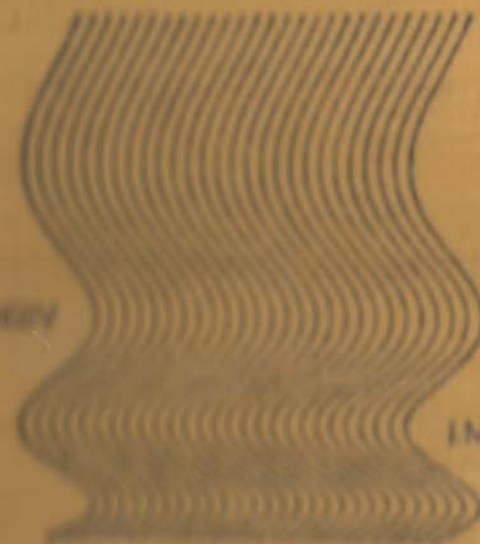


M. A. MIJEEV  
I. M. MIJEEVA

Fundamentos  
de termo-  
transferencia



M. A. MIJEEV



I. M. MIJEEVA

Fundamentos  
de termo-  
transferencia

М. А. МИХЕЕВ,  
И. М. МИХЕЕВА

**Основы  
теплопередачи**

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
"ЭНЕРГИЯ"  
МОСКВА



M.A. MIJEEV, I.M. MIJEEVA

**Fundamentos  
de termo-  
transferencia**

Editorial Mir  
Mosú



Traducido del ruso por G. Lozhkin

На испанском языке

Impreso en Rumania. 1979

© Издательство "Энергия" 1977

© Traducción al español, Editorial Mir. 1979

## INDICE

Prefacio 7  
Introducción 9  
Designaciones principales 11  
Números de similitud 12

### Capítulo 1. Conductibilidad térmica

1-1. Principal ley de la conductibilidad térmica 13  
1-2. Conductibilidad térmica de la pared plana 18  
1-3. Conductibilidad térmica de una pared cilíndrica 25  
1-4. Conductibilidad térmica de paredes esféricas y cuerpos de forma irregular 30  
1-5. Conductibilidad térmica de los cuerpos con fuentes internas de calor 33

### Capítulo 2. Intercambio de calor por convección

2-1. Nociones y definiciones generales 41  
2-2. Ecuaciones diferenciales del intercambio térmico 45  
2-3. Fundamentos de la teoría de la semejanza 53  
2-4. Semejanza de los procesos de intercambio de calor por convección 61  
2-5. Generalización de los datos experimentales a base de la teoría de la semejanza 71

### Capítulo 3. Intercambio de calor en líquidos y gases

3-1. Emisión calorífica durante el flujo currentilíneo alrededor de una superficie plana (una placa) 78  
3-2. Emisión calorífica al fluir el líquido por los tubos 88  
3-3. Emisión calorífica durante la convección libre 104  
3-4. Emisión calorífica durante el flujo currentilíneo transversal alrededor de los tubos 111

### Capítulo 4. Intercambio de calor en la ebullición y la condensación

4-1. Intercambio de calor durante la ebullición 122  
4-2. Intercambio de calor durante la condensación del vapor 151



## Capítulo 5. Radiación térmica

- 5-1. Leyes de la radiación calorífica 176
- 5-2. Intercambio de calor por radiación entre los cuerpos 188
- 5-3. Radiación térmica de los gases 198

## Capítulo 6. Procesos de termotransferencia

- 6-1. Intercambio térmico compuesto y termotransferencia 210
- 6-2. Termotransferencia a través de las paredes 213
- 6-3. Transmisión de calor a través de paredes complejas 224
- 6-4. Intensificación de los procesos de termotransferencia 230
- 6-5. Aislamiento térmico 234

## Capítulo 7. Conductibilidad térmica no estacionaria

- 7-1. Descripción del proceso 240
- 7-2. Solución analítica 243
- 7-3. Métodos aproximados de resolución 253
- 7-4. Régimen térmico regular 262

## Capítulo 8. Dispositivos cambiadores de calor

- 8-1. Nociones generales 267
- 8-2. Aparatos de recuperación 268
- 8-3. Termopermutadores de regeneración y aparatos mezcladores 284
- 8-4. Cálculo hidromecánico de los dispositivos cambiadores de calor 290

## Capítulo 9. Simulación de aparatos térmicos

- 9-1. Planteamiento del problema 298
- 9-2. Condiciones de simulación 300
- 9-3. Ejemplos de simulación 302

## Capítulo 10. Algunos problemas del intercambio térmico

- 10-1. Teoría hidrodinámica del intercambio térmico 308
- 10-2. Intercambio de calor cuando las velocidades son altas 312
- 10-3. Intercambio térmico en las superficies con rugosidad artificial 319
- 10-4. Emisión calorífica de metales fundidos 324
- 10-5. Transmisión de calor a través de una varilla 327
- 10-6. Transmisión de calor a través de aletas 333

Apéndices 343  
Bibliografía 365

## PREFACIO

¿Cuáles son las regularidades fundamentales de los fenómenos de la transmisión del calor? ¿Cómo funciona el mecanismo y la metodología de los procesos de intercambio térmico? ¿Qué recomendaciones se deben utilizar en los cálculos prácticos? Las respuestas a estos interrogantes las presenta el contenido de este libro. El objetivo que persigue este texto, es el exponer los complicados fenómenos de la termotransferencia en la forma más simple y clara posible, conservando la imprescindible seriedad científica.

