo se podría iniciar el trabajo aplicando un teorema sobre la igualdad de triángulos.

### Ejemplo 11.8

En la figura:

$\overline{QE}$  pasa por  $O$ ,  $\overline{AB} = \overline{DC}$   
y  $\widehat{BM} = \widehat{MC}$ .

Demuestra que  $\overline{AD} \perp \overline{QE}$ .

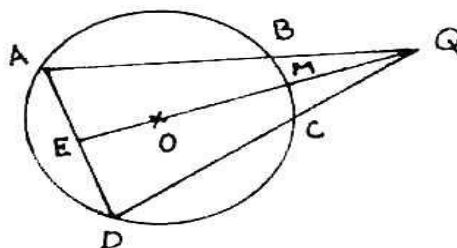


Figura 11.6

### Idea de solución

¿Cómo puedes llegar a asegurar que  $\overline{AD} \perp \overline{QE}$ ?

Demostrando que los ángulos adyacentes  $\angle AEQ$  y  $\angle DEQ$  son iguales.

¿Cómo demostrar que estos ángulos son iguales?

Probando que los triángulos  $\triangle AEQ$  y  $\triangle DEQ$  son iguales.

¿Puedes establecer la igualdad de algunos de sus elementos?

Solamente que  $\overline{EQ}$  es un lado común.

¿Qué otras condiciones necesitas para concluir que los triángulos son iguales?

Bastaría con verificar que:  $\overline{AQ} = \overline{DQ}$  y  $\sphericalangle AQE = \sphericalangle DQE$ .

¿Cómo demostrar que  $\overline{AQ} = \overline{DQ}$ ?

Probando que el triángulo AQD es isósceles de base  $\overline{AD}$ .

¿Puedes deducir de las premisas que este triángulo es isósceles?

De los datos  $\overline{AB} = \overline{AC}$  y  $\widehat{BM} = \widehat{MC}$ , se deduce que a los ángulos inscritos ADQ y DAQ corresponden arcos iguales.

¿Cómo demostrar que  $\sphericalangle AQE = \sphericalangle DQE$ ? ¿Existe la posibilidad de considerar otros triángulos? ¿Cuáles?

Trazando  $\overline{DO}$  y  $\overline{OA}$  se obtienen los triángulos OAQ y ODQ. Estos triángulos son iguales (l.l.l), por tanto:

$$\sphericalangle AQE = \sphericalangle DQE.$$

### Plan de solución

1. Trazar las líneas auxiliares  $\overline{OA}$  y  $\overline{OD}$ .
2. Probar que el triángulo AQD es isósceles.
3. Concluir que  $\overline{AQ} = \overline{DQ}$ .
4. Probar que son iguales los triángulos OAQ y ODQ.
5. Concluir que  $\sphericalangle AQE = \sphericalangle DQE$ .
6. Probar que son iguales los triángulos AEQ y DEQ.
7. Concluir que  $\sphericalangle AEQ = \sphericalangle DEQ = 90^\circ$ .

En este ejemplo para llegar a probar la perpendicularidad se requiere incluso una construcción auxiliar, la idea de la demostración se encuentra con ayuda de la estrategia de trabajo hacia atrás y el plan de solución se

elabora sobre esta base.

### Ejemplo 11.9

En la figura, la semirrecta AC es tangente a la circunferencia C ( $O; \overline{OB}$ ) en A y  $\angle AOB = 120^\circ$ . Halla  $\angle BAC$ . (La orden puede sustituirse por: Demuestra que  $\angle BAC = 60^\circ$ ).

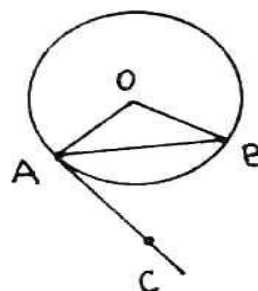


Figura 11.7

### Idea de solución

¿Qué información podemos obtener de inmediato a partir de los datos?

El triángulo AOB es isósceles de base AB pues  $\overline{OA} = \overline{OB}$  (radios).

Además  $\angle OAC = 90^\circ$  pues la tangente es perpendicular al radio que pasa por su punto de contacto.

¿Podemos determinar ahora la amplitud del  $\angle BAC$ ? ¿Cómo?

Hace falta restar ( $\angle BAC = \angle OAC - \angle OAB$ )

¿Conocemos la amplitud del  $\angle OAB$ ? ¿Podemos calcularla?

Como  $\angle AOB = 120^\circ$  y el triángulo AOB es isósceles, entonces no hay problemas para ello.

Este es un ejercicio de cálculo (determinación de magnitudes) en el que se exige hallar por métodos deductivos la amplitud de un ángulo (también podría haber sido la longitud de un segmento, perímetro o área de figuras, etcétera) y que requiere de razonamientos análogos a los empleados en los ejercicios de demostración. En este caso la idea de la solución se encuentra con ayuda de la estrategia del trabajo hacia adelante.

Algunas proposiciones importantes de la teoría pueden introducirse a través de los ejercicios portadores de nueva

información. En estos casos debe destacarse como una ganancia metodológica del ejercicio la nueva proposición obtenida y emplearla con la mayor rapidez posible en la solución de otros ejercicios.

### Ejercicios de construcción en que intervienen puntos de la circunferencia

Un tercer propósito esencial del complejo de materia "Circunferencia y círculo" está dirigido al desarrollo de habilidades en la realización de construcciones geométricas.

En los ejercicios que se realizan con este propósito, se continúa profundizando en la aplicación del método de los lugares geométricos. Los conceptos de circunferencia y círculo, las características de algunos de sus elementos (radio, diámetro, tangente, etcétera), así como un conjunto de relaciones importantes (relaciones de posición entre una circunferencia y una recta, o entre dos circunferencias; relaciones entre una tangente y su radio de contacto; relaciones entre ángulos, cuerdas y arcos; entre otras) se incorporan a los medios estudiados sistemáticamente en grados anteriores para la realización de construcciones geométricas.

Algunas de las construcciones de este complejo entrañan procedimientos que deben ser fijados como habilidades básicas, entre ellos:

- a) Trazar la tangente a una circunferencia por un punto dado de ella.
- b) Trazar la tangente a una circunferencia por un punto dado exterior a ella.
- c) Construir la circunferencia que pasa por tres puntos dados.
- d) Inscribir en (circunscribir a) una circunferencia un polígono regular y viceversa.

e) Construir un triángulo rectángulo en C, dados el lado  $c$  y la altura  $h_c$  (aplicación del teorema de Tales).

Los alumnos no sólo deben aprender a realizar construcciones más complejas, también se exigirá de ellos paulatinamente un mayor desarrollo del pensamiento geométrico espacial en ejercicios que demandan un poder de abstracción elevado.

A continuación se presentan dos ejemplos de construcciones, la primera de ellas es de las consideradas básicas, después se trata una que requiere más medios para su fundamentación y una elevada abstracción para hallar las soluciones posibles.

#### Ejemplo 11.10

Construye un triángulo rectángulo ABC, sabiendo que su hipotenusa  $c$  mide 8 cm. y que la altura relativa a ella  $h_c$  mide 3 cm.

#### Descripción de la construcción

Se conoce	Se construye (Figura 11.8)
1. $c = 8$ cm	El segmento $\overline{AB} = c$ .
2. $h_c = 3$ cm	Una paralela a $\overline{AB}$ a una distancia de 3 cm.
3. $\sphericalangle ACB = 90^\circ$	La circunferencia con centro en el punto medio de $\overline{AB}$ y diámetro $\overline{AB}$ .
4. El punto C debe estar en la intersección de la paralela y la circunferencia trazadas (si esta intersección existe).	Uno de los triángulos $AC_1B$ ó $AC_2B$ (de existir dos intersecciones). Si no hay intersección la construcción no es posible.

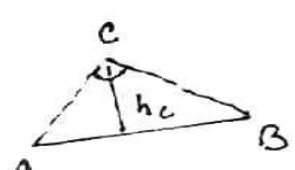
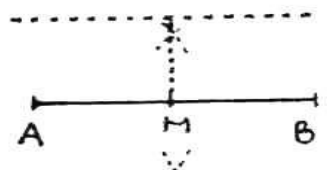
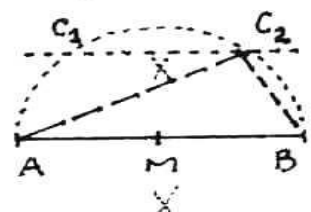
Figura de análisis	Construcción	
	1 y 2 	3 y 4 

Figura 11.8

Ejemplo 11.11

Construye una circunferencia que sea tangente a una recta  $t$  dada y que pase por un punto  $P$  situado fuera de ella.

Idea de solución

El alumno conoce que la circunferencia buscada debe pasar por el punto  $P$  y por un único punto  $T$  situado en la tangente. El centro de la circunferencia buscada estará a la misma distancia de  $P$  que de  $T$ , luego está situado sobre la mediatriz de  $\overline{PT}$ . Pero, al propio tiempo el centro de la circunferencia estará sobre la perpendicular a la recta  $t$  que pasa por el punto  $T$ .

Este ejercicio aparentemente sencillo, tiene infinitas soluciones. Algunas de las soluciones más evidentes se muestran en la figura: Las circunferencias  $(O_1; \overline{O_1T_1})$ ,  $(O_2; \overline{O_2T_2})$  y  $(O_3; \overline{O_3T_3})$  pasan todas por  $P$  y son tangentes a la recta  $t$ .

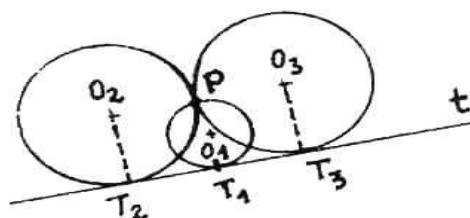


Figura 11.9

11.4 Aspectos metodológicos esenciales del tratamiento de la semejanza

El complejo de materia "Semejanza" ocupa un lugar cen-

tral en el estudio de la Geometría del nivel medio básico. Los alumnos se familiarizan en este complejo con una nueva correspondencia biunívoca del plano en sí mismo (la homotecia), la cual en combinación con los movimientos ya conocidos conduce al concepto de transformación semejante.

En la dirección de las actividades de los alumnos para asimilar los contenidos de este complejo, se debe partir de los conocimientos y habilidades adquiridos por estos en el trabajo con proporciones, con movimientos del plano, con las propiedades de los polígonos y con los criterios de congruencia de triángulos.

Los aspectos metodológicos más importantes están relacionados con el tratamiento del teorema de las transversales, de los teoremas de semejanza de triángulos, de los conceptos de homotecia y transformación semejante, del grupo de teoremas de Pitágoras, así como de la aplicación de estos conocimientos en la resolución de ejercicios y problemas.

Para estructurar estos contenidos existen diferentes vías, de las cuales se describirán aquí sólo dos variantes. En la primera de ellas: se comienza con una reactivación de los conceptos de igualdad y movimiento; una vez consolidados estos, se construye (a través del análisis de ampliaciones y reducciones a escala) el camino que conduce a la definición del concepto de homotecia; de ahí, se pasa a la construcción de imágenes por homotecias lo cual crea el clima necesario para introducir el teorema de las transversales; los teoremas sobre la semejanza de triángulos y el grupo de teoremas de Pitágoras cierran esta variante. En la segunda variante: los primeros conceptos que se definen son los de "razón entre segmentos" y "segmentos proporcionales", de manera que se pueda pasar directamente al teorema de las transversales y sus aplicaciones; después se introduce de forma intuitiva el con-

cepto "figuras geométricas semejantes", centrando la atención en los teoremas sobre semejanza de triángulos; a continuación se estudian las homotecias y las transformaciones de semejanza, con énfasis en la aplicación de sus propiedades en la resolución de ejercicios de cálculo, construcción y demostración; por último se trata el grupo de teoremas de Pitágoras.

Las reflexiones de este epígrafe se realizarán siguiendo el hilo conductor de esta última variante.

### Sobre el tratamiento del teorema de las transversales

Resulta conveniente recordar previamente las cuestiones relativas al cálculo con razones y proporciones. A través de ejercicios apropiados se repasan con esta intención los siguientes conocimientos que sirven de base al complejo de materia "Semejanza":

- Dos cantidades pueden compararse hallando la razón entre ellas, es decir, planteando el cociente y simplificándolo tanto como sea posible.
- El planteamiento de una igualdad entre dos razones se denomina proporción y en toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

Los alumnos conocen por experiencia práctica y por el trabajo que han desarrollado en otras asignaturas, que en la elaboración de mapas y en otras muchas labores tienen una gran importancia las reproducciones a escala. De manera que, la motivación del complejo de materia, puede partir de la necesidad de definir el concepto de figuras semejantes y estudiar las propiedades que caracterizan un nuevo tipo de transformación geométrica que constituye la base de las ampliaciones y reducciones a escala.

Es importante que los alumnos comprendan el teorema de las transversales y su demostración. Como preparación previa estos pueden realizar ejercicios que conducen a

suposiciones asociadas al teorema y que paulatinamente introducen las reflexiones que forman parte de su demostración, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 11.12

En la figura, PAB es un triángulo,  $h_1$  y  $h_2$  alturas. Deduce la siguiente proporción:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{h_2}{h_1}$$

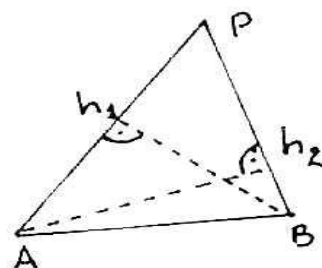


Figura 11.10

Ejemplo 11.13

En la figura,  $AB \parallel CD$ ,  $h_3$  y  $h_4$  alturas respectivas de los triángulos ABC y ABD.

Demuestra que las áreas de estos triángulos son iguales.

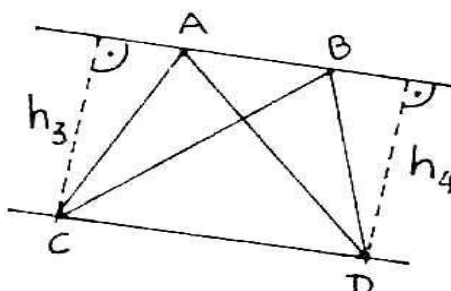


Figura 11.11

Ejemplo 11.14

En la figura, PCD es un triángulo,  $AB \parallel CD$ ,  $h_1$  y  $h_2$  son alturas respectivas de los triángulos PBC y PAD.

Deduce la siguiente proporción:

$$\frac{PC}{PD} = \frac{h_2}{h_1}$$

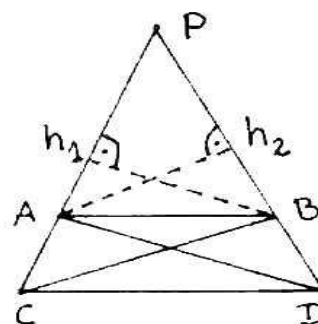


Figura 11.12

Un alumno que se ha enfrentado con éxito a la solución de los ejemplos anteriores, está en condiciones de seguir con comprensión la demostración de la primera parte del teorema de las transversales formulada de la manera siguiente:

**Teorema:** Si dos semirrectas de origen común PC y PD (no situadas sobre la misma recta) son cortadas por dos rectas paralelas DC y BA, entonces se cumple que la razón entre dos segmentos de una de ellas es igual a la razón entre los dos segmentos correspondientes en la otra, es decir:

$$\frac{PA}{AC} = \frac{PB}{BD} \quad (1)$$

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD} \quad (2)$$

$$\frac{AC}{PC} = \frac{BD}{PD} \quad (3)$$

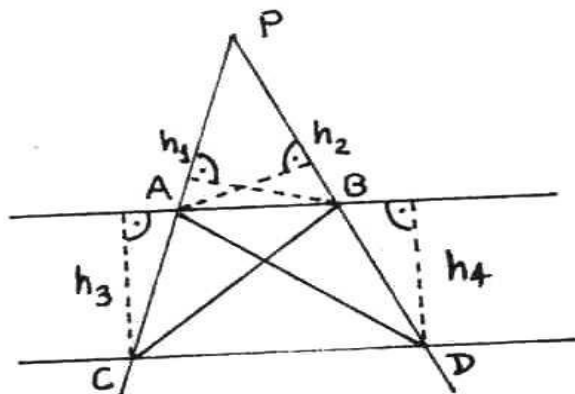


Figura 11.13

Nótese que para la deducción de la segunda proporción (2), después de resueltos los ejemplos anteriores, sólo falta aplicar el carácter transitivo en la igualdad  $\frac{PA}{PB} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{PC}{PD}$  y transformar convenientemente.

Para facilitar aún más la comprensión de esta demostración se deben emplear medios de enseñanza apropiados. En este caso se ha desarrollado un juego de retrotransparencias que al superponerse componen la imagen visual auxiliar necesaria (que se corresponde con la figura 11.13). El juego está integrado por cinco láminas debidamente acopladas:

I. Lámina de base:

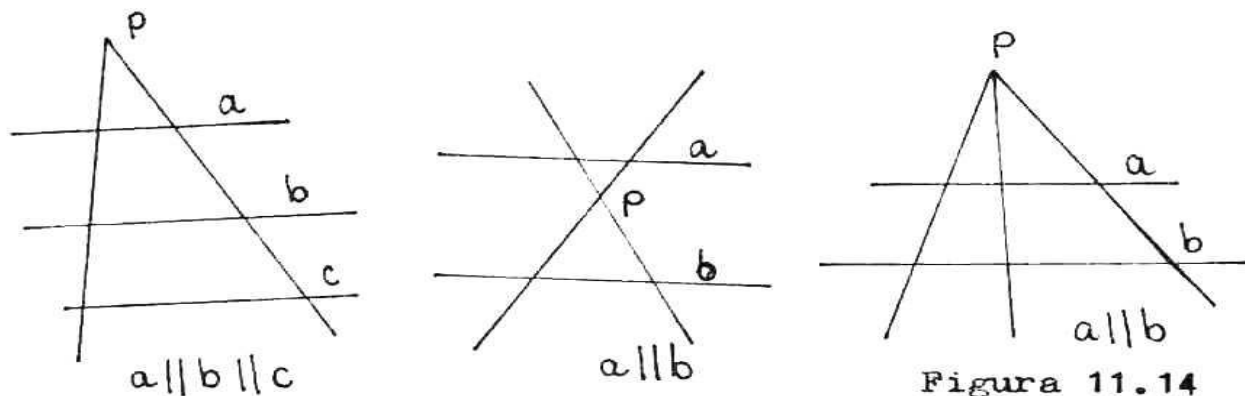
Paralelas AB y CD, así como semirrectas PC y PD (color negro).

II. Láminas para superponer:

a) Superficie triangular PAB (azul), con alturas h<sub>1</sub>

- (roja) y  $h_2$  (verde).
- b) Superficie triangular ACB (roja), con altura  $h_1$  (roja).
- c) Superficie triangular ADB (verde), con altura  $h_2$  (verde).
- d) Alturas  $h_3$  y  $h_4$  (negras).

Otro aspecto importante en el tratamiento del teorema de las transversales es el reconocimiento por parte de los alumnos de las proporciones que se pueden establecer en los casos en que las paralelas y las semirrectas varíen de posición en el gráfico. Algunos de estos casos (Figura 11.14) deben introducirse en ejercicios, para alcanzar la generalización indispensable sin abrumar a los escolares con disquisiciones teóricas al respecto.



En los ejercicios que realicen los alumnos con la finalidad de fijar el teorema de las transversales, resulta importante variar las posiciones de las paralelas y de las semirrectas de origen común, de manera que ellos sean capaces de reconocer en diferentes figuras, cuáles son las proporciones que se pueden establecer. También se tendrá en cuenta la resolución de ejercicios de cálculo (ejemplo 11.15) en los que, dada la figura y las longitudes de tres de los segmentos correspondientes a una de las proporciones, haya que determinar la longitud del

cuarto segmento.

### Ejemplo 11.15

Calcula las cantidades que corresponden a los espacios en blanco en la tabla siguiente (ver figura 11.13).

	FA	PC	AC	PB	PA	BA
a)	6 cm	7,5 cm		3 cm		
b)	2,1 cm		0,6cm		3,15cm	
c)				3,7cm	5,3 cm	16 mm

El teorema de las transversales tiene un conjunto de aplicaciones que permiten resolver con sencillez y elegancia problemas de cálculo, construcción y demostración aparentemente muy complicados. El tratamiento de algunas de estas aplicaciones en las clases de la asignatura contribuye al desarrollo de habilidades de los alumnos para vincular la teoría matemática con la práctica. En los textos escolares se incluyen generalmente con este propósito ejercicios que exigen:

- construir segmentos que estén en una razón dada o dividir interiormente un segmento en una razón dada;
- determinar la distancia entre dos puntos de un terreno cuando existen obstáculos en este que no permiten aplicar procedimientos directos de medición;
- estimar la altura de una torre (un árbol, una antena, etcétera) colocando una estaca paralela a esta y aplicando el teorema teniendo en cuenta que una semirrecta está orientada en la dirección de la base y la otra pasa por los extremos superiores de la estaca y la torre;
- reconocer el fundamento de algunas aplicaciones técnicas en teodolitos, compases de precisión, pantógrafos o cuñas de medición, entre otras.

## Introducción de los teoremas sobre la semejanza de triángulos

El concepto de figuras geométricas semejantes puede ser introducido de manera intuitiva al igual que en el caso de la igualdad. Siguiendo este criterio, dos figuras se denominarán semejantes, si tienen la misma forma aún cuando posean distintas dimensiones; tal es el caso de las figuras obtenidas por ampliaciones o reducciones a escala con las cuales los alumnos están familiarizados de antemano.

Para estudiar las propiedades de estas transformaciones se limita inicialmente el análisis a los triángulos semejantes. Esta manera de proceder simplifica didácticamente el tratamiento de la semejanza y la homotecia, pero obliga a definir el concepto de semejanza de polígonos sin mucho detalle previo con respecto a las características invariantes que componen su definición:

Dos polígonos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos son proporcionales.

La introducción de los teoremas sobre semejanza de triángulos puede realizarse estableciendo analogías con los teoremas sobre la congruencia de estas figuras geométricas.

Por definición, dos triángulos ABC y DEF son semejantes (y se denota  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ), si tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos son proporcionales.

Sin embargo, análogo al caso de la congruencia, el número de comprobaciones puede simplificarse. En el siguiente cuadro, se resumen todas las combinaciones posibles de pares de lados y de ángulos con el objetivo de racionalizar esta labor.

**Cuadro 11.8****Criterios de semejanza de triángulos**

		Pares de lados proporcionales			
		0	1	2	3
Cantidad de pares de ángulos que coinciden	0				p.p.p.
	1			p.a.p.	
	2	a.a.			
	3				

En dependencia del nivel de abstracción y generalización que poseen los alumnos, se pueden asignar tareas diferenciadas para el análisis de los casos extremos, de manera que se argumente en clases por qué basta considerar dos ángulos iguales y se hallen contraejemplos que fundamenten la razón por la cual no basta considerar dos lados y un ángulo cualquiera.

Una vez que se hayan obtenido los teoremas sobre la semejanza de triángulos y haya sido motivada la necesidad de su demostración, pueden emplearse diferentes procedimientos para probar su veracidad lo cual depende de la vía seleccionada para estructurar el complejo de materia. Una manera relativamente sencilla de hacerlo, se basa en la introducción previa del siguiente teorema (fundamental de semejanza) con su demostración:

Toda recta paralela a un lado de un triángulo, forma con los otros dos lados (o con sus prolongaciones) otro triángulo que es semejante al triángulo dado.

Este teorema, como se muestra en el siguiente ejemplo, puede emplearse como medio de demostración para hallar la idea de solución en el momento de probar los teoremas sobre semejanza en los cuales aparece como premisa alguna igualdad de pares de ángulos.

Ejemplo 11.16

**Teorema(p.a.p.):** Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente proporcionales e iguales el ángulo comprendido entre dichos lados, entonces estos triángulos son semejantes.

Premisas:  $\sphericalangle A = \sphericalangle P$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}}$$

Tesis:  $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

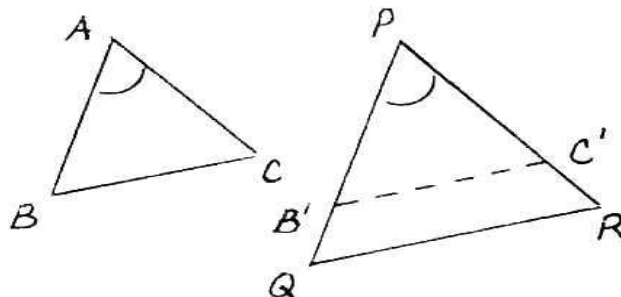


Figura 11.15

Demostración:

Si  $\sphericalangle A = \sphericalangle P$ , entonces existe un movimiento mediante el cual se pueden superponer estos ángulos de manera que coincidan.

Si se aplica este movimiento, el triángulo ABC se transforma en el triángulo PB'C' y por lo tanto:

$$\triangle ABC = \triangle PB'C' \quad (1)$$

De donde:  $\overline{PC'} = \overline{AC}$  (2) (Por ser lados homólogos en triángulos iguales)

$$\overline{PB'} = \overline{AB} \quad (3)$$

Pero:  $\frac{\overline{AC}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}}$  (4) (Por premisa)

Sustituyendo (2) y (3) en (4), tenemos que:  $\frac{\overline{PC'}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{PB'}}{\overline{PQ}}$

Por tanto:  $\overline{C'B'} \parallel \overline{RQ}$  (Por recíproco del teorema de las transversales).

Tenemos entonces, por un lado al triángulo PQR y una paralela B'C' al lado QR de este, y por otro lado podemos sustituir a  $\triangle PB'C'$  por  $\triangle ABC$ .

Luego  $\triangle PB'C' \sim \triangle PQR$  (5) (Por teorema fundamental de semejanza).

De (1) y (5) podemos concluir que  $\triangle ABC \sim \triangle PQR$   
(l.q.q.d.)

### Ejercicios de construcción en que intervienen homotecias

Los ejercicios de construcción en que se aplican semejanzas, resultan de un alto grado de complejidad para los alumnos de la enseñanza media. Su tratamiento en clases debe estar dirigido al desarrollo de capacidades para construir figuras y transformar estas mediante homotecias o movimientos, teniendo en cuenta las condiciones que aparecen en los datos. Un aspecto importante de este adiestramiento radica en que los alumnos deben identificar cuál figura pueden construir inmediatamente con parte de los datos y cuáles transformaciones tendrán que realizar para agotar las condiciones dadas en el ejercicio de construcción.

En los libros de texto de la asignatura, las aplicaciones más frecuentes se dirigen a construir figuras cuando los datos determinantes son proporcionalidades entre segmentos y a inscribir (o circunscribir) una figura en otra dada. En cada caso se requiere elaborar en clases un procedimiento de construcción claro y comprensible, así como su fundamentación teórica, con la participación activa de los alumnos.

Los pasos esenciales en la resolución de estos ejercicios de construcción son los siguientes:

- i) Construir una figura auxiliar que cumpla la mayor cantidad posible de condiciones que se exigen para la figura buscada.
- ii) Construir la figura buscada, como imagen de la figura auxiliar por una transformación de semejanza.

Con el empleo de hojas de trabajo convenientemente elaboradas y distribuidas por el profesor, puede ahorrarse un tiempo considerable, tanto en clases como en el es-

tudio individual. De esta manera se logra que los alumnos se concentran en lo esencial de la construcción y se crean mejores condiciones para el control de los resultados.

En los siguientes ejemplos, se evidencia la complejidad de estos ejercicios de construcción en los que la idea de solución surge sólo después de profundas reflexiones sobre el contenido.

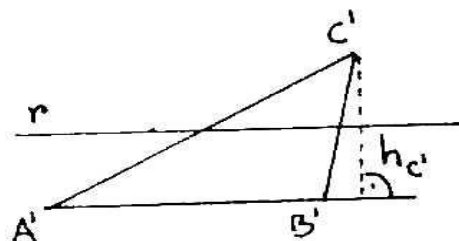
Ejemplo 11.17

Construye un triángulo ABC con  $a:c = 2:3$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $h_c = 1$  cm.

Plan de solución

1. Primeramente, se construye como figura auxiliar un triángulo  $A'B'C'$  con  $a' = 2$  cm,  $c' = 3$  cm y  $\alpha' = 30^\circ$ . Se traza además la altura  $h_{c'}$ .

Figura 11.16



2. El triángulo buscado es semejante el triángulo  $A'B'C'$ , pero con  $h_c = 1$  cm.

Este triángulo se obtiene trazando una recta  $r$  paralela a  $\overline{A'B'}$  que se encuentre a una distancia de  $C'$  igual a 1 cm.

3. Se hace coincidir  $C$  con  $C'$  y se completa el triángulo buscado ABC, cuyos vértices A y B están situados en las intersecciones de la recta  $r$  con los lados  $\overline{CA'}$  y  $\overline{CB'}$  (o con sus prolongaciones).

Ejemplo 11.18

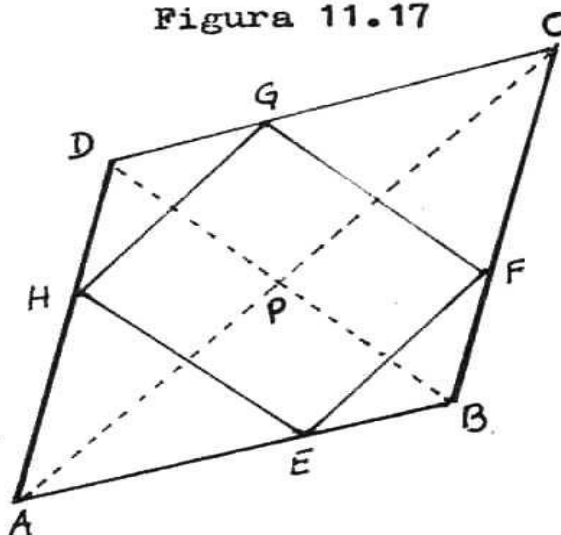
Inscribe un cuadrado en un rombo ABCD , con  $\overline{AB} = 6$  cm y  $\sphericalangle ABC = 110^\circ$ .

Pasos para resolver el ejercicio

1. Se lee cuidadosamente el texto del ejercicio y se analizan las condiciones dadas para la construcción. Estas condiciones se van resumiendo sistemáticamente y se construye una figura de análisis.

- a) ABCD debe ser un rombo, con  $\overline{AB} = 6$  cm y  $\sphericalangle ABC = 110^\circ$ .
- b) Cada vértice del cuadrado EFGH debe estar situado sobre uno de los lados del rombo ABCD.
- c) Las diagonales del rombo serán ejes de simetría del cuadrado (mediatrices de sus lados).

Figura 11.17



2. Se recuerda que ya han sido resueltos ejercicios similares (inscribir un cuadrado en un triángulo o en una semicircunferencia).

Siguiendo razonamientos análogos a los realizados con anterioridad, se llega a la conclusión de que existen varios cuadrados que cumplen las condiciones a) y c).

3. Se construye como figura auxiliar uno de estos cuadrados, es decir: se construye el rombo ABCD, se trazan sus diagonales y se construye un cuadrado de manera que estas diagonales sean mediatrices de sus lados.

Así pues, el cuadrado EFGH buscado es imagen de E'F'G'H' por una homotecia de centro en P.

4. Falta sólo la razón de homotecia para completar los datos necesarios para llevar a cabo la construcción, pero se conoce que la imagen de cada vértice del cuadrado imagen estará situada en la prolongación de una de las diagonales de E'F'G'H' y además en uno de los lados del rombo ABCD.

Se indica el procedimiento y se realiza la construcción.

5. Se comprueba que el cuadrilátero EFGH construido es efectivamente un cuadrado y se discute la unicidad de la solución.

Con respecto a la vía de solución, se reconocen otras, por ejemplo: considerar una de las diagonales del rombo como base de un triángulo isósceles, inscribir en este triángulo un rectángulo cuyos lados estén en la razón 1:2, y obtener por simetrización la figura completa tomando la misma diagonal del rombo como eje de simetría.

### Sobre el tratamiento del grupo de teoremas de Pitágoras

Con ayuda de los teoremas de la semejanza de triángulos, pueden deducirse con cierta facilidad otros teoremas que expresan relaciones en los triángulos rectángulos, entre ellos el teorema de Pitágoras.

Antes de proceder a la introducción de este grupo de teoremas en las clases de la asignatura, es necesario fijar algunos conceptos y denominaciones, así como ciertas proporciones básicas que se cumplen en todo triángulo rectángulo como las siguientes:

- La suma de las longitudes de los catetos es mayor que la longitud de la hipotenusa.
- La suma de los ángulos adyacentes a la hipotenusa es igual a  $90^\circ$ .
- Al mayor de los ángulos agudos se opone siempre el ma-

yor de los catetos.

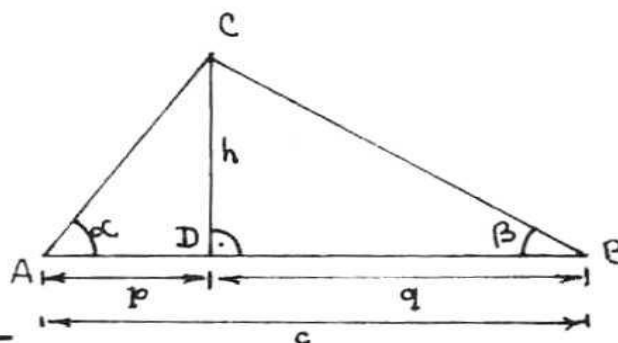
- Los catetos son además alturas del triángulo.
- La altura relativa a la hipotenusa divide al triángulo en otros dos triángulos semejantes a él.

Una vez fijadas estas relaciones, es posible construir con la activa participación de los alumnos el siguiente cuadro con su figura de análisis.

Cuadro 11.9

	$\Delta ABC$	$\Delta ADC$	$\Delta BDC$
Hipotenusa	c	b	a
Cateto opuesto al ángulo $\alpha$	a	h	p
Cateto opuesto al ángulo $\beta$	b	q	h

Figura 11.18



Dada la semejanza entre sí de estos triángulos, que los alumnos deben ser capaces de demostrar de forma independiente, se puede arribar a la formulación de un número relativamente alto de proposiciones. De ellas, conducen a teoremas importantes, aquellas en que se repite uno de sus elementos:

$$h:p = q:h \quad (\text{porque } \Delta ADC \sim \Delta BDC)$$

$$a:p = c:a \quad (\text{porque } \Delta ABC \sim \Delta BDC)$$

$$b:q = c:b \quad (\text{porque } \Delta ABC \sim \Delta ADC)$$

Los teoremas deducidos de esta manera, una vez enunciados, pueden ilustrarse con ayuda de las figuras que se reproducen a continuación.

Figura 11.19

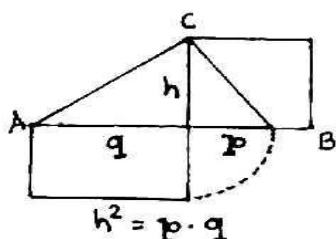


Figura 11.20

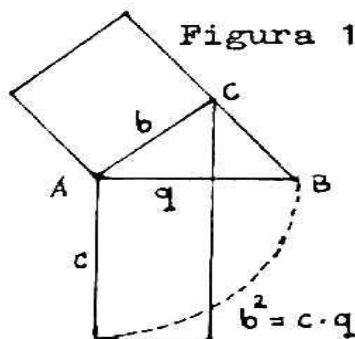
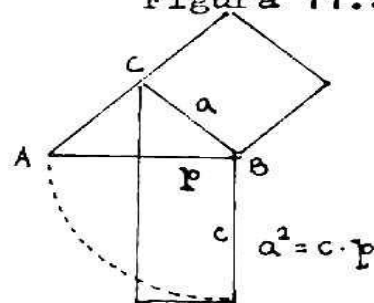


Figura 11.21



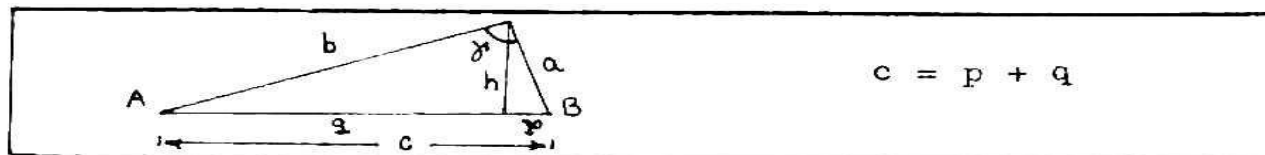
Estas ilustraciones constituyen un recurso para memorizar los teoremas de las alturas y de los catetos formulados como se ejemplifica seguidamente para el primero de los casos (Figura 11.19).

"En todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la altura relativa a la hipotenusa es igual a la del rectángulo construido con los segmentos que la altura determina sobre la hipotenusa".

Conocido el teorema de los catetos (Figuras 11.20 y 11.21), los alumnos deben llegar por sí solos a deducir el teorema de Pitágoras. De las igualdades  $b^2 = c \cdot q$  y  $a^2 = c \cdot p$ , se llega fácilmente a que  $a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q = c(p + q) = c^2$ .

Al hallar los recíprocos de estos tres teoremas, se insiste en el carácter reductivo de este procedimiento y en la necesidad de proceder a la demostración, para lo cual se emplea el método indirecto. El siguiente cuadro, que puede ser reproducido en un medio de enseñanza apropiado puede emplearse en la sistematización de dichos teoremas.

Cuadro 11.10



Teorema de Pitágoras: Premisa: $\gamma = 90^\circ$ Tesis: $c^2 = a^2 + b^2$	Recíproco del teorema de Pitágoras: Premisa: $c^2 = a^2 + b^2$ Tesis: $\gamma = 90^\circ$
Teorema de las alturas: Premisa: $\gamma = 90^\circ$ Tesis: $h^2 = p \cdot q$	Recíproco del teorema de las alturas: Premisa: $h^2 = p \cdot q$ Tesis: $\gamma = 90^\circ$
Teorema de los catetos: Premisa: $\gamma = 90^\circ$ Tesis: $a^2 = c \cdot p$ ( $b^2 = c \cdot q$ )	Recíproco del teorema de los catetos: Premisa: $a^2 = c \cdot p$ ( $b^2 = c \cdot q$ ) Tesis: $\gamma = 90^\circ$

### 11.5 Aspectos metodológicos esenciales del complejo de materia trigonometría

El contenido trigonométrico se enmarca dentro de la materia de enseñanza en la línea directriz Geometría. En sus orígenes la Trigonometría tuvo por objeto el estudio de las relaciones matemáticas entre los lados y ángulos, de un triángulo aplicándolas a la determinación de los elementos desconocidos *de este* cuando es conocido cierto número de ellos.

Actualmente la Trigonometría reúne en una teoría dos tipos muy diferentes de aplicaciones. Por una parte, los elementos trigonométricos pueden ser utilizados para estudiar las relaciones numéricas entre los lados y los ángulos de los triángulos y por otra parte pueden utilizarse para analizar los problemas relativos a los hechos periódicos.

Problemas dentro de la primera aplicación mencionada pueden presentarse en el deslindamiento de terrenos, la astronomía, y la mecánica, y del segundo tipo pueden presentarse en el estudio de fenómenos eléctricos, de la teoría de las vibraciones y en otras múltiples ramas de

la ciencia y de la ingeniería moderna.

El estudio de la Trigonometría puede iniciarse en el nivel secundario básico, con el tratamiento de las razones trigonométricas, para dotar a los alumnos de una herramienta que necesitan aplicar en contenidos físicos y matemáticos. El propósito fundamental de su tratamiento es que los alumnos comprendan y utilicen las definiciones de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo y que puedan aplicarlas a la resolución de ejercicios de cálculo, haciendo uso de las tablas trigonométricas.

En el ciclo de profundización se amplían las razones trigonométricas a ángulos cualesquiera y se introducen las funciones trigonométricas, sus gráficos y propiedades (en especial la periodicidad). Aquí se forman y desarrollan las habilidades de cálculo trigonométrico que ocupan el lugar central de este complejo en el ciclo. Además, se deben desarrollar habilidades en la resolución de ecuaciones trigonométricas y contribuir al desarrollo de la capacidad de demostrar mediante el tratamiento de las identidades trigonométricas.

Al finalizar su preparación en este nivel los alumnos deben estar capacitados para utilizar libremente sus conocimientos trigonométricos en la Geometría Analítica, en la Geometría del Espacio y en el trabajo con los Números Complejos.

Dentro de las situaciones típicas que están presentes con mayor fuerza en este complejo de materia tenemos:

- Los conceptos y sus definiciones.
- Los procedimientos de solución tanto heurísticos como algorítmicos.

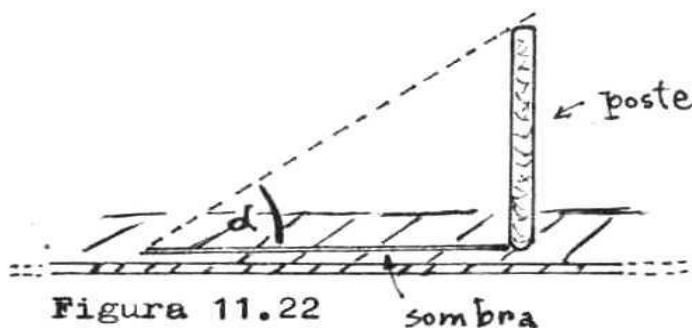
### Tratamiento de las razones trigonométricas

Una posibilidad para tratar metodológicamente las de-

definiciones de las razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, se describe a continuación.

Como condiciones previas hay que asegurar la aplicación del teorema de Pitágoras, los elementos de un triángulo rectángulo y relaciones entre ellos, concepto de semejanza de triángulos y teoremas correspondientes.

La motivación puede hacerse con una situación extramatemática como la siguiente: Determina la altura de un poste, si los elementos que se conocen son el ángulo de elevación  $\alpha$  y la longitud de su sombra.



Con los conocimientos que posee el alumno no es posible determinar la vía de solución, se les orienta entonces que es necesario estudiar nuevas relaciones entre lados y ángulos de un triángulo rectángulo, que permiten darle respuesta a problemáticas con estas características (determinar la longitud de un lado de un triángulo rectángulo, conocido un ángulo agudo y otro lado).

El problema puede motivarse intramatemáticamente, analizando que para un triángulo rectángulo se conocen relaciones para determinar un lado, conocido los otros dos (teorema de Pitágoras) y dados dos ángulos de un triángulo cualesquiera, se puede determinar el tercer ángulo (teorema de la suma de los ángulos interiores). En ambos casos se conocen dos elementos y se determina el tercero.

¿Podrá determinarse la longitud de un lado de un triángulo rectángulo conocido otro lado y un ángulo agudo, o dados dos lados determinar la amplitud de un ángulo agudo?

Se escuchan los criterios de los estudiantes y se precisa el problema objeto de estudio.

Discutir que para resolver el problema planteado, hay que trabajar con un triángulo rectángulo y buscar relaciones entre un ángulo agudo y dos lados cualesquiera, luego vamos a construir un gráfico. (Figura 11.23 a)

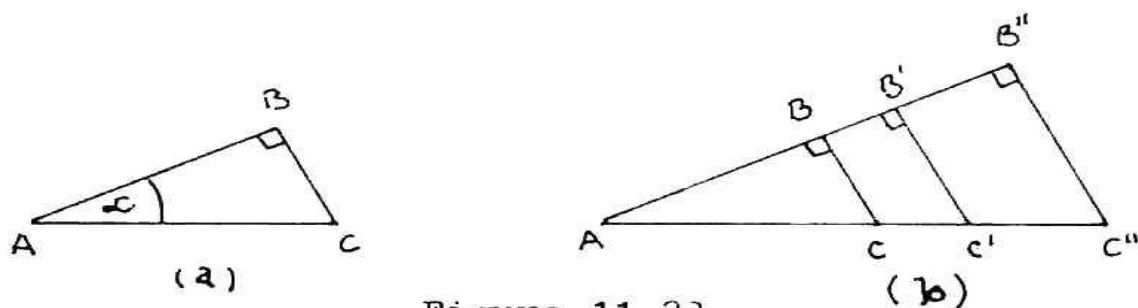


Figura 11.23

No es posible establecer ninguna relación entre esos elementos del triángulo ¿Y qué sucede si formamos otros triángulos rectángulos con el mismo ángulo agudo  $\alpha$ ? (Figura 11.23 b)

Se precisará en la búsqueda de relaciones que los triángulos obtenidos son semejantes.