La exposición del material está ordenada de acuerdo al aumento de la complejidad de los procesos examinados para facilitar su asimilación por el lector. Así, por ejemplo, los procesos complicados de la termotransferencia se exponen después de explicar las formas elementales de intercambio térmico. Los problemas de hidromecánica se explican cuando la exposición de algunos problemas del intercambio de calor por convección lo requiere. En este libro de texto se examinan las tesis fundamentales de la teoría de la similitud y su aplicación en el estudio de los procesos de la transmisión de calor. Al final de cada tema se dan ejemplos numéricos que muestran las resoluciones de los problemas más característicos.

En general la obra presente sigue conservando el estilo, la estructura y el carácter propios del célebre manual "Fundamentos de la termotransferencia" del académico M. A. Mijéev (1902—1970) cuya última edición salió a la luz el año 1956. En su texto M. A. Mijéev generalizó la experiencia de muchos años de enseñanza del curso de termotransferencia en los centros docentes superiores, en donde analizó los resultados de los trabajos teóricos y experimentales más importantes en el campo de la teoría del intercambio y simulación térmicos.

La edición del presente libro se dedica a su memoria.

I. Mijeeva



## INTRODUCCIÓN

La termotransferencia forma parte integral de la teoría general del calor, sus cimientos los puso a mediados del siglo XVIII M. V. Lomonósov, quien ideó la teoría mecánica del calor y las bases del principio de la conservación y la transformación de la materia y la energía. Con el desarrollo ulterior de la teoría del calor se perfeccionaron sus postulados generales. En el siglo XIX la atención principal se dedicó a los problemas de la transformación del calor en trabajo. A la par con el desarrollo de la técnica y con el aumento de la potencia en los conjuntos separados de diferentes dispositivos y máquinas térmicos creció el papel de los procesos de la transferencia calorífica. En la segunda mitad del siglo XIX los científicos e ingenieros comenzaron a prestarles mucho más atención a los procesos del intercambio térmico. La literatura de aquella época tiene muchas obras dedicadas a los problemas de propagación y transferencia de calor, y algunas de éstas conservan su valor hasta nuestros días. Precisamente en estos años se publicó, por ejemplo, el trabajo de O. Reynolds "Teoría hidrodinámica del intercambio térmico" (1874), en el que se establece la relación entre los procesos de transferencia de calor y la cantidad de movimiento.

La teoría del calor se formó definitivamente como una asignatura científica independiente sólo a principios del siglo XX. Hoy día la teoría de la termotransferencia junto con la termodinámica técnica representan los fundamentos teóricos de la termotecnia.

En el desarrollo de la teoría de termotransferencia, a la par con investigadores extranjeros los científicos rusos han hecho grandes aportes y aun en nuestros días sus trabajos conservan su importancia. El estudio de los problemas del intercambio térmico lo encabezó en la URSS, desde los años 20, el académico M. V. Kirpichiov, quien le dio un nuevo sentido: el de ingeniería física.

La ingeniería física elaboró vías originales para abordar la investigación de la esencia de los procesos operantes y el funcionamiento de los aparatos

térmicos en conjunto. Esto permitió resolver con plena argumentación científica muchos problemas de ingeniería. Simultáneamente se elaboraron la metodología general de investigaciones y la del tratamiento y generalización de datos experimentales. Todos los datos del intercambio térmico acumulados fueron revisados, precisados y arreglados dentro de un sistema determinado. En la Unión Soviética tuvo gran desarrollo la teoría de la semejanza, que por su esencia es la teoría del experimento. Basándose en ésta se elaboró la teoría de la simulación térmica de dispositivos técnicos.

Las investigaciones muestran que la termotransferencia es un proceso complicado. Para su estudio se separa el proceso en los fenómenos simples. Se distinguen tres procedimientos elementales de la transmisión de calor: convección, conductibilidad y radiación térmicas.

Se llama **conductibilidad térmica** a la propiedad que tienen los cuerpos de transmitir el calor (o energía interna) en presencia de contacto directo entre éstos (o entre sus partes) cuando poseen diferentes temperaturas.

El fenómeno de **convección** se observa en líquidos o gases en movimiento. En este caso la transmisión de calor tiene lugar simplemente a causa del desplazamiento de la sustancia en el espacio.

Se llama **radiación térmica** al fenómeno de transmisión de calor en forma de ondas electromagnéticas con una doble transformación mutua: la de energía térmica en radiación y viceversa.

En realidad las formas elementales del intercambio térmico no se hallan separadas y rara vez se encuentran en forma pura. En la mayoría de casos una forma de intercambio térmico se acompaña con otra. Por ejemplo, el intercambio de calor entre una superficie dura y un líquido (o gas) se lleva a cabo mediante conductibilidad térmica y convección. Estas se operan simultáneamente y todo el proceso se llama **intercambio de calor por convección o emisión calorífica.**

En las calderas de vapor durante el proceso de transmisión de calor de los gases de combustión a la superficie exterior de los tubos hervidores, toman parte a la vez todas las tres formas del intercambio térmico: la convección, la conductibilidad y la radiación térmicas. De la superficie exterior a la interior de los tubos hervidores, el calor se transfiere a través de la capa de hollín, la pared metálica y la capa de incrustación por medio de la conductibilidad térmica. Finalmente, de la superficie interior de los tubos al agua el paso de calor se realiza mediante la conductibilidad térmica y la convección. Por consiguiente, en determinadas etapas de la transmisión de calor, las formas elementales del intercambio térmico pueden hallarse en cualquier combinación. En los cálculos prácticos a veces es conveniente examinar algunos procesos complicados como un conjunto íntegro.

Así, por ejemplo, la transmisión del calor a partir de un líquido caliente hacia el frío a través de la pared que los separa, se llama proceso de **termotransferencia**. En el presente libro se examinan las principales regularidades cualitativas y cuantitativas del transcurso tanto de los procesos elementales, como de los más complicados.

Les rogamos a nuestros lectores que sus sugerencias acerca del contenido del libro las envíen a la dirección de la Editorial "MIR", I Rizhski per. 2, Moscú, I-278, URSS.



## DESIGNACIONES PRINCIPALES

|                    |  |
|--------------------|--|
| $r, R,$            | radio en m;  |
| $d, D,$            | diámetro en m;   |
| $l, L,$            | dimensión característica y longitud en m;  |
| $\delta$           | espesor en m;  |
| $h, H,$            | altura en m;   |
| $F$                | superficie, área de superficie del intercambio térmico en m <sup>2</sup> ;                 |
| $f,$               | área de la sección transversal en m <sup>2</sup> ;   |
| $\tau$             | tiempo en s;   |
| $t,$               | temperatura en °C;   |
| $T,$               | temperatura en K;  |
| $t_p,$             | temperatura de la superficie en °C;  |
| $t_{fl},$          | temperatura del fluido o del gas en °C;  |
| $t_s,$             | temperatura de la saturación en °C;  |
| $\delta t,$        | variación de la temperatura del fluido en la dirección de su movimiento en °C;             |
| $\Delta t,$        | diferencia de temperaturas entre dos medios en °C;   |
| $\Delta t_{\log},$ | diferencia logarítmica media de las temperaturas entre dos medios en °C;                   |
| $v,$               | temperatura excesiva en °C;  |
| $p,$               | presión en Pa;   |
| $\Delta p,$        | diferencia de presiones en Pa;   |
| $G,$               | gasto en masa del fluido, gas en kg/s;   |
| $V,$               | volumen en m <sup>3</sup> , o gasto volumétrico del fluido o del gas en m <sup>3</sup> /s; |
| $m,$               | masa de la sustancia en kg;  |
| $w,$               | velocidad en m/s;  |
| $g,$               | aceleración de la gravedad en m/s <sup>2</sup> ;   |
| $\rho,$            | densidad en kg/m <sup>3</sup> ;  |
| $\rho', \rho'',$   | densidad del fluido y del vapor, respectivamente, en kg/m <sup>3</sup> ;                   |
| $\beta,$           | coeficiente térmico de dilatación volumétrica en 1/°C, 1/K;                                |

|             |  |
|-------------|--|
| $c_v, c_p,$ | calor específico para volumen y presión constantes, respectivamente, en J/(kg·°C); |
| $i,$        | entalpía en J/kg;  |
| $r,$        | calor del cambio de fase en J/kg;  |
| $\mu,$      | coeficiente dinámico de viscosidad en Pa·s;  |
| $\nu,$      | coeficiente cinemático de viscosidad en m <sup>2</sup> /s;                         |
| $s,$        | fuerza de frotamiento en Pa;   |
| $\sigma,$   | tensión superficial en N/m;  |
| $\zeta,$    | coeficiente de resistencia de rozamiento;  |
| $\theta,$   | ángulo marginal entre la pared y la superficie libre del fluido;                   |
| $Q,$        | flujo calorífico en W;   |
| $q,$        | densidad del flujo calorífico en W/m <sup>2</sup> ;                                |
| $q_l,$      | densidad lineal del flujo calorífico en W/m;                                       |
| $q_v,$      | potencia de la fuente interna de calor en W/m <sup>3</sup> ;                       |
| $\lambda,$  | coeficiente de conductibilidad térmica en W/(m·°C);                                |
| $a,$        | coeficiente de conductibilidad de la temperatura en m <sup>2</sup> /s;             |
| $\alpha,$   | coeficiente de traspaso del calor en W/(m <sup>2</sup> ·°C);                       |
| $k,$        | coeficiente de transmisión del calor en W/(m <sup>2</sup> ·°C);                    |
| $C,$        | coeficiente de radiación en W/(m <sup>2</sup> ·K <sup>4</sup> );                   |
| $E,$        | densidad del flujo de radiación en W/m <sup>2</sup> ;                              |
| $\epsilon,$ | grado de radiación integral.   |