¿Qué relación existe entre sus lados homólogos?

¿Variará la razón entre sus lados homólogos al formar otros triángulos rectángulos que tengan a  $\alpha$  como ángulo agudo? ¿Por qué?

Del análisis concluir que la razón entre los lados no depende de las longitudes de los lados del triángulo rectángulo.

¿Qué sucede si varía la amplitud del ángulo agudo?

Esta relación puede analizarse en una lámina que lleve el profesor y concluir que la razón depende de la amplitud del ángulo agudo escogido.

Indicar a los alumnos que formen razones entre los lados siguientes de los triángulos de la figura 11.23b

- a) cateto opuesto al ángulo  $\alpha$  y la hipotenusa.
- b) cateto adyacente al ángulo  $\alpha$  y la hipotenusa.
- c) cateto opuesto al ángulo  $\alpha$  y el cateto adyacente.

Plantear que las constantes obtenidas en cada caso son las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo (seno, coseno y tangente).

Introducir las notaciones correspondientes en cada caso y exigir a los alumnos que expresen con sus palabras la definición.

En las consideraciones finales destacar que pueden formarse otras razones (recíprocas a las obtenidas), pero que por el momento no son objeto de estudio, resaltar que para obtener la relación entre lados y ángulos de un triángulo rectángulo nos apoyamos en triángulos rectángulos semejantes y buscamos relaciones entre sus lados homólogos.

Retomar el ejercicio planteado en la motivación y discutir la vía de solución a emplear, resaltar que el seno del ángulo es un número (es la razón entre las longitudes de dos lados) que aparece en tabla.

En la fijación de las razones trigonométricas introducidas, hay que considerar toda la variedad posible en los ejercicios que se propongan a los alumnos, no deben faltar los siguientes:

- ⊙ ejercicios de cálculo trigonométrico (sin tablas y con tablas)
- ⊙ ejercicios formales y problemas (matemáticos y relacionados con la práctica).

Una vez concluido el estudio de este contenido en el nivel secundario, los alumnos deben dominar:

- Los valores del seno, coseno y tangente de un ángulo agudo determinado son únicos.
- En las razones trigonométricas se encuentran relacionadas las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo y la amplitud de uno de sus ángulos agudos, por lo que, conocidos dos de estos valores, podemos calcular el tercero.
- Los valores de las razones trigonométricas no dependen de las longitudes de los lados del triángulo, sino de las amplitudes de los ángulos agudos.

En el nivel preuniversitario lo fundamental a lograr en los alumnos es que memoricen las definiciones de las razones trigonométricas introducidas desde el nivel secundario (seno, coseno y tangente), y puedan aplicarlas al cálculo trigonométrico.

Un punto metodológico esencial para este nivel es el tratamiento de los valores de las razones trigonométricas de ángulos notables, cuyo objetivo es que los alumnos memoricen los valores de las razones de ciertos ángulos como el de 0; 30, 45; 60 y 90 grados, pues en gran medida el desarrollo de las habilidades en el cálculo trigonométrico dependen de dicha memorización, pero no mecánica, sino que es necesario que fijen esos valores de forma consciente y sean capaces de calcularlos, en caso necesario, si los olvidan.

Para lograr una memorización racional de los valores de las razones trigonométricas de los ángulos notables,

es necesario resaltar la necesidad de la tabulación de los más empleados, pues el proceso de dibujar el triángulo rectángulo según el ángulo dado, medir sus lados y calcular, no es posible hacerlo cada vez.

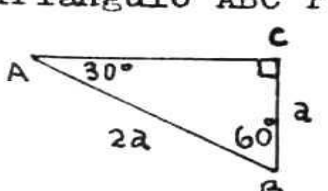
En una conversación de clase debe recordarse que en grados anteriores se demostró que "el lado de un triángulo rectángulo opuesto a un ángulo de 30° tiene una longitud igual a la mitad del lado opuesto al ángulo recto", luego esta relación puede ser aprovechada para la obtención de los valores de las razones trigonométricas de los ángulos de 30° y 60°.

Mediante una conversación de clase se precisará:

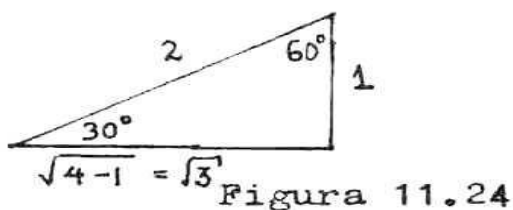
- ⊙ Características del triángulo rectángulo en cuanto a ángulos y longitud de sus dos lados (construir gráfico).
- ⊙ Cómo determinar la longitud del otro cateto.
- ⊙ Determinar para cada ángulo agudo los valores de las razones trigonométricas (30° y 60°).
- ⊙ Expresar los resultados obtenidos como teorema.

Las ideas esenciales se recogerán en un cuadro de pizarra como el siguiente.

Cuadro 11.11

	<p>Triángulo ABC rectángulo en C, el lado <math>c = 2a</math>, <math>\angle A = 30^\circ</math>.</p> <p><math>b = \sqrt{(2a)^2 - a^2}</math></p> <p><math>b = \sqrt{3a^2}</math></p> <p><math>b = \sqrt{3}a</math></p>	<p><math>\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}</math>      <math>\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}</math></p> <p><math>\text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}</math>      <math>\text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}</math></p> <p><math>\text{tan } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}</math>      <math>\text{tan } 60^\circ = \sqrt{3}</math></p>
<p><b>Teorema:</b> Si un triángulo es rectángulo con un ángulo agudo de 30° entonces se cumple que:</p> <p>a) <math>\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}</math>; <math>\text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}</math>; <math>\text{tan } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}</math></p> <p>b) <math>\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}</math>; <math>\text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}</math>; <math>\text{tan } 60^\circ = \sqrt{3}</math></p>		

Es importante analizar el procedimiento seguido en la obtención de los valores de las razones trigonométricas para los ángulos notables de  $30^\circ$  y  $60^\circ$ ; la relación establecida entre la longitud del lado opuesto al ángulo de  $30^\circ$  y la hipotenusa (1:2), constituye el núcleo del razonamiento y recordando esa razón es posible determinar conscientemente el valor de cada razón trigonométrica para ángulos agudos de  $30^\circ$  y  $60^\circ$ , basta realizar un esquema como el siguiente, calcular el otro cateto y aplicar la definición en cada caso.

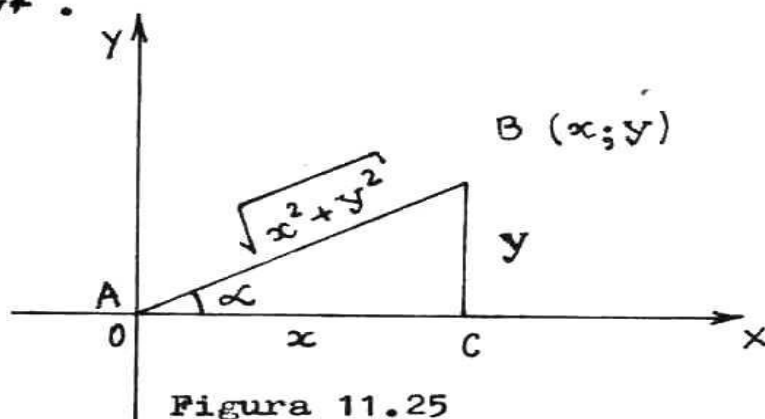


En el análisis perspectivo debe pensarse en triángulos rectángulos con características especiales en cuanto a lados o ángulos, similar al caso tratado, como conclusión se llegará al triángulo rectángulo isósceles, en el cual los catetos son iguales y los ángulos agudos de  $45^\circ$ . Procediendo análogamente se puede deducir un teorema para los valores de las razones trigonométricas de un ángulo agudo de  $45^\circ$ .

Se indicará este trabajo de forma independiente a los alumnos y se concluirá con una discusión del tratamiento realizado, precisar que la relación entre los catetos, es el centro del razonamiento para obtener los valores de las razones, hasta calcular la longitud de la hipotenusa y formar las razones.

Después de obtenidos los valores de las razones de los ángulos notables de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$ , se deben obtener los valores de las razones de los ángulos de  $0^\circ$  y  $90^\circ$ , para lo cual debemos hacer ver al alumno que no es posible hallarlos a partir de la construcción de un triángulo

como hicimos para los valores de los otros ángulos, sino que tenemos que ampliar las definiciones dadas para las razones trigonométricas, ahora en términos de las coordenadas rectangulares, donde el vértice A del triángulo ABC coincide con el origen y el eje "x" contiene el cateto b. La hipotenusa, según el teorema de Pitágoras queda expresada como  $\sqrt{x^2 + y^2}$ .



En esas condiciones las razones trigonométricas del ángulo  $\alpha$  pueden expresarse utilizando las coordenadas  $(x;y)$  del vértice B.

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \text{cos } \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \text{tan } \alpha = \frac{y}{x}$$

Si se le asigna  $0^\circ$  a  $\alpha$ , el punto B estará en el eje "x", si el ángulo  $\alpha = 90^\circ$ , el punto B estará en el eje "y".

Estas consideraciones nos permiten obtener los valores de las razones trigonométricas de los ángulos notables de  $0^\circ$  y  $90^\circ$ .

$$\text{sen } 0^\circ = 0$$

$$\text{sen } 90^\circ = 1$$

$$\text{cos } 0^\circ = 1$$

$$\text{cos } 90^\circ = 0$$

$$\text{tan } 0^\circ = 0$$

$$\text{tan } 90^\circ \text{ no definida.}$$

Cuando las razones se definen en términos de las coordenadas de un sistema rectangular, donde el origen se hace coincidir con el vértice de los ángulos, el concepto de ángulo se generaliza con ayuda del círculo trigonomé-

trico y esto nos permite calcular los valores de las razones trigonométricas para ángulos cualesquiera, inclusive de una amplitud mayor de una vuelta completa. Este cálculo lo podemos hacer aplicando el principio de analogía para ángulos cuyo lado terminal coincida con uno de los ejes, como sucede con los ángulos de  $180^{\circ}$  y  $270^{\circ}$ , pues cuando es de  $360^{\circ}$ , los valores de las razones trigonométricas coinciden con los del ángulo de  $0^{\circ}$ .

Para los restantes ángulos que no sean axiales, esto es, que su lado terminal no coincida con uno de los ejes, los valores de las razones trigonométricas se obtienen según el cuadrante donde se sitúe su lado terminal. El alumno debe concluir, guiado por impulsos adecuados del profesor, que esos valores coinciden en valor absoluto con los del ángulo agudo asociado al triángulo rectángulo del primer cuadrante y que el signo de las razones dependerá de los de las coordenadas correspondientes. Es necesario que el alumno memorice que para ángulos del segundo cuadrante el valor del seno es positivo y los restantes valores son negativos, para los del tercer cuadrante el valor de la tangente es positivo y los demás valores negativos y en el cuarto cuadrante el que es positivo es el coseno y los restantes son negativos.

Una vez lograda la comprensión del signo del valor de cada razón trigonométrica en los diferentes cuadrantes, puede apoyarse la memorización con un gráfico que racionalice el análisis.

Las expresiones  $(180^{\circ} - \alpha)$  para el segundo cuadrante,  $(180^{\circ} + \alpha)$  para el tercer cuadrante y  $(360^{\circ} - \alpha)$  para el cuarto cuadrante, permiten generalizar un procedimiento de cálculo que exige conocer el signo de las razones trigonométricas en los diferentes cuadrantes, por lo que en su fijación es necesario tratar ejercicios en los cuales dada una razón trigonométrica y el signo de otra razón (o el cuadrante al que pertenece el ángulo) se exija de-

terminar las restantes razones.

Las fórmulas de reducción correspondientes a cada cuadrante, son válidas para calcular los valores de las razones trigonométricas de ángulos cualesquiera. El profesor debe hacer énfasis en garantizar la comprensión por parte del alumno de la ampliación del concepto de ángulo; es decir, ángulos con una amplitud mayor de una vuelta, y lo que es más importante todavía; que los valores de las razones de estos ángulos mayores de una vuelta, coinciden con los de los ángulos que tienen su mismo lado terminal.

### Tratamiento de las identidades trigonométricas

En el preuniversitario se estudia la resolución de ecuaciones trigonométricas y la demostración de identidades.

En las ecuaciones trigonométricas, el alumno se encuentra por vez primera con la situación de que al resolverlas para un dominio determinado, su conjunto solución está formado por valores angulares y éste en muchas ocasiones es infinito.

El trabajo con las identidades permite aplicar los conocimientos trigonométricos y contribuir al desarrollo de la capacidad de demostrar. Es necesario que los alumnos memoricen un conjunto de identidades para emplearlas con seguridad y de forma racional en la resolución de los ejercicios, las mismas se clasifican en tres grupos:

■ Identidades fundamentales donde las razones que aparecen se refieren a un mismo ángulo.

$$\odot \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1$$

$$\odot \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \quad (x \neq \frac{\pi}{2})$$

$$\odot 1 - \tan x = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 x} \quad (x \neq \frac{\pi}{2})$$

$$\odot \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x$$

$$\odot \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Hay que entrenar a los alumnos en las formas en que pueden transformarse estas identidades para su aplicación.

- Identidades que relacionan las razones trigonométricas de un ángulo con los del ángulo complementario y también las llamadas fórmulas de reducción de los diferentes cuadrantes.

$$\odot \operatorname{sen} \alpha = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$\odot \cos (180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

- Identidades trigonométricas que se establecen para más de un ángulo.

$$\odot \operatorname{sen} (\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

$$\odot \cos (\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$$

En el tratamiento metodológico de las identidades es importante que los alumnos sepan diferenciar entre una ecuación y una identidad trigonométrica, aunque en general no resulta fácil identificarlas. Una ejercitación bien concebida proporciona una guía para la acción, aunque puede ayudar a decidir la siguiente regla práctica:

Si se puede determinar algún valor admisible que no satisfaga la igualdad, esta no es una identidad, aunque esa regla no indica cuando una igualdad es una identidad.

Según la definición de identidad su demostración debe probar que la igualdad se cumple para los valores admisibles de la variable.

No existen procedimientos de validez general para la demostración de identidades, aunque resulta útil emplear reglas especiales que contienen en sí las acciones y operaciones a realizar para la búsqueda de los medios que se

aplican a la demostración, entre ellas se destacan:

- ▣ Decidir el miembro menos complejo para trabajar.
- ▣ Descomponer en factores si es posible.
- ▣ Simplificar previamente antes de transformar.
- ▣ Reducir todas las expresiones trigonométricas a términos de seno y coseno.
- ▣ Sustituir una expresión según una identidad.
- ▣ Reducir un miembro a una misma razón.
- ▣ Transformar la igualdad a una identidad conocida.

Se recomiendan dos procedimientos generales de trabajo para la demostración de identidades: transformar un miembro en otro y trabajar en ambos miembros.

Para transformar un miembro en otro de la identidad hay que realizar dos pasos fundamentales.

1. Determinar todos los valores admisibles de las variables en cada miembro de la igualdad.
2. Transformar el miembro que resulte menos complejo de la igualdad, mediante procedimientos algebraicos e identidades conocidas, hasta obtener la forma exacta del otro miembro. Comprobar la reversibilidad de los pasos.

Se muestra a continuación una posibilidad de estructurar el proceder metodológico para la demostración de identidades trigonométricas transformando un miembro en otro.

Ejemplo 11.19 Demuestra la identidad para los valores admisibles de la variable.

$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 2 \sin^2 \alpha - 1$$

Indicaciones del profesor	Acciones de los alumnos
- Decida cuáles son los valores inadmisibles de $\alpha$	- La igualdad admite cualquier valor para $\alpha$ .
- Analiza en qué miembro existen más posibilidades	- El primer miembro puede descomponerse.

Indicaciones del profesor	Acciones de los alumnos
para trabajar.	
- ¿Cuál transformación realizar para simplificar la identidad?	- Descomponer en factores (diferencia de cuadrados).
- ¿Cómo simplificar la expresión obtenida?	$\begin{aligned} \text{sen}^4 \alpha - \text{cos}^4 \alpha &= 2 \text{sen}^2 \alpha - 1 \\ (\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha) (\text{sen}^2 \alpha - \text{cos}^2 \alpha) &= \\ &= 2 \text{sen}^2 \alpha - 1 \end{aligned}$
- Analiza cada miembro, ¿qué expresión conviene sustituir?	1. $(\text{sen}^2 \alpha - \text{cos}^2 \alpha) =$ $= 2 \text{sen}^2 \alpha - 1$
- ¿Cómo transformar lo que se tiene para obtener la forma exacta del miembro derecho?	- Conviene sustituir $\text{cos}^2 \alpha$ por $1 - \text{sen}^2 \alpha$
- Analiza si en cada transformación realizada está fundamentada la reversibilidad.	$\begin{aligned} \text{sen}^2 \alpha - (1 - \text{sen}^2 \alpha) &= \\ &= 2 \text{sen}^2 \alpha - 1 \end{aligned}$
	- Eliminar paréntesis y reducir términos semejantes.
	$\begin{aligned} \text{sen}^2 \alpha - 1 + \text{sen}^2 \alpha &= \\ &= 2 \text{sen}^2 \alpha - 1 \end{aligned}$
	$2 \text{sen}^2 \alpha - 1 = 2 \text{sen}^2 \alpha - 1$
	Pasos realizados:
	1. descomponer la diferencia de cuadrados
	2. sustituir $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha$ por 1.
	3. aplicar propiedad distributiva
	4. sustituir $\text{cos}^2 \alpha$ por $1 - \text{sen}^2 \alpha$
	5. eliminar paréntesis y reducir términos semejantes.

Para lograr éxito en este trabajo es necesario que los alumnos tengan dominio del cálculo algebraico básico y conozcan las identidades trigonométricas fundamentales, de manera que puedan realizar con seguridad las transformaciones necesarias en el miembro seleccionado, hasta obte-

ner la forma exacta del otro miembro. Es importante que al concluir la búsqueda de los medios y transformaciones a realizar, se precisen los pasos realizados y la reversibilidad de los mismos, de manera que se logre hacer consciente el por qué de cada acción efectuada y cómo proceder ante este tipo de ejercicio.

Al aplicar el procedimiento de trabajar en ambos miembros de la identidad, existen dos posibilidades para hacerlo: transformar ambos miembros de forma independiente hasta obtener la misma expresión en cada uno y transformar la identidad original en otra conocida.

El principio de trabajo del procedimiento consiste en:

1. Transformar la identidad en otra conocida, pueden afectarse ambos miembros, ya sea de forma independiente o conjunta.
2. Deducir la identidad de otras conocidas, invirtiendo los pasos dados en 1. (Comprobar la reversibilidad de los mismos).

Se analiza a continuación cómo proceder para demostrar una identidad trabajando en ambos miembros, según las dos posibilidades planteadas.

Ejemplo 11.20: Demuestra que  $(\cot x - \frac{1}{\operatorname{sen} x})^2 = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

Resolución:

Valores inadmisibles de la variable:  $x = \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$  .

- Se transforma el miembro izquierdo

$$\begin{aligned} \left(\cot x - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)^2 &= \cot^2 x - \frac{2 \cot x}{x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x - 2 \cos x + 1}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{(\cos x - 1)^2}{\operatorname{sen}^2 x} \end{aligned}$$

- Se transforma el miembro derecho.

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{(1 - \cos x)(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \frac{(1 - \cos x)^2}{1 - \cos^2 x} = \frac{(\cos x - 1)^2}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Comprobar:

$$\left(\cot x - \frac{1}{\sin x}\right)^2 = \frac{(\cos x - 1)^2}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \quad \left(x \neq \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right)$$

Los pasos realizados son reversibles, hemos utilizado solamente igualdades.

Ejemplo 11.21: Demuestra la identidad  $\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = \frac{\operatorname{cos} x}{1 - \operatorname{en} x}$

Resolución:

- Valores inadmisibles de la variable:  $x = \frac{\pi}{2} (2k+1); k \in \mathbb{Z}$
- Se multiplican ambos miembros por  $\operatorname{cos} x (1 - \operatorname{en} x)$  y se obtiene:
- $(1 + \operatorname{sen} x) (1 - \operatorname{sen} x) = \operatorname{cos} x \cdot \operatorname{cos} x$   
 $1 - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{cos}^2 x$

Se ha transformado la identidad original en otra, de la cual se sabe que es verdadera. La identidad no está demostrada pero se ha inducido una vía para su demostración.

La demostración se realiza invirtiendo los pasos es decir, comenzando con la igualdad conocida y terminando con la que deseamos demostrar.

- Demostración

- (1)  $1 - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{cos}^2 x$  identidad fundamental
- (2)  $(1 + \operatorname{sen} x) (1 - \operatorname{sen} x) = \operatorname{cos}^2 x$  descomponer en factores
- (3)  $\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = \frac{\operatorname{cos} x}{1 - \operatorname{sen} x}$  multiplicar ambos miembros por  $\frac{1}{\operatorname{cos} x (1 - \operatorname{sen} x)}$

Para invertir los pasos hay que estar seguro que todas las transformaciones realizadas son reversibles, si en alguna se introducen valores inadmisibles no pueden estar en el dominio de la identidad.

En el trabajo con estos ejercicios es necesario analizar las características de las identidades a demostrar, y

decidir la estrategia más conveniente a emplear. Este análisis puede ser dirigido de la forma siguiente:

- Iniciar la demostración por el miembro que dé más posibilidades para transformar. Si no es posible, aplicar el trabajo en ambos miembros (atender la reversibilidad de los pasos).
- Descomponer en factores o simplificar, si es posible.
- Reducir todas las funciones a senos y cosenos, si no encuentra un camino para empezar a transformar.

### Aplicaciones de la Trigonometría a la Geometría

Aprovechando los conocimientos adquiridos por los alumnos en relación con los elementos de la Trigonometría, se aplican a la resolución de problemas geométricos y de la práctica. En este trabajo hay que activar los conocimientos geométricos de los alumnos aprovechando su relación con la Trigonometría.

Se trata la resolución de triángulos de forma sistemática primero mediante las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, después la de triángulos cualesquiera aplicando la ley de los senos, la ley de los cosenos, y una expresión trigonométrica para el área de un triángulo.

La resolución de triángulos cualesquiera, además de su significado para la Geometría, se aplica a la resolución de problemas de la práctica.

Dentro de las condiciones previas que se deben asegurar están las referidas a las relaciones que ligan los tres lados y los tres ángulos de un triángulo cualquiera, de modo que conocidos tres de estos elementos, uno de los cuales al menos debe ser un lado, es posible calcular los restantes. A este cálculo de los elementos desconocidos es lo que se llama resolver un triángulo.

Sabemos que no todos los elementos de un triángulo pueden ser dados independientemente, pues existen ciertas relaciones que deben cumplirse. Estas relaciones ligan los elementos de modo que conocidos tres de ellos, es posible en ciertos casos calcular los restantes, ya que:

Un triángulo está determinado unívocamente si se conocen:

- Los tres lados  $(l, l, l)$
- Dos lados y el ángulo comprendido  $(l, a, l)$ .
- Un lado y los dos ángulos adyacentes  $(a, l, a)$ .

En la resolución de triángulos rectángulos el alumno debe llegar a la conclusión que basta con conocer dos elementos, pues siempre tiene un ángulo recto. Los estudiantes cuentan con los medios matemáticos necesarios para el cálculo de estos triángulos: las razones trigonométricas, el teorema de Pitágoras y la relación entre los ángulos complementarios.

En estos momentos hay que insistir en cómo proceder para calcular un triángulo rectángulo, destacar la necesidad de representar en un gráfico los elementos conocidos y desconocidos (auxiliarse de lápices de colores), escoger una relación que ligue a los elementos dados y el que se va a determinar, realizar las transformaciones convenientes y calcular.

Con esta sucesión de pasos se propicia que el alumno trabaje de forma ordenada. Se puede lograr que la interiorice y la fije a través de una cuidadosa selección de ejercicios en los que se varían las condiciones dadas y se exija establecer diferentes relaciones de los estudiadas.

La resolución de triángulos rectángulos se aplica a la solución de problemas relacionados con la práctica, para lo cual hay que lograr la comprensión de los términos

siguientes: visual, ángulo de elevación, ángulo de depresión y otras.

La aplicación del procedimiento de calcular un triángulo rectángulo a situaciones de la práctica debe motivarse a partir de situaciones de la vida diaria, destacando a través de una lámina o esquema que la situación descrito modela un triángulo rectángulo y los elementos dados y pedidos representan lados y ángulos del triángulo.

Es aconsejable que el texto de los problemas esté relacionado con los intereses y vivencias de los escolares, así se hace más comprensible y amena la situación planteada.

Ejemplo 11.22: Un muchacho está empujando un papalote: El largo del cordel es de 100,0 m y el ángulo de elevación del papalote es de  $55^\circ$ . Hallar la altura a que se encuentra el papalote (admitiendo que el hilo no forma ondas y sin tener en cuenta la altura del muchacho).

- Dibujamos un triángulo rectángulo denotando los elementos conocidos y el desconocido.

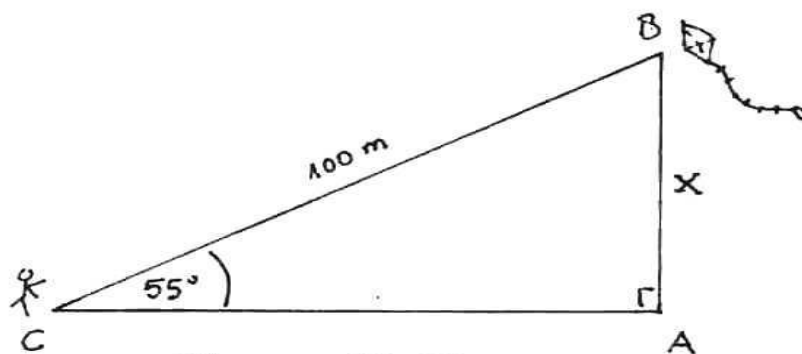


Figura 11.26

- El elemento desconocido es un cateto, los conocidos son la hipotenusa y el ángulo agudo opuesto al cateto desconocido. La relación que directamente resuelve el problema es:

$$\text{sen } 55^\circ = \frac{x}{100}$$

y despejando  $x$ , se tiene  $x = 100 \cdot \text{sen } 55^\circ$

Como  $55^\circ$  no es un ángulo notable, se busca en la tabla el valor del seno. De donde  $x = 100 \cdot 0,8192$

Efectuando el producto y redondeando el resultado se obtiene:  $x = 82,0$  m.

Respuesta: La altura a que se encuentra el papalote es de 82,0 m.

Es importante que el análisis del ejercicio y la búsqueda de la idea de solución se estimule mediante impulsos, como los siguientes:

- ⊙ ¿Qué nos piden hallar?
- ⊙ ¿Qué elementos nos dan como datos?
- ⊙ Representa la situación descrita en un gráfico.
- ⊙ Expresa los datos y la incógnita según la figura.
- ⊙ ¿Con qué figura matemática se ha representado la situación descrita en el problema?
- ⊙ ¿Qué relación del triángulo rectángulo asocia los elementos dados y el buscado?
- ⊙ ¿Cómo proceder entonces para resolver la situación?

En las consideraciones finales del problema además de evaluar la solución y la vía, es importante que se varíen las condiciones para generalizar la forma de trabajo empleada, formulando interrogantes como los siguientes:

- ¿Y cómo proceder para hallar el ángulo de elevación conocida la altura del papalote y la longitud del cordel?
- ¿Cómo hallar la altura del papalote conocido el ángulo de elevación y la distancia  $\overline{AC}$ ?

Se analizó como calcular un triángulo rectángulo dados dos elementos. Conocemos que el área de un triángulo se calcula mediante la fórmula  $A = \frac{b \cdot h}{2}$ , donde  $h$  es la altura

relativa al lado dado. En un triángulo rectángulo se tiene que los lados que forman el ángulo recto (catetos) son perpendiculares entre sí, luego puede determinarse el área por el semiproducto de los catetos,  $A = \frac{a \cdot b}{2}$ . Esta relación permite calcular siempre el área de un triángulo rectángulo conocidos dos lados, de no conocerse ambos catetos, puede calcularse el que falta por el teorema de Pitágoras.

Puede razonarse mediante una búsqueda parcial, en la posibilidad siguiente:

Si conocemos lados y ángulos de un triángulo rectángulo, ¿será posible calcular el área de un triángulo rectángulo?

¿Cómo expresar la longitud de un lado de un triángulo rectángulo con esos elementos? (ángulos y lados)

Determine una fórmula para calcular el área de un triángulo ABC rectángulo en C, si se conoce a, c y  $\beta$ .

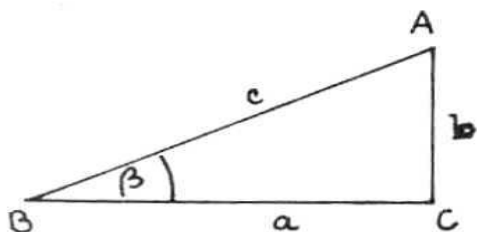


Figura 11.27

a es un cateto, c es la hipotenusa ángulo  $\beta$  es conocido.

$$(1) A = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$(2) b = c \text{ sen } \beta$$

$$(c) A = \frac{a \cdot c \text{ sen } \beta}{2}$$

Luego, en un triángulo rectángulo, el área puede determinarse conocido dos lados y el ángulo comprendido.

Para la resolución de triángulos cualesquiera se estudian la ley de los senos (ver ejemplos 2.4b y 3.13), la ley de los cosenos y una expresión trigonométrica para el área de un triángulo (ver ejemplo 3.10).

En la resolución de triángulos cualesquiera se le concede gran importancia al enfoque geométrico, es por eso

que en el enunciado de la ley de los senos (generalizada) no sólo plantea la igualdad de las razones entre un lado y el seno del ángulo opuesto, además se expresa la igualdad con el diámetro de la circunferencia circunscrita. Este teorema expresado así, permite relacionar la trigonometría con características asociadas al triángulo y brinda la posibilidad de plantear y resolver problemas de naturaleza geométrica tales como: cálculo sobre polígonos regulares, cálculo en figuras planas y cuerpos, cálculo de áreas y demostraciones de propiedades.

La resolución de triángulos cualesquiera, además de su significado para la Geometría, se aplica a la resolución de problemas de la práctica.

Existen posibilidades diferentes para tratar la expresión para el cálculo de área de un triángulo cualquiera, utilizando elementos de la trigonometría. Una puede ser, a partir de la relación que se conoce para el triángulo rectángulo ( $A = \frac{a \cdot c \operatorname{sen} \beta}{2}$ ) y tratar de generalizarla a un triángulo cualquiera, esta se logra recurriendo a triángulos rectángulos con el trazado de la altura a un lado. La relación debe ser demostrada para todo triángulo según sus ángulos.

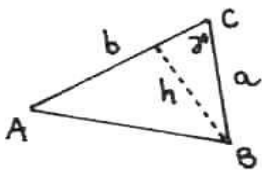
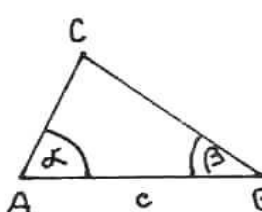
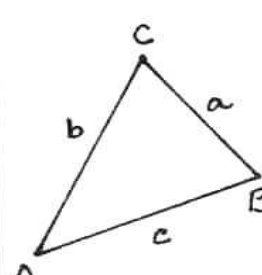
Otra posibilidad de tratamiento consiste en plantear la tarea, como un ejercicio de demostración.

"Demuestra que el área de un triángulo es igual al semiproducto de las longitudes de dos lados por el seno del ángulo comprendido entre ellos". Hay que resaltar la necesidad de considerar la validez para ángulos agudos, obtusos y rectos.

Un trabajo interesante para sistematizar los criterios de igualdad de triángulos y la relación con las fórmulas para el cálculo del área, puede hacerse mediante un trabajo investigativo en el que se establezcan dependencias entre los criterios, elementos que aparecen en la fórmula

y medios fundamentales para la obtención de la misma.

Cuadro 11.12

Criterios	Fórmulas	Medios fundamentales	
(1) l.a.l.	$A = \frac{1}{2} a.b.\text{sen } \gamma'$	Dado: $O; \gamma'; b$ 	$A = \frac{b.h}{2}$ $h = a.\text{sen } \gamma'$
(2) a.l.a.	$A = \frac{c^2 \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta}{2 \text{sen}(\alpha + \beta)}$	Dado: $\alpha; c; \beta$ 	$A = \frac{a.c.\text{sen } \beta}{2}$ $a = \frac{c.\text{sen } \alpha}{\text{sen } \gamma'}$ $\text{sen } \gamma' = \text{sen}(180^\circ - (\alpha + \beta))$ $= \text{sen}(\alpha + \beta)$
(3) l.l.l.	$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ donde $p = \frac{a+b+c}{2}$	Dado: $a; b; c$ 	$A = \frac{b.c.\text{sen } \alpha}{2}$ $\text{sen } \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ $1 - \cos^2 \alpha = (1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)$ $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $(b \pm c)^2 = b^2 \pm 2bc + c^2$

En los ejercicios que se propongan para resolver un triángulo cualquiera, podemos seguir una sucesión de pasos similar a la que se utilizó en el caso de los triángulos rectángulos y aplicando el principio de analogía proceder a su resolución, teniendo en cuenta que ahora se va a utilizar el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, la ley de los senos, la ley de los cosenos y la fórmula para el área de un triángulo. Aquí es válido también lo que planteamos anteriormente en el caso

de la resolución de los triángulos rectángulos, para garantizar que el alumno interiorice y fije las nuevas leyes, es necesario una cuidadosa selección de los ejercicios, de manera que se apliquen los teoremas a situaciones diversas y el estudiante comprenda, que los conocimientos matemáticos le son necesarios para conocer y resolver problemas de la ciencia y del mundo que le rodea.

### Ejemplo 11.23

La distancia entre dos refugios P y Q es de 426 m y los ángulos que forma dicha distancia con las visuales dirigidas a la entrada de un túnel popular R, son de  $70,4^\circ$  y  $44,2^\circ$ . Calcula la distancia que hay del refugio P a la entrada del túnel.

Resolución:

Se comienza interpretando el problema, lo que concluirá con una representación gráfica de la situación descrita.

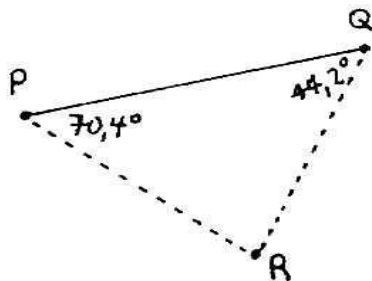


Figura 11.28

- $\overline{PQ} = 426$  m (distancia entre los refugios)
- $\angle QPR = 70,4^\circ$  y  $\angle PQR = 44,2^\circ$
- Hay que hallar la longitud de  $\overline{PR}$  (distancia del refugio P a la entrada del túnel).

Se forma un triángulo PQR del que se conocen un lado y los ángulos adyacentes. Tenemos que hallar la longitud del lado  $\overline{PR}$ .

La relación que conviene utilizar es la ley de los senos, pero para ello necesitamos determinar la amplitud del tercer ángulo.

$$\sphericalangle PRQ = 180^\circ - (70,4^\circ + 44,2^\circ)$$

$$\sphericalangle PRQ = 65,4^\circ$$

$$\frac{\overline{PQ}}{\text{sen } \sphericalangle PRQ} = \frac{\overline{PR}}{\text{sen } \sphericalangle PQR}$$

$$\overline{PR} = \frac{\overline{PQ} \cdot \text{sen } \sphericalangle PQR}{\text{sen } \sphericalangle PRQ}$$

$$\overline{PR} = \frac{426 \cdot \text{sen } 44,2^\circ}{\text{sen } 65,4^\circ}$$

$$\overline{PR} = \frac{426 \cdot 0,6972}{0,9092}$$

$$\overline{PR} \approx 327$$

Respuesta: La distancia entre el refugio P y la entrada del túnel es de 327 m aproximadamente.

El trabajo con los ejercicios de aplicación requiere que se analicen bajo dirección algunos ejemplos y que se precisen indicaciones para organizar la búsqueda de la idea de solución.

Ante cada ejercicio los estudiantes deben:

1. Leer el texto detenidamente hasta comprender la situación planteada.
2. Representar en un gráfico la situación descrita en el texto del ejercicio, destacando los elementos dados y los que se buscan.
3. Determinar, si es necesario calcular algún elemento auxiliar.
4. Seleccionar los medios matemáticos que relacionan los elementos dados y buscados.
5. Expresar las relaciones matemáticas que conducen a la solución, según los elementos dados y buscados.
6. Calcular según las expresiones obtenidas.
7. Comprobar los resultados calculados.

8. Dar la respuesta al problema planteado.

Esta sucesión de indicaciones para la acción se puede utilizar en los ejercicios que exijan la aplicación de las relaciones trigonométricas estudiadas. La experiencia ha demostrado que aún sucesiones de indicaciones para la acción suficientemente detalladas, no siempre garantizan un transcurso fluido del proceso de solución.

El profesor debe controlar qué acciones resultan difíciles a los alumnos, y ofrecer impulsos que le ayuden a pensar, de manera que asimilen las formas de trabajo y pensamiento matemático que le permitan capacitarse en la resolución independiente de estos ejercicios.

#### 11.6 Tratamiento metodológico de la Geometría Analítica.

Se sabe que la Geometría, tanto plana como espacial, puede enfocarse en la Matemática desde dos puntos de vista diferentes: o bien sintéticamente, o bien analíticamente.

Ya se han realizado consideraciones para el tratamiento metodológico de la Geometría escolar, sobre un enfoque sintético, ahora se hará con un enfoque analítico.

El estudio de la Geometría Analítica en la escuela no se realiza como es tradicional en la Matemática, a partir del concepto de espacio vectorial. Se ofrecen rudimentos para trabajar con los métodos analíticos y vectoriales, a partir de los conocimientos que poseen los estudiantes de grados anteriores, que en lo fundamental se describen seguidamente.

En el segundo ciclo de la enseñanza primaria se introduce el sistema de coordenadas y la representación de puntos en el primer cuadrante, trabajo que se profundiza y consolida con la confección de gráficos para representar la proporcionalidad directa, los por cientos y las clases de funciones. En este ciclo además, se introduce el concepto de vector al estudiar los movimientos del plano, lo

que se aplica también en la secundaria básica y se profundiza en la asignatura de Física, al caracterizar magnitudes que con solo conocer su valor no es suficiente, es necesario su dirección y sentido. Se definen geométricamente la suma y resta de vectores y la multiplicación de un vector por un escalar.

También en la secundaria básica se define el concepto de circunferencia como lugar geométrico, se caracterizan sus elementos y se estudian relaciones de posición entre una circunferencia y una recta, así como entre dos circunferencias. Al estudiar las funciones lineales se trata la ecuación general, de la recta:  $AX + BY + C = 0$  con  $x, y \in \mathbb{R}$ ;  $A$  y  $B$  no nulos simultáneamente. En las funciones cuadráticas se introduce "parábola" como la curva que se obtiene de la representación gráfica de los puntos cuyas coordenadas se determinan por la ecuación  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ ;  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ;  $x \in \mathbb{R}$ . En la función de proporcionalidad inversa  $f(x) = \frac{k}{x}$ ,  $x \neq 0$ ,  $k \in \mathbb{R}^*$ , se le denomina hipérbola equilátera a la curva que se obtiene al representarla.

#### Exigencias fundamentales de los programas de la escuela en relación con la enseñanza de la Geometría Analítica

En los programas aparecen objetivos dirigidos a los tres campos de la enseñanza de la Matemática, los que se relacionan a continuación.

Con respecto al saber y al poder se debe lograr que los alumnos puedan:

- Explicar las definiciones de los conceptos fundamentales: Lugar geométrico, coordenadas de un vector, vector de posición de un punto, vector director de una recta, acciones cónicas como lugares geométricos (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola) y sistema de coordenadas en el espacio.

- Aplicar al análisis de propiedades geométricas y situaciones prácticas, teoremas importantes referidos a: fórmulas básicas, ecuación cartesiana de la recta, condiciones de paralelismo y de perpendicularidad, operaciones con vectores definidas en coordenadas, ecuación paramétrica de la recta, ecuaciones de las secciones cónicas, ecuación de un plano y ecuación de una recta en el espacio.
- Aplicar los procedimientos sobre el trabajo con las fórmulas básicas, las ecuaciones de la recta en el plano y en el espacio, el cálculo de vectores, las ecuaciones de las secciones cónicas y la determinación de ecuaciones de planos.
- Definir los conceptos fundamentales a partir del reconocimiento de sus características esenciales.
- Demostrar de forma independiente propiedades de las figuras geométricas elementales aplicando el método analítico.
- Aplicar las relaciones de paralelismo y perpendicularidad de rectas al cálculo geométrico y a la escritura de ecuaciones de rectas.
- Aplicar los procedimientos analíticos en la resolución de ejercicios de cálculo y determinación de las ecuaciones de los lugares geométricos estudiados.

En relación con el desarrollo intelectual general se contribuye a:

- Continuar desarrollando las operaciones mentales de análisis, síntesis, comparación, abstracción, entre otras, mediante la solución de ejercicios, la formación de conceptos y el trabajo con los teoremas.
- Trabajar para desarrollar el pensamiento lógico de los alumnos mediante:
  - . la resolución de problemas diversos,

- . la utilización de procedimientos lógicos deductivos y reductivos,
- . la elaboración de conceptos y su asimilación.
- Desarrollar el adiestramiento lógico-lingüístico a través de la:
  - . Formulación de suposiciones,
  - . búsqueda de demostraciones y su representación,
  - . fundamentación de suposiciones,
  - . explicación de procedimientos de trabajo,
  - . utilización sistemática de variables, como una forma natural de expresión del lenguaje matemático,
  - . explicación y definición de conceptos.
- Asimilar los procedimientos para la racionalización del trabajo mental, al enfrentarse a diferentes situaciones donde es conveniente emplear la analogía, la reducción, la diferenciación de casos, etcétera.
- Desarrollar el poder de imaginación espacial, al imaginarse objetos en el plano y en el espacio, así como, las relaciones entre ellos, sobre la base de los datos ofrecidos en la situación planteada.

El tratamiento de la Geometría Analítica tiene potencialidades para contribuir a la educación ideológica de los alumnos si se logra:

- Motivar la introducción de determinados contenidos por necesidades prácticas e insuficiencias de la propia ciencia Matemática.
- Aplicar los métodos analíticos a la resolución de problemas de la vida práctica.

Estas situaciones contribuyen a que los estudiantes comprendan la relación entre Matemática y realidad objetiva y que los conocimientos matemáticos constituyen un va-

lioso instrumento para conocer y transformar el medio en que viven y de esta forma contribuir a la formación de la concepción científica del mundo.