## NÚMEROS DE SIMILITUD

|       |   |
|-------|---|
| $Re$  | $= wl/\nu$ , número de Reynolds;                                  |
| $Pr$  | $= \mu c_p/\lambda = \nu/a$ , número de Prandtl;                  |
| $Eu$  | $= \Delta p/\rho w^2$ , número de Euler;                          |
| $Nu$  | $= \alpha l/\lambda$ , número de Nusselt;                         |
| $Pe$  | $= RePr = wl/a$ , número de Peclet;                               |
| $Gr$  | $= g\beta\Delta t \frac{l^3}{\nu^2}$ , número de Grashof;         |
| $Ra$  | $= GrPr = g\beta\Delta t \frac{l^3}{\nu a}$ , número de Rayleigh; |
| $St$  | $= Nu/Pe = \alpha/c_p \rho w$ , número de Stanton;                |
| $ Fo$ | $= a\tau/l^2$ , número de Fourier;                                |
| $Bi$  | $= \alpha l/\lambda_p$ , número de Biot;                          |
| $Ho$  | $= \tau w/l$ , número de homocromaticidad.                        |



## CAPITULO 1

### CONDUCTIBILIDAD TÉRMICA

#### 1-1. Principal ley de la conductibilidad térmica

Si la temperatura de los diferentes puntos de un sólido, fluido o gas inmóviles es desigual, en estos casos, según demuestra la experiencia, el calor se transmite espontáneamente de las partes del cuerpo que tienen la temperatura alta a las partes cuya temperatura es baja. Este fenómeno se llama *conductibilidad térmica*. El mecanismo interno del fenómeno de conductibilidad térmica se explica con la ayuda de los conceptos cinéticos y moleculares; la transferencia de energía se realiza, en este caso, como resultado del movimiento térmico y de la interacción energética entre las micropartículas (moléculas, átomos, electrones) que componen el cuerpo dado.

El proceso de conductibilidad térmica está vinculado estrechamente con la distribución de la temperatura dentro del cuerpo. Por eso, en su estudio, ante todo es necesario precisar los conceptos de *campo de temperatura* y *gradiente de temperatura*.

1. Campo de temperatura. La temperatura, según se conoce, caracteriza el estado térmico del cuerpo y determina su grado de calentamiento. Puesto que el estado térmico de las distintas partes del cuerpo, durante el proceso de la conductibilidad térmica, es diferente, resulta que en el caso general la temperatura  $t$  es función de las coordenadas  $x, y, z$  y del tiempo  $\tau$ , es decir,

$$t = f(x, y, z, \tau). \quad (a)$$

El conjunto de valores de la temperatura para todos los puntos del espacio en un instante dado se llama *campo de temperatura*. La ecuación (a) representa la expresión matemática de este campo. Al mismo tiempo, si la temperatura varía con el tiempo, el campo se denomina *inestable* (no estacionario), y si no varía, *estable* (estacionario). La temperatura puede ser función de una, dos o tres coordenadas. En correspondencia con esto también el campo de temperatura se puede llamar uni-, bi-, y



tridimensional. La ecuación del campo de temperatura estacionario unidimensional tiene forma más simple:

$$t = t(x). \quad (b)$$

**2. Gradiente de temperatura.** Cualquier que sea el campo de temperatura el cuerpo siempre tiene puntos de igual temperatura. El lugar geométrico de estos puntos forma la superficie isotérmica. Puesto que en un mismo punto del espacio no puede haber dos temperaturas diferentes, las superficies isotérmicas no se cruzan entre sí: todas ellas o bien se cierran en sí mismas o bien se terminan en los límites del cuerpo. Por consiguiente, la variación de la temperatura en el cuerpo se observa solamente en las direcciones que cruzan las superficies isotérmicas (por ejemplo, la dirección  $x$ , fig. 1-1). En este caso la más intensa variación de la temperatura se obtiene en la dirección de la normal  $n$  a la superficie isotérmica. El límite de la razón que determina la variación de la temperatura  $\Delta t$ , en función de la distancia entre las isoterms siguiendo la normal  $\Delta n$ , se llama gradiente de temperatura y se designa mediante uno de los símbolos siguientes:

$$\lim (\Delta t / \Delta n)_{\Delta n \rightarrow 0} = \partial t / \partial n = \text{grad } t = \Delta t. \quad (c)$$

El gradiente de temperatura es un vector orientado la normal a la superficie isotérmica en el sentido del aumento de la temperatura,  $^{\circ}\text{C}/\text{m}$ .

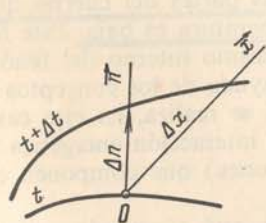


Fig. 1-1. Para determinar el gradiente de temperatura

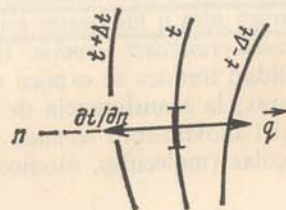


Fig. 1-2. Ley de Fourier

**3. Flujo calorífico.** El calor se propaga espontáneamente sólo a lo largo de la dirección en que decrece la temperatura. La cantidad de calor transportada a través de cualquier superficie isotérmica por unidad de tiempo se denomina flujo calorífico Q. El flujo calorífico referido a una unidad de superficie que se halla en la superficie isotérmica, se conoce como densidad del flujo calorífico q. La densidad del flujo calorífico es un vector cuyo sentido coincide con el de propagación del calor en un punto dado y es contrario al sentido del vector del gradiente de temperatura (fig. 1-2).

**4. Ley de Fourier.** Durante el estudio del proceso de conductibilidad térmica en los sólidos Fourier determinó, por consideraciones experimentales, que la cantidad de calor transmitida es proporcional al descenso de temperatura, al tiempo y al área de la sección orientada perpendicularmente a la dirección de propagación del calor. Si la cantidad del calor

transmitido se refiere a una unidad del área de la sección por unidad de tiempo, entonces la dependencia establecida se puede escribir:

$$\vec{q} = -\lambda \text{ grad } t. \quad (1-1)$$

La ecuación (1-1) es expresión matemática de la principal ley de la conductibilidad térmica, la ley de Fourier. Esta ley es la base de todas las investigaciones teóricas y experimentales de los procesos de conductibilidad térmica.

**5. Coeficiente de conductibilidad térmica.** El factor de proporcionalidad  $\lambda$  en la ecuación (1-1) se llama coeficiente de conductibilidad térmica. Expresa la propiedad física de la sustancia y caracteriza su capacidad para conducir el calor:

$$\lambda = - \frac{|\vec{q}|}{\text{grad } t} = \frac{Q}{F \tau \Delta t / l} \quad (d)$$

El valor del coeficiente de conductibilidad térmica representa la cantidad de calor que pasa por unidad de tiempo a través de una unidad de superficie situada en la superficie isotérmica, cuando el gradiente de temperatura es igual a la unidad.

Para diferentes sustancias el coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda$  es distinto, y en general dicho coeficiente depende de la estructura, densidad, humedad, presión y temperatura de cada sustancia. Por todo esto, tomado en conjunto, se dificulta la determinación de un valor correcto para el coeficiente de conductibilidad térmica. Por eso, en caso de realizar cálculos de suma importancia, hay que determinar el valor del coeficiente de conductibilidad térmica mediante un estudio especial del material aplicado. Pero generalmente en los cálculos técnicos el valor del coeficiente de conductibilidad térmica se toma de las tablas de consulta. En este caso hay que preocuparse sólo de que las características físicas del material (su estructura, densidad, humedad, temperatura, presión) sean las que se especifican en la tabla. Puesto que la temperatura de diferentes partes del cuerpo es distinta, durante la propagación del calor, en primer término es necesario conocer la dependencia entre el coeficiente de conductibilidad térmica y la temperatura. Para una gran cantidad de materiales esta dependencia resulta casi lineal, por lo que se puede admitir que

$$\lambda = \lambda_0 [1 + b(t - t_0)], \quad (e)$$

donde  $\lambda_0$  es el coeficiente de conductibilidad térmica a una temperatura  $t_0$ ;  $b$ , constante determinada experimentalmente.

a) El coeficiente de conductibilidad térmica de los gases se halla dentro de los límites de 0,005 a 0,5 W/(m·°C). Con el aumento de la temperatura dicho coeficiente  $\lambda$  crece (fig. 1-3), sin depender en la práctica de la presión, excepto cuando las presiones son muy altas (más de  $2 \cdot 10^8$  Pa) o muy bajas (menos de  $2 \cdot 10^3$  Pa). La ley de la aditividad es inaplicable para el coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda$ ; por eso, para una mezcla de gases, en ausencia de los datos tabulados, se puede determinar el



coeficiente de conductibilidad térmica de modo fidedigno solo experimentalmente.

b) El coeficiente de conductibilidad térmica de los líquidos de goteo se halla dentro de los límites de 0,08 a 0,7 W/(m·°C). Con el aumento de la temperatura éste decrece para la mayoría de los líquidos (fig. 1-4). La única excepción la representan el agua y la glicerina.