- La resolución de los ejercicios y problemas, en la Geometría Analítica, así como su revisión, pueden contribuir (si se estimula adecuadamente) al desarrollo de rasgos de la personalidad como: la perseverancia, la constancia, el esmero, la limpieza y orden en el trabajo, el espíritu crítico y autocrítico, la valoración, y otros.

Al analizar los objetivos y la materia de enseñanza para el tratamiento de la Geometría Analítica en el preuniversitario, se determinan los aspectos metodológicos esenciales siguientes:

- . La obtención de las fórmulas básicas y su aplicación a la resolución de ejercicios de cálculo y de demostración.
- . El estudio de la recta en el plano y en el espacio.
- . Identificación de las curvas de segundo orden mediante sus ecuaciones y su determinación a partir del gráfico.

Seguidamente se ofrecen indicaciones para estructurar el proceso de enseñanza al abordar estos aspectos.

#### Observaciones metodológicas para la obtención de las fórmulas básicas y su aplicación

En secundaria básica se introduce el tratamiento de la recta como función y se realiza un breve estudio analítico de la misma, que se aplica para interpretar la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Al estudiar la Geometría Analítica de la recta en el plano, se introduce el método de coordenadas o analítico como un instrumento de trabajo que se aplica a la obtención de algunas fórmulas fundamentales, como las que expresan: la distancia entre dos puntos, la pendiente de una recta conocidos dos puntos de la misma, las relaciones de para-

lelismo y perpendicularidad de dos rectas, las coordenadas del punto medio de un segmento y, en general a todo el trabajo que se realiza con la ecuación de la recta y su aplicación al estudio de propiedades ya conocidas de la geometría elemental (figuras limitadas por rectas) y los vectores.

En el tratamiento metodológico de estas relaciones hay que evitar que su estudio se convierta en una memorización mecánica de fórmulas y una aplicación formal, por el contrario, hay que lograr que los alumnos comprendan que el dominio de la Geometría Analítica proporciona un método de trabajo que permite resolver numerosos problemas teóricos y prácticos, así como obtener nuevas fórmulas y resultados cuando es necesario.

Para cumplir esta exigencia, se hace necesario estructurar el tratamiento de los contenidos de manera que se estimule en los alumnos la necesidad de buscar los nuevos resultados a partir de necesidades objetivas, que no pueden resolver con los métodos conocidos, en tal sentido, es útil seleccionar motivaciones apropiadas que pongan al estudiante frente a un problema y organizar la búsqueda de su solución empleando métodos que propicien un nivel de asimilación productivo en los estudiantes.

#### Ejemplo 11.24

Fórmula para determinar la distancia entre dos puntos del plano conocidas sus coordenadas.

El tratamiento de este teorema puede realizarse por vías diferentes; la que proponemos, consiste en deducirlo a través de una conversación de clase, que estimule la actividad cognoscitiva de los alumnos y se apropien de la utilidad del método analítico.

A continuación se relacionan las principales actividades del profesor y de los alumnos.

Actividades del profesor

- ¿Cómo determinar la distancia entre dos puntos?
- ¿Y siempre es posible medir este segmento?
- ¿Será esto posible si los puntos están separados por un río, por un lago, una montaña?  
(Puede mostrarse una lámina).
- ¿Cómo proceder cuando existe un obstáculo entre ellos?
- ¿Será posible obtener las coordenadas de esos puntos en un sistema de coordenadas convenientemente prefijado?
- Será entonces de gran utilidad, hallar una expresión que permita calcular la distancia entre dos puntos del plano dadas sus coordenadas, vamos a proponernos esa tarea en la clase.
- Mostrar una lámina (Figura 11.29a)

R.H. Análisis de casos especiales.

- ¿Qué posición tiene el segmento  $P_1P_2$  con respecto al eje  $x$ ?
- Si proyectas el segmento  $\overline{P_1P_2}$  sobre el eje  $x$ , obtienes un nuevo segmento.

Actividades de los alumnos

- Midiendo el segmento que los une.
- No siempre es posible obtener la distancia por medición.
- Dan sus criterios.
- Sí.
- Escuchar y atender.
- Observar y analizar.
- $P_1P_2$  es paralelo al eje  $x$ .
- Son iguales.

Actividades del profesor

¿Qué relación puedes establecer entre ambos segmentos?

- ¿Cómo determinar la distancia entre los puntos  $P_1$  y  $P_2$  a partir de sus coordenadas?

$$d(P_1; P_2) = |x_1 - x_2| = |1 - 5| = 4$$

(Aclarar que empleamos módulo; porque la diferencia puede ser positiva o negativa, pero la distancia entre dos puntos es una magnitud positiva).

- Se presenta una lámina como la siguiente (Figura 11.29b)
- Se procede análogamente el caso anterior.
- Continuar variando las condiciones, preguntar para ello:

¿Cómo determinar ahora la distancia entre  $P_1$  y  $P_2$  si el segmento no es paralelo a ninguno de los ejes coordenados.

Presentar la siguiente lámina (Figura 11.29c).

- Si los estudiantes no pueden responder, indicar:

Actividades de los alumnos

Restando las abscisas.

- Observar la lámina, analizar las preguntas formuladas.
- Responder a las indicaciones dadas.
  
- Observar la lámina y expresar sus criterios.

Actividades del profesor

- ¿Podrán obtenerse en la figura segmentos paralelos a los ejes, con esas coordenadas? ¿Cómo? (Figura 11.29d).

P.H. Reducción

P.H. Trazado de líneas auxiliares.

- ¿Qué coordenadas tiene el punto P?
- ¿Cuáles son las distancias de P a los puntos P<sub>1</sub> y P<sub>2</sub>?
- Aún no hemos determinado la distancia de P<sub>1</sub> a P<sub>2</sub>; sin embargo conocemos la de P a P<sub>1</sub> y de P a P<sub>2</sub>.

¿Será posible hallarla a partir de lo que tenemos? ¿Cómo?

R.H. Comparar lo que se tiene con lo que se busca.

R. H. Recordar relaciones del dominio matemático correspondiente.

- ¿Qué problema nos propusimos resolver al inicio?

Actividades de los alumnos

Sí, trazando una paralela al eje x por P<sub>2</sub> y una paralela al eje y por P<sub>1</sub> así obtenemos los segmentos  $\overline{PP_2}$  y  $\overline{PP_1}$ .

P (1; 1,5) o sea P(x<sub>1</sub>; y<sub>2</sub>)  
 $d(P_1; P) = |4,5 - 1,5| = 3$   
 $d(P_2; P) = |5 - 1| = 4$

- Sí, mediante el teorema de Pitágoras.

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{\overline{PP_1}^2 + \overline{PP_2}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$= 25 = 5$$

- Hallar una expresión para calcular la distancia entre dos puntos del plano dados por sus coordenadas.

Actividades del profesor

- Exprésela según las coordenadas dadas para dos puntos cualesquiera del plano.

[P.H. Generalización.]

(Destacar que el ordenamiento de las coordenadas puede tenerse en cualquier orden, pues la distancia es única, por lo que las expresiones  $(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2$  y  $(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$  son equivalentes).

- Escribe la expresión en forma de teorema.

- Precisemos cómo representar la demostración de este teorema:

- Separen premisa y tesis.

[R.H. Separar lo dado y lo buscado.]

- ¿Qué teorema aplicar en la demostración?
- ¿Se utilizó directamente o hubo que rea-

Actividades de los alumnos

$$d(P_1; P_2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

Si  $P_1(x_1; y_1)$  y  $P_2(x_2; y_2)$  son puntos cualesquiera de un plano, entonces la distancia entre ellos se calcula.

$$d(P_1; P_2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

P:  $P_1(x_1; y_1)$  y  $P_2(x_2; y_2)$  puntos del plano.

T:  $d(P_1; P_2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$

- El teorema de Pitágoras.
- Fue necesario trazar líneas auxiliares para formar el

Actividades del profesor

lizar algún trabajo previo?

- ¿Qué pasos seguir en la representación de la demostración?

- Indicar realizar de forma independiente la representación de la deducción del teorema.

Actividades de los alumnos

triángulo rectángulo.

- Pasos a seguir.

1. Trazar las líneas auxiliares convenientes.

2. Aplicar el teorema de Pitágoras.

3. Transformar la expresión hasta llegar a la tesis.

- Trabajar independientemente.

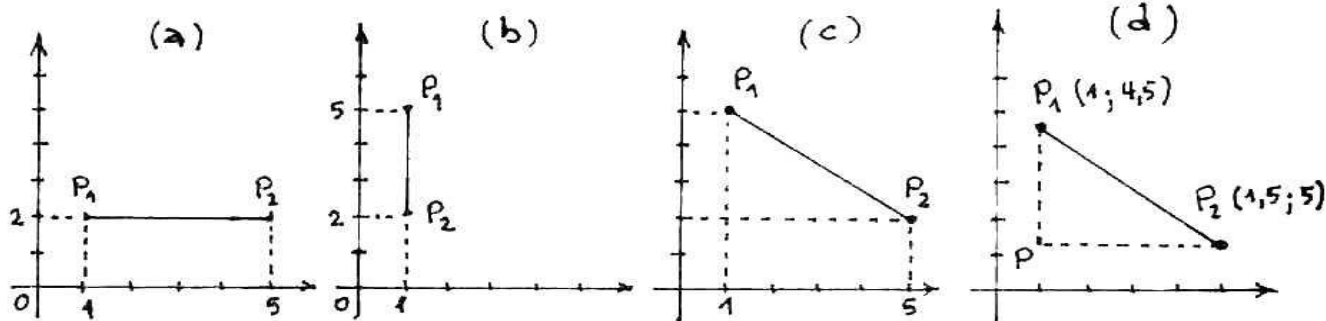


Figura 11.29

Al realizar las consideraciones retrospectivas y perspectivas precisar:

¿Qué hemos deducido?

¿Cómo llegamos a la fórmula?

¿Puede aplicarse el método en algún otro problema similar?

¿Cómo determinar la distancia entre dos puntos en el espacio tridimensional?

Los ejercicios para fijar las fórmulas básicas que

aparecen en el libro de texto son variados y están dirigidos a aplicar propiedades ya conocidas de la geometría plana, permitiendo reactivarlas y que se apropien de otras nuevas.

Para la selección y graduación de los ejercicios que se indican a los estudiantes dirigidos a fijar las fórmulas básicas, hay que incluir en las coordenadas de los puntos dados números enteros, fraccionarios, racionales y reales. Por otra parte, los mismos deben abarcar las dificultades siguientes:

- Ejercicios formales de cálculo aplicando las fórmulas básicas. El nivel de exigencia puede elevarse considerando las posibilidades siguientes: aplicarlas directamente, transformarlas para determinar alguna de las coordenadas, que sea necesario decidir qué fórmula aplicar o que sea necesario utilizar más de una fórmula.
- Ejercicios para aplicar las fórmulas básicas al cálculo relacionado con figuras geométricas elementales en un plano coordenado.
- Ejercicios de cálculo que se vinculen a problemas de la práctica.
- Ejercicios de fundamentación o demostración, donde hay que aplicar las fórmulas básicas para obtener propiedades de figuras geométricas elementales.

Al trabajar con estos ejercicios es necesario destacar que la introducción de un sistema de coordenadas convenientemente seleccionado es un componente esencial de la geometría analítica, por lo que es necesario entrenar a los alumnos en esta dirección y hacer consciente en cada oportunidad de las ventajas del sistema seleccionado.

#### Ejemplo 11.25

- "Demuestra que en un paralelogramo las diagonales se

cortan en su punto medio". (Aunque no existen reglas generales sobre la introducción del sistema de coordenadas, para resolver ejercicios de este tipo, es útil escoger como origen de coordenadas un vértice de la figura y hacer coincidir al menos uno de sus lados con uno de los ejes. Destacar que las relaciones que se demuestran son independientes del sistema que se seleccione, se hace por conveniencia, para hacer el trabajo más sencillo.)

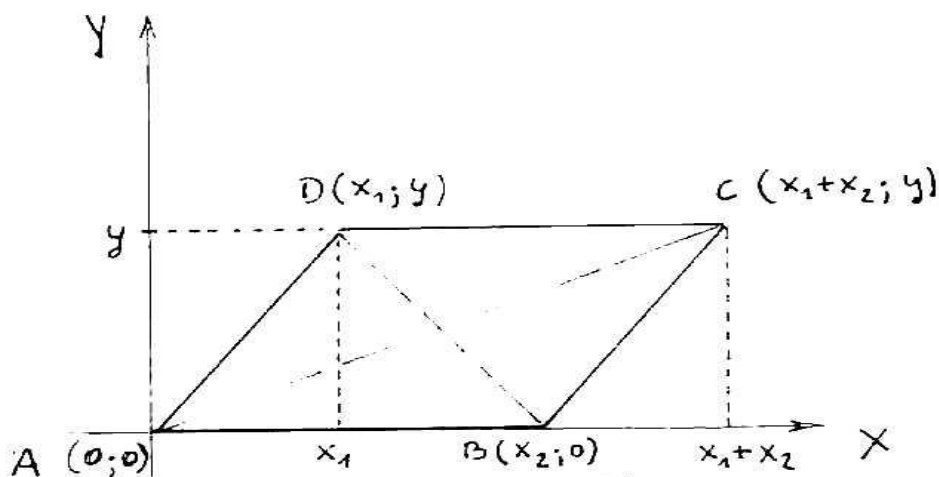


Figura 11.30

Hay que demostrar que M es punto medio de AC y de BD y que sus coordenadas son únicas; lo cual resulta muy sencillo.

### Observaciones metodológicas para el estudio de la recta en el plano y en el espacio

El trabajo realizado con las fórmulas básicas simplifica notablemente el estudio de la recta en el plano, pues permite utilizar el método de coordenadas para iniciar el tratamiento de la ecuación cartesiana. Se comienza definiendo primeramente el concepto de lugar geométrico y su representación mediante ecuaciones, esta condición garantiza la traducción de la ecuación  $AX + By + C = 0$  ( $A \neq 0$  ó  $B \neq 0$ ) como la representación de la recta.

Se trata posteriormente el procedimiento a seguir para determinar la ecuación de una recta dada la pendiente y un punto, o dados dos puntos; se determina la relación de posición de dos rectas conocidas sus ecuaciones y se estudia el teorema que relaciona la distancia entre un punto del plano y una recta dada.

El tratamiento de la ecuación cartesiana es muy sencillo, permite integrar conocimientos de grados anteriores sobre procedimientos y teoremas conocidos y aplicarlos al estudio de figuras limitadas por rectas utilizando el método analítico.

#### Ejemplo 11.26

Las ecuaciones de los lados de un triángulo son respectivamente  $3x + 5y - 16 = 0$ ,  $x - y = 0$  y  $3x + y + 4 = 0$ . Halla la distancia de cada vértice al lado opuesto, y la amplitud de los ángulos interiores.

Para dar solución a este ejercicio se necesita:

- Determinar las coordenadas de los vértices (resolver sistemas de ecuaciones lineales).
- Determinar la distancia de cada vértice al lado opuesto (distancia entre un punto y una recta dada).
- Representar el triángulo en un sistema de coordenadas para determinar la amplitud de sus ángulos interiores, (aplicando relaciones con la tangente del ángulo de inclinación de los lados del triángulo y de ángulos en triángulos).

Los ejercicios a emplear para fijar lo tratado en la ecuación cartesiana de la recta en el plano, deben recoger las exigencias siguientes:

- Determinar la ecuación de la recta dado un punto y la pendiente, dados dos puntos, dado un punto y el ángulo de inclinación de la recta con el semieje positivo  $x$ .

- . Hallar la distancia de un punto a una recta.
- . Calcular los puntos de intersección de dos rectas dadas las ecuaciones, y dada una ecuación y condiciones para obtener la ecuación de la otra recta.
- . Hallar la distancia de rectas paralelas (y perpendiculares) a una dada que pasa por un punto dado.
- . Aplicar las relaciones estudiadas al cálculo de figuras geométricas planas.
- . Aplicar de forma combinada fórmulas básicas y relaciones estudiadas al cálculo de figuras planas limitadas por rectas. (Ejemplo 11.26).

Para tratar la ecuación paramétrica se realiza un estudio de los vectores y sus operaciones en un plano coordenado, no se hace un tratamiento profundo del método vectorial, sino una interpretación de los vectores mediante coordenadas puesto que ya son familiares a los alumnos desde primaria y sus operaciones las trabajarán en la asignatura Física.

El trabajo sintético con vectores no se hace, su estudio se realiza desde el punto de vista analítico, lo cual no requiere de un trabajo teórico propio del Algebra Lineal. En este sentido el trabajo se desarrolla en la medida necesaria para ilustrar algunas aplicaciones y preparar condiciones para el estudio de la ecuación paramétrica de la recta.

Se introducen las coordenadas de un vector  $a_x = |\vec{a}| \cos \theta$  y  $a_y = |\vec{a}| \sin \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo que forma el vector  $a$  con el semieje positivo y

$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ . Debe insistirse que en el trabajo con vectores una expresión muy útil, es aquella que nos permite hallar las coordenadas de un vector conocidas las de sus extremos, para ello se restan a las coordenadas del extremo, las del origen del vector, en ese orden.

Si  $A(a_1; a_2)$  y  $B(b_1; b_2)$ , entonces  $\vec{AB} (b_1 - a_1; b_2 - a_2)$

Un concepto que debe quedar claro en este trabajo es el de "Vector de posición de un punto", lo que debe ilustrarse mediante un gráfico y precisar que las coordenadas de un punto coinciden con las de su vector de posición.

Es fundamental trabajar en el cálculo de las operaciones con vectores dados por coordenadas, por lo que el teorema que las presenta debe ser analizado detalladamente con la activa participación de los alumnos y tratar de inducir la idea de la demostración. Al analizar la multiplicación de un vector por un número real, debe destacarse que los vectores  $\vec{a}$  y  $\lambda\vec{a}$  son paralelos y así se va preparando la condición de paralelismo entre vectores que se estudiará más adelante.

Para introducir el producto escalar de dos vectores: debe recordarse la expresión para el trabajo realizado por una fuerza y aplicarla en la solución de un ejercicio, después analizar las características de esa operación entre vectores y dar su nombre, señalar que aunque la operación se realiza entre dos vectores, el resultado es un número real, (escalar):  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos \angle (\vec{a}, \vec{b})$ . A partir de esa expresión se enuncia el teorema que plantea cómo calcular el producto escalar de dos vectores conocidas sus coordenadas.

Una vez fijado el teorema se introducen las condiciones de paralelismo y de perpendicularidad de dos vectores, la primera se sugirió analizar al trabajar la multiplicación de un vector por un escalar y a la segunda se llega al analizar la expresión del producto escalar en función del ángulo entre los vectores cuando el coseno del ángulo es cero.

La unidad termina con el estudio de la ecuación paramétrica de la recta y las relaciones entre la ecuación cartesiana y la paramétrica, debe insistirse en que se trata de otra forma de representar la recta y que deben

poder pasar de una forma de representación a otra. Es importante incluir en el tratamiento situaciones en las que sea evidente la ventaja de utilizar ecuaciones paramétricas, así como aplicaciones que se faciliten con esta ecuación, de modo que los estudiantes comprendan que cada forma tiene sus ventajas y utilidad específica.

En este aspecto el profesor debe lograr que los estudiantes determinen una ecuación paramétrica de una recta, conocidos algunos elementos, y aplicar la ecuación paramétrica de la recta a la resolución de ejercicios.

La ecuación paramétrica de la recta al igual que la cartesiana se presenta mediante un teorema. Resulta conveniente antes de enunciar el teorema aclarar que se van a estudiar otras formas de expresar las coordenadas de un punto cualquiera de la recta en función de una variable independiente llamada parámetro y por ello se denominan paramétricas.

Para la demostración del teorema es necesario confeccionar una figura según se recomienda en las orientaciones metodológicas (puede ser confeccionada en lámina).

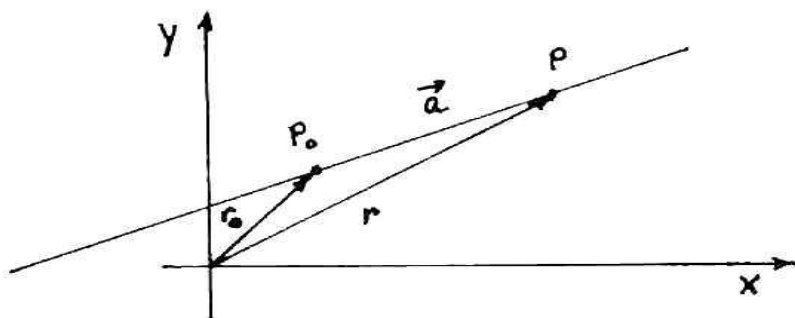


Figura 11.31

Destacar que:

- $r$  es un vector de posición de un punto  $P$  cualquiera de la recta (vector variable).
- $r_0$  es un vector de posición de un punto dado de la recta

(vector conocido).

•  $\vec{a}$  un vector director (vector conocido).

•  $t$  es una variable que recorre el dominio de los números reales (parámetro).

• Cualquier vector paralelo a  $\vec{a}$  determina también la posición de la recta y por ello todos se llaman "vectores directores de la recta".

Para caracterizar la recta hay que encontrar la condición que cumple un punto  $P$  cualquiera de la misma.

Según se aprecia en la figura el vector  $\overrightarrow{P_0P}$ , que es igual a la diferencia de los vectores  $\vec{r} - \vec{r}_0$ , es paralelo a el vector  $\vec{a}$ , luego por la condición de paralelismo se tiene  $\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{a}$ ; transponiendo  $\vec{r}_0$  se obtiene  $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$ .

Esta relación se fijará proponiendo ejercicios donde se halle la ecuación de la recta conocido un punto y un vector director, o dos puntos. Debe insistirse que si tomamos otro punto de la recta, para otro vector director paralelo al vector  $\vec{a}$  se obtiene otra ecuación paramétrica, que representa la misma recta; lo que significa que para una misma recta existen infinitas ecuaciones paramétricas, por el carácter arbitrario de la selección del punto y del vector director.

Señalar que es usual escribir la ecuación paramétrica de la recta en forma de un sistema de manera que a cada coordenada corresponda una ecuación, esta se puede realizar efectuando en la misma:

$(x, y) = (x_0; y_0) + t(a_x; a_y)$  que es equivalente al sistema:

$$x = x_0 + ta_x$$

$$y = y_0 + ta_y$$

Una vez obtenida esta forma, se destacará su utilidad para: calcular puntos de la recta conocido el parámetro, determinar si un punto pertenece o no a la recta y obtener

la ecuación paramétrica de una recta perpendicular a otra dada.

Cuando los alumnos conocen que la ecuación de una recta se puede expresar de dos forma diferentes, es necesario hacerles comprender que para resolver un determinado problema resulta más conveniente una de ellas. Así, se necesita dada la ecuación cartesiana expresarla como paramétrica o viceversa, ¿cómo introducir el procedimiento a seguir?

Primeramente los alumnos deben comprender la relación que existe entre la pendiente de una recta y su vector director; lo que puede lograrse conocidos dos puntos de una recta dada, para la cual se determinan ambos elementos (pendiente y vector director) y se buscan relaciones entre ellas, concluyendo que:

$m = -\frac{A}{B} = \frac{a_y}{a_x}$ , luego un vector director es  $(-B; A)$ .

Al lograr la comprensión de la relación entre la pendiente de una recta y su vector director, se buscarán con la participación de los alumnos los elementos que faltan, aprovechando las relaciones ya conocidas, hasta obtener los pasos a seguir en cada caso, quedando así establecido el procedimiento a emplear. Otra variante a utilizar puede ser que los propios alumnos trabajando independientemente con su libro de texto y analizando los ejemplos que aparecen resueltos, lleguen a fijar los pasos a seguir.

Este procedimiento se fijará en clases posteriores y se aplicará para el estudio de las relaciones de posición de dos rectas en el plano, retomando los conocimientos que poseen los estudiantes sobre la resolución de sistemas de dos ecuaciones con dos variables.

Los ejercicios que se seleccionan para la fijación deben abarcar todas las formas posibles de plantearlos y trabajar las dificultades siguientes:

. Expresar la ecuación paramétrica de una recta conocidos

un punto y el vector director, o dos puntos.

- . Determinar ecuaciones paramétricas de rectas paralelas (y perpendiculares) que pasen por un punto dado, conocida la ecuación de una recta.
- . Escribir la ecuación cartesiana de una recta conocida la paramétrica y viceversa.
- . Determinar puntos de intersección de dos rectas, dadas sus ecuaciones en una misma representación o en diferentes representaciones.
- . Aplicar las relaciones estudiadas al cálculo de figuras geométricas limitadas por rectas.
- . Aplicar las relaciones estudiadas para demostrar teoremas de figuras geométricas elementales.

En el estudio de la recta en el espacio tridimensional, el alumno debe reconocer que hay que representarla como un sistema de ecuaciones lineales por ser la intersección de dos planos.

### Ejemplo 11.27

Dado los planos

$$\alpha : 2x + 3y = 6$$

$$\beta : y + z = 1$$

representa la recta intersección de los planos determinados por esas ecuaciones.

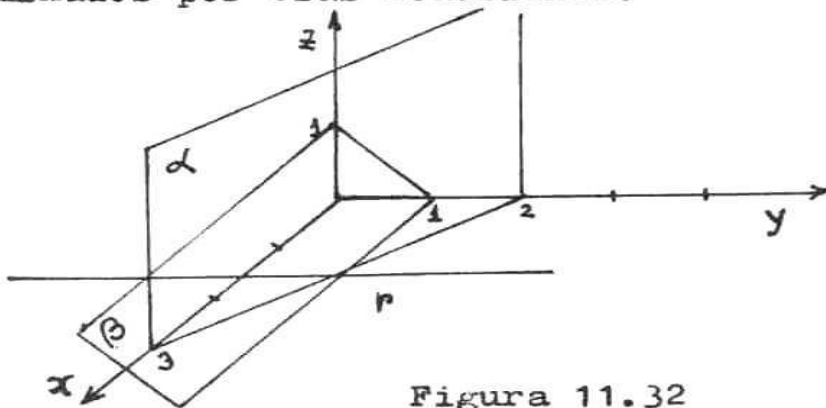


Figura 11.32

El plano  $\alpha$  es paralelo al eje  $z$  y pasa por los puntos  $(3;0;0)$  y  $(0;2;0)$ ,  $\beta$  es paralelo al eje  $x$  y pasa por los puntos  $(0;1;0)$  y  $(0;0,1)$ .

El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

representa una recta, si los vectores  $(a_1; b_1; c_1)$  y  $(a_2; b_2; c_2)$  no son paralelos (recta de intersección de los planos determinados por esas ecuaciones).

Cuando se conoce un punto  $P_0(x_0; y_0; z_0)$  y un vector director  $(a, b, c)$  de una recta, la ecuación puede escribirse:

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= \lambda a \\ y - y_0 &= \lambda b \\ z - z_0 &= \lambda c \end{aligned} \right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

y si  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$ , se obtiene la llamada ecuación simétrica de recta:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

### Observaciones metodológicas para el tratamiento de las curvas de segundo orden

El trabajo con estas curvas tiene que propiciar la integración de los conocimientos que poseen los alumnos y los nuevos que se tratan al aplicar los procedimientos analíticos; por esa razón, el estudio de la circunferencia se realiza sobre la base de las propiedades conocidas desde la secundaria básica y la parábola se analiza a partir de la ecuación ya conocida, antes de estudiar la elipse y la hipérbola.

Estas curvas se estudian como lugares geométricos del

plano y se aplica el método analítico en la obtención de sus ecuaciones canónicas, Es necesario lograr en el trabajo de búsqueda de los nuevos conocimientos, que se utilicen conscientemente los recursos de la Geometría Analítica que dominan los alumnos y que no se aprendan las fórmulas de manera mecánica.

En el desarrollo de la unidad hay que lograr que los alumnos asimilen la propiedad geométrica característica de estas curvas: son conjuntos de puntos del plano que cumplen determinadas propiedades; y su característica común algebraica: sus ecuaciones son de segundo grado. Para lograr esto, es necesario comparar entre sí las características y ecuaciones de los diferentes lugares geométricos ya conocidos, con los que se van presentando, o sea, ir sistematizando los conocimientos sobre las curvas de segundo orden en la medida que se estudian.

En el tratamiento hay que lograr la caracterización de las definiciones de las curvas como lugares geométricos, reconocer sus diferentes elementos, graficar las mismas según la influencia de sus elementos y conocer las ecuaciones cartesianas de las curvas referidas al centro o vértice en el caso de la parábola, de manera que se pueda construir la gráfica a partir de la ecuación; por último, deben determinar relaciones relativas entre cónica y rectas, y entre cónicas.

### Ejemplo 11.26

Ilustraremos lo expresado anteriormente mostrando, una posibilidad para el tratamiento de la deducción de la ecuación canónica de la circunferencia.

Actividades del profesor

- Plantea un ejercicio que exija trazar una circunferencia y señalar sus elementos fundamentales.
- Oralmente se controlarán las soluciones dadas.
- En una conversación de clase se discutirá:
  - a) ¿Cómo se define una circunferencia?
  - b) ¿Cómo se calcula el punto de intersección de dos rectas del plano conocidas sus ecuaciones?
  - c) ¿Cómo calcular los puntos de intersección entre una recta y una circunferencia?
- Aclarar que para resolver este problema de igual forma que entre dos rectas es necesario buscar la ecuación de los puntos de las circunferencias, expresa el objetivo.
- Plantea las interrogantes siguientes:
  - a) ¿Cómo denotar un pun-

Actividades de los alumnos

- Resolver de forma independiente.
  - Atienden y responden.
  - Atender y participar.
  - Expresar la definición.
  - Conocidas sus ecuaciones se resuelve el sistema que resulta.
  - Expresar sus criterios; deben plantear que no conocen la ecuación de la circunferencia.
  - Atender.
- P (x,y)

Actividades del profesor

to cualquiera del plano a través de sus coordenadas?

- b) ¿Qué condición cumplen los puntos de la circunferencia con respecto al centro C?
- c) ¿Cómo expresar esa relación en el lenguaje matemático?
- d) ¿Cómo determinar la distancia entre los puntos C y P?
- e) ¿Qué datos necesitamos para utilizar dicha fórmula?

- Representa una circunferencia considerando los puntos P(x,y) y C(h;k) en un sistema de coordenadas.

- ¿Cómo calcular ahora la distancia?
  - Expresa la relación de forma más sencilla (sin utilizar raíz cuadrada).
  - Expresa esta relación me-
- dianté un teorema y representa su demostración.

Actividades de los alumnos

- Están a igual distancia (equidistan) del centro (punto fijo C).
- $d(C;P) = r$ .
- Empleando la fórmula de distancia entre dos puntos.
- Las coordenadas de los puntos P y C.

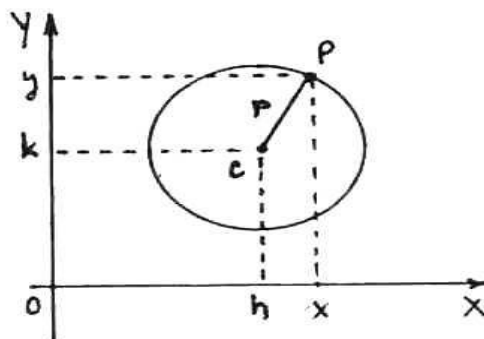


Figura 11.33

$$d(C,P) = r$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

- Expresar con sus palabras el teorema y representar su demostración.

El profesor aclara que:

- Esa es la ecuación de una circunferencia con centro en un punto cualquiera del plano y nos permite obtener fácilmente las coordenadas del centro y la longitud del radio.
- Para demostrar que la ecuación obtenida es un lugar geométrico, es necesario demostrar también la relación recíproca, es decir, que todo punto que satisface a la ecuación pertenece al lugar geométrico; aquí no es necesario hacerlo porque todos los pasos de la demostración son equivalentes.
- Si el centro de la circunferencia coincide con el origen: ¿Cómo quedaría expresada esta ecuación? (Esta es la forma canónica de la ecuación de la circunferencia).

Como se observa en el ejemplo anterior, el profesor debe lograr que los estudiantes se familiaricen con el método analítico de estudio de las secciones cónicas en las curvas conocidas y con los dos problemas fundamentales de la Geometría Analítica: dado el lugar geométrico determinar la ecuación, y dada la ecuación determinar el lugar geométrico. Una vez lograda la familiarización con estos procedimientos, los aplica al estudio de la elipse y la hipérbola.

Hay que lograr en el estudio de la unidad que los alumnos aprendan a utilizar el método analítico como un método de estudio de la geometría, y que, al mismo tiempo, reconozcan los objetivos y propiedades geométricas en juego. Una vía de reafirmar esta idea es la de recurrir constructivamente a las ilustraciones geométricas en un plano coordenado; el alumno debe aprender a razonar sobre estas ilustraciones y comprender que no se trata de memorizar fórmulas, sino de aplicar sus conocimientos fundamentales y razonar a partir de situaciones que pueden ser

representadas gráficamente.

**Ejemplo 11.29**

El punto  $O(3;-1)$  es el centro de una circunferencia que intersecta a la recta  $2x-5y+18 = 0$ ; si la longitud de la cuerda que determina esta recta es 6, halla la ecuación de la circunferencia.

- Dado:

$$O(3; -1);$$

recta que intersecta a la circunferencia:

$$2x-5y+18 = 0; \text{ longitud de la cuerda que determina esta recta: } 6.$$

- Se busca: ecuación de la circunferencia.

(Se necesita determinar la longitud del radio)

- Representación gráfica:

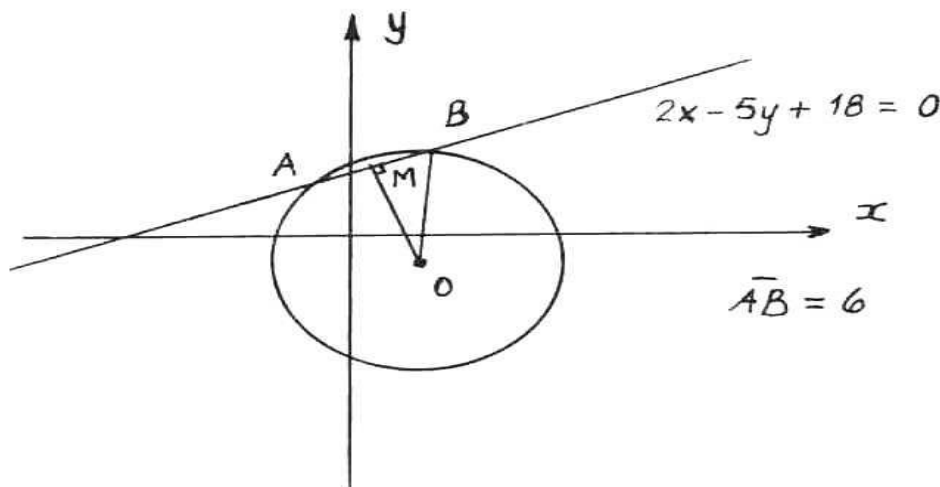


Figura 11.34

- Al analizar la situación gráfica se observa que:

• Puede hallar  $r$ , si conoce los catetos del triángulo BOM.

•  $\overline{BM} = \frac{\overline{AB}}{2} = 3$ , ya que la mediatriz de una cuerda de la circunferencia pasa por su centro.

• La longitud de  $\overline{MO}$  es la distancia de la recta al centro de la circunferencia.  $d(O;r) = \sqrt{29}$ .

- Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene que

$$r = \sqrt{MO^2 + EM^2} = \sqrt{29 + 9} = \sqrt{38}$$

De aquí que la ecuación de la circunferencia es:

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 38$$

Al desarrollar el estudio de las cuatro curvas, los ejercicios se seleccionarán considerando las exigencias que se plantean para la fijación de conocimientos y habilidades matemáticas, de manera que se trabaje de forma intensiva en:

- Escribir la ecuación de las curvas conocidos sus elementos y viceversa.
- Determinar los puntos de intersección entre curvas y rectas, y entre curvas.
- Resolver ejercicios de cálculo aplicando las ecuaciones de las curvas estudiadas.
- Representar gráficamente estas curvas dadas sus ecuaciones y viceversa.
- Resolver ejercicios de cálculo geométrico aplicando las ecuaciones de las curvas estudiadas.
- Aplicar las ecuaciones de las cónicas a resolver ejercicios relacionados con la práctica.

## 11.7 Elementos de la Geometría del Espacio.

El concepto de espacio se interpreta de manera diferente dentro de las ciencias. Como categoría filosófica, es una de las formas de existencia de la materia. En la ciencia Matemática se interpreta como la forma del medio real, incluyendo sus relaciones cuantitativas, que son su objeto de estudio.

La Geometría del Espacio, Estereometría o Geometría de los sólidos, como toda geometría, tiene su origen en las primeras civilizaciones. Se conoce que los egipcios y babilonios poseían conocimientos estereométricos, los griegos comienzan el estudio geométrico de los sólidos en la escuela de Pitágoras, y Euclides dedica tres libros de su obra "Los Elementos" a construir la Geometría del Espacio, pero se completa tal como la conocemos hoy con los trabajos de Arquímedes.

En nuestra escuela, desde el primer ciclo, se abordan en la enseñanza de la Matemática contenidos de la Geometría del Espacio, y se plantean exigencias en relación con el desarrollo del pensamiento geométrico espacial.

El Dr. Armando Flórez Arco, en su tesis de opción al grado científico, explica esta forma de pensamiento y al respecto plantea:

Es un tipo de pensamiento matemático que se basa en el conocimiento del espacio físico tridimensional como reflejo generalizado y mediato de dicho espacio, tiene una fuerte base senso-perceptual que se inicia desde las primeras relaciones del niño con su medio y se sistematiza y generaliza con el estudio de los contenidos geométricos en la escuela.

Por su significado didáctico se distinguen en el pensamiento geométrico espacial los niveles esenciales siguientes:

- Conceptualización, representación e imaginación.

Vamos a explicar en qué consiste cada uno de estos niveles.

**La conceptualización:** debe lograr la formación de aquellos conceptos y relaciones esenciales que resultan de la abstracción inmediata de la imagen senso-perceptual del espacio real y constituye un modelo de este espacio físico tridimensional.

La representación geométrica espacial es un sistema de capacidades que permite realizar una modelación de la realidad objetiva ya sea en la mente del individuo o materializada a través del dibujo o en objetos contruídos, para destacar relaciones de posición, de orden, de tamaño, de continuidad, de igualdad y otras; así como, movimientos de cuerpos en el espacio.

La representación mental le permite al hombre prever situaciones, estimar distancias y tamaño, así como orientarse en el espacio físico.

La imaginación geométrica espacial, es una representación ideal en la mente del hombre de cuerpos y relaciones geométricas en el espacio que él no ha observado con anterioridad, por lo tanto, tiene un sentido relativo con respecto a la situación objeto de estudio, no obstante, estas situaciones pueden ser muy variadas y se pueden crear muchas de ellas transformando y complicando las circunstancias.

En el estudio y comprensión del espacio euclideo tridimensional, la imaginación geométrica espacial es un elemento necesario de la actividad creadora del hombre, contribuye a la creación de un modelo psíquico de resultados finales e intermedios de propiedades geométricas espaciales.

En la imaginación espacial se pueden distinguir dos niveles: un primer nivel en que las imágenes son creadas a partir de representaciones y relaciones conocidas

mediante la realización de transformaciones y un segundo nivel que opera con imágenes que son creadas sin una relación directa con otras conocidas por el sujeto, este nivel se corresponde con el pensamiento creador y está asociado directamente a la fantasía del individuo.

Aunque con fines didácticos se han separado estos niveles, en la práctica los tres niveles del pensamiento geométrico espacial se entrelazan.

En el proceso metodológico la formación de los conceptos propios de la geometría espacial, sus relaciones, así como la comprensión de los símbolos y el lenguaje técnico que se emplea y de las representaciones lógicas de situaciones geométricas, requiere del profesor que asegure en primer lugar los conceptos básicos de la geometría plana (punto, recta y plano) a partir de objetos geométricos.

En el estudio de la geometría, la profundización se logra en la escuela en tres direcciones fundamentales:

1. Se hace un estudio de las relaciones esenciales en el espacio de modo que los alumnos adquieran conocimientos que por un lado consoliden las cuestiones fundamentales de la geometría básica ya estudiada y por otro amplíen esos conocimientos aritméticos, algebraicos, trigonométricos y por supuesto geométricos, para que sean capaces de integrarlos durante el tratamiento de los contenidos de la Geometría del Espacio.
2. Se sistematizan las propiedades geométricas estudiadas, propiciando un adecuado ordenamiento y reconocimiento de los conceptos, procedimientos de trabajo y proposiciones matemáticas, estando presente en esta sistematización el establecimiento de analogías y diferencias entre lo estudiado en geometría plana y los que aborda en la Geometría del Espacio.
3. Se introducen las nociones básicas de un sistema de

axiomas para la construcción de la Geometría plana y la del espacio, donde implícitamente se comprenda por parte del alumno el papel fundamental de las demostraciones como única vía de aseguramiento cognoscitivo en Matemática y al mismo tiempo reconozcan la necesidad de admitir proposiciones sin demostración, como es el caso de los axiomas.

- Observaciones sobre el tratamiento de la Geometría del Espacio en la escuela primaria.

Diversas actividades se realizan en el primer ciclo de la enseñanza primaria con el objetivo de contribuir al desarrollo del pensamiento geométrico espacial, entre ellas se pueden señalar algunas:

- Ejercicios de orientación en el espacio y en la hoja de trazado, empleando las expresiones: "a la derecha", "a la izquierda", "arriba", "abajo", "delante" y "detrás".
- Ejercicios de movimientos y trazado según instrucciones dadas sin emplear otros medios auxiliares.
- Reconocimiento de objetos del medio que tienen forma de los cuerpos estudiados (ortoaedro, cubo, cilindro, esfera, pirámide y cono)
- Reconocimiento, centro y medición de vértices, aristas y caras.
- Reconocimiento de segmentos paralelos y perpendiculares en ortoaedros y cubos.
- Reconocimiento de prismas en objetos del medio circundante y en modelos.
- Comparación, descomposición y desarrollo de ortoaedros y cubos.
- Modelado de los cuerpos estudiados con plastilina.
- Descripción de objetos del medio circundante y repre-

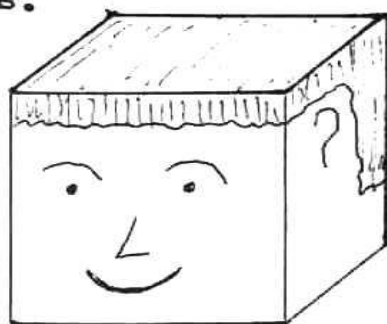
representaciones gráficas empleando los conceptos aprendidos. Con estas actividades se logran nociones sobre el espacio tridimensional y la adquisición de conocimientos espaciales que le permiten al niño orientarse en el reconocimiento de relaciones entre los objetos que le rodean en el medio, e interpretar el espacio geométrico a partir de sus dimensiones; todo esto garantiza la comprensión de propiedades del espacio físico. Los alumnos comienzan a utilizar la terminología y simbología propia de la Geometría del espacio y aplicarlas en la resolución de ejercicios.

Se contribuye al desarrollo del pensamiento geométrico espacial pues se forman los conceptos de espacio, cuerpo geométrico, figuras y de relaciones esenciales que pueden establecerse entre ellos, de posición, tamaño, etc. Realizar representaciones de los cuerpos en plastilina (modelan), lo que les permite establecer relaciones entre sus caras, aristas, etc. Esta actividad tiene un gran valor educativo para la formación de cualidades morales.

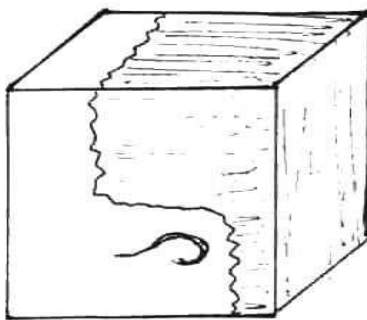
En las actividades de repaso y sistematización deben realizarse ejercicios que contribuyan al desarrollo de la imaginación geométrica espacial en este primer ciclo, complicando las circunstancias planteadas.

Ejemplo 11.30

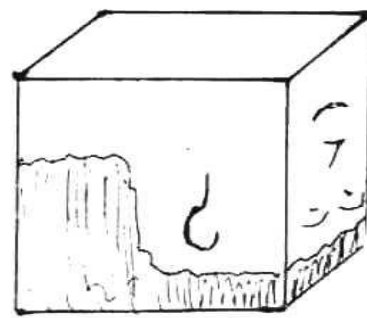
Los siguientes cubos, representan las cabezas de títeres.



(a)



(b)



(c)

Figura 11.35

Diga en cada caso si la oreja que se observa es la derecha.

[Este ejercicio contribuye a profundizar en las relaciones conocidas para orientarse en el espacio].

Ejemplo 11.31

Al someter un cubo a un determinado movimiento, el mismo queda en la posición que se indica en la figura.

Señale la posición en que se encontrará la arista señalada con una marca, conocida la posición en que se encuentran las aristas señaladas con dos marcas.

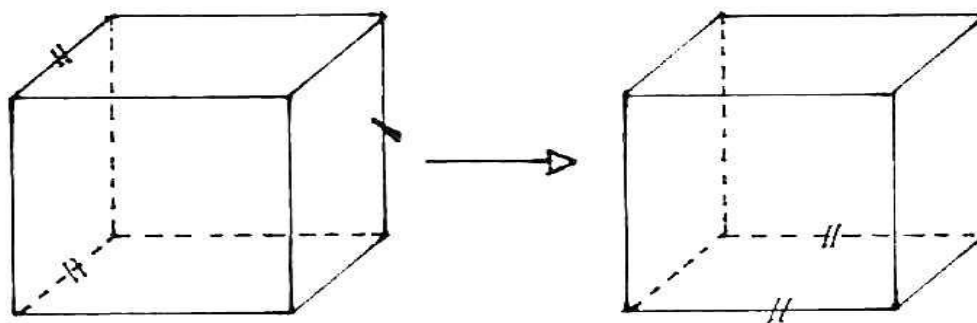


Figura 11.36

[Este ejercicio puede ser presentado también, empleando modelo de cubos con aristas de colores diferentes].

En el segundo ciclo de la escuela primaria se estudia el ortoedro, sus propiedades y el cálculo del área total y del volumen. El sistema de ejercicios que se propone resulta adecuado para el logro de los objetivos planteados en este nivel. No obstante, recomendamos que se trabajen ejercicios dirigidos a establecer relaciones espaciales cuantitativas entre volúmenes de cuerpos conocidos.

Ejemplo 11.32

¿Cuántos cubitos pequeños serán necesarios para completar el cubo?

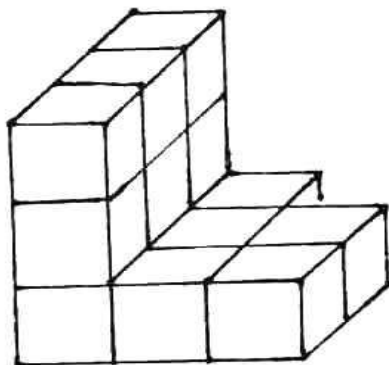


Figura 11.37

[Esta actividad permite profundizar el concepto de volumen y contribuir al desarrollo de la directriz "trabajo combinatorio y pensamiento probabilístico"].

Un ejercicio que permite la conceptualización del volumen de un cuerpo y su relación con el largo, el ancho y la altura, es el siguiente:

Ejemplo 11.33

Sea el ortoedro cuyas unidades de longitud están señaladas en las aristas.

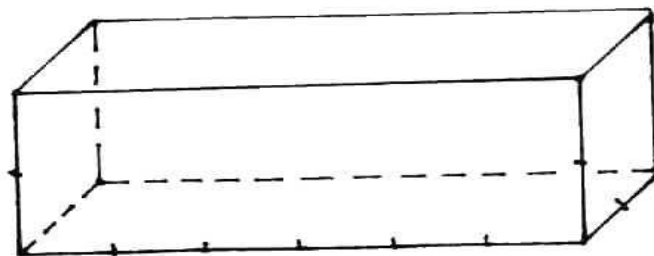


Figura 11.38

Señale con una cruz el cubo que cabe exactamente tres veces en el ortoedro.

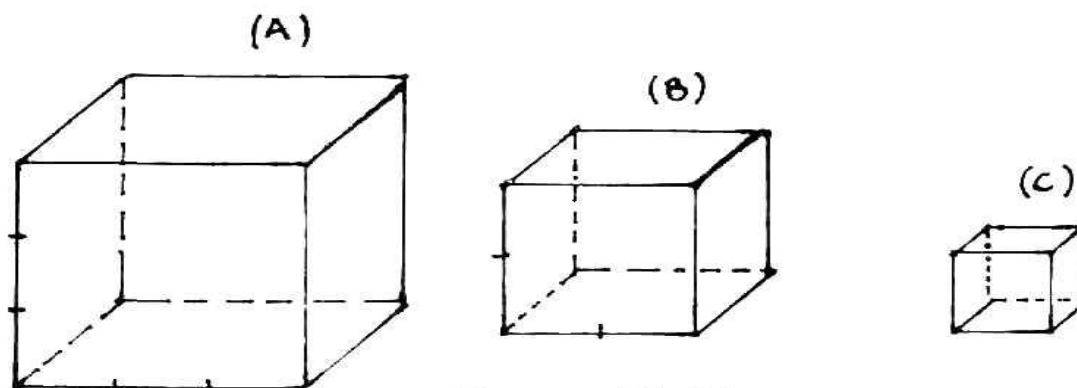


Figura 11.39

- Observaciones metodológicas para el tratamiento de la Geometría del Espacio en la secundaria básica.

En este nivel se profundiza el estudio de los cuerpos geométricos introducidos en el primer ciclo de la escuela primaria. Se define cada uno y se obtienen las fórmulas para el cálculo del área y el volumen; como una aplicación, se calculan cuerpos compuestos y se resuelven problemas relacionados con la práctica.

Al elaborar las definiciones de los cuerpos se trabaja en el desarrollo de la conceptualización y representación espacial, pues al realizar la búsqueda de las características esenciales de un prisma se observaron varios modelos y los alumnos comprenden que tienen dos bases iguales y paralelas (está implícito el concepto de planos paralelos). En el tratamiento de los conceptos de cilindro, cono y esfera, al realizar el experimento de rotar una **figura** sobre uno de sus lados que genera al cuerpo, se trabaja la capacidad de imaginación geométrica espacial al crear imágenes de cuerpos conocidos a partir de transformaciones en figuras planas dadas.

En el trabajo de obtención de las fórmulas se realiza una fuerte contribución al desarrollo del pensamiento geométrico espacial, pues al presentar un prisma y una pirámide con igual base e igual altura se analiza:

- ¿Cuál tiene mayor volumen?
- ¿Cuántas veces es mayor el volumen del prisma que el de la pirámide?
- ¿Será dos veces mayor, tres veces, cuatro veces? ¿Cómo comprobarlo?

Ante esta situación, el alumno hace una representación en su mente de los cuerpos dados, establece relaciones entre sus volúmenes y estima el de la pirámide a partir de las relaciones visibles, lo que verifica experimentalmente.

En las aplicaciones de la fórmula al cálculo de cuerpos, se hace conveniente representar la situación descrita en el texto mediante dibujos para su mejor comprensión, por lo que es necesario aprender a hacer esos dibujos. La principal dificultad consiste en que el cuerpo cuenta con tres dimensiones (ancho, altura y profundidad) y un plano (pizarra, hoja de papel) sólo cuenta con dos: ancho y altura.

La motivación para introducir el procedimiento debe realizarse mediante situaciones prácticas, destacando la necesidad de que la deformación sea mínima para obtener una imagen lo más real posible.

El objetivo de la representación de los cuerpos es contribuir al razonamiento del estudiante en la resolución de ejercicios de cálculo, de manera que los reconozcan y representen con claridad.

El procedimiento debe darse elaborado y ejemplificar la vía en ejemplos propuestos, puede apoyarse el trabajo con el libro de texto.

Una vía a emplear puede ser, analizar por el libro de texto los pasos del procedimiento y aplicarlo en las situaciones que se plantean en una hoja de trabajo como la siguiente:

Cuadro 11.13.

HOJA DE TRABAJO

Completa en cada figura la imagen del cubo en perspectiva caballera. Ten en cuenta lo relacionado con la visibilidad de las aristas.

The diagrams show the initial construction of a cube in oblique perspective. Each diagram starts with a horizontal line segment AB. In the first diagram, a vertical line BF and a diagonal line BC are added. In the second, only the diagonal line BC is added. In the third, only the horizontal line segment AB is shown.

Al representar los cubos que aparecen en la hoja de trabajo, en cada inciso se eleva la exigencia, hasta tener que ejecutar todos los pasos del procedimiento en el último. El estudiante se enfrenta a situaciones similares, donde tiene cada vez que reproducir los pasos ya realizados en la figura anterior e incorporar uno nuevo, teniendo como base de orientación la representación realizada en el inciso anterior.

Esta habilidad de representar cuerpos geométricos conocidos mediante el dibujo, es un medio que tiene el alumno para aplicar en la búsqueda de la vía de solución de

ejercicios que conducen al cálculo de cuerpos. En estos casos es necesario insistir en realizar la representación con la mayor claridad posible, de manera que facilite la comprensión del problema descrito.

#### Ejemplo 11.34

Un obelisco de granito tiene la forma de una pirámide regular de base cuadrada, cuya arista de la base mide 6,0 m y la altura de una de sus caras mide 4,0 m.

- a) Calcula su área total
- b) Calcula la longitud de una arista lateral y la altura del obelisco.

Para resolver el inciso a), no necesita representar la pirámide, pues conoce que la base es un cuadrado de arista 6,0 m y las caras son triángulos de base 6,0 m y altura 4,0 m; basta aplicar la fórmula conocida y calcular. En el inciso b), es imprescindible el análisis de la situación en un dibujo, para reconocer que la vía de solución consiste en calcular los lados de un triángulo aplicando el teorema de Pitágoras; de no realizar la representación del cuerpo y buscar relaciones entre los elementos dados y los que piden calcular, no se hace visible que esos elementos forman triángulos rectángulos en la pirámide.

(Situación con estas características aparece con frecuencia en los libros de texto de la escuela).

Una habilidad necesaria en la resolución de ejercicios de cálculo de cuerpos, es la de reconocer los objetos representados de manera que se determine con las relaciones dadas en la figura, la vía a seguir para determinar la solución. El trabajo con estos ejercicios exige que el estudiante represente en su mente relaciones entre cuerpos geométricos conocidos, para obtener objetos que no ha observado con anterioridad e imagine en el espacio su forma y tamaño, y que asocie para su cálculo operaciones matemáticas entre las áreas y volúmenes de cuerpos.

geométricos conocidos.

Ejemplo 11.35

Calcula el volumen y el área total del cuerpo representado en la figura.

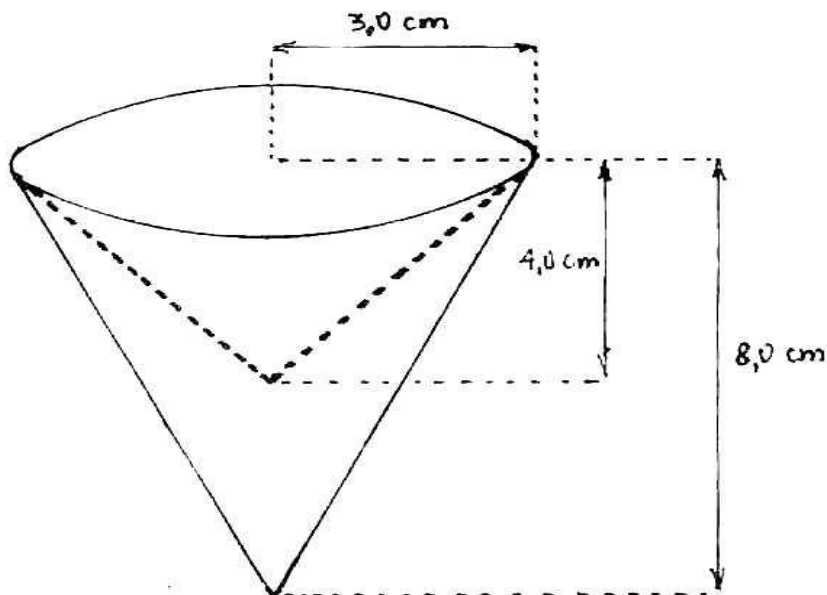


figura 11.40

El alumno tiene que reconocer que el cuerpo a calcular, se obtiene por un cono con una perforación cónica; ambos conos tienen como base el círculo de 3,0cm de radio y alturas diferentes ( $h_1$  mayor que  $h_2$ ).

Si se denomina al cono mayor cuerpo 1 y al otro cuerpo 2, se tiene que el volumen del cuerpo representado es la diferencia del volumen del cono 1 y el del cono 2

$$(V = \frac{1}{3} \pi r^2 (h_1 - h_2)), \text{ y el área total pedida es la}$$

suma del área lateral de ambos conos ( $A = \pi \cdot r (g_1 + g_2)$ ).

De ser posible, el maestro debe apoyar el análisis del cuerpo representado, construyendo el modelo con cartulina u otro material, de manera que se puedan analizar las relaciones que se establecen entre los cuerpos geométricos conocidos. Este trabajo propicia el desarrollo de los

diferentes niveles del pensamiento geométrico espacial.

Observaciones metodológicas para el tratamiento de la Geometría del Espacio en el preuniversitario.

En el estudio de las "Aplicaciones de la Trigonometría" se profundiza y reactiva lo relacionado con el cálculo de cuerpos, ya tratado en grados anteriores. Se aplican las relaciones trigonométricas conocidas al cálculo, lo que aporta una herramienta matemática nueva para el estudiante, que le permite resolver problemas - conocidos otros elementos de los cuerpos -.

Para el tratamiento de estos ejercicios de cálculo de cuerpos es necesario comenzar con ejemplos sencillos e ir aumentando el nivel de dificultad; lo esencial es que los alumnos apliquen la Trigonometría para su resolución.

En los ejercicios se debe dirigir el análisis mediante preguntas, de manera que el estudiante de forma natural encuentre la vía de solución a utilizar aplicando sus conocimientos.

Ejemplo 11.36

Un tanque de agua está constituido por un cilindro de 1,5 m de radio y dos semiesferas según se plantea en la figura. Si el ángulo  $\alpha$  es igual a  $60^\circ$ , halla el volumen del tanque.

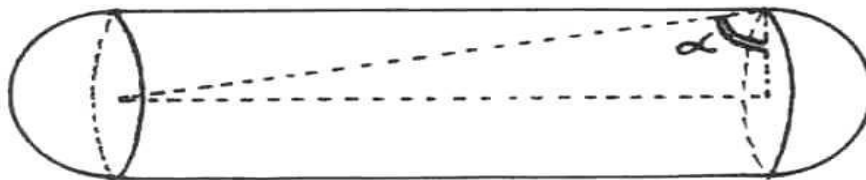


Figura 11.41

P: ¡Analicen el ejercicio!

A: Los alumnos leen el ejercicio en voz baja, pueden situar en el gráfico la longitud del radio y amplitud del ángulo.

P: ¿Qué nos piden hallar?

A: El volumen del tanque formado por dos semiesferas y un cilindro.

P: ¿Qué nos dan?

A:  $r = 1,5$  m (del cilindro y de las semiesferas)

$\alpha = 60^\circ$  (ángulo que forma el radio con el segmento que une un punto de la base del cilindro con el centro de la otra base)

P: ¿Qué necesitamos para calcular el volumen del tanque?

A: Necesitamos el volumen de las semiesferas y el volumen del cilindro.

P: ¿Cómo podemos calcular lo que necesitamos?

A: El volumen de las semiesferas es el volumen de la esfera de radio 1,5 m; puede calcularse sin dificultad:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 .$$

El volumen del cilindro se calcula:  $V = \pi r^2 \cdot h$ ; necesitamos conocer la altura del cilindro.

P: ¿Cómo determinar la altura del cilindro con los datos que nos dan?

A:  $\tan \alpha = \frac{h}{r}$ , luego  $h = r \cdot \tan \alpha$

P: Entonces es posible ahora, calcular el volumen del tanque; ¿cómo proceder?

A: 1. Calcular volumen de la esfera:  $V_e = \frac{4}{3} \pi r^3$

2. Hallar  $h = r \cdot \tan \alpha$

3. Determinar volumen del cilindro:  $V_c = \pi \cdot r^2 \cdot h$

4. Calcular el volumen del tanque:  $V = V_e + V_c$

Concluido el análisis y precisado el proceder, los alumnos trabajan independientemente en la búsqueda del resultado. En la evaluación de la vía se debe resaltar que se determinó la altura aplicando los conocimientos sobre razones en el triángulo rectángulo, en lo cual es conveniente pensar cuando nos dan la amplitud de un ángulo y la longitud de una arista, radio, diámetro o altura.

En el preuniversitario se concluye el estudio de la Geometría en la enseñanza general, al trabajar la unidad de Geometría del Espacio, en la que se continúa desarrollando la visión espacial y se contribuye a lograr una mejor interpretación del mundo que nos rodea.

La unidad se inicia con el estudio de las propiedades que caracterizan a los planos y la posición relativa de rectas en el espacio, aquí se incluyen propiedades que en una construcción axiomática serían axiomas, es decir que no se demuestran, y que aquí se ilustran y analizan de forma tal que los alumnos comprendan que representan propiedades del espacio físico.

Lo fundamental a lograr con los alumnos, es que fijan las relaciones de posición de dos rectas y las distintas formas de determinar un plano, de manera que las apliquen a la resolución de los ejercicios.

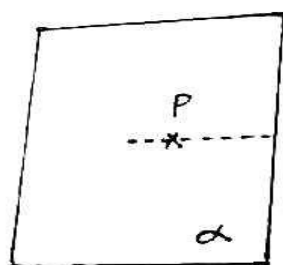
Una vía para motivar el estudio de la unidad consiste en indicar a un estudiante que dibuje y denote un prisma recto de base cuadrada en el pizarrón y basándonos en el esquema, analizar relaciones de posición entre las aristas. Resaltar que existen relaciones que contradicen

a las estudiadas en el plano; puede hacerse también llevando una lámina con un prisma recto representado y proceder de manera análoga a la ya sugerida en la vía anterior. Otra posibilidad consiste, en llevar un modelo de prisma recto con las aristas pintadas de colores diferentes y analizar las relaciones de posición de las mismas, de manera que se encuentren las contradicciones con respecto a las relaciones entre rectas de un plano.

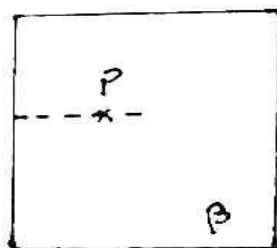
En el trabajo con esta temática es fundamental el empleo de medios de enseñanza, los cuales pueden ser varillas finas, alambres y lápices para las rectas, y pedazos de cartón, placas plásticas, las paredes del aula u otro material fino para los planos.

Al estudiar la caracterización de plano (axiomas de incidencia) debe ilustrarse cada una, de manera que se logre una representación mental clara de ellos.

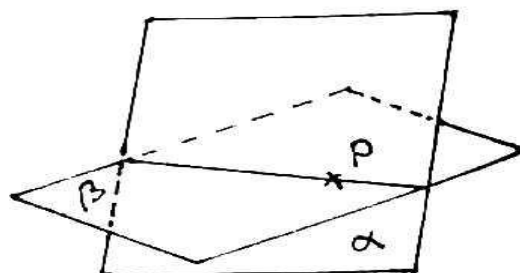
Para ilustrar que "por tres puntos del espacio, no situados en línea recta, pasa un plano y solo uno", puede tomarse una cartulina o placa y apoyarla sobre las puntas de tres lápices no situados en línea recta o dedos. (relacionar esta situación con las bases de instrumentos de medición). Para representar que si dos planos tienen un punto común entonces tienen una recta común que contiene a ese punto (recta de intersección)", pueden tomarse las placas de cartulinas según se aprecia en la figura (la línea discontinua en a y b es la carta).



(a)



(b)



(c)

Figura 11.42

En el caso de la afirmación "si una recta tiene dos puntos en un plano, entonces está contenida en dicho plano"; debe insistirse en que el plano es la única superficie que tiene esa propiedad, pues existen otras superficies que pueden contener dos puntos de una recta y no contenerla.

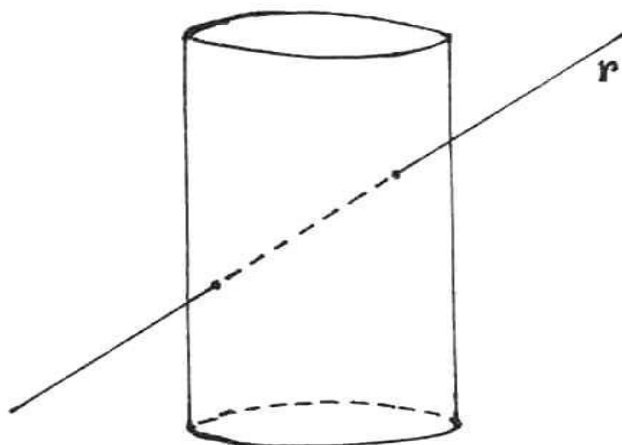


Figura 11.43

Esto puede ilustrarse con un tubo plástico vacío (de desodorante) o enrollar una placa para formar una superficie curva y un alambre para representar la recta.

En la temática estudian diferentes formas de determinación de plano, las que se tratan como teoremas.

#### Ejemplo 11.37

"Dos rectas que se cortan determinan un plano y solo uno".

Una posibilidad para estructurar el proceso de búsqueda de demostración, es la siguiente.

##### Acción del profesor

- Formula el teorema en la forma "si...entonces..."

[R.H. Formular el teorema de forma conveniente]

##### Acción de los alumnos

- "Si  $p$  y  $q$  son dos rectas que se cortan en un punto  $A$ , entonces determinan un plano y solo uno"

- Separen la premisa y la tesis

[R.H. separar premisa y tesis]

- Representa la relación en un gráfico

[R.H. confeccionar figura de análisis]

- ¿qué plantea la tesis del teorema?

[R.H. Analizar la tesis para seleccionar el método de demostración]

- ¿Cómo está caracterizado un plano?

[R.H. Sustituir concepto por su definición]

- Luego, necesitamos encontrar tres puntos no alineados y además que las rectas estén contenidas en el plano.

- ¿Cuándo una recta está contenida en un plano.

[R.H. Recordar relaciones del dominio matemático correspondiente]

P:  $p$  y  $q$  rectas que se cortan en el punto  $A$ .

T:  $p$  y  $q$  determinan un plano y solo uno

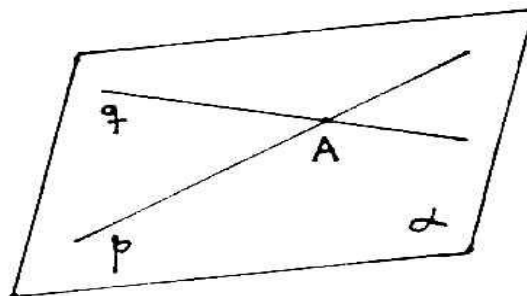


Figura 11.44

- La expresan con sus palabras.

-Por tres puntos no alineados

- Escuchan atentamente

- Si tiene dos puntos en el mismo.

- Luego, según la tesis hay que probar: - Atienden y participan

1. Que existan tres puntos no alineados en el espacio.

2. Que las rectas  $p$  y  $q$  están contenidas en el plano

[R.H. Precisión de condiciones necesarias para la demostración.]

- ¿Con cuántos puntos contamos para demostrar? - Con uno, el punto A.

- ¿Cómo buscar los otros dos puntos que necesitamos? - Expresan sus criterios.

- ¿Cuántos puntos se necesitan para determinar una recta? - Dos puntos diferentes

[R.H. Recordar relaciones del dominio correspondiente.]

- ¿Qué otros puntos tomamos además de A? - Tomamos dos puntos cualesquiera diferentes de A, uno en la recta  $p$  y otro en la recta  $q$ .

- ¿Cómo probar la relación de que las rectas estén contenidas en el plano? - Probando que existen dos puntos del plano que están en la recta.  
¿Por qué?

El profesor con ayuda de los alumnos precisará los pasos de la demostración, los que debe escribir en la pizarra según se representa en el cuadro 11.14 ; le orientará a los estudiantes la tarea de fundamentar cada uno.

Cuadro 11.14

Pasos	Fundamentación
(1) El punto $P \in p$ y $P \notin A$	
(2) El punto $Q \in q$ y $Q \notin A$	
(3) Según (1) y (2) se tiene que $A, P$ y $Q$ determinan un plano $\alpha$ y solo uno.	
(4) $A, P \in \alpha$ , $p \in \alpha$	
(5) $A, Q \in \alpha$ , $q \in \alpha$	

Los restantes criterios de determinación de planos se dan mediante ejemplos, por lo que debe analizarse en cada caso cómo se procedía para probarlo, de manera que los alumnos se apropien de las formas de pensamiento y de trabajo que hay que aplicar.

Se continúa el estudio de la unidad con el tratamiento de las posiciones relativas entre rectas y planos. Lo esencial en la temática es aplicar esas relaciones, las condiciones de paralelismo y perpendicularidad de recta y plano y el teorema de las tres perpendiculares a la resolución de ejercicios de cálculo geométrico y demostración.

En esta temática el estudio del criterio de paralelismo de recta y plano necesita de un tratamiento cuidadoso, pues es un teorema que su demostración se realiza por el método indirecto empleando la demostración del contrarrecíproco.

Para lograr la comprensión por parte de los alumnos de la estructura del teorema y la idea de la demostración se hace necesario realizar un análisis detallado de su texto. Para ello se indica representar gráficamente la relación, enunciarlo de otra manera y expresarlo en símbolos.

Ejemplo 11.38

Teorema. "Una recta es paralela a un plano si es paralela a una recta contenida en dicho plano."

Representación gráfica.

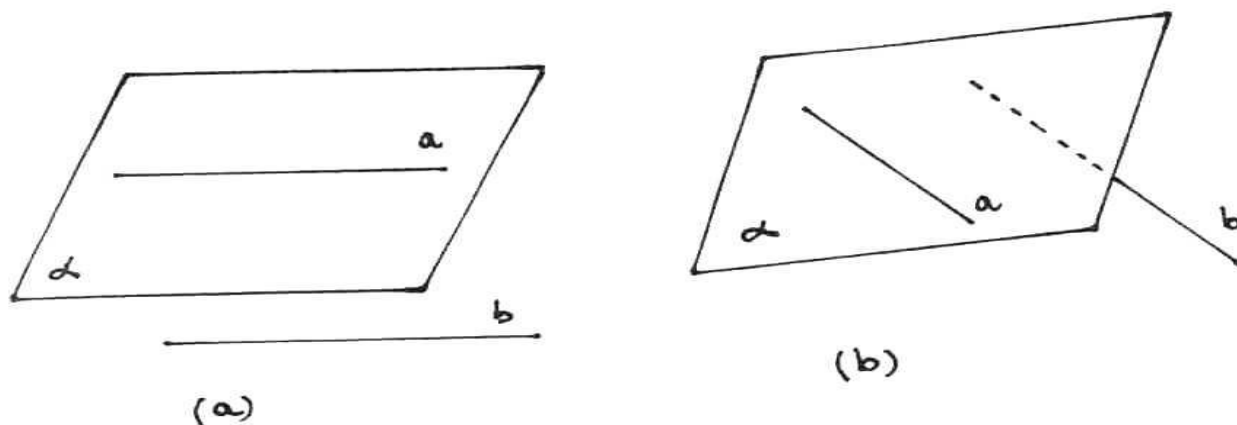


Figura 11.45

La representación gráfica puede ser apoyada con un medio de enseñanza (placa con una recta trazada y una varilla), lo que ayuda a la comprensión del teorema y a que el alumno lo formule de otra forma con sus palabras.

Otras formulaciones son:

1. "Si una recta está contenida en un plano y es paralela a otra recta, entonces la segunda recta es paralela al plano".
2. "Si una recta pertenece a un plano, entonces si esa recta es paralela a otra, se cumple que la segunda recta es paralela al plano"
3. "Si la recta  $a$  pertenece al plano  $\alpha$ , entonces si  $a$  es paralela a la recta  $b$  se cumple que  $b$  es paralela al plano  $\alpha$  "

En símbolos:  $(a \parallel b \wedge a \in \alpha) \rightarrow b \parallel \alpha$  o transformando el teorema según el enunciado 3:  $a \in \alpha \rightarrow (a \parallel b \rightarrow b \parallel \alpha)$

Lo que se demuestra es el contrarrecíproco del teorema interior:

El triángulo rectángulo rayado se fija por el cateto que se sitúa sobre la recta  $s$  y se va moviendo de manera que el cateto situado sobre la recta  $r$  esté contenido en una recta oblicua al plano  $\alpha$  y perpendicular a la recta  $s$ , tal que la recta  $r$  sea su proyección.

Un aspecto importante de la unidad lo constituye el estudio de las relaciones entre planos, lo que incluye el concepto de ángulo diedro y la perpendicularidad de planos. Es esencial que todas las propiedades tratadas se relacionen con cuerpos geométricos conocidos.

El estudio de los poliedros se realiza como aplicación de las propiedades estudiadas y además tiene como objetivo la introducción de los poliedros regulares como un complemento de la formación cultural de los alumnos.

Hasta este momento el concepto de espacio se ha caracterizado como un conjunto de puntos en el cual hay algunos subconjuntos llamados rectas y otros subconjuntos llamados planos.

El complejo de materia termina con la introducción de la Geometría Analítica del Espacio, donde lo fundamental es que los alumnos comprendan la ampliación del sistema de coordenadas al espacio y puedan representar puntos e identificarlos a partir de su representación en el mismo. En cuanto a las relaciones analíticas, es fundamental el dominio de la fórmula de distancia entre dos puntos y el reconocimiento de la ecuación de un plano.

El concepto de espacio se ha ido generalizando de múltiples formas con el desarrollo de la Matemática, ahora podemos identificar todo punto del espacio tridimensional con un trío ordenado de números reales, haciéndole corresponder a cada punto del espacio tres coordenadas y viceversa, o sea, se asocia a una terna de números reales cualesquiera, el punto del espacio cuyas coordenadas coinciden con los números dados, representándose el espacio

El triángulo rectángulo rayado se fija por el cateto que se sitúa sobre la recta  $s$  y se va moviendo de manera que el cateto situado sobre la recta  $r$  esté contenido en una recta oblicua al plano  $\alpha$  y perpendicular a la recta  $s$ , tal que la recta  $r$  sea su proyección.

Un aspecto importante de la unidad lo constituye el estudio de las relaciones entre planos, lo que incluye el concepto de ángulo diedro y la perpendicularidad de planos. Es esencial que todas las propiedades tratadas se relacionen con cuerpos geométricos conocidos.

El estudio de los poliedros se realiza como aplicación de las propiedades estudiadas y además tiene como objetivo la introducción de los poliedros regulares como un complemento de la formación cultural de los alumnos.

Hasta este momento el concepto de espacio se ha caracterizado como un conjunto de puntos en el cual hay algunos subconjuntos llamados rectas y otros subconjuntos llamados planos.

El complejo de materia termina con la introducción de la Geometría Analítica del Espacio, donde lo fundamental es que los alumnos comprendan la ampliación del sistema de coordenadas al espacio y puedan representar puntos e identificarlos a partir de su representación en el mismo. En cuanto a las relaciones analíticas, es fundamental el dominio de la fórmula de distancia entre dos puntos y el reconocimiento de la ecuación de un plano.

El concepto de espacio se ha ido generalizando de múltiples formas con el desarrollo de la Matemática, ahora podemos identificar todo punto del espacio tridimensional con un trío ordenado de números reales, haciéndole corresponder a cada punto del espacio tres coordenadas y viceversa, o sea, se asocia a una terna de números reales cualesquiera, el punto del espacio cuyas coordenadas coinciden con los números dados, representándose el espacio

tridimensional como el conjunto de todos los tríos o ternas de números reales  $(X, Y, Z)$

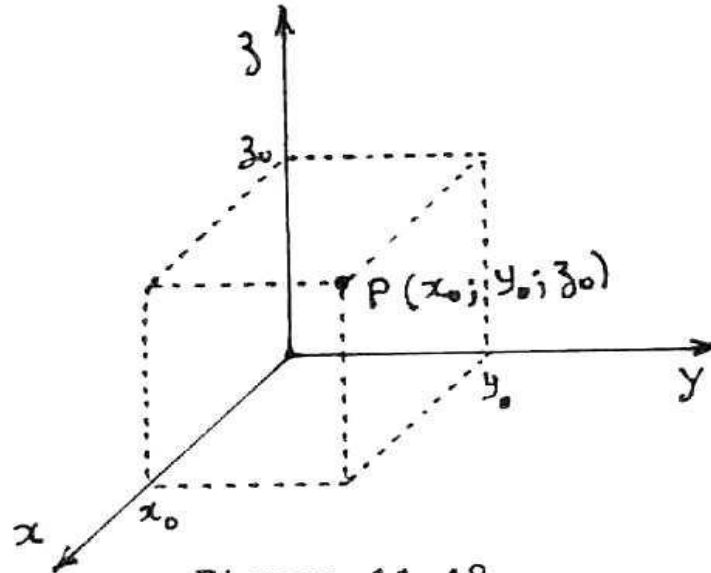


Figura 11.48

Esta es una interpretación analítica que nos permite resolver problemas geométricos del espacio por el método de coordenadas.

TAREAS DEL CAPITULO

1. a) Realice una panorámica sobre el transcurso de la línea directriz "Geometría" de séptimo a duodécimo grado de la E.G.P.L.  
b) Ejemplifique cómo se realiza esta línea directriz en el tratamiento de otras unidades de materia en dichos grados, en especial en el "Cálculo de Cuerpos" en secundaria básica y la unidad de "Sistematización" en el preuniversitario.
2. a) Analice y resuelva los ejercicios siguientes:
  - I. En la figura 11.49 ABCD es un trapecio isósceles,  $\overline{AD} \parallel \overline{EC}$ , E es punto medio de  $\overline{AB}$ . Pruebe que los triángulos AED; EBC y CED son iguales e isósceles.
  - II. En el rectángulo ABCD de la figura 11.50,  $\overline{CE} \perp \overline{BD}$ ,  $\overline{AB} = 12$  u y  $\overline{AD} = 9$  u.
    - a) Pruebe que  $\triangle ABD \sim \triangle DCE$ .
    - b) Calcule la longitud de la poligonal ADEC.
  - III. Los ángulos interiores de un triángulo están en la relación siguiente: el primer ángulo es el duplo del segundo y el tercero es el triplo del segundo. Clasifique el triángulo según sus ángulos.
  - IV. En la figura 11.51, RT es tangente a la C (O,  $\overline{OA}$ ). Si  $\overline{RT} = 15$  cm,  $\sphericalangle A = 35^\circ$ . Halle  $\overline{RA}$ ,  $\overline{OA}$  y  $\sphericalangle R$ .
  - V. Conservando la base de un cono de 5,0 cm de radio y 30 cm de altura, se obtuvo otro cono desperdiciando  $471 \text{ cm}^3$  de ese material. ¿Cuánto disminuyó la altura del primer cono?

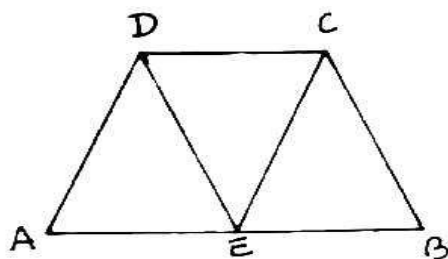


Figura 11.49

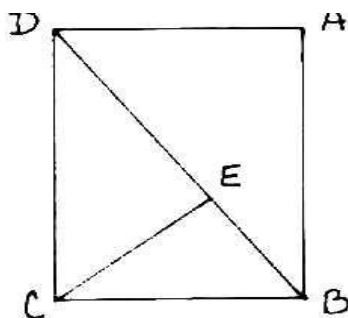


Figura 11.50

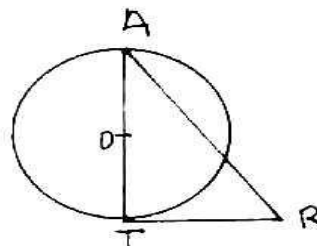


Figura 11.51

- b) Explique a partir de qué grado pueden proponerse estos ejercicios a los alumnos.
- c) Determine qué conocimientos y habilidades para el trabajo geométrico se aplican en la resolución de estos ejercicios y con qué otros conocimientos y habilidades matemáticas están estrechamente relacionados.
3. Elabore una ponencia sobre el desarrollo histórico de la Geometría en la que aborde los aspectos siguientes:
- Panorámica sobre el surgimiento y desarrollo de la Geometría Plana (Geometría Analítica y Vectorial, Geometría del Espacio y Trigonometría).
  - Matemáticos que más aportaron al desarrollo de cada una.
  - Ejemplos de motivaciones extramatemáticas de carácter histórico a utilizar en la introducción de algunos contenidos en la escuela.
4. Describa en una panorámica los conocimientos y habilidades que deben tener los alumnos al concluir el 6to. grado, en relación con el trabajo con ángulos y triángulos. Elabore dos esquemas que resuman e ilustren gráficamente los siguientes contenidos:
- a) Relaciones entre pares de ángulos: adyacentes; opuestos por el vértice; alternos, correspondientes

y conjugados entre paralelas.

- b) Clasificación de los triángulos según sus lados y según sus ángulos; Teoremas sobre ángulos interiores y exteriores de un triángulo. Desigualdad triangular. Relaciones entre lados y ángulos de un triángulo.
6. Estructure metodológicamente un grupo de ejercicios para fijar los contenidos correspondientes a "Construcciones de triángulos" en 7mo. grado y exponga los puntos de vista esenciales que hay que tener en cuenta para seleccionar los enunciados y elaborar una base de orientación para los alumnos en cada caso.
  5. Planifique en detalles la primera clase sobre "Relaciones de posición entre dos circunferencias". Preste especial atención a la confección de medios de enseñanza y planifique previamente cómo utilizará el pizarrón.
  7. Estructure metodológicamente una clase de repaso sobre "Relación entre ángulos centrales y sus arcos y cuerdas correspondientes", sin emplear ejercicios contenidos en el libro de texto vigente para el 8vo. grado.
  8. Desarrolle tres posibilidades diferentes de hallar en clases el teorema de TALES, de manera que se garantice en alto grado la actividad independiente de los alumnos.
  9. Realice un corte vertical del tratamiento de los polígonos en 7mo, 8vo y 10mo grados. Exponga en síntesis los conceptos, teoremas y procedimientos que se estudian, así como las habilidades que deben desarrollar los alumnos a través del estudio de estos contenidos.
  10. Analice en 7mo. grado la introducción de los teoremas

de la igualdad de triángulos y realice:

- a) Una propuesta de objetivos para las clases del sistema.
- b) Una dosificación para esa unidad temática.
- c) Planifica en detalles una de las clases.
- d) Haga una propuesta de los ejercicios que utilizaría en las clases para la fijación de estos teoremas.

11. Realice un estudio de la unidad de 7mo. grado correspondiente a los cuadriláteros convexos y prepare una clase dirigida a la sistematización de los conceptos y propiedades de estas figuras geométricas.

12. Planifique el sistema de clases y elabore los medios de enseñanza a emplear en ellas para el tratamiento de las relaciones de posición entre dos circunferencias.

13. Realice un estudio de la unidad temática "Circunferencia trigonométrica".

- a) Proponga el sistema de objetivos a lograr en su tratamiento y una posibilidad de dosificación.
- b) Estructure el proceso de obtención de las fórmulas de reducción para los diferentes cuadrantes.
- c) Determine los medios de enseñanza a emplear, explique cómo utilizarlos.
- d) Explique qué líneas directrices están presentes en el desarrollo de la temática.

14. Para la unidad "Aplicaciones de la Trigonometría" elabore:

- a) Una panorámica de la materia de enseñanza.
- b) Una propuesta de trabajo de control parcial.
- c) La planificación en detalles de la clase para es-

tudiar la "Ley de los cosenos" empleando métodos problemáticos.

15. Realice una panorámica sobre los conocimientos y habilidades que deben poseer los alumnos al iniciar el tratamiento de la Geometría Analítica en relación al trabajo con:

- a) Vectores.
- b) Sistema de coordenadas.
- c) Rectas y funciones.

Consulte en cada caso el programa, libro de texto y orientaciones metodológicas necesarios.

16. Para la unidad "Geometría Analítica de la recta en el plano" elabore:

- a) Una panorámica de la materia de enseñanza.
- b) Un corte horizontal del contenido.
- c) Una propuesta de trabajo de control parcial.

17. Realice un estudio de la unidad temática "Ecuación paramétrica de la recta en el plano":

- a) Proponga el sistema de objetivos a lograr y una dosificación para su tratamiento.
- b) Planifique en detalles la clase para el estudio de la ecuación paramétrica de la recta en el plano.
- c) Estructure la obtención del procedimiento para expresar una ecuación paramétrica en una cartesiana y viceversa, empleando el método investigativo.

18. Estudie la unidad temática "Elipse" (Hipérbola).

- a) Derive los objetivos a lograr en el sistema y proponga una dosificación para su tratamiento.
- b) Planifique en detalle la clase del sistema para introducir la ecuación de la curva.

- c) Proponga un grupo de ejercicios para fijar el procedimiento "Calcular aplicando la ecuación de la curva". Fundamente.
19. Revise el tratamiento que se propone a la temática "Geometría Analítica" en el espacio y realice:
- a) Una propuesta del sistema de objetivos a lograr y de dosificación para su tratamiento.
  - b) La planificación de la clase para introducir la fórmula de distancia entre dos puntos del espacio.
  - c) Una propuesta de los medios de enseñanza a emplear en la temática con indicaciones para su uso.
20. Realice un estudio de la unidad "Geometría del Espacio" en el preuniversitario y elabore:
- a) Una panorámica de la materia de enseñanza.
  - b) Un corte horizontal del contenido.
  - c) Una propuesta de trabajo de control parcial.
  - d) Una propuesta de medios de enseñanza para el tratamiento de los poliedros. (Confeccione los modelos de medios).
21. Estudie la unidad temática "Rectas y planos".
- a) Derive los objetivos a lograr en su tratamiento y proponga una dosificación para el sistema de clases.
  - b) Planifique en detalles una clase de ejercicios de demostración, fundamente cómo procedió para seleccionar los mismos y de qué forma va a estimular el trabajo independiente de los estudiantes.
  - c) Proponga un grupo de ejercicios para desarrollar habilidades en el cálculo geométrico con rectas y planos, argumente metodológicamente su propuesta.

## CAPITULO 12. TRATAMIENTO DE LAS ECUACIONES E INECUACIONES

Varios han sido los matemáticos que a lo largo de la historia de esta ciencia se han destacado en el trabajo con las ecuaciones. Dentro de los más célebres se encuentran: Diofanto de Alejandría, Luca Pacioli, Francois Vieta, René Descartes, Carlos F. Gauss y otros.