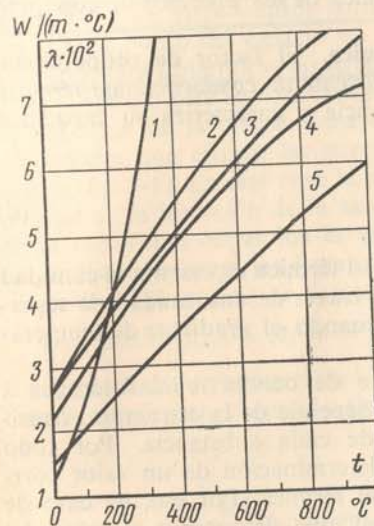


Fig. 1-3. Dependencia entre el coeficiente de conductibilidad térmica y la temperatura de algunos gases:

1 — vapor de agua; 2 — oxígeno; 3 — aire; 4 — nitrógeno; 5 — argón

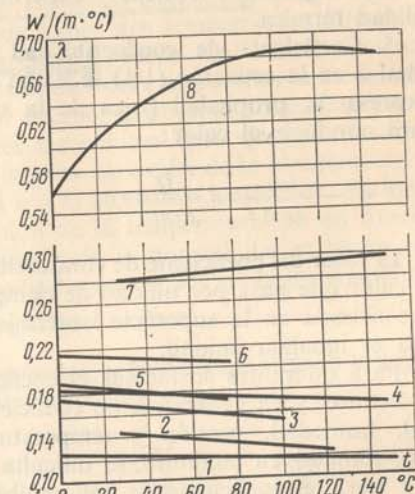


Fig. 1-4. Dependencia entre el coeficiente de conductibilidad térmica y la temperatura de algunos líquidos de goteo.

1 — aceite de vaselina; 2 — benzol; 3 — acetona; 4 — aceite de castor; 5 — alcohol etílico; 6 — alcohol metílico; 7 — glicerina; 8 — agua

c) El coeficiente de conductibilidad térmica de materiales de construcción y termoaislantes se encuentra dentro de los límites de 0,02 a 3,0 W/(m·°C). Con el aumento de la temperatura éste crece (fig. 1-5). Como regla, para los materiales de mayor densidad el coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda$  tiene valores más altos; este depende también de la estructura del material, de su porosidad y de su humedad. Para un material húmedo el coeficiente de conductibilidad térmica puede ser considerablemente más alto que para el mismo seco, y para el agua tomados por separado. Así, por ejemplo, para el ladrillo seco  $\lambda \approx 0,3$ , para el agua 0,6 y para el ladrillo húmedo, 0,9 W/(m·°C). Hay que prestarle una atención especial a este fenómeno tanto durante la determinación, como en el transcurso de los cálculos técnicos de la conductibilidad térmica. Por lo común los materiales que tienen el valor del coeficiente de conductibilidad térmica bajo [menor que 0,2 W/(m·°C)] se usan en el aislamiento térmico y se llaman termoaislantes.

d) El coeficiente de conductibilidad térmica de los metales se halla dentro de los límites de 20 a 400 W/(m·°C). El mejor conductor del calor es la plata ( $\lambda \approx 410$ ), luego van el cobre puro ( $\lambda \approx 395$ ), el oro ( $\lambda \approx 300$ ), el aluminio ( $\lambda \approx 210$ ), etc. (fig. 1-6). Para la mayoría de los metales con el aumento de la temperatura el coeficiente de conductibilidad térmica decrece. También disminuye cuando hay presencia de distintas impurezas. Así, por ejemplo, para el cobre puro  $\lambda = 395$ ; pero para el mismo cobre,

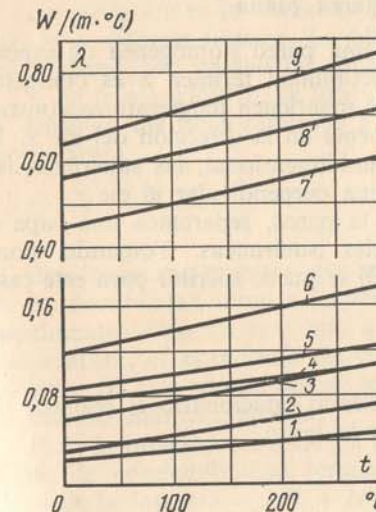


Fig. 1-5. Dependencia entre el coeficiente de conductibilidad térmica y la temperatura para algunos materiales refractarios y aislantes.

1 — aire; 2 — lana mineral,  $\rho = 160$  kg/m³; 3 — algodón mineral,  $\rho = 200$  kg/m³; 4 — newvel,  $\rho = 340$  kg/m³; 5 — sovelita,  $\rho = 440$  kg/m³; 6 — ladrillo de diatoma,  $\rho = 550$  kg/m³; 7 — ladrillo rojo,  $\rho = 1672$  kg/m³; 8 — ladrillo de hormigón de carbonilla,  $\rho = 1373$  kg/m³; 9 — ladrillo de chamota,  $\rho = 1840$  kg/m³.