Precisamente, el tratamiento de las ecuaciones constituye un punto básico de la formación matemática para la realización de los objetivos de la enseñanza de esta asignatura y es determinante para todos los grados escolares. Al trabajo con las ecuaciones se dedica gran parte del tiempo en toda la enseñanza de la Matemática en la Educación General Politécnica y Laboral. Su tratamiento se realiza de forma explícita o implícita en diferentes complejos de materia.

En las asignaturas correspondientes a las ciencias naturales, así como en otros campos de la enseñanza y, principalmente en las especialidades técnicas y la práctica profesional, desempeñan las ecuaciones una función importante. Además, el tratamiento de las ecuaciones en las clases permite contribuir al desarrollo intelectual de nuestros jóvenes, a través del desarrollo de su pensamiento lógico deductivo, del pensamiento creativo con fantasía, por medio de la racionalización del trabajo mental, etcétera.

Algo esencial en el tratamiento de las ecuaciones e inecuaciones, son las posibilidades que ofrece este tema para contribuir a la educación ideológica de los alumnos, que tanto influye en la formación de la personalidad. Lo anterior se manifiesta, por ejemplo, cuando el profesor:

- muestra a sus alumnos que muchos problemas de la vida se resuelven a través de una modelación que conduce al planteamiento y solución de una ecuación (una inecuación

- o o un sistema de ecuaciones) como se analizó en el capítulo 7.
- exige a sus alumnos que discutan la solución de una ecuación en colectivo o que critique lo que hacen los demás y se autocritiquen; que sean constantes en el trabajo, que laboren con limpieza, exactitud y planificadamente.
- hace que sus alumnos comprendan (y no "mecanicen") los algoritmos para la solución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones. Por ejemplo a partir de la solución de ecuaciones por reflexiones lógicas, los alumnos pueden obtener algoritmos que racionalicen la determinación del conjunto solución.

#### 12.1 Descripción de la línea directriz ecuaciones e inecuaciones. Sistemas de ecuaciones.

El tratamiento de este complejo de materia comienza de forma implícita desde el primer grado.

En el ciclo propedéutico los niños se van familiarizando con las variables en forma elemental y a partir del trabajo con conjuntos. Además, mediante reflexiones lógicas y sobre la base del dominio de los ejercicios de cálculo, aprenden a resolver ecuaciones e inecuaciones sencillas como:  $5 + x = 10$ ;  $8 - b > 5$ ; donde el dominio parcial de los números naturales, constituye en cada caso el dominio básico de las variables.

Todo lo anterior contribuye a la fijación de las habilidades de cálculo mediante nuevas formas de ejercicios y al tiempo que prepara para el trabajo futuro en la solución algorítmica de ecuaciones e inecuaciones.

En el segundo ciclo se exige desarrollar habilidades en la solución de ecuaciones lineales con una variable y su aplicación a la solución de problemas sencillos; se amplían y profundizan los conocimientos en el trabajo con las ecuaciones e inecuaciones; se consolidan las habilidades de

cálculo en la solución de ecuaciones y se introducen algunos conceptos relativos a la teoría de las ecuaciones (ecuación, inecuación, conjunto solución, etcétera).

El nivel básico tiene por objetivo desarrollar habilidades en la resolución de ecuaciones lineales, fraccionarias y cuadráticas y los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables de manera que puedan resolverlas con seguridad y aplicarlas a la solución de problemas. En él se introduce el concepto de sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables y se estudian los diferentes métodos (gráfico y analíticos) de resolución de estos. Además se abordan las ecuaciones de segundo grado, primero empleando la descomposición en factores y después aplicando la fórmula general para su solución. En este nivel juega un papel importante la aplicación de estos conocimientos a la solución de problemas tanto intramatemáticos como vinculados a la práctica y otras esferas del saber humano.

En el ciclo de profundización, sistematización y generalización, cuyo objetivo central es desarrollar habilidades y utilizarlas en el despejo de fórmulas y en la resolución de ejercicios con texto y problemas, se continúa profundizando el estudio de los sistemas de ecuaciones, abordándose por primera vez los sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables, considerando como base para ello, la resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables y también los sistemas formados por una ecuación lineal y una cuadrática. En este nivel se tratan, entre otras, las ecuaciones trigonométricas, las exponenciales y logarítmicas sencillas así como ecuaciones diferenciales muy simples, se trabaja con inecuaciones y se aplican las propiedades de las funciones al trabajo con desigualdades.

## 12.2 Aspectos metodológicos esenciales del complejo de materia "Ecuaciones e inecuaciones".

### 12.2.1 Resolución de ecuaciones e inecuaciones por reflexiones lógicas.

Por solución según reflexiones lógicas sobre el contenido, se consideran los procedimientos de solución para los cuales no se emplean fórmulas o reglas de transformación, sino la solución se logra a través de la aplicación de conocimientos sobre el significado de las operaciones de cálculo y sus operaciones inversas, la relación de orden, en el dominio que se trabaje, la aplicación de definiciones, de pruebas sistemáticas y a través de la aplicación de leyes de cálculo.

Los procedimientos de solución de ecuaciones por reflexiones lógicas sobre el contenido son aplicables a todos los tipos de ecuaciones que se estudian en la escuela. Esta forma de resolver ecuaciones e inecuaciones ofrece la posibilidad de fijar conocimientos sobre conceptos, teoremas y procedimientos sin necesitar para ello una estructuración metodológica detallada, aunque es necesario hacer consciente al alumno de que al aplicar este procedimiento, se emplean conocimientos ya estudiados.

Además, los primeros ejemplos pueden tratarse de modo diferente para lograr la comprensión del procedimiento:

- . El profesor expone cómo trabajar en el pizarrón o apoyándose en otro medio (hoja de trabajo, retrotransferencia, etcétera).
- . Se elabora de manera conjunta.
- . El alumno determina la vía de forma independiente.

#### Ejemplo 12.1

- ⊙ Alumnos con conocimientos sobre la potenciación y sus propiedades pueden resolver por reflexiones lógicas el

siguiente ejercicio:

Determina el valor de  $x$  si  $7^x = 49$ .

Una forma de reflexionar podría ser identificar  $7^x$  como una potencia con resultado 49, si la base es 7 y el exponente  $x$ , entonces  $x = 2$ , pues  $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$ .

Lo anterior puede escribirse en forma resumida  $7^x = 49$  luego  $7^x = 7^2$ ; y de este modo  $x = 2$ .

En el caso del ejercicio:

Determina la solución de la ecuación  $36^{x+3} = 216$ .

Cómo proceder en este caso para resolver la ecuación?

Los alumnos deberán comprender que ambos miembros de la ecuación deben expresarse en la misma base. De esta forma se está en presencia del caso anterior y todo resulta más sencillo.

- ⊙ Alumnos que conocen las operaciones y el orden en el dominio de los naturales pueden resolver el ejercicio siguiente por reflexiones lógicas.

Para qué números naturales " $n$ " se cumple que  $3n - 1 < 14$  Los niños pueden acometer la solución por tanteo, haciendo pruebas sistemáticas, en el mejor de los casos siguiendo el orden de los números naturales. Así comprueba que todos los naturales menores o iguales a 4 cumplen esta desigualdad.

La necesidad del empleo del método de solución de ecuaciones por reflexiones lógicas sobre el contenido en la enseñanza de la Matemática resulta de que:

- La comprensión del contenido en el tratamiento de las ecuaciones e inecuaciones posibilita la formación de capacidades mentales generales importantes y valiosas cualidades del carácter.
- La aplicación de las reflexiones lógicas posibilita la asimilación del contenido de conceptos fundamentales y capacita a los alumnos para aplicarlos de forma segura.

- El saber y el poder en el trabajo por reflexiones lógicas sobre el contenido contribuye de forma decisiva a la comprensión y la aplicación razonable de los procedimientos de solución según el cálculo algorítmico.

Resolver ecuaciones por reflexiones lógicas del contenido exige de los alumnos un gran trabajo mental, por lo que resultaría interesante pensar en otra vía de solución. Esta vía denominada procedimiento de solución según cálculo algorítmico se caracteriza por:

- ser aplicable a todas las ecuaciones e inecuaciones de un tipo determinado;
- asegurar la determinación de todas las soluciones para este tipo de ejercicio;
- posibilitar el trabajo racional y el uso correcto de la terminología y simbología matemáticas.

Para la solución de ecuaciones o inecuaciones según el procedimiento antes descrito, se deben diferenciar (como en todos los casos en que se aplica una sucesión de indicaciones con carácter algorítmico) las acciones de identificación, encaminadas a reconocer la ecuación, inecuación o sistema de que se trate, para determinar el algoritmo a emplear, y llevar a cabo las acciones de transformación correspondientes. De esta forma se contribuye a desarrollar en los alumnos tanto la capacidad de identificación como la de transformación, que son de gran importancia en la matemática.

Al abordar las ecuaciones lineales en la enseñanza media, lo esencial es que los alumnos desarrollen habilidades en su resolución (o aquellas que conduzcan a lineales), aplicando los procedimientos algebraicos estudiados, como se aprecia en el siguiente ejemplo:

Resuelve y comprueba las ecuaciones siguientes:

a)  $9x - (5x - 2) - x = 8 + (4 - 2x)$

$$b) (2x + 1) (2x - 1) + 13 = 2x^2 - 10x$$

$$c) 3x - [2(x + 5) - 4] = 7x$$

Para resolver el inciso (a) hay que eliminar primeramente los paréntesis aplicando el procedimiento conocido por los alumnos. En el caso (b) aparece incluido el producto de dos polinomios, luego, primero hay que calcularlos. En el inciso (c) se eliminan primero los signos de agrupación según sus prioridades y luego se resuelve la ecuación resultante.

Una de las formas de resolver ecuaciones lineales es a través del uso de las reglas de transformación. El procedimiento empleado para ello se identifica con el cálculo algorítmico. Estas reglas plantean lo siguiente:

- A) Cuando se suma o se resta un mismo número o la misma expresión algebraica a ambos miembros de una ecuación (inecuación), se obtiene una ecuación (Inecuación) equivalente.
- B) Cuando se multiplican o dividen ambos miembros de una ecuación por el mismo número, distinto de cero se obtiene una ecuación equivalente.
- C) Cuando se intercambian los miembros de una ecuación, se obtiene otra ecuación equivalente. En el caso de las inecuaciones cambia el signo de la desigualdad.

Observación: Para las inecuaciones en el caso (B), si el número por el que se multiplica o divide ambos miembros es menor que cero, cambia el signo de la desigualdad.

Estas reglas de transformación equivalentes permiten la transposición de términos en ecuaciones e inecuaciones. Existen otras reglas de transformación que no mantienen la equivalencia y cuya aplicación exige de la comprobación para verificar cuáles de los valores obtenidos como resultado de las transformaciones son solución de la ecuación.

En el caso de la comprobación de las ecuaciones linea-

les, independientemente de que esta debe aparecer escrita solo cuando se especifica en la orden del ejercicio, debe quedar bien claro para los alumnos que la misma posibilita verificar su trabajo y analizar los errores de cálculo que puedan haber cometido. La prueba se debe hacer siempre en la ecuación original y si se obtiene como resultado una proposición verdadera, entonces el alumno puede aceptarla como solución. En las ecuaciones con radicales debe comprobarse siempre, pues al elevar a potencias pueden introducirse soluciones a la ecuación transformada que no sean solución de la ecuación original, o sea, raíces extrañas.

En resumen:

- . En el tratamiento de ecuaciones e inecuaciones resulta conveniente considerar, por una parte, la solución de éstas a través de reflexiones lógicas sobre el contenido, y por otra parte, aplicando procedimientos de cálculo algorítmico, pues ambas formas de trabajo contribuyen a la formación de la personalidad de los alumnos. Además se diferencian esencialmente y no deben ser tratados a la vez.
- . En la solución de ecuaciones e inecuaciones según reflexiones lógicas sobre el contenido, predomina el aspecto semántico, o sea, el referido a la comprensión del contenido, al significado de las palabras; mientras que en la solución según procedimientos algorítmicos, resalta el aspecto sintáctico, es decir, el referido a los símbolos y series de símbolos.

#### 12.2.2 Procedimientos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Después de abordar el tratamiento de las ecuaciones lineales con una variable, es evidente que el pase a otros tipos de ecuaciones es razonable en dos direcciones diferentes: Aumentándose el número de variables

sin variar su grado. O aumentando el grado conservando una variable.

En la enseñanza de la Matemática se abordan ambas. En ella se tratan:

- Los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables.
- Los sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables.
- Los sistemas cuadráticos.

Algo esencial en el tratamiento de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables consiste en el desarrollo de conocimientos seguros y un poder sólido en la aplicación de las mismas.

El primer método que se trata en la enseñanza media para resolver sistemas del tipo anterior, es el método gráfico. Lo fundamental aquí radica, en que los alumnos representen gráficamente rectas en un sistema de coordenadas rectangulares, pues de las relaciones de posición entre las rectas, cuyas ecuaciones conforman el sistema, depende el poder asegurar si dicho sistema tiene una, infinitas o ninguna solución, como se puede apreciar en el siguiente ejemplo:

Resuelve gráficamente los sistemas de ecuaciones

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x + g = 3 \\ 2x - g = 0 \end{array} \right. \quad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x + y - 3 = 0 \\ 2x + 2y = 8 \end{array} \right. \quad \text{c) } \left\{ \begin{array}{l} 3x + 5y = 12 \\ 1,5x + \frac{5}{2}y = 6 \end{array} \right. \end{array}$$

Al representar gráficamente las rectas cuyas ecuaciones conforman cada sistema, sucede lo siguiente:

- a) Las rectas se cortan en el punto P (1, 2), luego, la solución del sistema es el par (1, 2), es decir, el sistema tiene solución única.
- b) Las rectas son paralelas no idénticas, por tanto el sistema no tiene solución.

c) Las rectas son paralelas coincidentes, por tanto el sistema tiene infinitas soluciones.

La desventaja fundamental que presenta este procedimiento radica en que, por lo general, las soluciones que se obtienen son aproximadas, el método es muy engorroso y requiere de mucho tiempo y cuidado para obtener las soluciones. Esto puede constituir una motivación para buscar nuevos métodos que permitan resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables de forma exacta y segura.

El nivel de partida puede asegurarse reactivando sólidamente los conocimientos esenciales para la comprensión de los métodos analíticos. Por ejemplo, los alumnos deben conocer:

- . El concepto de ecuación lineal con una variable.
- . cómo resolver ecuaciones lineales con una variable.
- . la solución de una ecuación lineal con dos variables.
- . el conjunto solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.
- . que una solución debe ser siempre un par ordenado.
- . que una solución debe satisfacer siempre ambas ecuaciones del sistema.

Dentro de los tipos de ejercicios que pueden ayudar al aseguramiento del nivel de partida se encuentran los siguientes:

1. Ofrece algunas soluciones de la ecuación  $x + 3y = 6$ .
2. Investiga cuáles de las siguientes ecuaciones se satisfacen por el par ordenado  $(-2 ; 2)$ .
  - a)  $-x - y = 1$
  - b)  $x = y - 1$
  - c)  $x = 2 - 2y$
  - d)  $x + y = 0$

3. Escribe una ecuación lineal con dos variables que tenga como solución el par ordenado  $(1 ; -2)$ .
4. Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables que tenga como conjunto solución el par  $(3 ; 1)$ .

Una posibilidad para la elaboración de la nueva materia puede ser: comenzar con un ejemplo de un caso particular de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables como el siguiente:

$$x + 3y = 6(I)$$

$$5x - 2y = 13(II)$$

---

Un sistema como este puede ser resuelto por reflexiones lógicas sobre el contenido (a través de pruebas sistemáticas) de forma rápida por los alumnos, luego, esto podría ser una invitación por parte del profesor hacia estos. Así podría obtenerse en muy poco tiempo, que el par  $(3 ; 1)$  es solución del sistema (previa comprobación).

Una vez hecho esto, preguntamos a los alumnos si conocen algún método analítico que les permita resolver el sistema anterior de una forma más racional y exacta. Este diálogo nos permitirá abordar el nuevo método, para el cual es necesario considerar de antemano que el sistema dado tiene una solución  $(x_1 ; y_1)$ . Para ello proponemos una conversación de clases. Así son los propios estudiantes, guiados por el profesor, los que obtienen el procedimiento. Para ello pueden realizarse algunas preguntas como las siguientes:

¿Qué tipos de ecuaciones sabemos resolver?

¿Podría obtenerse de este sistema una ecuación lineal con una variable?

¿Cómo lograrlo? (de ser necesario, ofrecer más impulsos).

Mediante impulsos el profesor debe conducir al alumno a percatarse de que sería conveniente despejar en una ecuación y sustituir en la otra. Mediante ejemplos se concluye con los alumnos los pasos a seguir para la resolución de estos sistemas de ecuaciones por el método de sustitución.

Durante el proceso de fijación del procesamiento se deben proponer ejercicios que tengan solución única, infinita o ninguna solución.

Para la asimilación y fijación de las ecuaciones, inecuaciones y los sistemas, resulta recomendable elebarar complejos de ejercicios que reflejen completamente, y en la mayor cantidad posible, las relaciones que sirven de base a esta materia. Nosotros haremos referencia solo a tres de las diferentes posibilidades que existen para formar los complejos de ejercicios antes mencionados.

<u>Primera Posibilidad:</u> Ecuación (inecuación, sistema de ecuaciones), dominio básico, conjunto solución.		
<u>Tipo 1:</u> Dada la ecuación (inecuación, sistema de ecuaciones) y el dominio básico. Hallar el conjunto solución. Este tipo de ejercicios es el que más abunda en nuestros libros de texto. <u>Ejemplo:</u> Determina el conjunto solución de la ecuación $4/x - 6x - 10 = 0$	<u>Tipo 2:</u> Dado el conjunto solución y el dominio básico de una ecuación (inecuación o sistema). Hallar una ecuación (inecuación o un sistema). <u>Ejemplos:</u> 1) Escribe una ecuación cuadrática definida en $\mathbb{R}$ que para las soluciones	<u>Tipo 3:</u> Dadas la ecuación (inecuación, sistema de ecuaciones), y el conjunto solución. Hallar el dominio básico. Nuestros libros de texto carecen de este tipo de

Con $x \in \mathbb{Z}$	$x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = -3$ 2) Indica una ecuación lineal con $x \in \mathbb{N}$ que tenga por conjunto solución $S = \{1, 2, 3\}$	<u>Ejemplo:</u> Indica en cada caso un dominio básico en el cual la inecuación $x + 8 > 10$ tenga infinitas soluciones, las soluciones 3 y 4, o ninguna solución.
------------------------	--	---

En una segunda posibilidad, se tienen en cuenta la equivalencia de ecuaciones (inecuaciones) y el dominio básico. Aquí, también se diferencian los tipos siguientes:

Tipo 1: Dadas dos ecuaciones (inecuaciones). Analiza su equivalencia en un dominio dado.

Ejemplo: Analiza si las siguientes ecuaciones son equivalentes en el dominio de los números naturales  $x + 3 > 2x - 2$  y  $6x + 17 < 4x + 27$

Tipo 2: Dada la ecuación (inecuación) y el dominio básico. Hallar una ecuación (inecuación) que sea equivalente a la dada en ese dominio básico.

Ejemplo: Escribe una ecuación lineal que sea equivalente a la ecuación cuadrática  $x^2 + x - 12 = 0$  en el dominio de los números naturales.

Tipo 3: Dadas dos ecuaciones (inecuaciones). Determinar un dominio básico donde ambas ecuaciones (inecuaciones) sean equivalentes.

Ejemplo: Indica un dominio básico en el cual las siguientes ecuaciones cuadráticas sean equivalentes.

$$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \quad \text{y} \quad x^2 - 3x - 18 = 0$$

Por último queremos hacer referencia a una tercera posibilidad, en la cual se deben tener en cuenta los elementos:

"Tipo de ecuaciones (inecuaciones), sistemas de ecuaciones) en particular.

Uno de los tipos de ecuaciones (inecuaciones, sistemas de ecuación) mencionados anteriormente, pueden ser aquellos en los que aparecen parámetros y se solicita, dadas ciertas condiciones, hallar los valores que los satisfacen. Veamos los siguientes ejemplo:

- 1) ¿Qué números naturales deben formar el dominio de la variable  $a$ , para que las soluciones del siguiente sistema sean números naturales?

$$\begin{cases} 5ax - y = 32 \\ -ax + y = 0 \end{cases}$$

- 2) Determine para qué valores de  $K$  la ecuación  $x^2 + 6x + k = 0$  tiene una solución, dos soluciones o ninguna solución real.

### 12.2.3 Tratamiento metodológico de las inecuaciones cuadráticas:

Lo fundamental que debe lograr el profesor en el tratamiento de las inecuaciones cuadráticas, es que sus alumnos dominen el procedimiento de solución de las mismas, pero, ¿cómo obtener dicho procedimiento?.

Para asegurar el nivel de partida, el profesor debe activar en los alumnos conocimientos sobre:

- Solución de inecuaciones lineales, teniendo en cuenta para ello el caso en que el coeficiente de la variable es positivo o negativo y precisa bien cuando el signo de la inecuación cambia.
- Solución de ecuaciones cuadráticas de la forma  $ax^2 + bx + a = 0$ .

- Representación gráfica de funciones cuadráticas.
- Representación gráfica de las soluciones de una inecuación lineal.

En la **reactivación** de los conocimientos anteriores pueden ayudar los siguientes ejercicios:

- 1) Resuelve y representa gráficamente la solución
  - 1.1)  $3(a - 5) < 5 - 2(-a + 1)$
  - 1.2)  $(2x + 5)(x - 1) \geq 2x(x + 6) + 13$
  - 1.3)  $-4 + 0,4x > 0,6x - 2$
- 2) Determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:
  - 2.1)  $x^2 - 10x + 25 = 0$
  - 2.2)  $20y^2 + 7y - 6 = 0$
- 3) Representa gráficamente las funciones siguientes
  - 3.1)  $f(x) = x^2 + 3x + 2$
  - 3.2)  $y(x) = x^2 - 4x + 4$

La motivación y orientación hacia el objetivo Puede resultar a partir de la solución del siguiente ejercicio

Resolver:

a)  $x^2 - 7x - 8 \geq 0$

P: ¿Qué expresión tenemos que resolver?

A: Una inecuación cuadrática.

P: ¿Cómo proceder para ello?

P: En la clase hay vamos apreciar cuál es el procedimiento, en gran parte conocido por ustedes, que nos permite solucionar todo tipo de inecuación de la forma  $ax^2 + bx + c \geq 0$  ó  $ax^2 + bx + c \leq 0$  con  $a > 0$

P: Para solucionar estas inecuaciones, debemos analizar el signo del trinomio  $ax^2 + bx + c$ . Ahora bien, cómo ave-

riguar para qué valores de  $x$  este trinomio es mayor o menor que cero.

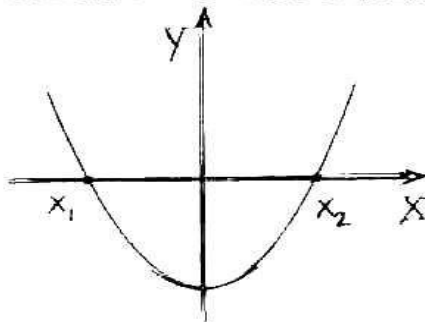
A: Participan expresando sus opiniones sobre las preguntas que realiza el profesor.

P: ¿Qué nos podría ayudar a determinar el signo del trinomio?

P: ¿Quién recuerda cuál es la representación gráfica de las funciones de la forma  $f(x) = ax^2 + bx + c$  con  $a > 0$ ? Luego, de qué depende el signo del trinomio. ¿Cuántos ceros puede tener esa función?

Aquí los alumnos pueden ofrecer tres respuestas, las cuales analizaremos según la siguiente diferenciación de casos.

Caso 1: Dos ceros cuando el discriminante es mayor que cero.



P: ¿En cuáles intervalos queda dividido el eje  $x$  y qué signo toma la función anterior en ellos?

$(-\infty ; x_1)$  es +

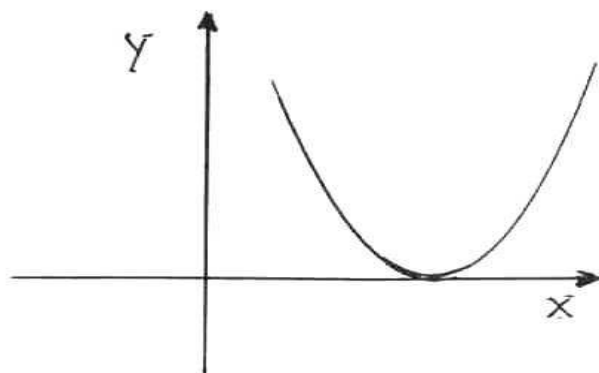
$[x_1 ; x_2]$  es -

$[x_2 ; \infty)$  es +

P: ¿A qué conclusión podemos arribar del análisis anterior?

A: Cuando la función tiene dos ceros, cambia de signo en cada uno de los intervalos determinados por ellos, en los cuales el signo se alterna.

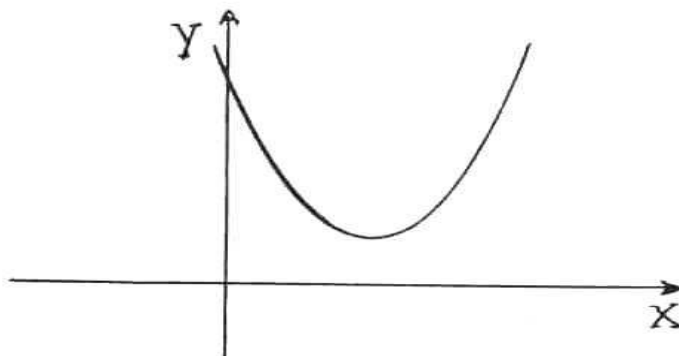
Caso 2: Un cero cuando el discriminante es igual a cero



Se procede de forma análoga al caso anterior y se llega a la siguiente conclusión:

Cuando la función tiene un único cero, se anula para éste, pero su signo es positivo en el resto.

Caso 3: Ningún cero cuando el discriminante es menor que cero



Aquí, procediendo como en los dos casos anteriores se concluye que:

Cuando no hay ceros, la función tiene un todo momento signo positivo.

Observación: Los impulsos del profesor a través de las preguntas, tienen un todo momento un carácter problemático o motivacional.

Ahora estamos ya en condiciones de solucionar el ejercicio.

a)  $x^2 - 7x - 8 \geq 0$

Esta inecuación está expresada en la forma

$ax^2 + bx + c > 0$  con  $a > 0$

Analicemos el signo del trinomio  $x^2 - 7x - 8$

Para ello, calcula los ceros de la ecuación

$$x^2 - 7x - 8 = 0$$

¿Cómo proceder en tal sentido?

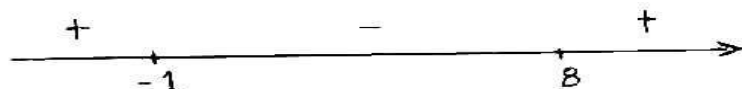
Una forma podría ser a través de la descomposición en factores

$$(x - 8) (x + 1) = 0$$

$$x_1 = 8 \quad x_2 = -1$$

Como la ecuación tiene dos ceros, según caso 1, existen tres intervalos en los cuales el signo se alterna.

Representemos estos ceros sobre una recta y escribamos los signos.



¿Cuál es la solución? ¿Cómo escribirla?

$$\text{Rta: } x \in (-\infty ; -1] \cup [8 ; \infty)$$

Se debe analizar con los alumnos

¿Por qué no se considera el intervalo  $(-1 ; 8)$

b)  $x^2 + 25 > 10x$

Primeramente expresamos la inecuación en su forma canónica  $x^2 - 10x + 25 > 0$  y después, procediendo como en el caso anterior, obtenemos que los ceros de la ecuación  $x^2 - 10x + 25 = 0$  son:  $x_1 = x_2 = 5$

Geométricamente el signo se comportaría, según caso 2, de la siguiente manera.



luego  $x^2 + 25 > 10x$  para toda  $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$

Analícemos por último el siguiente inciso

c)  $-5x^2 + x \leq 2$

Llevando la inecuación a la forma canónica obtenemos:

$$5x^2 - x + 2 \geq 0$$

Ahora procedemos a calcular los ceros de la ecuación  $5x^2 - x + 2 = 0$ , si existen. Para ello procedimos a través del discriminante como otra forma de hallarlos.

$$D = b^2 - 4ac = 1 - 4(5)(2)$$

$$D = 1 - 40$$

$$D = -39 < 0$$

La ecuación no tiene solución, o sea, estamos en presencia del caso 3, el signo del trinomio es constante y positivo. Luego se cumple que

$$-5x^2 + x \leq 2 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}_0$$

Una vez resuelto el ejercicio, proponemos que a partir de él se obtenga el procedimiento algorítmico que permite solucionar inecuaciones cuadráticas.

### Procedimiento:

1. Se lleva la inecuación a la forma canónica.
2. Se determinan los ceros de la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$ , si existen.
  - 2.1 Si tiene dos ceros, represéntalos y analiza según el signo de la inecuación, cuál o cuáles de los intervalos forman parte de la solución.
  - 2.2 Si tiene un único cero, represéntalo y analiza si éste forma o no parte de la solución de la inecuación.
  - 2.3 Si el trinomio no tiene ceros, entonces el conjunto solución es el conjunto de todas las  $x \in \mathbb{R}_0$

Para la  fijación  del procedimiento anterior, resulta necesario seleccionar ejercicios que abarquen todas las formas posibles de plantearlos y cuidar de su graduación, para así garantizar la mayor independencia posible en el trabajo con los estudiantes.

Algunos de estos ejercicios podrían ser los siguientes:

① Resolver:

a)  $x^2 + 10x + 16 < 0$

b)  $2x^2 + 11x - 6 \leq 0.$

Como se puede observar, en estos casos se aplica el procedimiento sin necesidad de realizar transformaciones, pues ambas inecuaciones se encuentran en su forma canónica.

c)  $y^2 - 4y > 0$

d)  $3z \geq 2z^2 + 5$

En el caso (c) el estudiante reconoce que el tercer término de la inecuación cuadrática no aparece y esto facilita la solución de la misma. Ya en el inciso (d) si resulta necesario realizar transformaciones para expresar la inecuación en su forma general. Además se emplean otras notaciones para las variables.

e)  $x(x + 3) > 5x + 3$

f)  $(x + 4)^2 \geq 2x(5x - 1) - 7(x - 2)$

La inclusión de signos de agrupación en estos casos, eleva considerablemente el grado de dificultad de los ejercicios y exigir de los estudiantes una mayor concentración y abstracción para su realización.

② Dadas las funciones  $f(x) = -5x^2 + x - 2$

$g(x) = 4x^2 - 28x$

Para qué valores de  $x$  se cumple que:

a)  $f(x) > 0$

b)  $g(x) \leq -49$

Aunque en esencia, este ejercicio se resuelve tal y como se procedió con el primero, su planteamiento ha variado con relación a éste.

### 12.3 Tareas del capítulo

1. Describa el transcurso de la línea directriz ecuaciones/inecuaciones en la enseñanza de la matemática de los grados 7mo a 9no. Ejemplifique además cómo se manifiesta esta línea en el tratamiento de otras unidades de materia en dichos grados.
2. Estudie la unidad temática "Métodos analíticos para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Resolución de problemas" y:
  - a) Derive los objetivos a lograr en el sistema y proponga una dosificación para su tratamiento.
  - b) Planifique una clase, en detalles, para introducir el procedimiento de adición y sustracción para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales en las variables.
  - c) Realice una valoración de los ejercicios de epígrafe y fundamente los que no deben dejarse de resolver para cumplir los objetivos propuestos.
3. Desarrolle el bosquejo de una clase a través de la cual asegure el nivel de partida, motive y oriente hacia el objetivo en el tratamiento de las ecuaciones con radicales.
4. Trabaja con los programas, libros de texto y las orientaciones metodológicas para la secundaria básica y:
  - a) Determina la unidad dedicada a las ecuaciones cuadráticas y los objetivos fundamentales que deban lograr los alumnos en la misma.
  - b) Explica mediante ejemplos, cómo se aplican los co-

nocimientos y habilidades adquiridos por los alumnos en la resolución de ecuaciones cuadráticas.

5. Seleccione un sistema de ejercicios que permite fijar el procedimiento de solución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables. Fundamente la selección, variedad y graduación de los ejercicios propuestos.
6. Estructure el proceder metodológico para el tratamiento de las inecuaciones fraccionarias.

## CAPITULO 13. TRATAMIENTO METODOLOGICO DE LAS FUNCIONES

El estudio de las funciones tiene gran importancia. La ciencia Matemática que generalmente en sus investigaciones busca relaciones y dependencias da especial significado a las funciones. Muchas de las situaciones prácticas que el hombre enfrenta encuentran interpretaciones y soluciones con ayuda de las funciones. Este elemento hace evidente la posibilidad que encierra este contenido para ilustrar la relación matemática y la realidad objetiva y comprender la matemática como un medio para transformar la realidad. En la escuela este tema constituye centro para el estudio de otras unidades temáticas que proporcionan una sólida formación matemática en los estudiantes. Mediante su estudio se brinda una contribución al desarrollo del pensamiento funcional en los alumnos como una forma específica del pensamiento matemático. Para lograr esto debemos partir de considerar relaciones o dependencias entre conjuntos, magnitudes, variables, etcétera, tratando de delimitar como unas determinan las otras. En general el pensamiento funcional se desarrolla descubriendo o determinando cantidades variables, y las relaciones que determinan unas cantidades en dependencias de las otras, es decir, descubriendo relaciones entre objetos matemáticos u objetos de la vida cotidiana, donde uno depende del otro, teniendo en cuenta una ley de formación. La enseñanza de la matemática tiene potencialidades para contribuir al desarrollo del pensamiento funcional cuyo aprovechamiento debe ser planificado.

### 13.1 Panorámica sobre el desarrollo de la línea directriz correspondencia, transformación, función.

Esta línea directriz se desarrolla durante todo el período escolar, desde los primeros grados hasta los grados superiores.

El concepto de función se prepara a largo plazo mediante un trabajo sistemático (ver cuadro 13.1). Este se realiza a través de unidades temáticas que no se refieren específicamente a funciones, constituyendo la etapa propedéutica en la formación del concepto de función en la escuela.

La preparación para el trabajo con las funciones comienza con la comprensión por parte de los alumnos de las ideas del concepto de correspondencia. Desde los primeros años de vida el niño tiene relaciones con situaciones del mundo que lo rodea que representan correspondencias, así por ejemplo; conoce que a cada niño le corresponde su cuna; a cada juguete su nombre, etcétera.

En el nivel primario los alumnos comienzan la preparación para el trabajo con las funciones cuando estudian los números naturales y aprenden que todo número natural tiene exactamente su sucesor o antecesor (excepto el 0) y conoce un procedimiento para el trabajo con las diferentes operaciones de cálculo. A través de estos contenidos no es evidente mostrar la idea del concepto de correspondencia en los alumnos, por lo que el profesor debe insistir en que cada número natural tiene un único antecesor o que para cada par de números naturales le corresponde un único número natural mediante una de estas operaciones. Para ello puede apoyarse en los siguientes ejercicios, los que también contribuyen al desarrollo del pensamiento funcional.

1. Determina el antecesor y el sucesor de: 2, 5, 6 y 23.
2. Teresa tiene 40 fotografías de lugares en que ha estado de paseo. Pega en su album 23 fotos. ¿Cuántas fotos le quedan a Teresa sin pegar en su album?

CUADRO 13.1

RESUMEN DE LOS TRABAJOS PREPARATORIOS MAS IMPORTANTES PARA EL TRATAMIENTO DE LAS FUNCIONES

CICLO	TRABAJO CON CONJUNTOS	TRABAJO CON PARES ORDENADOS	TRABAJO CON CORRESPONDENCIAS	TRABAJO CON VARIABLES Y ECUACIONES
Primer ciclo	Trabajo intuitivo con conjuntos.	Formación de pares numéricos en la adición, sustracción, multiplicación y división de números naturales.	Ordenación de objetos.  A cada par numérico le corresponde un número mediante las diferentes operaciones de cálculo.  Representación de números naturales en el rayo numérico.	Trabajo con variables en la introducción y desarrollo de las operaciones de cálculo en el dominio de los números naturales.
Segundo ciclo	Introducción de los conceptos conjunto y subconjunto (complejo de materia múltiplos y divisores).	Al par de números $(a;b)$ se le llama coordenadas del punto A.  Concepto fracción como par de números naturales.	Representación de números fraccionarios en el rayo numérico.  A cada par numérico $(a;b)$ le corresponde un punto en el plano	Trabajo en la determinación de valores de la variable en igualdades y/o desigualdades.  Trabajo con variables en la resolución de ecuaciones.

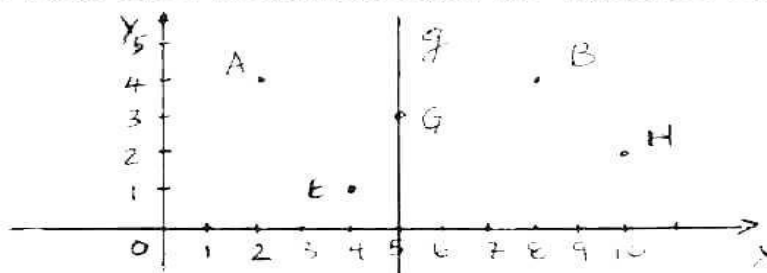
CICLO	TRABAJO CON CONJUNTOS	TRABAJO CON PARES ORDENADOS	TRABAJO CON CORRESPONDENCIAS	TRABAJO CON VARIABLES Y ECUACIONES
Segundo ciclo	<p>Relación entre conjuntos de la ampliación de los dominios numéricos.</p> <p>Trabajo con conjunto en la solución de ecuaciones.</p>		<p>(Sistema de coordenadas).</p> <p>Introducción del concepto movimiento como una correspondencia especial de puntos del plano.</p> <p>Tratamiento de la reflexión del plano en una recta, traslación en el plano y simetría con respecto a un punto, utilizando los conceptos original e imagen.</p> <p>Trabajo con fórmulas para determinar el área y el volumen de figuras y cuerpos determinados.</p>	
Secundaria Básica	Relaciones entre conjuntos en la ampliación de los dominios numéricos.		Representación de números racionales y reales en la recta numérica.	Trabajo en la determinación del valor de un término.

CICLO	TRABAJO CON CONJUNTOS	TRABAJO CON PARES ORDENADOS	TRABAJO CON CORRESPONDENCIAS	TRABAJO CON VARIABLES Y ECUACIONES
Secundaria básica	Trabajo con conjuntos en la solución de ecuaciones.		Trabajo con fórmulas para determinar el área y el volumen de figuras y cuerpos determinados.  Ampliación del concepto sistema de coordenadas rectangulares.	Trabajo con variables en la resolución de ecuaciones.  Trabajo en la determinación del valor de una expresión algebraica.

A través de diferentes contenidos geométricos también se puede contribuir a la preparación del concepto de función, pues el alumno reconoce que a determinadas figuras y cuerpos se les hace corresponder un área o volumen mediante las fórmulas correspondientes; que con el tratamiento de las transformaciones geométricas profundiza más el concepto de correspondencia, pues reconoce que a cada punto del plano se hace corresponder un único punto del mismo mediante un movimiento dado.

El siguiente ejercicio sirve para que los alumnos comprendan las ideas antes expuestas con respecto a las transformaciones geométricas.

3. En la figura el punto B es la imagen de A por la reflexión de eje  $g$ .
- a) ¿Cuál es la imagen de B?
  - b) ¿Di cuáles son los puntos imágenes de E, H y G y cuáles son las coordenadas de dichas imágenes?



También en este nivel de enseñanza los alumnos se familiarizan con los conceptos de variables y ecuaciones, pues posteriormente al estudiar las funciones ellos reconocerán que una forma de representarlas es mediante ecuaciones que contengan variables. A través de los siguientes ejercicios el alumno asimila el uso de las variables.

4. ¿Para qué valor de  $c$  la expresión  $2 + c$  toma el valor de 6, el valor de 8? ¿Puede ser esta suma igual a 2, 1?
5. Calcule el valor de la expresión  $d + 3$  para los valores de  $d$ :

d	0	2	3	7	8
d+3					

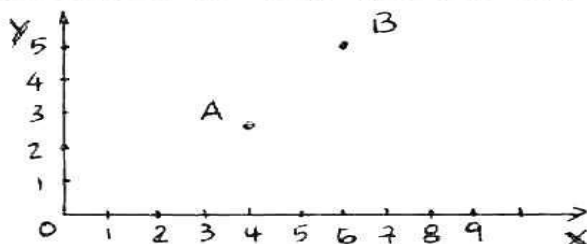
En este último ejercicio se utiliza una tabla de valores, las cuales igualmente juegan un significativo valor en la preparación del concepto de función, pues ellas constituyen una forma de expresar las mismas, que posteriormente conocerán.

Al estudiar el tema "Ecuaciones" los alumnos resuelven ecuaciones del tipo  $y = ax$  y  $y = ax + c$  ( $a, c \in \mathbb{N}$ ) las que contienen variables y que posteriormente reconocerán que estos tipos representan ecuaciones de funciones.

Por último es importante destacar que la representación de puntos en la recta numérica y en el plano mediante un sistema de coordenadas los prepara para el trabajo con la representación gráfica de la proporcionalidad directa y el trabajo con las ecuaciones que ellas describen. Todo lo cual sirve de preparación del concepto de función y su representación gráfica.

Con los ejercicios siguientes se asimilan estos contenidos y se continua desarrollando en los alumnos el pensamiento funcional.

6. En el sistema de coordenadas siguiente, representa los puntos de coordenadas  $(3; 1,5)$ ,  $(2,5; 4)$ . Determina las coordenadas de los puntos A y B.



7. El número de piezas fabricadas por un equipo automático es proporcional al tiempo de trabajo (en horas). El factor de proporcionalidad se denota por  $k$ .

a)  $k = 35$

b)  $k = 42$

Escribe la ecuación que representa la dependencia entre el número de piezas fabricadas y el tiempo de trabajo utilizado. ¿Cuántas piezas se fabrican en 3, 5, 7 y 20 horas?

En Secundaria Básica se sistematizan y profundizan las ideas expuestas anteriormente. En este nivel aun no ha concluido la etapa propedéutica de formación del concepto de función, el alumno aprende que a cada número racional (real) le corresponde un único punto en la recta numérica, un único opuesto, un único recíproco si es distinto de cero. Asimismo, en el desarrollo de la línea directriz se aprovechan las fórmulas  $s = vt$ ,  $m = \rho V$  introducidas en la asignatura de Física para posteriormente reconocerlas como funciones. Se continua con la definición de función como correspondencia entre dos conjuntos. Se comienza el estudio de las funciones lineales, sus gráficos y propiedades. Estos conocimientos son la base para el estudio posterior de las clases de funciones. Por último se tratan las funciones cuadráticas y la función de proporcionalidad inversa, sus gráficos y propiedades fundamentales. Con el estudio de estas funciones se fija el concepto de función estudiado anteriormente.

En el nivel preuniversitario el estudio de las diferentes clases de funciones permite continuar la profundización y la sistematización de estos contenidos. Se profundiza el concepto de función al definirlo como conjunto de pares ordenados. Se estudian las funciones potenciales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, así como las numéricas con sus respectivos gráficos y propiedades.

En cada uno de los programas de este nivel se destaca como característica esencial en el estudio de las funciones el trabajo primero con las imágenes y posteriormente con las funciones, así por ejemplo, antes de las funciones

potenciales se estudian las potencias y raíces; antes de las funciones trigonométricas las razones trigonométricas en triángulos rectángulos y antes de las funciones exponenciales y logarítmicas se estudian los logaritmos.

El estudio de las funciones continua con el trabajo en el tratamiento del cálculo diferencial e integral al estudiar, por ejemplo, función derivada, derivación de funciones, cálculo de extremos de funciones y otras posibilidades para esbozar la representación gráfica de funciones.

En resumen, el estudio explícito de las funciones se concentra en el nivel secundario y preuniversitario de la escuela cubana. Para el tratamiento de las diferentes funciones en la escuela el programa exige para los alumnos los siguientes objetivos:

- comprender el concepto de función, como una correspondencia entre dos conjuntos y como conjunto de pares ordenados,
- reconocer las diferentes formas de representar una función,
- desarrollar habilidades en la representación gráfica de las funciones, apoyándose en la representación de puntos en un plano coordenado,
- dominar las propiedades fundamentales de las diferentes clases de funciones que se estudian,
- reconocer la relación entre el gráfico y las propiedades de las funciones,
- identificar ejemplos de funciones, gráficos y propiedades de funciones dadas.

### 13.2 Aspectos metodológicos esenciales sobre el tratamiento de las funciones.

Teniendo en cuenta los objetivos y los contenidos de los programas se consideran puntos metodológicos

esenciales para el desarrollo de este tema:

- . El tratamiento metodológico del concepto correspondencia.
- . El tratamiento metodológico de la formación y asimilación del concepto función.
- . El tratamiento metodológico de las clases de funciones.

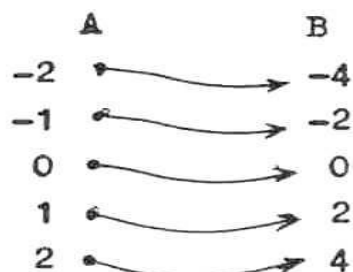
A continuación desarrollaremos estos puntos metodológicos esenciales, apoyándonos fundamentalmente en los conocimientos que poseen los estudiantes de la situación típica "Conceptos y sus definiciones".

### 13.2.1 Consideraciones generales para el tratamiento metodológico del concepto de correspondencia.

En los programas actuales de matemática no aparece prevista una definición del concepto de correspondencia, pues este concepto se introduce teniendo en cuenta los conocimientos que poseen los alumnos. Sin embargo debido a que la definición del concepto de función se basa en el concepto general de correspondencia, consideramos que resulta útil definirlo, pues los alumnos por su conocimientos están en condiciones de asimilar su definición y por otra parte facilita comprender más claramente el concepto de función por correspondencias entre dos conjuntos y la profundización que de este se hace en el nivel preuniversitario.

Un proceder metodológico puede ser el siguiente: Los alumnos conocen generalmente de las clases de geometría diferentes tipos de correspondencias, estas deben ser recordadas por el profesor, pero en el momento de introducir este concepto se debe tomar un ejemplo (o varios) aritméticos, pues esto facilita mostrar las diferentes formas de representar correspondencias. Un ejemplo puede ser: Dado los conjuntos  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  y  $B = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ . Establezca una relación entre los elementos del conjunto A y los elementos del conjunto B, de forma tal que los ele-

mentos del conjunto B sean el dobles de los elementos del conjunto A. Esto se puede designar de la siguiente forma con ayuda de flechas.



Se debe destacar que cada elemento del conjunto A se puso en correspondencia con un elemento del conjunto B, es decir, hemos establecido una correspondencia entre los elementos de los conjuntos A y B. Después del análisis de otros ejemplos semejantes de correspondencias a los alumnos se les puede definir este concepto de la siguiente forma:

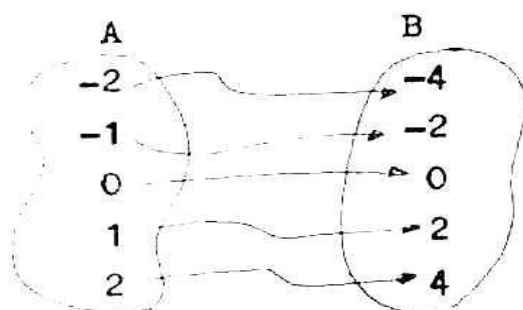
"Sea X e Y dos conjuntos. Una correspondencia entre el conjunto X y el conjunto Y significa indicar una regla, según la cual para cada número x del conjunto X se elige uno, varios o infinitos elementos y del conjunto Y" (1)

Para fijar este concepto es necesario seleccionar ejercicios los cuales permitan mostrar las diferentes formas de representar correspondencias.

Ya se mostró al introducir el concepto una forma, con ayuda de flechas, otra es mediante diagramas de Venn, por ejemplo:

---

(1) Manual de Matemática para la enseñanza media. Autor A. G. Tsipkin. Moscú, Editorial MIR, pág. 246.



Igualmente una correspondencia puede ser representada mediante una tabla de valores.

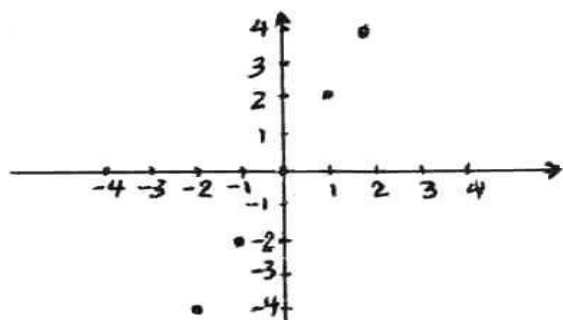
a	-2	-1	0	1	2
b	-4	-2	0	2	4

Es necesario aclarar que esta forma de representar correspondencias (mediante tablas de valores) es sólo posible con la utilización de conjuntos finitos.

Otra forma de representar correspondencias es mediante una ecuación. Las ecuaciones permiten el paso de la representación de las correspondencias entre conjuntos finitos a conjuntos infinitos. Siguiendo con el mismo ejemplo, esta correspondencia se puede representar por una ecuación con dos variables  $x$  e  $y$  así:

$$\begin{aligned} -2 &\rightarrow -4; & -1 &\rightarrow -2; & 0 &\rightarrow 0, & 1 &\rightarrow 2; & 2 &\rightarrow 4; \dots, \\ x &\rightarrow y = 2x. \end{aligned}$$

Por último, las correspondencias pueden representarse mediante un sistema de coordenadas o en una red de puntos. Apoyándonos en los conocimientos que poseen los alumnos de grados anteriores de representar puntos en el plano se puede mostrar esta forma con el ejemplo anterior, para ello hay que representar en el plano de coordenadas los siguientes puntos: A(-2, -4), B(-1, -2), C(0, 0), D(1, 2), B(2, 4).



La representación de esta correspondencia en una red de puntos es como sigue:

-4	⊙	.	.	.	.
-2	.	⊙	.	.	.
0	.	.	⊙	.	.
2	.	.	.	⊙	.
4	.	.	.	.	⊙
	-2	-1	0	1	2

Al conjunto de estos puntos se le llama gráfico de la correspondencia entre dos conjuntos.

### 1.3.2.2 Tratamiento metodológico de la formación y asimilación del concepto función.

Si a los alumnos antes de definirle el concepto de función en la escuela se le define el concepto de correspondencia, entonces el proceder metodológico para formar este concepto se simplifica. De esta afirmación se infieren dos vías para definir el concepto de función.

Primera vía. La vía inductiva. Para ello, se parte de ejemplos de correspondencias geométricas y matemáticas de diferentes tipos y apoyándonos en la definición de correspondencia llegar directamente al concepto de función. No constituye centro en este proceder el concepto de correspondencia, pues los alumnos tienen dominio del mismo. Una vez definido el concepto de función se les puede pedir a los alumnos ejemplos de correspondencias de la vida práctica que representen o no función y que justifiquen sus afirmaciones.

Segunda vía. La vía deductiva. Esta vía no es recomendable si se pretenden aprovechar al máximo las posibilidades de este contenido para contribuir al desarrollo del pensamiento de los alumnos.

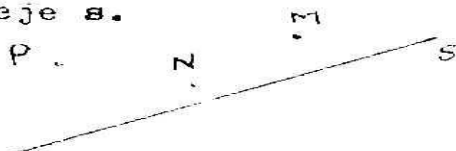
Otra situación se nos presenta si a los alumnos no se le define el concepto de correspondencia, aunque ellos tienen conocimientos intuitivos de este, por tanto una tercera posibilidad para definir el concepto de función en la escuela es la siguiente.

Para el aseguramiento del nivel de partida el profesor debe reactivar a sus alumnos los conocimientos que ellos poseen sobre el concepto de correspondencia. Para ello puede proponerle los siguientes ejercicios:

1. Complete la siguiente tabla:

a	a + 5
2	
4	
10	

2. Determine los divisores de cada elemento del conjunto A, si  $A = \{1, 2, 4, 5\}$ .
3. Determine la imagen de los puntos M, N, P por una reflexión de eje s.



Estos ejercicios constituyen objetos de investigación para los alumnos y pueden ser aprovechados por el profesor para orientar y motivar el concepto que se desea definir. Mediante los mismos se puede precisar el concepto de correspondencia, que es el concepto central para definir el de función.

Seguidamente el profesor puede mostrarle a los alumnos

correspondencias, las cuales ellos conocen antes de comenzar su vida escolar; así por ejemplo:

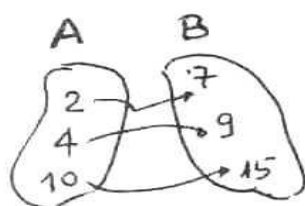
- a cada casa le corresponde un número,
- a cada escuela le corresponde un nombre,
- en general conoce que a los objetos se le hacen corresponder nombre.

Otros ejemplos de correspondencias pueden ser:

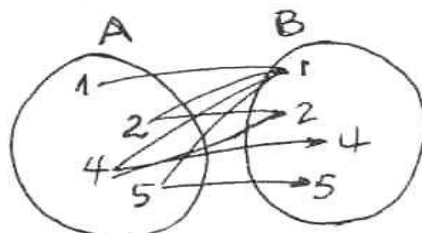
Analiza las relaciones que se presentan entre los elementos de las situaciones siguientes:

- a) Las bicicletas que están estacionadas en un parqueo y los comprobantes asignados a sus conductores.
- b) Los espectadores que se encuentran disfrutando de una película en el cine y las papeletas de entradas vendidas.
- c) Las excursionistas que están instalados en una base de campismo y las habitaciones donde se hospedan (Hay habitaciones para 2, 4, 6 y 8 personas).

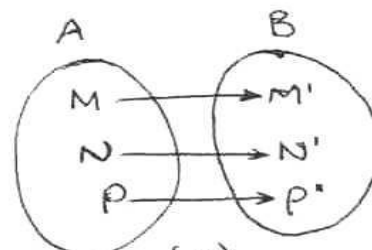
Precisamente en la vida y en la enseñanza de la matemática se presentan ante nosotros muchos ejemplos de correspondencias como los anteriores, los cuales en la matemática caractericen un nuevo concepto. Antes de definir el nuevo concepto hay que tener una visión clara del concepto de correspondencia. Para ello el profesor puede pedirle a los alumnos que representen mediante diagramas de Venn los 3 primeros ejercicios.



(1)



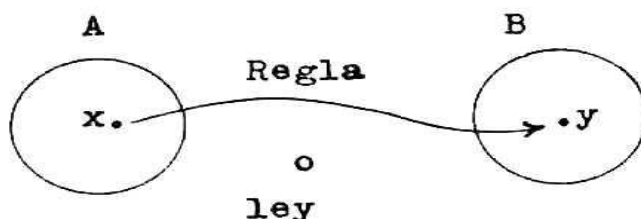
(2)



(3)

Profesor: Es importante destacar en estos ejemplos que en las correspondencias representadas intervienen

dos conjuntos A y B y una ley que asocia los elementos del conjunto A con los elementos del conjunto B. Estas ideas las podemos generalizar a través del siguiente esquema.



**Profesor:** Analizando los diagramas anteriores. ¿Es posible hacer corresponder en todos los casos a cada elemento del conjunto A un único elemento del conjunto B?

**Alumno:** En el caso de las correspondencias 1 y 3 esto es posible; pero en el caso del ejemplo 2 no es posible.

**Profesor:** Precisamente en los casos que esto es posible, estas correspondencias caracterizan un nuevo concepto matemático muy importante en el estudio de las matemáticas, el cual definiremos en esta actividad.

**Profesor:** Del análisis de los ejemplos que estamos estudiando podemos inferir la naturaleza de los elementos de ambos conjuntos. ¿Cómo son los elementos de los conjuntos A y B? ¿Qué tipo de elementos estamos considerando en cada caso?

**Alumno:** Los elementos de los conjuntos A y B son diferentes. En dos casos son números y el otro caso letras.

**Profesor:** Por último que podemos inferir de los casos 1 y 3. ¿Cuántos conjuntos intervienen en estas correspondencias? ¿Qué relación podemos describir entre los elementos de ambos conjuntos?

**Alumno:** Intervienen dos conjuntos A y B.

A cada elemento del conjunto A le corresponde un único elemento del conjunto B mediante una regla o ley que los relaciona.

**profesor:** Teniendo en cuenta fundamentalmente estas últimas ideas, podemos decir que correspondencias así definen un nuevo concepto en la enseñanza de la matemática. Precisamente este concepto es el concepto de función. ¿Cómo usted lo expresaría con sus palabras?

Oídas las explicaciones de los alumnos el profesor plantearía que a partir del análisis de los casos tratados podemos generalizar estas ideas (principio heurístico de generalización) en la siguiente definición:

**Definición:** Una función es una correspondencia que a cada elemento de un conjunto A asocia un único elemento de un conjunto B.

Con esta definición hemos concluido el proceso de formación del concepto de función por correspondencia entre dos conjuntos.

### Asimilación del concepto función

Para asimilar el concepto de función, el alumno debe a través del trabajo con los ejercicios realizar las acciones siguientes:

- Identificar el concepto,
- Realizar el concepto,
- Aplicar el concepto.

El desarrollo de estas operaciones exige a partir de la formación del concepto de la elaboración de una base de orientación. En nuestro caso:

1. Analiza si lo que aparece indicado es una correspondencia de un conjunto X en un conjunto Y,

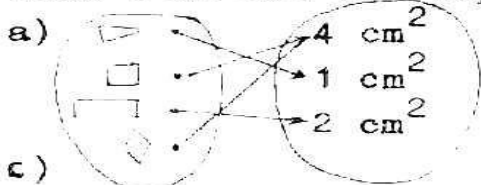
2. Determina si a cada elemento del conjunto X le corresponde un único elemento del conjunto Y.

Importante resulta en el trabajo con esta base de orientación el reconocimiento de la condición 2. En este sentido se pueden seguir las bases de orientación siguientes según la forma en que se presente la correspondencia a analizar:

- Diagramas de Venn. De cada elemento del dominio de definición parte exactamente una flecha.
- Tabla de valores. A un mismo valor  $x$  no puede corresponderle diferentes valores  $y$ .
- Representación de puntos en una red. En cada columna solamente puede aparecer un punto.
- Representación gráfica en el sistema de coordenadas. Sobre cada  $x \in X$  hay exactamente un punto. Cada paralela al eje  $y$  corta al gráfico en un punto.

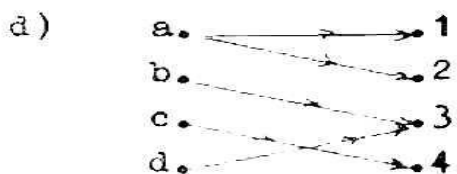
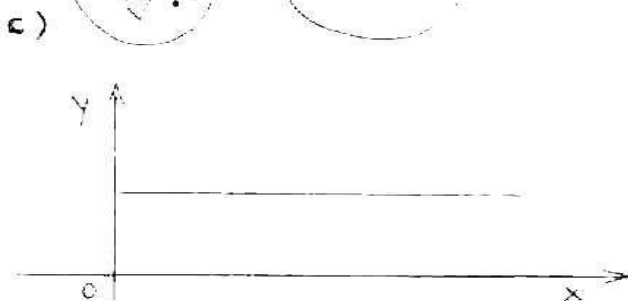
Ahora los alumnos deben decidir en varios ejemplos y ante distintos tipos de representaciones, si se trata de funciones o no. Ejemplos para la identificación del concepto pueden ser:

1. Determine en cada uno de los casos si representan función o no las correspondencias dadas.



b) 

a	1	2	3	4	5	1
b	0	1	2	3	4	5



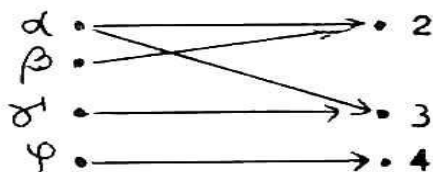
2. Se establece una correspondencia del conjunto de los números naturales en el conjunto de puntos del rayo numérico. ¿Es esta correspondencia en la que a cada número le corresponde un punto, una función?
3. Analiza cuáles de las siguientes correspondencias son funciones y cuáles no. Fundamenta tus respuestas.
  - a) A cada número real se asocia su duplo.
  - b) A cada número natural se hace corresponder sus divisores.
  - c) A cada número real se hace corresponder su raíz cúbica.

Con estos ejercicios se puede continuar desarrollando en los alumnos el pensamiento funcional.

Para la asimilación se deben aprovechar también las acciones de realización de conceptos; para ello se pueden utilizar los siguientes ejemplos.

- ① Transformación de correspondencias no unívocas, en correspondencias unívocas.

Ejemplo 1. Dada la siguiente correspondencia. Varía las fechas de forma tal que se obtenga una función.



Ejemplo 2. Dada la siguiente tabla de valores. Transforma la misma de forma tal que se obtenga una función.

t	2	3	4	5	2
v	8	10	12	14	9

- ② El establecimiento de correspondencias entre conjuntos, de forma tal que se formen correspondencias unívocas, utilizando distintas formas de representación es una

forma de realizar el concepto.

Igualmente para la asimilación del concepto de función se debe aprovechar la acción de aplicación, para ello veamos los siguientes ejemplos.

1. Dadas las funciones  $f$  y  $g$ , tales que  $f(x) = 10x + 14$  y  $g(x) = 2x - 2$ . Pruebe que:  $f(a) + g(a) = 12(a + 1)$ .
2. Un móvil se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme a una velocidad de 6 m/s. Exprese mediante una ecuación la correspondencia entre el desplazamiento (s) y el tiempo empleado (t) y fundamente por qué es una función.
3. Un obrero gana \$1,67 por horas. Exprese su salario  $s$  (en pesos) en función del número  $h$  de horas que trabajó.

Por último debemos destacar que otra forma de aplicación del concepto de función está en el estudio de las clases de funciones, sus gráficos y propiedades.

### 13.3 Tratamiento metodológico de las clases de funciones.

Para realizar el tratamiento metodológico de las clases de funciones que se estudian en la escuela debemos tener presente algunas consideraciones generales; es decir, se debe:

1. definir la clase de función que será objeto de estudio, considerándose previamente algunos aspectos metodológicos,
2. realizar la representación gráfica de forma general o a través de un caso particular de la clase de función,
3. analizar las propiedades fundamentales de la clase de función a partir del gráfico,
4. fijación de la clase de función estudiada, su representación gráfica y propiedades.

A continuación expondremos a través de algunos casos

particulares algunas ideas en cada uno de estos aspectos.

1. Para el desarrollo de este aspecto tomaremos como caso particular la clase "Función cuadrática".

En el aseguramiento del nivel de partida se debe reactivar en los alumnos los conocimientos sobre el concepto de función, función lineal, su representación gráfica y propiedades. Para ello se pueden resolver ejercicios tales como:

- a) Determina cuáles de las siguientes correspondencias son funciones y cuáles no. Fundamenta tu respuesta.
- A cada número natural se asocia su duplo,
  - A cada número natural se hace corresponder sus divisores,
  - A cada número real se hace corresponder su módulo,
  - A cada número real se asocia su cuadrado disminuido en 2.
- b) Dada la función lineal  $y = 3x - 5$ .
- Calcula su cero.
  - Representala gráficamente.
  - Determina dominio e imagen.
  - Analiza la monotonía.

Para la motivación y orientación hacia el objetivo se debe partir de los conocimientos que poseen los alumnos sobre función lineal y la ecuación que esta representa. El alumno conoce que una forma de representar una función lineal es mediante una ecuación de la forma  $f(x) = mx + n$  ( $x \in \mathbb{R}$ ,  $m, n \in \mathbb{R}$ ) y que la variable  $x$  tiene como exponente el valor 1, así como que la representación gráfica de esta función es una recta.

Una primera variante para motivar y orientar hacia el objetivo se muestra con el siguiente ejercicio.

1. Analiza si las siguientes correspondencias son funcio-

nes o no.

a) A cada  $x \in \mathbb{R}$  se hace corresponder  $2x^2$ .

b) A cada  $x \in \mathbb{R}$  se hace corresponder  $x^2 - 5x$ .

c) A cada  $x \in \mathbb{R}$  se hace corresponder  $x^2 + 5x + 6$ .

Los alumnos al responder este ejercicio se apoyarán en los conocimientos que tienen del concepto de función; así por ejemplo en el inciso a) responderán que es función porque el cuadrado de todo número real es único; así como el producto de dos números reales. Al concluir el ejercicio el profesor debe preguntar, ¿Representan funciones lineales las correspondencias dadas en el ejercicio anterior?

**Alumno:** No, pues las ecuaciones que ellas representan no son de la forma  $y = mx + n$ .

**Profesor:** Precisamente estas correspondencias no están dadas por la forma de expresar funciones lineales, ellas caracterizan un nuevo tipo de función. En ella la variable aparece con exponente 2. Luego el nuevo tipo de función se denomina Función cuadrática.

**Definición:** La correspondencia que a cada  $x \in \mathbb{R}$  le hace corresponder el número real  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ), donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales dados, se denomina función cuadrática o de segundo grado.

Igualmente para motivar y orientar hacia el objetivo el concepto de función cuadrática se puede partir del análisis de fórmulas conocidas por los alumnos, las cuales posteriormente las reconocerá como ecuaciones de funciones cuadráticas, así por ejemplo:

- El área del círculo está dada por la fórmula

$A(r) = \pi r^2$  ( $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ ,  $r$ -radio) y la relación entre el espacio y el tiempo en un movimiento uniformemente acelerado está dado por la fórmula

$s(t) = 1/2 at^2$  ( $t \geq 0$ ;  $a$  constante). El proceder metodológico es semejante al descrito anteriormente.

Y por último una tercera posibilidad para motivar y orientar hacia el objetivo el concepto de función cuadrática es relacionando las dos posibilidades anteriores.

## 2. Representación gráfica.

Al estudiar algunas clases de funciones se debe comenzar desde el principio de la unidad creando las bases para el estudio de las funciones a partir del trabajo con las imágenes, lo cual cambia el tratamiento que se les venía dando al estudio de las funciones. A partir del trabajo con las imágenes y la vinculación con su representación gráfica se infieren las propiedades. En resumen, no se trata de hacer representaciones de funciones conocidas las plantillas, ni de hacer desplazamientos con los gráficos, sino que se debe insistir en el "ploteo" de puntos, reduciendo la representación gráfica de una función a algo ya conocido (Principio heurístico de reducción), es decir a la búsqueda de sus imágenes. Esta variación que se recomienda para el trazado del gráfico de funciones, basado en el "ploteo" de algunos puntos y después en el ajuste de la curva se ha realizado porque en la práctica es necesario trazar gráficos aproximados de funciones y se necesita que el alumno domine este procedimiento; además porque, cuando el alumno determina puntos fija mejor la relación entre el gráfico y la función.

En la escuela en general la representación gráfica de las funciones se realiza a aquellas que están dadas mediante una ecuación. En este sentido sugerimos la siguiente sucesión de pasos. Esta sucesión no puede interpretarse rígidamente, por el contrario debe ajustarse a las características de cada alumno.

Sucesión de pasos para construir el gráfico de una función dada por una ecuación.

- a) Teniendo en cuenta la ecuación dada, determina de qué tipo de función se trata (lineal, cuadrática, etc.) (Esto permite que el alumno reconozca que el gráfico que trazará sea una recta o una curva) y cuenta con un elemento de control.
- b) Determine puntos característicos, líneas auxiliares, así como otros puntos con ayuda de una tabla de valores (ceros, vértices, eje de simetría, puntos de intersección con el eje de las ordenadas, puntos convenientes según las características de la función).
- c) Trace un sistema de coordenadas y represente los puntos calculados.
- d) Una los puntos. Y así se obtiene el gráfico de la función dada (verificar la correspondencia del gráfico obtenido con la ecuación de la función).

En la representación gráfica de funciones, el profesor debe insistir que en la medida en que calculemos una cantidad mayor de puntos de modo que cada vez sea uno más próximo al otro, obtendremos una representación más exacto del gráfico; aunque debe igualmente quedar claro en los alumnos que por la densidad del dominio nunca podremos calcular todos los puntos.

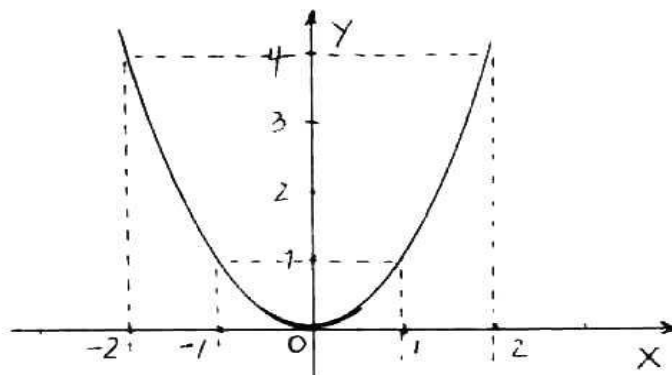
Ejemplifiquemos lo dicho anteriormente con la función cuadrática  $y = ax^2$  ( $a \neq 0$ ), considerando el caso  $a = 1$ ; es decir  $y = x^2$ .

Determine algunos puntos de esta función cuyas coordenadas están dadas por la ecuación  $y = x^2$ .

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
y	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4

Teniendo en cuenta todas las orientaciones dadas en el trazado de gráfico, se concluye que el gráfico de esta función no es una línea recta, ni es una poligonal

abierta, sino es una línea curva que se obtiene uniendo todos los puntos representados. En nuestro caso, esta curva se denomina parábola y su gráfico es el siguiente.



Hemos analizado cómo se puede construir el gráfico de funciones dadas, pero no siempre el alumno tiene esta tarea ante sí, en ocasiones debe reconocer si una representación gráfica es una función o no, ¿Cómo debe entonces proceder para responder rápidamente? Para ello, el alumno puede trazar rectas paralelas al eje  $y$  y si cada una corta al gráfico dado en un sólo punto, entonces puede afirmar que cada valor del dominio tiene una y solo una imagen, por lo que dicho gráfico representa una función. El alumno no debe utilizar para todos los casos este proceder, pues él se utiliza para reconocer rápidamente si una representación gráfica es función o no. Este procedimiento no fundamenta dicha afirmación, para ello el alumno debe analizar la ecuación que define a la función.

### 3. Propiedades fundamentales de las clases de funciones.

En la escuela cubana se tratan diferentes tipos de clases de funciones. Al analizar las propiedades de cada una de ellas observamos que algunas propiedades esenciales son comunes para todas las clases (dominio, imagen, cero y monotonía) y otras propiedades van apareciendo en la misma medida en que se estudian las clases de funciones. El cuadro 13.2 resume esta idea.

CUADRO 13.2

Clase de función	Propiedades
<ul style="list-style-type: none"> <li>. Función cuadrática.</li> <li>. Función de proporcionalidad inversa.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>. Valor máximo, mínimo (Vértice).</li> <li>. Simetría</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>. Funciones potenciales.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>. Paridad.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>. Funciones trigonométricas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>. Paridad.</li> <li>. Valor máximo, mínimo.</li> <li>. Periodicidad.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>. Funciones exponenciales y logarítmicas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>. Valor máximo, mínimo.</li> <li>. Paridad.</li> <li>. Periodicidad.</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>. Funciones numéricas</li> </ul> <p>(Vinculadas a los conceptos básicos del cálculo diferencial e integral.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>. límite.</li> <li>. continuidad.</li> <li>. derivación.</li> <li>. integral indefinida.</li> <li>. integral definida.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>. Paridad.</li> <li>. Valor máximo, mínimo.</li> <li>. Inyectividad.</li> <li>. Diferenciabilidad.</li> <li>. Polos.</li> <li>. Comportamiento en el infinito en el entorno de los puntos.</li> <li>. Asíntotas.</li> <li>. Extremos locales.</li> <li>. Integrabilidad.</li> </ul>

Para analizar las propiedades de alguna clase de función debemos partir de la representación gráfica de las funciones que representen esta clase, aunque no podemos generalizar esta idea pues hay propiedades que se utilizan para la representación gráfica (los ceros; el vértice, la simetría) y otras que se obtienen del gráfico (la monotonía, el valor máximo o mínimo y la imagen). Teniendo esto en cuenta veamos cómo proceder metodológicamente al tratar algunas propiedades en particular.

Al estudiar las funciones lineales los alumnos, conocen

las propiedades dominio e imagen de esta clase. Pero, ¿cómo identificará en el gráfico estas propiedades? Para el caso del dominio se le planteará que proyecte la gráfica en el eje  $x$ ; obteniendo así que la proyección del gráfico de la función sobre el eje  $x$  ocupa todo este eje, por lo que se puede afirmar que el dominio de la función son los números reales ( $\mathbb{R}$ ). Y ¿Cuál será la imagen de estas funciones) Utilizando el mismo procedimiento (Principio heurístico de analogía); es decir proyectando el gráfico de la función sobre el eje  $y$ , este ocupa todo el eje, por lo tanto la imagen de la función son los números reales.

A partir de este momento el alumno tiene para analizar estas propiedades un procedimiento; es decir basta con que ante cualquier clase de función lo aplique análogamente a como lo estudio en el tema función lineal.

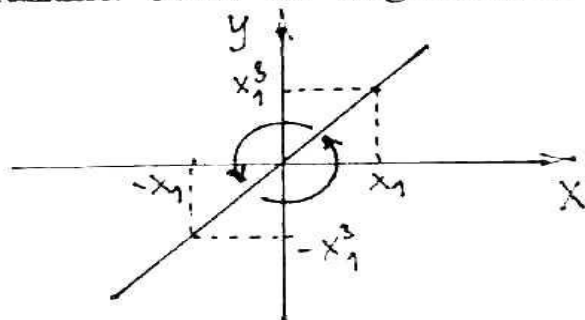
Veamos otro caso particular, ¿Cómo estudiar la propiedad paridad en la función potencial  $y = x^3$ .

Este estudio no debe partir de la definición de la propiedad, sino debe comenzar del análisis del comportamiento de las imágenes de la misma, para ello el alumno ya construyó el gráfico de la función  $y = x^3$  apoyándose en una tabla de valores como la siguiente.

$x$	-2	-1,5	-1	0	1	1,5	2
$y$	-8	-3,4	-1	0	1	3,4	8

Como nuestro objetivo es introducir una nueva propiedad, debemos tratar que el alumno muestre interés por descubrir la esencia de esta propiedad. Para ello el profesor partirá de una conversación de clase, donde le recuerda a los alumnos que ellos conocen la propiedad de simetría con respecto a los gráficos cuando estudiaron las funciones cuadráticas y que en ese tema habían concluido que los gráficos de funciones cuadráticas son simétricos con respecto al eje  $y$ , porque argumentos opuestos tienen imágenes

iguales. En este momento el profesor preguntará ¿Y cómo será el gráfico de la función  $y = x^3$  con respecto al origen de coordenadas y con respecto al eje  $y$ ? Seguidamente mostrará una lámina como la siguiente:



Y reflexionará conjuntamente con los alumnos de la siguiente forma. Como se observa si consideramos dos valores opuestos  $x_1$  y  $-x_1$  cualquiera, los cubos respectivos que ellos determinan son números opuestos  $x_1^3$  y  $-x_1^3$ . Geométricamente esto significa que los puntos  $(x_1; x_1^3)$  y  $(-x_1; -x_1^3)$  son simétricos respecto al origen de coordenadas, por lo que podemos generalizar que el gráfico de la función  $y = x^3$  es simétrico respecto al origen. De donde se concluye que esta función es una función impar, lo que se expresa simbólicamente así  $f(-x) = -f(x)$ . Veamos como esto se nota en los valores de la tabla.

• Si  $x = 1$  entonces  $-x = -1$ , de donde  $f(-1) = (-1)^3 = -1$   
y  $f(1) = 1^3 = 1$ ,  
luego  $f(-1) = -f(1)$  por tanto  
 $f(-x) = -f(x)$ .

• Si  $x = 1,5$  entonces  $-x = -1,5$  de donde  $f(-1,5) =$   
 $= (-1,5)^3 = -3,4$  y  $f(1,5) = 3,4$   
luego:  $f(1,5) = -f(-1,5)$   
por tanto  $f(-x) = -f(x)$

A partir de este momento y utilizando el principio heurístico de analogía, el análisis de la paridad de una función dada se hace de forma similar al realizado con esta función en particular.

Como ya habíamos afirmado no todas las propiedades las podemos inferir a partir del conocimiento del gráfico de la función, este es el caso de la propiedad de periodicidad de la función seno, que se debe partir del enunciado de la misma. Veamos un proceder para esta propiedad.

El alumno conoce que todos los ángulos coterminales con uno dado tienen el mismo seno, es decir:

$\text{sen}(\alpha + 2k\pi) = \text{sen} \alpha$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ . Con este conocimiento al alumno se le puede definir el concepto de periodicidad de una función de la siguiente forma.

Una función real  $f$ , es periódica si existe un número real  $T$ , tal que para todo elemento  $x$ , del dominio de la función se cumple  $f(x) = f(x + T)$ . El número  $T$  recibe el nombre de período de la función.

Teniendo en cuenta el enunciado general de esta definición se concluye que la función seno es periódica de período  $2k$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Geométricamente esto significa que el gráfico de esta función se obtiene trasladando el gráfico correspondiente al intervalo  $[0, 2\pi]$  en ambos sentidos tantas veces como sea necesario.

Por último, al estudiar la función coseno, el análisis de esta propiedad debe ser a partir de la representación gráfica, pues ya los alumnos conocen el concepto período de una función.

#### 4. Fijación de la clase de función estudiada, su representación gráfica y propiedades.

La fijación del concepto correspondiente a la clase de función estudiada se desarrolla a través de acciones de identificación, realización y aplicación.

Las acciones de identificación se presentan mediante ejercicios en los cuales los alumnos deben reconocer la función estudiada dadas:

correspondencias (expresadas en diferentes formas)

ecuaciones y representaciones gráficas en el sistema de coordenadas. En cada caso se debe cuidar mezclar representantes y no representantes del concepto.

Las acciones de realización se presentan en ejercicios que exigen: representar gráficamente la función dada la ecuación y viceversa; determinar la ecuación de la función ó su gráfico, a partir de conocer ciertas propiedades de la función.

Las acciones de aplicación se presentan a través de ejercicios donde los conocimientos sobre el concepto de la función, su gráfica y propiedades se utilizan para resolver situaciones de otros dominios matemáticos, para demostrar propiedades o interpretar y resolver situaciones de la práctica.

#### Tareas del capítulo

1. Planifique una clase para introducir el concepto función lineal, teniendo en cuenta los aspectos metodológicos esenciales en el trabajo con la situación típica conceptos y sus definiciones.
2. Utilizando los programas, el libro de texto y las orientaciones metodológicas de matemática para Secundaria Básica:
  - a) determine las unidades temáticas específicas que tratan el estudio de las funciones.
  - b) determine los objetivos fundamentales que el programa plantea lograr con los alumnos en cada unidad.
  - c) plantee una propuesta de dosificación del sistema de clases de una de las unidades temáticas.
  - d) planifique 2 clases de tratamiento de la nueva materia, teniendo presente los aspectos metodológicos esenciales en el trabajo con la situación típica que trabajará y 2 clases de ejercitación, donde se

muestre la selección, variedad y graduación de los ejercicios propuestos.

3. Seleccione de pre-universitario una de las clases de funciones de las que se tratan en este nivel.
  - a) determine los objetivos fundamentales que deben lograrse en la unidad seleccionada.
  - b) haga una propuesta de dosificación del sistema de clase de la unidad.
  - c) planifique una clase donde se introduzca la representación gráfica de la clase de función o de un caso particular de esta. Plantee los objetivos que se propone en la actividad.
  - d) planifique una clase donde se introduzcan algunas de las propiedades fundamentales de la clase en cuestión. Plantee los objetivos que se propone en la actividad.
4. De la unidad "Funciones cuadráticas" elabore un proyecto de trabajo de control en el cual aparezcan los objetivos propuestos a evaluar, las preguntas, las respuestas y la clave para la calificación.

CAPITULO 14.    TRATAMIENTO METODOLOGICO DE LOS ELEMENTOS DEL ANALISIS MATEMATICO

14.1 PANORAMICA DE LA LINEA DIRECTRIZ "PROCESOS DE APROXIMACION. LIMITE Y CALCULO INFINITESIMAL"

La importancia del estudio de los elementos del Análisis Matemático es tal que constituye una de las líneas directrices de la enseñanza de la Matemática en la escuela.

La idea de aproximación en Matemática encuentra interpretación geométrica con ayuda del trabajo con magnitudes y con números. De este modo el desarrollo de esta línea directriz comienza desde los primeros grados de la primaria con un carácter propedéutico, fundida con las líneas directrices: Geometría, Cálculo con magnitudes y valores aproximados y Dominios numéricos.

Un momento importante de su realización es la introducción en el segundo ciclo del nivel primario de las reglas de redondeo. Por primera vez, los alumnos trabajan en la clase de Matemática conscientemente con valores aproximados.

Posteriormente se continúa el desarrollo de la línea de diversas formas. Por un lado, se trabaja con aproximaciones en el "estimado" previo del cálculo numérico, al redondear a múltiplos de 10, 100, 1000 u otro conveniente, los números con que se va a operar. También se trabaja con aproximaciones en la introducción de la división inexacta de números naturales. Un tercer momento de trabajo con aproximaciones se presenta en la comparación de magnitudes como: kg y lb; cm e in; y  $m^2$  y cab; es en este contexto que se introduce en la Escuela el signo de "aproximadamente igual a" ( $\cong$ ).

El final del segundo ciclo constituye un momento impor-

tante del desarrollo de esta línea directriz. Se utilizan aproximaciones en la división inexacta cuando se representa el cociente como expresión decimal, o sea en el planteamiento de expresiones decimales infinitas obtenidas por división, en la utilización de reglas de redondeo para expresiones decimales, en la representación de expresiones decimales en el rayo numérico y en la medición de segmentos. Se trabaja explícitamente por primera vez el cálculo con valores aproximados. Se introduce por esta razón el concepto de "cifras significativas de un número" y las reglas para el cálculo con valores aproximados.

En la secundaria básica se retoma, durante el estudio de los números racionales, el trabajo con expresiones decimales (finitas o infinitas periódicas) y se introducen los números irracionales (expresiones decimales infinitas no periódicas). Estos aspectos, como el análisis mismo de la densidad de  $Q$ , constituyen momentos del trabajo con la línea directriz, en lo que a valores aproximados respecta. Otros elementos importantes los constituyen el cálculo de cuadrados, cubos, raíces cuadradas y raíces cúbicas utilizando las tablas, la determinación del área total y el volumen del prisma y la pirámide, y la resolución de ejercicios con texto que contienen valores aproximados.

Otro momento importante de la línea directriz es cuando se obtiene la fórmula del área de un círculo como el límite del área del polígono regular de  $n$  lados, que se obtiene cuando  $n$  aumenta ilimitadamente. Se trata de un proceso infinito de aproximación, de significativo valor propedéutico para el posterior tratamiento del concepto de límite de una función numérica en un punto.

En ese momento se presentan también posibilidades de cálculo con valores aproximados en la determinación de longitudes de circunferencias y volúmenes de cilindros, conos y esferas; así como en la resolución de problemas que contienen datos con números no exactos.

Al inicio del preuniversitario, además de lo anterior, se trabaja con valores aproximados de potencias de exponente racional e irracional.

El momento culminante de la directriz lo constituye, sin discusión, el tratamiento de los complejos de materia de Límite, Derivadas e Integrales de funciones numéricas. A las particularidades de estos nos referiremos en el epígrafe siguiente.

#### 14.2 PANORAMICA DE LOS CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES A ASIMILAR POR LOS ALUMNOS EN LOS COMPLEJOS DE MATERIA: LIMITE, CALCULO DIFERENCIAL Y CALCULO INTEGRAL.

El concepto de límite es un concepto muy importante de la Matemática y su estudio en el preuniversitario constituye un momento muy especial para los alumnos, pues a partir de su introducción pasan de la Matemática elemental a la Matemática superior, al tratar los elementos del cálculo diferencial e integral.

En nuestra escuela no se desarrolla un curso de análisis como tal, sólo se pretende lograr la comprensión de los conceptos más importantes de él, y desarrollar las habilidades correspondientes y sus aplicaciones básicas.

Se reconoce que los contenidos de estos complejos de materia no son sencillos y por lo tanto es indispensable su estructuración metodológica adecuada para poder lograr alcanzar los objetivos propuestos en el programa de la asignatura. Estos objetivos, en lo esencial plantean las experiencias siguientes:

##### EN EL CAMPO DEL SABER:

- Reconocer los conceptos fundamentales: límite de una función en un punto, continuidad de una función en un punto, derivada de una función en un punto, primitiva de una función, integral indefinida e integral definida.
- Reconocer teoremas importantes que trata sobre: opera-

ciones con límites, límites notables, continuidad de las funciones derivables, reglas de derivación, derivadas de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas, crecimiento y decrecimiento de las funciones en un intervalo, criterios para la determinación de extremos locales de una función, primitivas inmediatas, propiedades de la integral indefinida y propiedades de la integral definida.

- Aplicar procedimientos para: cálculo de límites, cálculo de derivadas, análisis del crecimiento de una función, determinación de valores aproximados, cálculo de integrales y cálculo de áreas.

#### EN EL CAMPO DEL PODER:

- Definir los conceptos fundamentales a partir del reconocimiento de sus características esenciales.
- Realizar demostraciones simples y fundamentaciones en forma independiente. En particular la demostración del límite de funciones sencillas.
- Aplicar la continuidad de las funciones elementales al cálculo de límites.
- Aplicar las reglas del cálculo de derivadas e integrales indefinidas al cálculo y a la resolución de problemas simples.
- Resolver mediante reflexiones lógicas ecuaciones diferenciales muy simples que se reducen a la búsqueda de primitivas.

#### EN EL CAMPO DE LAS CAPACIDADES MENTALES GENERALES:

- Desarrollar el pensamiento lógico de los alumnos mediante:
  - . la elaboración y asimilación de los conceptos,
  - . la solución de problemas,

- . la introducción de conceptos como: condición necesaria y suficiente.
- Desarrollo de la expresión oral y escrita mediante:
  - . la corrección y coherencia al responder preguntas y problemas. Formular suposiciones, fundamentar afirmaciones y explicar procedimientos de trabajo,
  - . la utilización de variables de manera sistemática, como una forma natural de expresión del lenguaje matemático.
- Desarrollar el adiestramiento lógico mediante:
  - . la búsqueda de demostraciones,
  - . la representación de demostraciones (empleo de inferencias lógicas),
  - . la utilización de medios para la racionalización del trabajo mental (por ejemplo, del principio de analogía y del principio de reducción a un problema ya resuelto).
- Modelar situaciones mediante el planteo y la solución de problemas de carácter extramatemático.