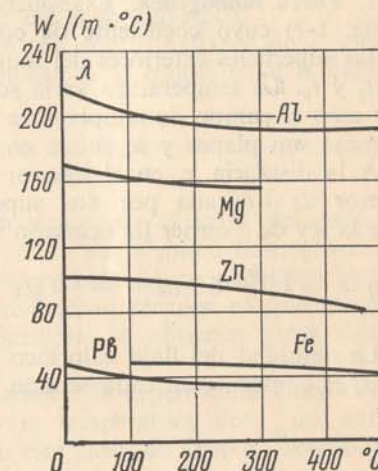


Fig. 1-6. Dependencia entre el coeficiente de conductibilidad térmica y la temperatura para algunos metales.

mas con trazas del arsénico  $\lambda = 142$ . Para el hierro con el 0,1% de carbono  $\lambda = 52$ , con el 1,0% de carbono  $\lambda = 40$  y con el 1,5% de carbono  $\lambda = 36$ . Para el acero al carbono templado el coeficiente de conductibilidad térmica es del 10 al 25% más bajo que para el acero suave. Sin embargo no se ha logrado todavía precisar cualquier regularidad común que determine la influencia de las impurezas. Es por eso que para los metales y sus aleaciones, solamente el experimento representa el único método que permite determinar un valor fidedigno para el coeficiente de conductibilidad térmica. Como la conductibilidad térmica de los metales, al igual que su electroconductibilidad, se determinan, en lo fundamental, por la transferencia de electrones libres, en los metales puros estos valores son proporcionales entre sí (ley de Wiedemann y Frantz). A continuación, ba-



sándonos sobre la ley de Fourier, se deducen las fórmulas para el cálculo de la conductibilidad térmica de diferentes cuerpos, con régimen estacionario. Si se habla rigurosamente, estas fórmulas son válidas sólo para los sólidos. Si se le aplican a los líquidos o a los gases, es necesario tomar en consideración la posible influencia de la convección y de la radiación térmica.

## 1-2. Conductibilidad térmica de la pared plana

1. **Pared homogénea.** Examinemos una pared homogénea de espesor  $\delta$  (fig. 1-7) cuyo coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda$  es constante. En las superficies exteriores del muro se mantienen temperaturas constantes  $t_1$  y  $t_2$ . La temperatura varía solamente en la dirección del eje  $x$ . En este caso el campo de temperatura es unidimensional, las superficies isotérmicas son planas y se sitúan en forma perpendicular al eje  $x$ .

A la distancia  $x$ , en el interior de la pared, separemos una capa de espesor  $dx$  limitada por dos superficies isotérmicas. Tomando como base la ley de Fourier [la ecuación (1-1)] se puede escribir para este caso:

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx} \quad \text{ó} \quad dt = -\frac{q}{\lambda} dx \quad (a)$$

La densidad del flujo calorífico  $q$ , siendo estacionario el régimen térmico, es constante en cada sección, por lo tanto

$$t = -\frac{q}{\lambda} x + C. \quad (b)$$

La constante de integración  $C$  se determina a partir de las condiciones de contorno. Cuando tenemos  $x = 0$ , entonces  $t = t_1 = C$ , pero para  $x = \delta$ ,  $t = t_2$ . Introduciendo estos valores en la ecuación (b), obtenemos:

$$t_2 = -\frac{q}{\lambda} \delta + t_1. \quad (c)$$

La ecuación (c) sirve para determinar el valor desconocido de la densidad del flujo calorífico  $q$ , de la siguiente forma:

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (t_1 - t_2) = \frac{\lambda}{\delta} \Delta t. \quad (1-2)$$

Fig. 1-7. Pared homogénea plano

Por consiguiente, la cantidad de calor transmitida a través de una unidad de superficie de la pared por unidad de tiempo, es directamente proporcional al coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda$  y la diferencia de temperaturas en las superficies exteriores  $\Delta t$ , e inversamente proporcional al grosor de la pared  $\delta$ .

La ecuación (1-2) es la fórmula empleada para calcular la conductibilidad térmica del muro plano. Esta ecuación liga cuatro magnitudes:  $q$ ,  $\lambda$ ,  $\delta$  y  $\Delta t$ . Si se conocen tres magnitudes cualesquiera, se puede hallar la cuarta:

$$\lambda = \frac{q\delta}{\Delta t}, \quad \Delta t = \frac{q\delta}{\lambda} \quad \text{y} \quad \delta = \frac{\lambda \Delta t}{q}. \quad (d)$$

La razón  $\lambda/\delta$  es la *conducción térmica* del muro y la magnitud inversa  $\delta/\lambda$ , la *resistencia térmica*. La última determina la caída de temperatura en la pared por unidad de densidad del flujo calorífico.