#### EN EL CAMPO DE LA EDUCACION IDEOLOGICA:

- . Las características específicas del cálculo infinitesimal posibilitan el logro de objetivos de la formación ideológica de los alumnos si tenemos en cuenta lo siguiente:
  - . El concepto de límite surge debido a las necesidades prácticas del hombre y sirve de base a conceptos que se estudian en otras ciencias.
  - . En el cálculo diferencial se aprenden criterios para la existencia de valores extremos que pueden ser aplicados en la solución de problemas de la propia Matemática y de las ciencias naturales, técnicas y económicas.

- . La aplicación del cálculo del área mediante la integral definida a la solución de ejercicios tomados de la práctica.

Con estas consideraciones se contribuye a la comprensión del origen práctico de la Matemática y su carácter de instrumento para conocer y transformar la realidad circundante y de esta forma profundizar en la concepción científica del mundo.

Del análisis de los objetivos y de la materia de enseñanza se desprenden puntos metodológicos esenciales para cada complejo de materia.

Complejo de materia:

- Límites

- Cálculo diferencial

- Cálculo integral

Punto metodológico esencial:

- . Formación y asimilación del concepto de límite de una función.
- . Estructuración metodológica de sistemas de ejercicios para el desarrollo de habilidades en el cálculo de límites.
- . Teoremas.
- . Formación y asimilación del concepto de derivada.
- . Dirección de las actividades de los alumnos en la aplicación de las derivadas a los problemas de optimización.
- . Tratamiento metodológico de las integrales sencillas.
- . Dirección de las actividades de los alumnos en las

Complejo de materia:

Punto metodológico esencial:

aplicaciones de la integración al cálculo de áreas.

. Teoremas.

A continuación trataremos estos puntos importantes y para ello nos apoyaremos, fundamentalmente, en los conocimientos adquiridos en el estudio de la estructuración metodológica de las situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática.

### 14.3. LIMITES

#### 14.3.1 FORMACION DEL CONCEPTO DE LIMITE DE UNA FUNCION EN UN PUNTO

Este concepto puede ser tratado aplicando el concepto de límite de una sucesión numérica, pero generalmente se simplifica el proceso empleando las ideas intuitivas de "acercamiento" y "bandas" mediante ilustraciones gráficas.

No repetiremos el procedimiento que sugieren el texto y las orientaciones metodológicas, sólo daremos algunas indicaciones sobre aspectos muy importantes.

Nivel de partida:

Los alumnos deben conocer el concepto de función numérica y ser capaces de representarla gráficamente. Deben poseer habilidades en el trabajo con inecuaciones y valores absolutos por ser contenidos que están presentes en la definición.

Motivación:

La imposibilidad de calcular el área del círculo mediante la descomposición en triángulos conduce a una contradicción y crea la necesidad de utilizar procesos infinitos como la inscripción en la circunferencia, de polígonos.

nos regulares de  $n$  lados cuando  $n$  crece ilimitadamente.

Sin embargo, para asegurarnos de que los alumnos comprenden bien por qué deben elaborar un concepto matemático complicado, nos parece que la motivación puede ser reforzada con el análisis de problemas que muestran cómo, ideas intuitivas del concepto de límite pueden llevar a contradicciones con conceptos matemáticos válidos.

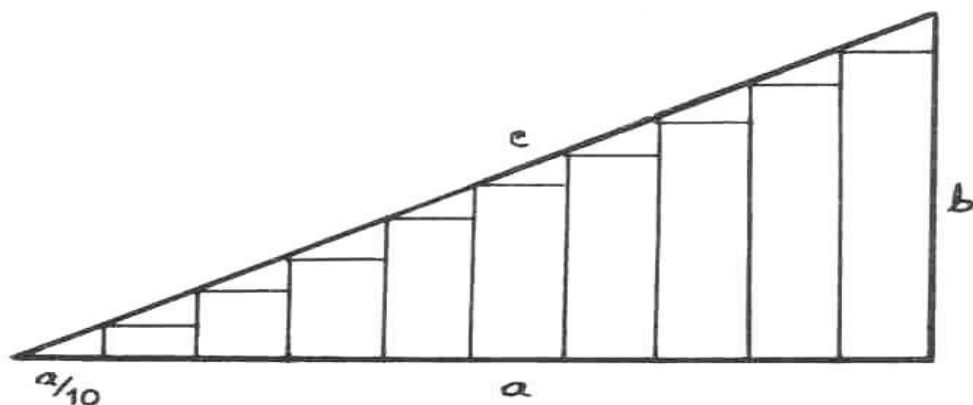
Nos parecen apropiados los ejemplos tratados en el libro "Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 3" (pág. 189-190) y que reproducimos aquí:

Ejemplo 14.1:

- a) Tesis: La longitud de la Hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las longitudes de sus catetos.

La "curva escalonada" que surge a partir de la primera división decimal (Fig. 14.1), tiene la longitud:

$$l_1 = 10 \left[ a/10 + b/10 \right] = a + b$$



Mediante otra división decimal surge otra "curva escalonada", con la longitud:  $l_2 = 100 \left[ a/100 + b/100 \right] = a + b$

Después de  $n$  divisiones decimales, se obtiene igualmente:

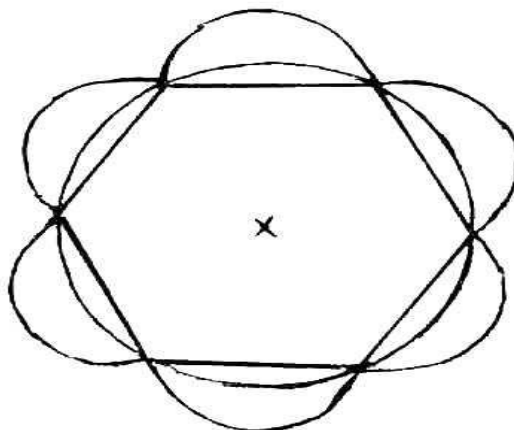
$$l_n = a + b$$

Por otra parte, parece como si se aproximaran cada vez más las "curvas escalonadas" que han aparecido como resultado de la división decimal de la hipotenusa, es decir, la hipotenusa  $c$  tiene la longitud  $a + b$ . Esto contradice el hecho:

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$  que se cumple según el teorema de Pitágoras.

- b) Si se traza una semicircunferencia sobre cada uno de los lados de un polígono regular de  $n$  lados (Fig. 14.2) entonces, entre el perímetro  $p_n$  del polígono y la longitud  $l_n$  de todas estas semicircunferencias, existirá la relación siguiente:

$$l_n = \frac{\pi}{2} p_n$$



Para  $n$  creciente, tanto el polígono de  $n$  lados como las líneas que se forman a partir de las semicircunferencias, se aproximan (aparentemente) a la circunferencia circunscrita al polígono, de forma que, finalmente, se cumple:  $l_n = p_n$ . De aquí resulta que  $\pi/2 = 1$  ó  $\pi = 2$ .

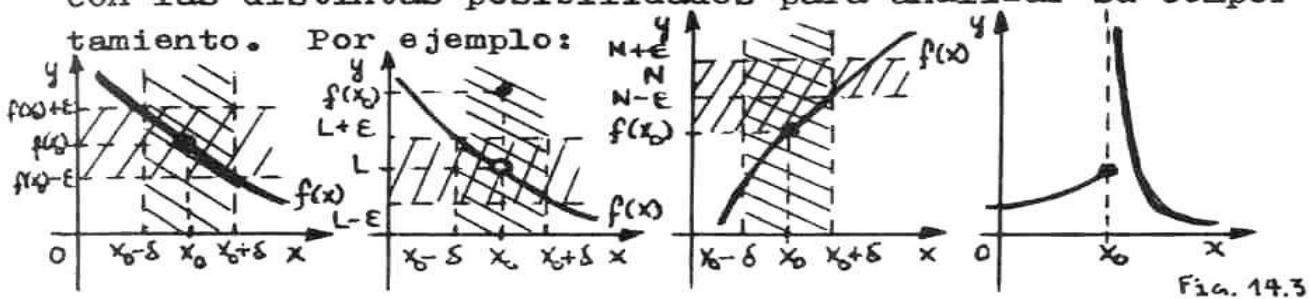
#### Orientación hacia el objetivo:

En los ejemplos dados se utilizan expresiones como "se aproxima", "tiende", "se diferencian cada vez menos" o "serán cada vez más pequeños". Los alumnos deben comprender la necesidad de describir matemáticamente dichas expresiones y además se les informa que sus reflexiones en los ejemplos geométricos pueden ser aplicadas en procesos infinitos análogos como sería el análisis del comporta-

miento de los valores de una función cuando la variable independiente se aproxima a un valor dado, y de esta manera se plantea el objetivo de precisar matemáticamente esta nueva relación.

Trabajo en el problema:

En esta fase se pueden utilizar gráficas de funciones con las distintas posibilidades para analizar su comportamiento. Por ejemplo:



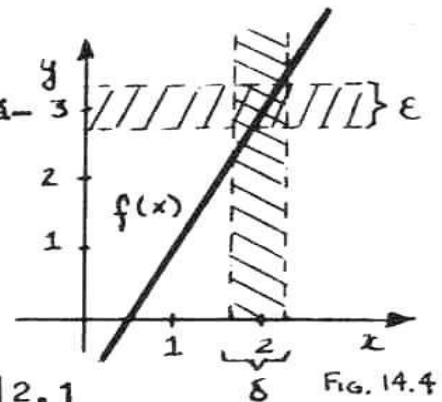
Los alumnos deben comprender los siguientes aspectos fundamentales:

- se habla de límite cuando al aproximarnos a un punto del dominio los valores de la función se aproximan a un número.
- el valor del límite puede coincidir o no con el valor de la función en el punto.

Finalmente sería recomendable trabajar analíticamente algunos ejemplos:

**Ejemplo 14.2**

Sea  $f(x) = 2x - 1$ ; se representa gráficamente (fig. 14.4). Se puede analizar en una table qué ocurre con los valores de  $f(x)$  cuando  $x$  toma valores próximos a 2 (no necesariamente el valor 2).



$x$	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
$f(x) = y$	2,8	2,98	2,998	3,002	3,02	3,2

La aproximación de  $f(x) = 2x - 1$  a 3 depende de la

aproximación de  $x$  a 2.

Se puede decir:

$$1,9 < x < 2,1$$

$$2(1,9) - 1 < 2x - 1 < 2(2,1) - 1$$

$$2,8 < f(x) < 3,2$$

Si  $x$  está a una distancia menor que 0,1 de 2, entonces  $f(x)$  estará a una distancia menor que 0,2 de 3.

Análogamente:

$$1,999 < x < 2,001$$

$$2(1,999) - 1 < 2x - 1 < 2(2,001) - 1$$

$$2,998 < f(x) < 3,002$$

Si  $x$  está a una distancia menor que 0,001 de 2, entonces  $f(x)$  estará a una distancia menor que 0,002 de 3.

Se puede sugerir el uso de valores absolutos:

Si  $|x-2| < \underbrace{0,1}_{\delta}$  entonces

$$|f(x) - 3| < \underbrace{0,2}_{\varepsilon}$$

Si  $|x-2| < \underbrace{0,001}_{\delta}$  entonces

$$|f(x) - 3| < \underbrace{0,002}_{\varepsilon}$$

La relación esencial entre  $\delta$  y  $\varepsilon$  surge de manera natural:  $\delta = \varepsilon/2$  y se puede concluir que los valores de  $f(x)$  pueden diferenciarse de 3 una cantidad tan pequeña como se quiera, si  $x$  es suficientemente próximo a 2 (sin ser igual a 2).

Este hecho se denota por  $\lim_{x \rightarrow 2} (2x-1) = 3$  y se lee: "el límite de  $(2x-1)$ , cuando  $x$  tiende a 2, es 3".

### EJEMPLO 14.3

Sea  $g(x) = x^2 - 9/x - 3$  (Fig. 14.5). En la tabla

$x$	2,9	2,99	2,999	3,001	3,01	3,1
$g(x)=y$	5,9	5,99	5,999	6,001	6,01	6,1

podemos observar que si  $x$  está muy próximo a 3 (no puede tomar el valor  $x=3$ ), entonces  $g(x) = x^2 - 9/x - 3 = x+3$  estará muy próximo de 6.

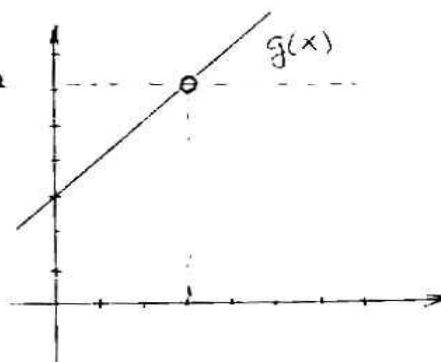


Figura 14.5

Si  $x$  está a una distancia menor que 0,01 de 3 entonces  $g(x)$  estará a una distancia menor que 0,01 de 6, etcétera.

Para cualquier  $\varepsilon$  se puede hallar un  $\delta$  que depende de

$\varepsilon$  en este caso  $\delta = \varepsilon$  . Explicado en valores absolutos:  
Si  $0 < |x-3| < \delta$  , entonces  $|g(x)-6| < \varepsilon$  , y se puede escribir:  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$

Este ejemplo contribuye específicamente a la idea de que el valor de  $g(x)$  en  $x=3$  no se considera, además reafirma que la diferencia entre  $x$  y  $3$ , es decir  $\delta$  , depende de  $\varepsilon$  , que es la diferencia entre  $g(x)$  y  $6$ . Todas estas ideas constituyen características esenciales que deben ser descubiertas por los alumnos para finalmente incorporarlas al concepto que se trata.

#### SOLUCION DEL PROBLEMA

Los alumnos deben estar en condiciones de formular la definición:

Sean  $f$  una función numérica y  $x_0 \in \mathbb{R}$ , se dice que  $L$  es el límite de la función en  $x_0$ , o que  $f(x)$  tiende a  $L$  ( $f(x) \rightarrow L$ ) cuando  $x$  tiende a  $x_0$  ( $x \rightarrow x_0$ ), y se denota:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

si cualquiera sea el  $\varepsilon > 0$ , es posible entonces encontrar un número  $\delta > 0$  que satisface: si  $0 < |x-x_0| < \delta$  , entonces  $|f(x)-L| < \varepsilon$

#### CONSIDERACIONES RETROSPECTIVAS Y PERSPECTIVAS:

- En este caso ¿cuáles fueron los medios o procedimientos empleados que permitieron elaborar la definición?
- 1. El empleo de ilustraciones gráficas con las diferentes posibilidades, a través de las bandas horizontal y vertical, resultó sugerente para la introducción de  $\varepsilon$  y  $\delta$  .
- 2. Trabajar numéricamente algunos ejemplos esclareció la relación entre  $\varepsilon$  y  $\delta$  .

- Se debe comprobar que cuando una función numérica tiene límite este es único.
- La definición puede ser usada para comprobar que un número dado es un límite, pero no se puede utilizar para calcularlo, por lo que se hace necesario encontrar procedimientos que permitan el cálculo de límites de funciones.

#### 14.3.2 ASIMILACION DEL CONCEPTO DE LIMITE DE UNA FUNCION EN UN PUNTO. ESTRUCTURACION METODOLOGICA DE SISTEMAS DE EJERCICIOS PARA EL DESARROLLO DE HABILIDADES EN EL CALCULO DE LIMITES.

Para que un grupo de ejercicios sea considerado como un sistema, es necesario tener en cuenta, fundamentalmente, qué funciones rectoras puede realizar cada uno, qué objetivos específicos nos proponemos alcanzar mediante ellos y qué condiciones concretas presentan los alumnos. Este último requisito determina la diferenciación de cada sistema en relación con el nivel de conocimientos y habilidades de los alumnos para los cuales se estructura. Por eso, nos referiremos aquí solamente a algunos aspectos importantes que contribuirán a la estructuración del sistema de ejercicios cuyo objetivo fundamental es la asimilación del concepto de límite de una función en un punto.

Recordemos que para la asimilación de un concepto los alumnos deben realizar diferentes acciones:

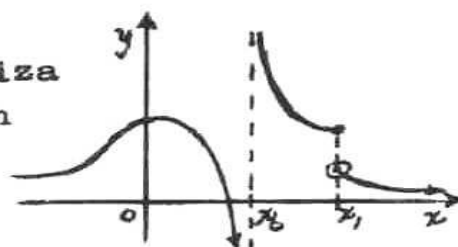
- . identificar el concepto,
- . realizar el concepto,
- . aplicar el concepto.

El concepto de límite de una función en un punto es un concepto de relación y para su asimilación es recomendable que se propongan ejercicios donde estén presentes las acciones mencionadas.

Después de la formación del concepto deben plantearse ejercicios para su identificación, por ejemplo: se dan gráficos de funciones y se pide que analicen si existe el límite en puntos indicados:

A partir del siguiente gráfico analiza si existe el límite de la función en los puntos indicados.

(Fig. 14.6)



En estos casos la actividad del alumno se orienta gráficamente mediante el uso de bandas horizontales y verticales.

Otro ejemplo: Probar que:  $\lim_{x \rightarrow 2} 2x = 4$

Los alumnos deben emplear la definición como base orientadora de la acción de identificación.

Para la realización del concepto deben tenerse en cuenta las siguientes variantes:

- dada una función y un número a quien tiende la variable, determinar su límite,
- dado un número real y otro al cual se aproxima la variable, determinar una función que tenga como límite el primer número,
- proponer ejemplos de funciones con sus límites.

La definición no permite determinar directamente el límite de una función en un punto, por lo que no es posible la realización del concepto hasta que no se conozcan

los límites de algunas funciones sencillas como:

- el límite de una función constante,
- el límite de  $f(x) = x$ , y
- el límite de  $f(x) = \sqrt{x}$ ; y las operaciones con límites.

Ejemplo: Calcule el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + 3}{x + 1}$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 4} (x + 3)}{\lim_{x \rightarrow 4} (x + 1)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 4} 4 + \lim_{x \rightarrow 4} 3}{\lim_{x \rightarrow 4} x + \lim_{x \rightarrow 4} 1} = \frac{4 + 3}{4 + 1} = \frac{7}{5}$$

Se debe considerar que en este complejo de materia lo fundamental es lograr el desarrollo de habilidades en el cálculo de límites, es decir acciones de realización, sin embargo, son solamente los ejercicios relacionados con la primera variante los más frecuentes en los libros. Para que la colección de ejercicios sea variada es necesario proponer también aquellos que contemplen las otras variantes.

El concepto de límite de una función en un punto se aplica en el tratamiento del teorema de la unicidad del límite, en el teorema sobre las operaciones con límites, etcétera, y en la formación de otros conceptos importantes como son el de continuidad y el de derivada.

En este caso se advierte que la aplicación se da en la elaboración de la nueva materia, y conduce a que su asimilación se logre a más largo plazo, lo que se corresponde también con su complejidad.

Es necesario tener esta concepción de la aplicación e integrarla a la estructuración de la ejercitación que se elabore para que esta pueda tener propiamente un carácter de sistema.

#### 14.4 FORMACION Y ASIMILACION DEL CONCEPTO DE DERIVADA.

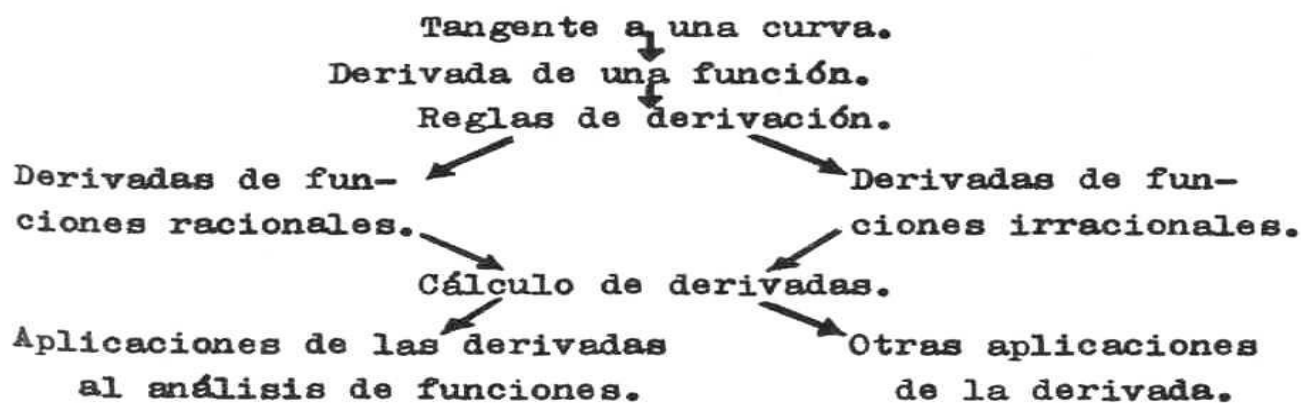
Uno de los conceptos matemáticos más importantes es, sin duda, el concepto de derivada. Sobre él descansa el Cálculo Infinitesimal, una de las ramas de la Matemática que más aplicación tiene a la ciencia y técnica contemporáneas.

Correspondientemente, este concepto tiene gran importancia para la formación politécnica en general, y la matemática en particular. Se trata de un punto culminante de la línea directriz "Procesos de aproximación, límite y cálculo infinitesimal" y un momento de interrelación de casi todas las líneas directrices de la enseñanza de la Matemática.

El tratamiento del complejo de materia, del cual él forma parte, está concebido como un curso introductorio de cálculo de derivadas de funciones elementales.

Constituyen conocimientos precedentes fundamentales al trabajo con este complejo de materia, el concepto de límite y las propiedades y gráficos de las funciones racionales y trascendentes.

Una forma conveniente de estructurar este complejo de materia es:



En ella se refleja el lugar central del concepto de derivada, que constituye junto a sus aplicaciones (análisis de la monotonía, determinación de extremos y resolu-

ción de problemas sobre valores extremos) los puntos metodológicos fundamentales de este complejo de materia en la escuela.

Lo hasta aquí dicho justifica por sí solo la necesidad de un tratamiento detallado del concepto de derivada, con independencia de la vía metodológica seleccionada.

En correspondencia con ello se recomienda utilizar más de una situación motivacional para atraer la atención de los alumnos hacia el nuevo concepto que se pretende definir. En este sentido son particularmente útiles tres problemas que históricamente incidieron de manera directa en el surgimiento del concepto de derivada: la determinación de la tangente a una curva en un punto, de la velocidad instantánea de un móvil en un instante dado, y de la densidad de una línea material en un punto determinado (1).

La estructuración de esa motivación podría ser la que resulta de la siguiente explicación del profesor a sus alumnos.

P: "Acabamos de ocuparnos de la problemática de la determinación de la pendiente de la tangente de una curva en un punto. En el mismo observamos que tal pendiente no queda correctamente determinada por las pendientes  $m = y/x$  de las diferentes secantes que pasan por el punto prefijado del gráfico.

"Situaciones similares se presentan en la Física. Por ejemplo, la velocidad promedio de un móvil que se desplaza mediante movimiento rectilíneo uniforme es perfectamente calculable a través de la expresión:

$V = s/t$  (donde  $s$  es el incremento del espacio recorrido y  $t$  el del tiempo transcurrido). ¿Qué sucede si

---

(1) Valdés Castro, C. "Análisis matemático" (tomo II). Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana, 1983, p. 1-6.

lo que se necesita determinar es la velocidad del móvil en un instante preciso del desplazamiento?... ¿Es característica del mismo la expresión  $V = s/t$  ?... Evidentemente que no.

"Si de lo que se trata es de la densidad de un hilo homogéneo, entonces su valor promedio puede estimarse mediante la expresión  $\delta = m/s$  (donde  $m$  representa el incremento de la masa y  $s$  el de la longitud considerada). Pero, ¿qué sucede si se presenta la necesidad de determinar la densidad en un punto preciso del hilo?... ¿Es característico de él el valor de  $\delta$ ?... Claro que no.

"Es decir, nos encontramos ante la necesidad de definir, con rigor, expresiones de 3 situaciones que presentan un elemento común: la determinación de una magnitud en un valor instantáneo. ¿Es posible esto?... ¿Cómo definir el "instrumento" matemático que caracteriza tales situaciones?..."

Una caracterización de las diferentes vías metodológicas posibles de utilizar es la siguiente:

VIA INDUCTIVA:

Trabajo en el problema:

Situaciones de partida:

Tangente a una curva en un punto, velocidad instantánea de un móvil, densidad de una línea material en un punto.

Estrategia:

Análisis de diferencias y similitudes entre ellas.

Características no comunes:

Situaciones de la física unas y de la matemática otra; representaciones de las funciones correspondientes, distinta posición de los puntos elegidos, etcétera.

Solución del  
problema:

Característica  
común-esencial:

Existencia en todos los casos de un límite de la razón del incremento de la función y el incremento de la variable independiente cuando este último tiende a cero.

Definición del concepto.

#### VIA CONSTRUCTIVA:

La vía constructiva, variante de la vía inductiva, puede desarrollarse a partir de la determinación de la ecuación de la tangente a una curva en un punto, sobre la base de la construcción de la recta tangente como caso límite de las secantes a la curva que pasan por el punto prefijado. La definición previa del concepto de tangente a una curva en un punto puede justificarse a partir de la necesidad de encontrar una caracterización rigurosa y general de tangente a una curva más allá de los casos particulares estudiados (circunferencia, elipse y parábola). Sobre la base de este concepto se define entonces el de derivada de una función en un punto.

#### VIA DEDUCTIVA:

Se parte, como se conoce, de la definición y se explica esta a través de una o varias de las situaciones señaladas, entre las cuales la tangente a una curva sigue ocupando un lugar preferencial por tratarse de una situación propiamente matemática y por sus posibilidades de ilustración.

Una vez definido el concepto, se deben realizar algunas consideraciones retrospectivas y perspectivas. En

ellas se incluyen la problemática de la existencia de la derivada de una función en un punto (recuérdese el caso clásico de  $y = x$  en  $x = 0$ ), y la relación entre continuidad y derivación.

Como se conoce del tema IV, el tratamiento de la formación de un concepto puede requerir de más de una clase, y el caso del concepto de derivada parece ser un ejemplo típico de ello. Esto debe tenerse en cuenta al realizar la dosificación del complejo de materia correspondiente.

Sabemos que a la fase anterior sigue la de fijación del concepto. Como se trata de un concepto de relación, deben utilizarse tanto acciones de realización como de identificación. Para el primer tipo de acción es conveniente que los alumnos deriven de la definición una sucesión de indicaciones como la siguiente:

- (1) Sustituir  $x$  por  $x + \Delta x$  y hallar  $f(x + \Delta x)$ .
- (2) Hallar el incremento de la función:  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .
- (3) Dividir por  $\Delta x$ :  $\Delta y / \Delta x = f(x + \Delta x) - f(x) : \Delta x$ .
- (4) Calcular el límite cuando  $\Delta x$  tiende a cero:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y / \Delta x = f'(x)$$

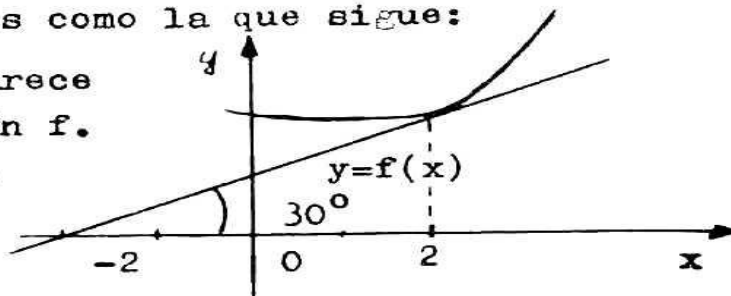
Sobre la base de ella los alumnos pueden resolver ejercicios como el siguiente: "Calcula la derivada de la función en el punto indicado:

- a)  $y = 2x + 1$ ,  $x_0 = 1$
- b)  $y = x^2 - 2$ ,  $x_0 = -2$
- c)  $y = 2t - t^2$ ,  $t_0 = -1$ , etcétera".

Como parte de la necesidad variación de la formulación de los ejercicios, es de utilidad incluir también durante la realización del concepto tareas como la siguiente: "La recta de ecuación  $y = 5x - 1/2$  es tangente al gráfico de la función  $f$  en el punto  $x = 2$ . Determine  $f'(2)$ ".

Un momento de profundización del concepto lo constituye una relación de ejercicios como la que sigue:

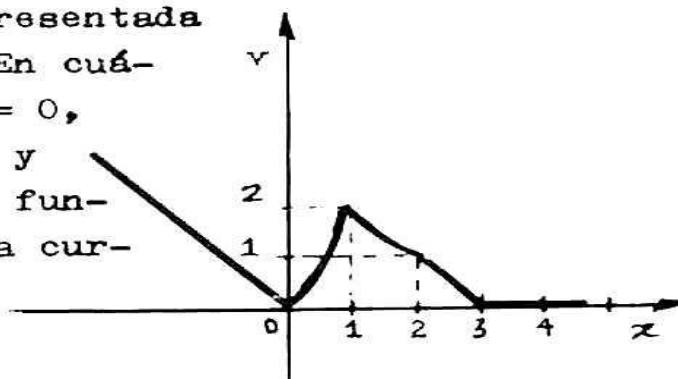
"En la figura 14.7 aparece representada la función  $f$ . Calcula  $f'(5)$  y  $f(5)$ ".



(Fig. 14.7)

La acción de identificación de este concepto se lleva a efecto mediante el reconocimiento de puntos de un gráfico dado, en los cuales la función tiene o no derivada. Por ejemplo:

"Observa la curva representada en la figura 14.8. ¿En cuáles de los puntos:  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $x = 2,5$  y  $x = 3$  es derivable la función que representa la curva?"



(Fig. 14.8)

También se trabaja en la identificación del concepto durante la resolución de ejercicios donde, dada la función y el punto, el alumno debe comprobar que el valor también dado constituye o no la derivada de la función en el punto. Por ejemplo:

"Comprueba que 4 es la derivada de la función  $y = x^2 + 1$  en el punto  $x = 2$ ."

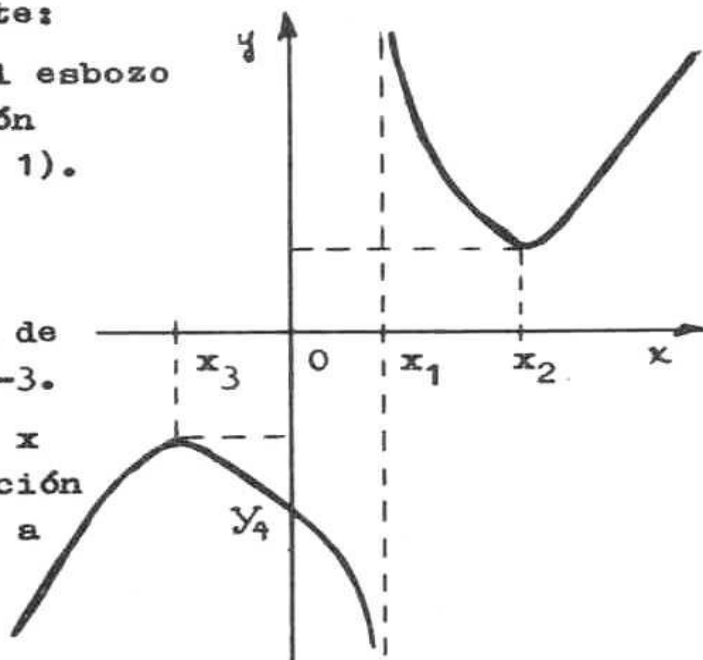
La acción de aplicación del concepto de derivada se pone de manifiesto en un número grande de situaciones que van desde el análisis de funciones hasta el cálculo integral. De

ello debe estar consciente el profesor; especialmente del carácter propedéutico que para el tratamiento del último aspecto tiene este concepto.

A lo largo de esta fase es conveniente incluir ejercicios que exijan, de forma original, la utilización por los alumnos, entre otros aspectos, del poder y el saber relativo al cálculo de derivadas de funciones. Un ejemplo de ello podría ser el siguiente:

"En la figura aparece el esbozo del gráfico de la función  $f(x) = (x^2 + 2) : (2x - 1)$ .

- a) Determine los valores  $x_1, x_2, x_3, y_4$ .
- b) Analiza la monotonía de la función para  $x < -3$ .
- c) ¿Para qué valores de  $x$  el ángulo de inclinación de la recta tangente a la curva en el punto  $(x; f(x))$  es obtuso?



(Fig. 14.9)

A continuación analizaremos, desde el punto de vista metodológico, uno de los principales campos de aplicación del concepto de derivada: la resolución de problemas de optimización.

#### DIRECCION DE LAS ACTIVIDADES DE LOS ALUMNOS EN LA APLICACION DE LAS DERIVADAS A LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACION.

La resolución de problemas de extremos constituye, junto al análisis de funciones, uno de los principales campos de aplicación del concepto de derivada, por lo que su tra-

tamiento en la escuela es recomendable. Se trata de un contenido de amplias potencialidades instructivas y educativas, pues contribuye a ilustrar el papel de la Matemática como poderoso instrumento de transformación del medio, a la vez que un momento de consolidación de los conceptos de derivada y de función, así como de las habilidades en el cálculo de derivadas y la modelación de problemas extramatemáticos.

Se trata entonces de otro complejo de materia que requiere del profesor un trabajo riguroso en pos de un aprovechamiento máximo de esas potencialidades. Entre los elementos que en ese sentido se recomienda tener en cuenta se encuentra la conveniencia de elaborar, de ser posible con los alumnos, una sucesión de indicaciones apropiadas para la dirección de la acción. Una sucesión tal podría ser la siguiente:

- 1) Determinar los datos y la incógnita, y elaborar una figura de análisis (si es necesario).
- 2) Precisar la magnitud a optimizar (es decir, maximizar o minimizar).
- 3) Expresar esa magnitud en función de una sola variable.
- 4) Determinar el extremo pedido.
- 5) Comprobar que los valores calculados satisfacen las condiciones del ejercicio y responder a la pregunta contenida en su texto.

Nótese que a diferencia del paso 4, que tiene un marcado carácter algorítmico, el importante paso 3, requiere de reflexión y trabajo de búsqueda, lo que exige paciencia y adiestramiento heurístico.

Muy relacionado con lo anterior se encuentra la recomendación de atender debidamente a la graduación de las dificultades de los problemas seleccionados. Se

puede comenzar con ejercicios con texto matemático sencillos (de corte numérico preferiblemente), como por ejemplo: "Halla dos números naturales cuya suma sea 120 de tal manera que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo". Después puede pasarse a situaciones extramatemáticas, por ejemplo: "Se necesita una superficie rectangular cercada por tres de sus lados con tela metálica y por el cuarto lado con un muro de piedra. Se dispone de 20 metros lineales de tela metálica. Calcula las dimensiones que ha de tener la superficie para que su área sea la mayor posible". Un tercer nivel de dificultad lo constituyen aquellos problemas donde se expresan sólo relaciones entre variables que designan las magnitudes contenidas en su texto; por ejemplo: "¿Qué relación debe haber entre el radio y la altura de un cilindro circular recto de volumen dado  $V$  para que su área total sea la menor posible?".

En relación con el paso 5 de la sucesión de indicaciones es importante que se garantice que el valor encontrado es un extremo absoluto en el intervalo dado.

Un ejemplo de dirección de la actividad de los alumnos en la resolución de ejercicios de este tipo podría ser la siguiente, donde se utiliza el primer ejemplo de ejercicio extramatemático antes referido.

Ejemplo 14.4:

P: ¿Qué datos nos ofrece el problema?

A: Se conoce que:

- la superficie es rectangular,
- la tela metálica abarca sólo 3 de sus 4 lados,
- la cantidad de tela disponible es de 20 m de largo

P: ¿Y cuál es la incógnita?

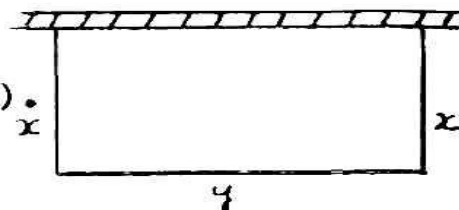
A: Se desea conocer las dimensiones que debe tener la superficie para que

su área sea máxima.

P: ¿Conviene hacer una figura de análisis?

¿Cómo debe ser esta?

(Se construye la figura de análisis).



(Fig. 14.10)

P: Ahora bien, para hablar un área máxima necesitamos de una función cuyas imágenes sean precisamente áreas.

¿Qué fórmula podemos utilizar?

A:  $A = x \cdot y$

P: Pero necesitamos que la función esté expresada en una sola variable. ¿Cómo pudiéramos lograrlo?... ¿Existe alguna información en el texto del problema que pueda ayudarnos en esa tarea?

A: Se dice que:  $x + y + x = 20$ , luego  $y = 20 - 2x$ .

P: ¿Cómo nos queda expresada entonces la función?

A:  $A(x) = x \cdot y = x(20 - 2x) = 20x - 2x^2$ .

P: Debemos determinar además el intervalo donde la función está definida. ¿Cuál es en nuestro caso?... (Puede ser acaso  $x$ , cero o un número negativo?... ¿Se obtiene un rectángulo si:  $x > 10$  ?

A:  $0 < x < 10$ .

P: Ya tenemos la función y su dominio, corresponde ahora determinar el extremo. ¿Cómo procedemos?

A:  $A'(x) = 20 - 4x$ ,  $20 - 4x = 0$  si  $x = 5$ .

$A''(x) = -4 < 0$  para toda  $x$ , luego en  $x = 5$  hay un máximo local.

P: ¿Cumple  $x = 5$  con las condiciones del ejercicio?

A: Sí,  $0 < 5 < 10$ .

P: Pero hemos dicho que debemos, además, garantizar que el valor encontrado sea un extremo absoluto en el intervalo: ¿cumple  $x = 5$  con esa condición?

A: Sí, pues  $A(0) = 0$  y  $A(10) = 0$  mientras que  $A(5) = 50$ , y  $A(x)$  es una función continua en el intervalo.

P: ¿Cuál es entonces la respuesta de nuestro problema?

A: Las dimensiones han de ser: 10 m de largo y 5 m de ancho.

P: ¿Qué pasos debimos dar para resolver un ejercicio de este tipo?...

Es conveniente, finalmente, insistir en las potencialidades educativas de estos ejercicios y la necesidad de un trabajo consciente del profesor en ese sentido. Se trata, fundamentalmente, de que los alumnos comprendan la importancia que tiene la Matemática para dar solución a las exigencias sociales dentro de las distintas ramas de aplicación, que aprecien la relación de la Matemática con otras asignaturas (la Física especialmente) y que desarrollen la tenacidad y el colectivismo.

#### 14.5 TRATAMIENTO METODOLOGICO DE LAS INTEGRALES SENCILLAS.

En el desarrollo histórico de la Matemática, el análisis de situaciones directamente relacionadas con el Cálculo integral desempeñó un papel importante: la determinación de áreas de curvas y volúmenes de sólidos dieron impulso a numerosas ideas y consideraciones matemáticas de incalculable valor para esta ciencia. (1)

Pero el Cálculo integral no sólo resultó trascendente para la ciencia Matemática, otras ramas del desarrollo

---

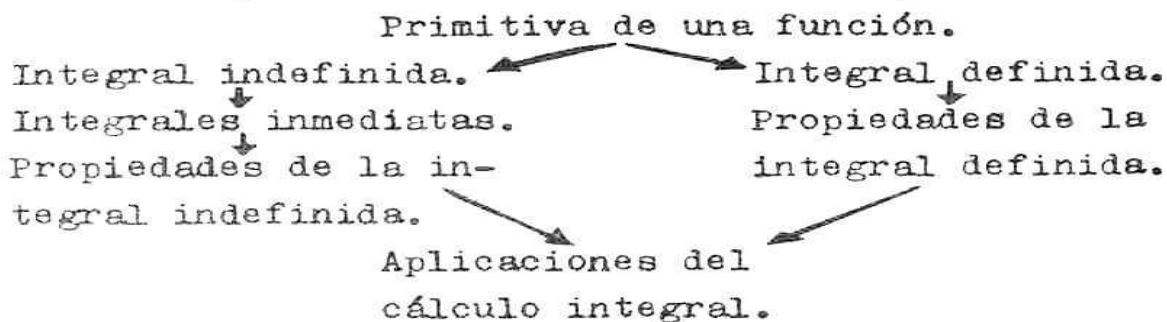
(1) Campistrans, L. y otros. "Matemática 11. grado". Editorial Pueblo y Educación. Ciudad Habana, 1990, pp. 310-311.

científico-técnico han sido también beneficiadas con sus conceptos y procedimientos. Basta señalar como ejemplos la solución de los problemas inversos de las dos situaciones físicas enunciadas en el epígrafe 3.1: es decir, la determinación de la ley de movimiento de un móvil conocida su velocidad en cada instante de tiempo y el cálculo de la velocidad en cada instante conocida la aceleración del móvil.

Consecuentemente con ello, el tratamiento del Cálculo integral en la escuela contemporánea se considera una necesidad. Se trata de dotar a los alumnos de un componente básico de la formación matemática vinculada al estudio de procesos infinitos, de la posibilidad del cálculo de áreas de figuras que no poseen una fórmula básica para ello y de la descripción de nuevas situaciones de la vida práctica con precisión.

No obstante, su inclusión en el programa escolar de Matemática se realiza sin mayores pretenciones que una introducción elemental al cálculo integral. O sea, el propósito fundamental es el desarrollo de un curso básico de cálculo encaminado principalmente a sus aplicaciones y el inicio del desarrollo de habilidades en el cálculo infinitesimal. Este complejo de materia ofrece además la posibilidad de dar continuidad al trabajo en el cálculo numérico y algebraico que a lo largo de toda la escuela se realiza en la asignatura.

La unidad puede estructurarse de la siguiente forma:



Como puede apreciarse el objetivo fundamental es que los alumnos, sobre la base de la comprensión del concepto de integral indefinida, reconozcan primitivas inmediatas de funciones elementales conocidas y, junto a las reglas fundamentales del cálculo de integrales indefinidas y definidas, calculen integrales y resuelvan problemas sencillos de cálculo de áreas.

El concepto de derivada de una función y las reglas de derivación constituyen conocimientos precedentes decisivos para el desarrollo de este complejo de materia. Es igualmente necesaria, la reactivación de conocimientos y habilidades vinculados al cálculo de números y variables y al trabajo con funciones elementales.

En el tratamiento escolar del Cálculo integral pueden seguirse dos vías diferentes. Una de ellas es la que toma como punto de partida el concepto de primitiva para, sobre la base de su carácter de "antiderivada", introducir el concepto de integral indefinida y posteriormente definir con ayuda de este último el de integral definida. En la segunda vía se parte del problema de la determinación del área bajo una curva en un intervalo de su dominio de definición, para sobre esa base, introducir el concepto de integral definida y posteriormente el de integral indefinida. (1)

En el primer caso se tiene la ventaja de una más rápida vinculación con el complejo de materia precedente y de su utilización como procesos inversos mutuamente relacionados, de obvio provecho para el aprendizaje.

También se evita por esa vía la introducción de numerosos conceptos colaterales (como los de: partición de un

---

(1) Lemke, H. y otros. "Matemática 11. grado". Editorial Pueblo y Educación. Ciudad Habana, 1978, pp. 123-150.

intervalo, suma de particiones, sucesión de particiones, etcétera), que además resultan "todos de difícil comprensión para los estudiantes de este curso". (1)

La introducción de las reglas de integración debe realizarse apoyándose en los conocimientos de los alumnos sobre la definición de primitiva y las derivadas de funciones elementales, e independientemente de la extensión del trabajo que en este sentido se realice no debe perderse de vista que la memorización de ellas es insoslayable.

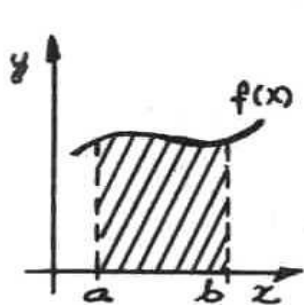
#### DIRECCION DE LAS ACTIVIDADES DE LOS ALUMNOS EN LA APLICACION DE LAS INTEGRALES AL CALCULO DE AREAS.

Ya en el epígrafe anterior se había señalado que el cálculo de áreas constituye un punto metodológico fundamental del complejo de materia Cálculo integral, y su principal campo de aplicación. En correspondencia con ello se expondrán a continuación algunas consideraciones de orden metodológico que deben ser tenidas en cuenta por el profesor durante su tratamiento.

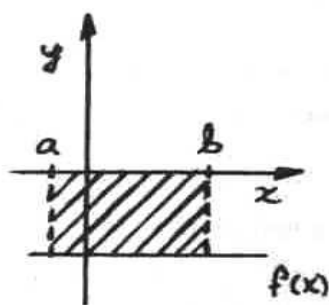
Un primer aspecto es la organización que ha de darse a los diferentes grados de dificultad de los ejercicios, lo cual determina al mismo tiempo el proceder metodológico de este complejo de materia.

---

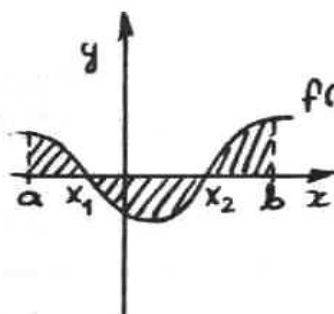
(1) Palacios, J. J. "Propuesta para una nueva estructuración en el tratamiento del Cálculo diferencial e integral en la enseñanza preuniversitaria en Cuba". Tesis en opción al grado científico de Candidato a Doctor en Ciencias Pedagógicas. ISPEJV. Ciudad Habana, 1988, p. 16.



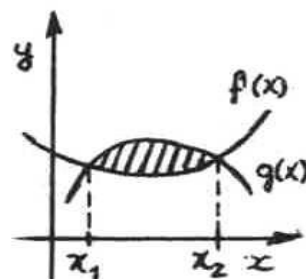
(Fig. 14.11)



(Fig. 14.12)



(Fig. 14.13)



(Fig. 14.14)

Primeramente debe tratarse el cálculo del área debajo de una curva de ordenadas sólo positivas (al menos para el intervalo de integración) y el eje  $x$  (Fig. 14.11), seguidamente el cálculo del área determinada por una función continua de ordenadas sólo negativas y el eje de las abscisas (Fig. 14.12), a continuación el caso en que se trate de una función continua de ordenadas positivas y negativas en el intervalo de integración (Fig. 14.13), y por último la determinación del área comprendida entre el gráfico de dos funciones (Fig. 14.14).

Asociado al aspecto anterior está la conveniencia de la formulación de sucesiones de indicaciones apropiadas para la acción correspondiente, e incluso la posibilidad de elaboración de una sucesión de indicaciones suficientemente general como para abarcar los cuatro casos señalados.

En el segundo de ellos es importante la utilización del módulo, teniendo en cuenta que el área no puede ser negativa.

En el tercer caso, además del elemento anterior se debe tener en cuenta la determinación de los ceros en el intervalo de integración (si no se dan como datos).

Si la gráfica de la función no está dada o no es sencilla de representar, entonces basta con analizar el cambio de signo con ayuda de las propiedades ya conocidas de la función y la descomposición factorial, en el caso de

funciones racionales.

En el último caso, lo fundamental recae en la determinación de las abscisas de los puntos de intersección que se obtienen.

En cada uno de los casos se puede tener en cuenta, a su vez, la graduación del grado de dificultad de los ejercicios a considerar, tal como aparece en el texto "Conferencias sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática 3", páginas 218-219.

Finalmente haremos referencia a las potencialidades educativas de este complejo de materia y que obviamente deben ser utilizadas por el profesor durante su tratamiento. Aquí se destaca el hecho de que fue precisamente el cálculo de áreas uno de los problemas que dio origen al Cálculo integral. La inclusión de ejercicios con textos de la práctica social, y de la técnica, en particular, puede ser utilizada para reforzar el carácter politécnico de la enseñanza y la importancia de la Matemática como instrumento de transformación del medio.

#### TAREAS DEL CAPITULO:

1. Señale los objetivos fundamentales del tratamiento, en la escuela, del complejo de materia siguiente y describa panorámicamente los aspectos del contenido que lo conforman, clasificándolos en: conceptos, teoremas, y procedimientos.
  - a) Límites.
  - b) Cálculo Diferencial.
  - c) Cálculo Integral.
2. Desarrolle una proposición para el tratamiento metodológico de la elaboración de los teoremas siguientes:
  - a) Unicidad del límite de una función en un punto.

- b) Límite de la suma de dos funciones en un punto.
  - c) Relación entre continuidad y derivabilidad.
  - d) Relación entre área bajo una curva e integración.
3. Elabore una proposición para el tratamiento metodológico de la obtención, con ayuda del cálculo infinitesimal, de una sucesión de indicaciones para:
- a) El análisis de la monotonía de una función numérica en su dominio de definición,
  - b) La determinación de los extremos locales de una función numérica.
  - c) La resolución de problemas de optimización.
4. Desarrolle la planificación de una clase para:
- a) La formación del concepto de continuidad de una función en un punto.
  - b) La fijación del concepto de derivada de una función en un punto.
  - c) La resolución de problemas de optimización mediante la aplicación de derivadas.
  - d) La formación y fijación del concepto de integral indefinida.
5. Elabore una proposición para el tratamiento metodológico de la resolución de un ejercicio con texto sobre:
- a) Optimización, (utilizando el Cálculo diferencial).
  - b) Cálculo de áreas bajo una curva.
6. Realice un trabajo investigativo en diferentes fuentes bibliográficas relacionadas con la historia de la Matemática, acerca del surgimiento del Cálculo infinitesimal. Elabore una posible motivación extramatemática para los alumnos.

## CAPITULO 15. LA PLANIFICACION Y EVALUACION DE LA ENSEÑANZA POR EL PROFESOR

Los resultados elevados alcanzados en el perfeccionamiento de los programas escolares de Matemática no se traducen automáticamente en una mayor calidad de la enseñanza, para ello es necesario una eficiente dirección del proceso de aprendizaje, en la que juega un papel primordial la tarea de planificación y preparación de la enseñanza por el profesor.

La planificación de la enseñanza es un proceso complejo, que no se desarrolla linealmente y que exige creatividad del profesor.

La premisa fundamental de todo el proceso de planificación de la dirección del aprendizaje de los alumnos es el dominio del contenido matemático y el estudio de las exigencias que respecto a este contenido debe plantearse a los alumnos.

En la planificación el profesor debe tener en cuenta, a partir de las exigencias de los programas, los siguientes aspectos:

- ⊖ El nivel de partida y las potencialidades de desarrollo de los alumnos,
- ⊖ Las actividades a realizar por los alumnos en la clase.
- ⊖ La vinculación de la clase con actividades extradocentes y las experiencias de los alumnos.
- ⊖ El empleo de formas de organización y cooperación efectivos para la enseñanza.
- ⊖ El empleo de métodos de enseñanza que propicien la participación activa de los alumnos, y un aprendizaje

efectivo con medios apropiados.

- ⊖ La estrategia a seguir para la fijación de los conocimientos, habilidades y hábitos los alumnos.
- ⊖ La selección y graduación de los ejercicios necesarios para el logro del desarrollo de las habilidades previstas.
- ⊖ La utilización flexible de distintas variantes, vías de solución o formas de razonamiento, por parte del profesor, que puedan ser seguidas por los alumnos durante la clase.
- ⊖ La estrategia a utilizar para estimular el desarrollo intelectual y contribuir a la educación de los alumnos.

#### 15.1 Documentos básicos y medios auxiliares de la planificación de la enseñanza por el profesor

La planificación se lleva a cabo con ayuda de medios auxiliares y documentos que tienen un carácter básico. Forman parte de estos documentos las Tesis y Resoluciones del Partido Comunista de Cuba sobre Política Educativa, sobre la formación de la niñez y la juventud, los planes de las organizaciones juveniles y otros documentos, que tienen influencia directa en la planificación de la labor escolar, y los programas de cada asignatura, que de conjunto deben influir en la formación de la personalidad de los alumnos.

El Programa contiene todos los componentes de la materia de enseñanza de la Matemática en forma ordenada y sistemática, y las exigencias sociales para su enseñanza, expresadas mediante :

- lo que se tiene que lograr (objetivos), a través de qué se debe lograr (contenido);
- en términos generales cómo se debe lograr (métodos

fundamentales) así como,

- indicaciones para la división de la materia en unidades o capítulos y epígrafes, unida a las consideraciones del tiempo disponible para su desarrollo.

Los medios auxiliares de la planificación tienen el carácter de recomendaciones. Entre ellos se encuentran: Las orientaciones metodológicas, los libros de texto, la literatura pedagógica, didáctica, psicológica, y metodológica de la matemática, colecciones de ejercicios, apuntes tomados durante la carrera o en cursos de superación, así como materiales de profesores de avanzada, de jornadas pedagógicas, o de experiencias realizadas.

Las Orientaciones Metodológicas (O.M.) y el Libro de Texto constituyen los medios auxiliares más utilizados por el profesor en la planificación de la enseñanza. Las O.M. se han elaborado en correspondencia con los objetivos y contenidos del curso escolar de Matemática, proporcionan un punto de partida para el trabajo de planificación y ofrecen posibilidades sobre cómo es posible desarrollar las clases, de manera que se contribuya al logro de los objetivos propuestos.

No se pretende la aplicación mecánica de las sugerencias contenidas en las O.M., se trata más bien de interpretar y comprender lo esencial de los objetivos de la enseñanza, las exigencias planteadas por estos y la estrategia para su cumplimiento, adecuándola razonablemente a las condiciones concretas del grupo de alumnos.

El Libro de Texto ofrece una representación de los contenidos del grado, en correspondencia con los programas. El ocupa una posición especial entre los medios auxiliares pues, si bien los elementos didácticos de la representación del contenido en los diferentes capítulos, no es obligatoria para el profesor, sí lo es el contenido matemático, en lo concerniente a su terminología y

extensión.

## 15.2 Etapas fundamentales en la planificación de la enseñanza por el profesor

Para lograr un saber sólido, un poder aplicable y convicciones en los alumnos, la enseñanza de la Matemática debe entenderse como un proceso de desarrollo a largo plazo y dirigido consecuentemente. Todo esto requiere una planificación de las unidades de enseñanza (capítulos) a desarrollar durante el curso escolar, previendo el período de tiempo a dedicar a las clases, los períodos evaluativos parciales y finales, las actividades extra-docentes y extraescolares, y también posibles afectaciones como por ejemplo los días festivos y conmemoraciones, entre otras. Esta es la planificación de la enseñanza a largo plazo, para todo el curso en los diferentes grados, incluida la planificación de unidades de materia (capítulos) por el profesor.

Para la planificación de unidades (capítulos) o unidades temáticas se debe considerar que éstas no tengan un alto número de horas clases, pues el proceso de planificación puede resultar muy complicado.

En la planificación de unidades temáticas hay que considerar:

1. La determinación, con ayuda del programa, de los objetivos del saber y el poder, del desarrollo intelectual y educativos, para el capítulo y la unidad temática, así como los objetivos específicos más importantes para cada clase (derivación gradual).

Se deben examinar las condiciones para la realización de los objetivos en cuanto al saber y el poder, las cualidades de la conducta de los alumnos así como otras condiciones externas existentes y tener en cuenta que los objetivos planteados están en correspondencia con

las exigencias mínimas de la unidad y las características de su grupo de alumnos.

2. La dosificación de la materia a partir de un estudio profundo de las bases y medios auxiliares de la planificación con respecto al contenido de enseñanza que debe ser elaborado y fijado para la realización de los objetivos.

Al planificar la materia hay que:

- \* determinar los puntos esenciales del contenido a tratar en la unidad y una estrategia de trabajo para propiciar el logro de los objetivos planteados.
  - \* considerar las líneas directrices que inciden en el desarrollo de la unidad temática y las exigencias que estas plantean al trabajo en la misma,
  - \* distribuir las clases disponibles teniendo en cuenta los objetivos referidos a la apropiación de nuevos contenidos o su fijación, eventualmente las evaluaciones,
  - \* valorar posibles afectaciones externas al desarrollo de la unidad temática.
3. La planificación de la estructura metodológica y organizativa partiendo de reflexiones sistemáticas sobre:
    - \* el nivel de partida necesario y cómo asegurarlo (en breve, mediano y largo plazo) mediante ejercicios, preguntas, tareas para la casa y durante el desarrollo de los nuevos contenidos de la unidad,
    - \* los medios de enseñanza más adecuados, según los objetivos previstos,
    - \* las medidas para el control de la realización de los objetivos (preguntas, tareas, controles sistemáticos, etcétera).
    - \* los métodos y formas de organización fundamentales a emplear en cada una de las clases.

\* las posibilidades de diferenciación de la enseñanza, entre otros aspectos necesarios para una buena preparación organizativa y metodológica de la unidad temática.

La planificación de unidades temáticas debe culminar con un plan por escrito. Para su presentación no existen reglas específicas, aunque un esquema con los cuatro puntos siguientes, puede ayudar a su comprensión y ejecución.

①. Tema de la unidad, grado y número de clases,

②. Análisis de la situación del grupo.

Esto comprende la evaluación del estado de desarrollo actual en cuanto al saber, el poder y cualidades de la conducta del grupo y de cada alumno, su actitud ante el estudio, al grado de independencia alcanzado, la disciplina, las condiciones psicopedagógicas, higiénicas y materiales.

③. Objetivos generales más importantes de la unidad temática.

④. Dosificación o distribución de las clases.

No. de clase	Tema de la clase	Objetivo específico más importante	Planificación de la materia a reactivar   a elaborar		Medidas organizativas y metodológicas

A través del siguiente ejemplo se ilustra el esquema presentado.

## EJEMPLO 15.1

- ①. Unidad Temática: 2.2 Potencia de exponente racional. Propiedades. 10. Grado (8 h/c)
- ②. Análisis de la situación del grupo: Valoración acerca de los conocimientos adquiridos por los alumnos en el trabajo con las potencias de exponente entero, grado de desarrollo de las habilidades en el cálculo con números fraccionarios y racionales así como en el cálculo con potencias de exponente entero, conocimientos acerca de la definición de raíz  $n$ -ésima; disposición para el aprendizaje e independencia lograda, necesidad del trabajo diferenciado con los alumnos, etcétera.
- ③. Objetivos generales más importantes:  
Lo esencial de la unidad temática radica en desarrollar habilidades de cálculo con potencias de exponente racional y para ésto los alumnos deben aprender la definición de potencia de exponente racional, así como sus propiedades, también hay que lograr que los alumnos reconozcan la radicación y la logaritmicación como operaciones inversas de la potenciación.

4. Dosificación o distribución de las clases

No. y Tema de la clase	Objetivos específicos más importantes	Planificación de la materia a reactivar	Materia a elaborar	Medidas organizativas y metodológicas
1	2	3	4	5
1. Potencia de exponente racional.	Reconocer el concepto $a^{\frac{m}{n}}$ $(a \in \mathbb{R}; a > 0; m, n \in \mathbb{Z}; n > 1)$  reproduciendo la definición con sus palabras	Potencia de exponente entero  Propiedades de la potencia de exponente entero.  Definición de raíz n-ésima.  Cálculo con números fraccionarios y racionales.	Definición: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $(a \in \mathbb{R}; a > 0; m, n \in \mathbb{Z}; n > 1)$	Medios de enseñanza L.T. Pág. 94-95  Elaboración de cuadros de pizarra, hoja de trabajo.
2. Fijación del concepto de potencia de exponente racional.	Calcular con potencias de exponente racional; aplicacional.			L.T. pág. 96 Ejercicios 1, 2, 3 y 4

112

1	2	3	4	5
3. Propiedades de las potencias de exponente racional	do la definición correspondiente Reconocer las propiedades de las potencias para calcular con potencias de exponente racional. Fundamentar los cálculos aplicando las propiedades de las potencias	Propiedades de las potencias con exponentes enteros. Cálculo con potencias de exponentes enteros.	Propiedades de las potencias con exponentes racionales cualesquiera y bases positivas	Medios de enseñanza: L.T. pág. 97-98
4. Propiedades de la potenciación con exponente racional	Demostrar proposiciones aplicando las propiedades de las potencias		Demostración de las propiedades	Medios de enseñanza L.T. pág. 98
5 y 6. Ejercicios de cálculo aplicando las propiedades de la potencia con	Calcular independientemente con potencias de exponente racional en ejercicios que			L.T. pág. 98-99 Ejercicios del 1 al 8

1	2	3	4	5
exponente racional.	combinen las propiedades de las potencias			Aplicación de un trabajo de control escrito.
7. Potencias de exponente irracional. Propiedades.	Reconocer la existencia de potencias con exponente irracional. Reconocer el concepto de logaritmo re- produciendo la definición.	Potencias de exponente racional. Reglas del cálculo aproximado Radicación como operación inversa de la potenciación.	Información sobre las potencias de exponente irracional y sus propiedades. Definición de logaritmo.	Medios de enseñanza: L.T. pág. 100-101 Lámina donde se distinguen los elementos de la potenciación, radicación y logaritmación.
8. Ejercicios de cálculo con logaritmos.	Reconocer la logaritmación como operación inversa de la potenciación aplicándola a la resolución de ejer-			L.T.pág. 102-103, 140. Ejercicios del 1 al 4. Ejercicio 7

La planificación de la enseñanza a corto plazo. Consiste en la preparación de los sistemas de clases y cada una de las clases que conforman una unidad temática. En esta actividad es donde se concretan las acciones del profesor y los alumnos de acuerdo con la planificación realizada a largo plazo. Aquí se pone a prueba la capacidad organizativa, creadora y dirigente del profesor.

Se describen a continuación las etapas que se deben tener en cuenta para la preparación de las clases y se anexan algunas indicaciones para su realización.

1. Estudio del contenido y los objetivos relacionados con el tema de clase.

Los estudios ya iniciados en la preparación de la unidad temática continúan ahora en profundidad. El estudio detallado del Libro de Texto se amplía con la consulta de otras fuentes bibliográficas, otros enfoques y ejercitación del contenido.

A partir de los objetivos del grado, la unidad y la unidad temática, y de acuerdo a las valoraciones sobre el desarrollo de la clase anterior y la estrategia trazada para el desarrollo de la unidad temática se precisan los objetivos de cada clase. Como resultado de estas valoraciones u otras afectaciones, pueden ocurrir cambios.

El contenido de la clase es analizado atendiendo a:

- \* sus potencialidades para contribuir al desarrollo del pensamiento de los alumnos y su educación, lo cual ayuda a precisar los objetivos en estos campos. Aquí deben considerarse posibilidades para fijar conocimientos y continuar desarrollando hábitos y habilidades independientemente de su relación con el tema, por ser estos núcleos básicos de la formación matemática.
- \* el nivel de partida que debe ser asegurado en cuanto al saber (conocimientos sobre conceptos, procedimien-

tos, proposiciones) y el poder (hábitos, habilidades y capacidades), así como otras premisas para la enseñanza de la matemática y el aprendizaje de los alumnos en general.

- \* el nivel de dificultad y asequibilidad por parte de los alumnos. Incluso pueden hacerse valoraciones sobre la necesidad de utilizar medios de enseñanza, buscar otras formulaciones que permitan una mayor comprensibilidad, variar el orden en la presentación del contenido, establecer cierto ordenamiento para los ejercicios, o determinar actividades para los alumnos de forma diferenciada.

## 2. Planeamiento del transcurso de la clase.

En la preparación de la clase es necesario tener en cuenta el papel que esta juega dentro del sistema de clases; la situación o situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática presentes; si predomina la adquisición de nuevos conocimientos o la fijación; pues ello tiene influencia en relación con las decisiones metodológicas a tomar para la estructuración de la clase.

Cualquiera que sea la situación es necesario que, de acuerdo a los objetivos y el contenido de la clase se medite y tomen decisiones respecto a:

- \* las actividades a realizar por el profesor y los alumnos en cada momento de la clase, especialmente qué deben anotar los alumnos en sus libretas,
- \* la estructura metodológica de la situación típica de la enseñanza de la Matemática con que se relaciona y la realización de las funciones didácticas (motivación, orientación hacia el objetivo, aseguramiento del nivel de partida, posibilidades para el control (oral o escrito) del rendimiento de los alumnos y para la fijación de lo aprendido);

- \* los métodos según la vía lógica para adquirir los conocimientos (deductivos o reductivos), según el tipo de comunicación con los alumnos (expositivo, elaboración conjunta o trabajo independiente), según el nivel de asimilación (reproductivo, productivo o creativo), entre otros, y las formas de organización adecuadas al logro de los objetivos previstos;
- \* el empleo de los medios de enseñanza (cuáles, en qué medida, cuando y como participan los alumnos). Se refiere, entre otros, al trabajo con el texto, tablas, instrumentos de dibujo, modelos y en particular a la utilización ordenada y cuidadosa de la pizarra;
- \* la distribución del tiempo durante la clase;
- \* los ejercicios a proponer (su selección, graduación, variedad), su inclusión en las tareas para la preparación del trabajo con nuevos contenidos y la fijación de lo aprendido según la estrategia prevista a mediano y largo plazo;
- \* la instrumentación de medidas diferenciadas instructivas y educativas en correspondencia con las peculiaridades de los alumnos;
- \* la forma y el momento adecuado de hacer resúmenes parciales o totales, sistematizaciones o destacar "ganancias metodológicas" (formas recomendables de proceder).

Para tomar estas decisiones cada vez con mayor probabilidades de éxito, se requiere de una constante autopreparación y consulta de las obras y publicaciones pedagógicas, psicológicas y metodológicas que se relacionan con la enseñanza y en particular con la enseñanza de la Matemática.

Dada la complejidad de las condiciones a tener en cuenta en el proceso de instrucción y educación, estas indicaciones no representan en general una sucesión estricta de pasos, su aplicación está en dependencia de muchos fac-

tores, entre ellos la experiencia del profesor.

La preparación de la clase, por la complejidad de la dirección del pensamiento o hilo conductor de las ideas de los alumnos para su aprendizaje, requiere de una guía escrita que orienta las actividades del profesor: la preparación escrita de la clase.

No hay una única forma de reflejar por escrito la preparación de la clase, como tampoco es posible dictar normas sobre el nivel de detalle necesario o suficiente para que un profesor desarrolle una clase de calidad. En este particular tiene mucho que ver las características del profesor, su experiencia en el trabajo con el programa y su maestría pedagógica, entre otros aspectos.

En nuestro texto, con el propósito de crear el hábito de realizar una preparación escrita de la clase, que sea lo más completa posible y permita desarrollar habilidades en la planificación, sugerimos emplear el siguiente esquema.

- I. Introducción o encabezamiento: Que incluye el tema y los objetivos de la clase.
- II. Fundamentación psicopedagógica, higiénica y didáctico metodológica de la clase.

Esta incluye el análisis de la situación del grupo (valoración del desarrollo de los alumnos en cuanto a su saber y poder: grado de independencia alcanzado; su conducta y cualidades; su actitud en general y en particular ante el estudio; la tendencia de su rendimiento; su disciplina e intereses; los problemas sociales; familiares o de cualquier otro tipo que puedan afectar su formación integral y en particular su formación matemática y la fundamentación sobre el contenido y metodológicas (posición de la clase en la unidad, conocimientos previos necesarios y futuro empleo o utilización del contenido de la clase, su estructura didáctica y metodológica)

El análisis de la situación del grupo debe realizarse basada en los resultados obtenidos de la aplicación de diferentes técnicas de investigación pedagógicas,

III. Planeamiento del transcurso de la clase.

Recomendamos que esta se haga con ayuda del siguiente modelo:

Tiempo	Función didáctica.	Contenido de la enseñanza	Estructuración metodológica y organizativa de la clase. (Actividades del profesor y los alumnos, observaciones sobre métodos, medios, formas de organización y control)
--------	--------------------	---------------------------	--

A continuación se ofrece un ejemplo de preparación escrita de una clase, En el mismo se omiten consideraciones que no esten vinculadas directamente al contenido matemático y el tratamiento metodológico en general.

EJEMPLO 15.2

I. Unidad Temática: Potencia de exponente racional. Propiedades.

Asunto: Concepto de potencia de exponente racional

Objetivos: Los alumnos deben:

Reproducir con sus palabras o por escrito la definición de exponente racional y aplicarla en la resolución de ejercicios de cálculo sencillo y en la transformación de términos.

Utilizar correctamente el lenguaje y la terminología matemática.

Trabajar con limpieza, orden, cuidado y exactitud en la resolución de ejercicios.

II. La clase forma parte de la unidad Potencias. Funciones potenciales y se ubica en la temática 2.2 del Programa. Como premisa para el desarrollo de la clase los alumnos deben tener habilidades en el cálculo con números fraccionarios y racionales y con potencias de exponentes entero, conocer la definición de raíz  $n$ -ésima y exponente entero así como las propiedades de los exponentes y radicales.

El aseguramiento del nivel de partida de la clase se realizará a través de la revisión de la tarea de la clase anterior y la solución de ejercicios relacionados con el cálculo de potencias de exponente entero aplicando propiedades.

El planteamiento del problema, la motivación y la orientación hacia el objetivo se hará destacando que hasta el momento se han estudiado potencias donde se han considerado como exponentes números enteros. ¿Es posible realizar la potenciación cuando el exponente es un número  $m/n \in \mathbb{Q}$  con  $m, n \in \mathbb{Z}$  y  $n > 1$ ? como por ejemplo,  $2^{\frac{1}{2}}$  (motivación intramatemática por completitud).

La elaboración de la definición se realiza a partir de la investigación de diferentes representantes del concepto y mediante una generalización se llega a la formulación de la definición.

III. Planeamiento del transcurso de la clase.

Tiempo	Función didáctica	Contenido de la enseñanza	Estructuración metodológica y organizativa de la clase	
8:00	Aseguramiento del nivel de partida	<p>Ejercicio 1: Calcula aplicando las propiedades de las potencias</p> $\frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4}{\left(\frac{1}{3}\right)^3}$ <p>Ejercicio 2. L.T. 10. grado Ejercicio 9 h) pág. 94</p>	<p>Actividades del profesor</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Revisa la tarea</li> <li>- Plantea los ejercicios en la pizarra. Exige trabajo en la pizarra.</li> <li>- Atiende el trabajo de los alumnos de bajo aprovechamiento y aprovechamiento promedio.</li> </ul>	<p>Actividades de los alumnos</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Calculan de forma independiente en sus cuadernos</li> <li>- Un alumno de bajo aprovechamiento y otro de aprovechamiento promedio trabajan en la pizarra.</li> </ul>
8:05	Motivación/Orientación hacia el objetivo.	<p>En cada operación de cálculo se tiene que dado dos números se puede determinar exactamente un tercer número</p>	<p>-Plantea la siguiente pregunta. Cuando estudiamos en la primaria y la secundaria bátese las operaciones</p>	<p>- Formulan sus conocimientos al respecto y un alumno de alto aprovechamiento resume las insuficiencias que presentaban las operaciones</p>

55

ro. En algunos casos hubo que introducir "nuevos" números para que esto se cumpliera (por ejemplo para la sustracción y división) En el tratamiento de la potenciación se procedió de forma análoga, primeramente se estudiaron las potencias con exponente natural y luego se amplió a exponente entero y ahora se ampliará a exponente racional.

nes de cálculo en los dominios numéricos  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Q}_+$  y  $\mathbb{Q}$  nos encontramos que algunas de estas no eran siempre realizables. ¿Qué operación no se podía realizar siempre en cada uno de estos dominios que motivó la ampliación de cada uno de ellos? - Plantea ejemplos en la pizarra de potencias con exponente natural, potencias con exponente natural, entero y formula las siguientes preguntas:

nes de cálculo en  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Q}_+$  y  $\mathbb{Q}$

Ejemplos:

- . Observen los ejemplos, a qué dominio numerico pertenece el exponente?
  - . ¿Será posible también tener como exponente un número fraccionario?
- Escuchan y reflexionan sobre las preguntas

Plantea el problema:  
Dar respuesta a esta última interrogante

Elaboración  
(Se seguirá en general la vía propuesta en las O.M. pág. 83)

Partir de ejemplos (representantes) del concepto los cuales deben satisfacer las propiedades de las potencias ya conocidas.  
Mediante una generalización

- Invita a los alumnos a dar ejemplos de potencia con exponente fraccionario.
- Presentan ejemplos tales como  $5^{1/2}$
- A partir del ejemplo seleccionado formula la siguiente pregunta:

llegar a la definición:

$$5^{1/2} \rightarrow a^{1/2} \rightarrow a^{1/n} \rightarrow a^{m/n}$$

De  $5^{1/2}$  llegar al sig. conocimiento:

$$5^{1/2} = \sqrt{5} \text{ y generalizar:}$$

$$a^{1/2} = \sqrt{a} \quad ; \quad a > 0$$

(cuadro de pizarra 1)

Por último generalizar el denominador del exponente:

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \quad ; \quad a > 0, n \in \mathbb{Z}, n > 1$$

(cuadro de pizarra 2a ó 2b)

De aquí obtener:

$$a^{m/n} = a^m \cdot \frac{1}{n} = (a^m)^{1/n}$$

de donde:

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

( $a > 0; m, n \in \mathbb{Z} ; n > 1$ )

¿Será posible, empleando las propiedades de la potencia, convertir a  $5^{1/2}$  en una potencia conocida p. ejemplo en  $5^1$ ?

- Entrega hoja de trabajo

- Analiza con los alumnos las posibilidades de convertir a  $5^{1/2}$  en  $5^1$  orientado en las propiedades:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \text{ó}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

- Plantea otros ejemplos tales como  $3^{1/2}; 7^{1/2}$ , etc. y generaliza  $a^{1/2} = \sqrt{a}$

- Realizan de forma independiente las tareas señaladas en la hoja de trabajo.

- Un alumno de alto aprovechamiento en la pizarra: nuevo conocimiento adquirido:

$$5^{1/2} = \sqrt{5}$$

- Toman en sus cuadernos lo esencial del cuadro de pizarra 1

- Generaliza el denominador del exponente a partir de ejemplos particulares. Elaboran cuadro de pizarra 2a) ó 2b) de acuerdo a la propiedad de la potencia seleccionada.
- Participan activamente en la obtención del nuevo conocimiento.
- Formula la siguiente pregunta:  
¿Cómo podemos transformar el exponente de la potencia  $5^{3/2}$  aplicando la propiedad  $(a^m)^n = a^{mn}$ ?  
Cómo podríamos expresar entonces  $5^{3/2}$  mediante raíz?
- Anotan en sus cuadernos lo esencial.  
 $a^{1/n} = \sqrt[n]{a} (a > 0; n \in \mathbb{Z}, n > 1)$
- Expresan sus conocimientos  $5^{3/2} = 5^{3 \cdot \frac{1}{2}} = (5^3)^{\frac{1}{2}}$
- Responden: Como  $(5^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5^3}$ , entonces  $5^{3/2} = \sqrt{5^3}$
- Plantea otros ejemplos y llega por generalización a la definición.
- Anotan en sus cuadernos la definición

8:35

1. Fijación

(ejercitación) (Realización)

Ejercicios:

$$a^{m/n} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

1. Escribe las siguientes

potencias como raíces:

- c)  $13^{1/4}$ ;
- d)  $[4/9]^{2/3}$ ;
- i)  $13^{-1/3}$

- Orienta los ejercicios por el LT.

- Atiende el trabajo de los alumnos y realiza explicaciones con respecto al inciso i) (Ver LT, pág 96)

-Desarrollan los ejercicios del LT en sus cuadernos.

Un alumno de bajo aprovechamiento trabaja en la pizarra el c); un alumno de aprovechamiento promedio el d) y un alumno de alto aprovechamiento el i).

8:40

Resumen y control

(LT. pág. 96).

- Controla los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores y formula la siguiente pregunta:

¿Cómo se puede definir

$$a^{m/n} \text{ con } a > 0, m, n \in \mathbb{Z}$$

$$n > 1$$

- Orienta la tarea atendiendo a las diferencias individuales.

- Explican con sus palabras el concepto.

Tarea: LT. Pág 96

1. Escribe las siguientes potencias como raíces:

- Anotan la tarea

e)  $X^{2/7}$  (Para alumno de bajo aprov.)

g)  $(X^2)^{5/6}$  (alumnos aprov. promedio)

e)  $(0,06)^{-2/3}$  (alumno alto aprov.)

3. Escribe las siguientes raíces como potencias:

a)  $\sqrt[3]{5^7}$  (alumno bajo aprov.)

f)  $\sqrt[3]{\left(\frac{5}{7}\right)^4}$  (Alumno aprov. promedio)

i)  $\sqrt[6]{(ab)^3}$  ( $a, b \geq 0$ )  
(Alumno alto aprov.)

Generalización de la base

$$2^{\frac{1}{2}} = 2$$

$$3^{\frac{1}{2}} = 3$$

$$5^{\frac{1}{2}} = 5$$

.....

$$A^{\frac{1}{2}} = \sqrt{A} \quad (A > 0)$$

Conocimiento:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

Cuadro pizarra 1

Generalización del denominador del exponente

Según propiedad:  $A^{m+n} = A^m \cdot A^n$

$$A^1 = A^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$$

$$A = A^{\frac{1}{2}} \cdot A^{\frac{1}{2}}$$

$$A = \sqrt{A} \cdot \sqrt{A}$$

$$A^1 = A^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}$$

$$A = A^{\frac{1}{3}} \cdot A^{\frac{1}{3}} \cdot A^{\frac{1}{3}}$$

$$A = \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{A}$$

.....  
$$A^1 = A^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}$$

$$A = A^{\frac{1}{n}} \cdot A^{\frac{1}{n}} \cdot \dots \cdot A^{\frac{1}{n}}$$

$$A = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{A} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{A}$$

conocimiento: 
$$A^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{A}$$

Cuadro pizarra 2 a)

Según propiedad:

$$A^{mn} = (A^m)^n$$

$$A^1 = A^{\frac{1}{2}} \cdot A^{\frac{1}{2}}$$

$$A = (A^{\frac{1}{2}})^2$$

$$A = (\sqrt{A})^2$$

$$A^1 = A^{\frac{1}{3}} \cdot A^{\frac{1}{3}} \cdot A^{\frac{1}{3}}$$

$$A = (A^{\frac{1}{3}})^3$$

$$A = (\sqrt[3]{A})^3$$

.....  
$$A^1 = A^{\frac{1}{n}} \cdot A^{\frac{1}{n}} \cdot \dots \cdot A^{\frac{1}{n}}$$

$$A = (A^{\frac{1}{n}})^n$$

$$A = (\sqrt[n]{A})^n$$

Conocimiento: 
$$A^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{A}$$

Cuadro pizarra 2b)

HOJA DE TRABAJO

1. Coloque en el espacio en blanco la propiedad de la potencia aplicada:

$$a) 5^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = \quad = 5^1$$

$$b) 5^{\frac{1}{2} \cdot 2} = \quad = 5^1$$

2. De acuerdo a tus conocimientos sobre raíces responde:

a) ¿Qué número debe representar  $5^{\frac{1}{2}}$  para que se cumpla que multiplicado por sí mismo de 5:

$$\begin{array}{ccc} 5^{\frac{1}{2}} & \cdot & 5^{\frac{1}{2}} = 5 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \_ & \cdot & \_ = 5 \end{array}$$

b) ¿Qué número debe representar  $5^{\frac{1}{2}}$  para que se cumpla que su cuadrado de 5:

$$\begin{array}{ccc} (5^{\frac{1}{2}})^2 & = & 5 \\ \downarrow & & \\ ( \quad )^2 & = & 5 \end{array}$$

### 15.3 Consideraciones sobre la evaluación de la enseñanza de la matemática por el profesor.

La clase es la forma de organización de la enseñanza donde fundamentalmente se concreta el trabajo de planificación. De ahí que el análisis de cómo se estructuró el proceso de enseñanza, bajo las condiciones de la escuela y los resultados alcanzados, constituya un elemento importante a tener en cuenta en la evaluación de la enseñanza y su perfeccionamiento.

Los pedagogos W. Jungk, en su libro "Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática", y W. Zillmer en "Complementos de Metodología de la Enseñanza de la Matemática" exponen las tres direcciones en que se lleva a cabo la evaluación de la enseñanza: los resultados; las condiciones (internas y externas) y la estructuración del proceso de enseñanza. También explican cómo hacer el análisis en cada dirección.

La experiencia del trabajo de atención a los estudiantes durante su práctica docente también indica la necesidad de trabajar sistemáticamente en la capacitación de los estudiantes para la realización de un análisis "completo" y detallado de su proceder en las clases y su fundamentación desde posiciones científicas.

Nos proponemos en este texto ofrecer algunas indicaciones para la valoración y análisis de las clases de matemática tomando como aspecto central su estructuración metodológica, e integrando a ella el análisis de las condiciones (internas y externas) y los resultados obtenidos.

En el análisis y discusión de las clases de matemática recomendamos seguir una base orientadora para la evaluación compuesta por los siguientes pasos:

1. Análisis de la clase desde el punto de vista del contenido
2. Análisis de los objetivos formulados para la clase

3. Análisis de la estructura didáctico-metodológica de la clase
4. Análisis de cada eslabón o proceso parcial de la estructura didáctico-metodológica
5. Consideraciones retrospectivas y perspectivas sobre el desarrollo de la clase.

Estos pasos se encuentran estrechamente vinculados. Su separación formal en una sucesión de pasos está encaminada a ayudar a organizar la actividad mental del profesor durante el análisis de la clase y evitar que se pasen por alto aspectos importantes a considerar. A continuación se explica cada paso y se exponen algunas preguntas que pueden ayudar a orientar el análisis.

#### 1. ANALISIS DE LA CLASE DESDE EL PUNTO DE VISTA DEL CONTENIDO

El punto medular de este análisis radica en la representación del contenido de la clase, su papel dentro del sistema de clases de la unidad (nexos con las demás clases) y su correspondencia con las exigencias del programa. Aquí también se incluye la fundamentación matemática del contenido de la clase. Este aspecto se refiere a relacionar y explicar los nexos existentes entre el contenido de la clase (tal y como lo exige el programa y la lógica de la asignatura) y el contenido de la ciencia Matemática, estableciendo las simplificaciones, que en un sentido didáctico son necesarias hacer en la escuela.

Preguntas para orientar el análisis:

- ¿ Qué contenido se trata en la clase?
- ¿ Cómo se fundamenta el contenido de la clase desde el punto de vista matemático?
- ¿ Se corresponde el contenido de la clase, con la profundidad que exige el programa?
- ¿ Existieron dificultades desde el punto de vista científico en la clase? Hubo errores de contenido?

¿ Se utilizó correctamente el vocabulario matemático?

¿ Se estructuró lógicamente el contenido de la clase?

## 2. ANALISIS DE LOS OBJETIVOS FORMULADOS PARA LA CLASE.

Este análisis comprende la correspondencia de los objetivos de la clase con las exigencias del programa y la derivación correcta de los objetivos del saber y el poder, el desarrollo intelectual y educativos, así como su relación con los objetivos de las demás clases del sistema.

Preguntas para orientar el análisis:

¿ Qué objetivos se plantearon a la clase?

¿ Se corresponden éstos con las exigencias del programa y las características del grupo?

¿ Se incluyeron tanto objetivos instructivos como educativos?

¿ Están correctamente formulados los objetivos para la clase?

¿ Cómo se relacionan los objetivos de la clase con los objetivos de las demás clases del sistema?

## 3. ANALISIS DE LA ESTRUCTURA DIDACTICO METODOLOGICA DE LA CLASE.

El punto medular de este análisis está en la determinación de la estructura didáctico-metodológica de la clase en correspondencia con los objetivos parciales, las funciones didácticas y las situaciones típicas de la enseñanza de la matemática que se reconozcan en la clase.

Se trata, por ejemplo, de determinar qué parte de la clase se corresponde con el aseguramiento del nivel de partida, la motivación, la búsqueda de la solución de un problema, o la fijación de teoremas, entre otros aspectos típicos de la enseñanza de la especialidad.

Preguntas para orientar el análisis:

¿ Qué eslabones o procesos parciales se estructuran durante el desarrollo de la clase (según funciones didácticas o situaciones típicas de la enseñanza de la Matemática)?

- ¿Con qué etapas o períodos de la clase se identifican?
- ¿Cuál fue su tiempo de duración?

#### 4. ANALISIS DE CADA ESLABON O PROCESO PARCIAL DE LA CLASE EN SU ESTRUCTURA METODOLOGICA.

En cada eslabón o proceso parcial de la clase se analizan los métodos y procedimientos empleados, se fundamenta su utilización y correspondencia con los objetivos parciales de la clase. Aquí es necesario tener en cuenta las condiciones del grupo, los factores que favorecen o entorpecen el desarrollo de la clase y los aspectos positivos en la dirección del aprendizaje.

Preguntas para orientar el análisis:

- ¿Qué métodos y procedimientos de enseñanza se utilizaron para cada fase de la clase?
- ¿Fueron bien seleccionados los métodos? ¿Por qué?
- ¿Se utilizaron estos métodos y procedimientos correctamente y en correspondencia con las exigencias del programa?
- ¿Favorecen los métodos y procedimientos empleados la atención a las diferencias individuales, la participación activa y el desarrollo del pensamiento de los alumnos en la clase?
- ¿Cómo se utilizan los medios de enseñanza en la clase (pizarra, láminas, instrumentos de dibujo, tablas, calculadoras, plantillas, computadoras, etcétera)? Fundamenta.
- ¿Cómo valoras la calidad de los medios de enseñanza utilizados en la clase?
- ¿Se utilizó racionalmente el tiempo de la clase?
- ¿Cómo valoras la consideración de factores higiénicos, psicológicos y pedagógicos en cada eslabón del de-

desarrollo de la clase? ¿Por qué?

- ¿Cómo se pone de manifiesto la relación entre los objetivos, el contenido y los métodos en la clase?
- ¿En qué aspectos se encuentran los logros y las deficiencias en la dirección del aprendizaje de los alumnos?

#### 5. CONSIDERACIONES PERSPECTIVAS Y RETROSPECTIVAS SOBRE EL DESARROLLO DE LA CLASE.

En este paso deben tomarse en consideración tres aspectos:

- La verificación del cumplimiento de los objetivos de la clase (considere los objetivos del saber y el poder, del desarrollo intelectual y educativos).
- La determinación, en forma generalizada, de los logros y deficiencias en la dirección del proceso docente educativo. Aquí se tendrá siempre en cuenta el cumplimiento de los aspectos pedagógicos, higiénicos, psicológicos y metodológicos en la clase. No es conveniente hacer una larga lista de insuficiencias, sino considerar las fundamentales.
- La determinación de las conclusiones y recomendaciones necesarias para perfeccionar los logros y erradicar las insuficiencias.

Preguntas para orientar el análisis

- ¿Dónde se encuentran los principales logros y dificultades del desarrollo de la clase?
- ¿Qué conclusiones pueden derivarse para el perfeccionamiento del trabajo futuro?
- ¿En qué medida se cumplieron los objetivos y bajo qué condiciones podría aplicarse una estrategia similar?

En la práctica el análisis de las clases siguiendo esta

base de orientación debe iniciarse diferenciando cada uno de los pasos (puntualizando en qué consiste su realización) y cómo puede hacerse el análisis en cada caso; más tarde esta base orientadora debe reducirse, uniendo los pasos 1.- 2. y 3.- 4.