Si en la ecuación (b) se introducen los valores hallados de  $C$  y las de la densidad del flujo calorífico  $q$ , obtenemos la ecuación de la curva de temperatura

$$t_x = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\delta} x. \quad (1-3)$$

Esta ecuación muestra que siendo constante el valor del coeficiente de conductibilidad térmica, la temperatura de la pared homogénea varía linealmente. Pero en realidad, a consecuencia de su dependencia de la temperatura, el coeficiente de conductibilidad térmica es una magnitud variable. Si esta circunstancia se considera, se obtienen otras fórmulas de cálculo más complicadas.

Para la inmensa mayoría de materiales, la dependencia entre el coeficiente de conductibilidad térmica y la temperatura tiene un carácter lineal de la forma  $\lambda = \lambda_0(1 + bt)$ . En este caso, de acuerdo con la ley de Fourier, tenemos para una pared plana:

$$q = -\lambda(t) \frac{dt}{dx} = -\lambda_0(1 + bt) \frac{dt}{dx}. \quad (e)$$

Después de dividir las variables e integrar obtenemos:

$$qx = -\lambda_0 \left( t + \frac{bt^2}{2} \right) + C. \quad (f)$$

Al sustituir en la ecuación (b) los valores del contorno de las variables obtenemos, para  $x = 0$ ,

$$t = t_1 \quad \text{y} \quad 0 = -\lambda_0 \left( t_1 + \frac{bt_1^2}{2} \right) + C; \quad (g)$$

para  $x = \delta$ ,

$$t = t_2 \quad \text{y} \quad q\delta = -\lambda_0 \left( t_2 + \frac{bt_2^2}{2} \right) + C. \quad (h)$$

Si restamos la ecuación (g) de la ecuación (h), resulta:

$$q\delta = \lambda_0 \left[ (t_1 - t_2) + \frac{b}{2} (t_1^2 - t_2^2) \right], \quad (i)$$



de donde,

$$q = \frac{\lambda_0}{\delta} \left[ 1 + b \frac{t_1 + t_2}{2} \right] (t_1 - t_2). \quad (1-4)$$

La nueva fórmula de cálculo (1-4) es algo más complicada que la (1-2). Al deducir la fórmula (1-2) hemos aceptado el coeficiente de conductibilidad térmica como constante e igual a cierto valor medio  $\lambda_m$ . Igualando entre sí los segundos miembros de estas fórmulas tenemos:

$$\lambda_m = \lambda_0 \left[ 1 + b \frac{t_1 + t_2}{2} \right] = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}. \quad (k)$$

Por consiguiente, si  $\lambda_m$  se determina según la media aritmética a partir de los valores del contorno para las temperaturas de las paredes, resulta que las fórmulas (1-2) y (1-4) tienen valor igual.

Teniendo en cuenta la dependencia entre el coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda$  y la temperatura, la ecuación de la curva de temperatura de la pared se obtiene resolviendo la ecuación (f) con respecto a  $t$  y sustituyendo en esta el valor de  $C$  que figura en la ecuación (g), o sea:

$$t_x = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_1\right)^2 - \frac{2qx}{b\lambda_0}}. \quad (1-5)$$

Así, pues, en este caso la temperatura de la pared varía no en forma lineal, sino según una curva. Además, si el coeficiente  $b$  es positivo, la convexidad de la curva está dirigida hacia arriba y si  $b$  es negativo, hacia abajo (véase la fig. 1-10).

2. Pared multilaminar. Los muros formados por varias capas heterogéneas se llaman muros de capas múltiples. Precisamente tal es el caso, por ejemplo, de las paredes de las viviendas, en las que la capa principal de ladrillos lleva por el lado interior el estuco y por otro, el revoque exterior.

El revestimiento de hornos, calderas y otras instalaciones térmicas, por lo común, está formado también por varias capas.

Supongamos que un muro tiene tres capas heterogéneas que se adhieren estrechamente unas a otras (fig. 1-8). El espesor de la primera capa es  $\delta_1$ , el de la segunda,  $\delta_2$  y el de la tercera  $\delta_3$ .

Asumamos que los coeficientes de conductibilidad térmica de las capas son  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , y  $\lambda_3$ , respectivamente. Además, se conocen las temperaturas  $t_1$  y  $t_4$  de las superficies exteriores del muro. Se supone que el contacto térmico entre las superficies es ideal; designemos la temperatura en los lugares de contacto con  $t_2$  y  $t_3$ .

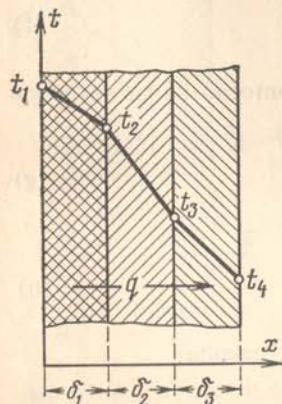


Fig. 1-8. Pared plana de capas múltiples.

Siendo el régimen estacionario la densidad del flujo calorífico es constante e igual para todas las capas. Por eso, de acuerdo con la ecuación (1-2), se puede escribir:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{\lambda_1}{\delta_1} (t_1 - t_2); \\ q &= \frac{\lambda_2}{\delta_2} (t_2 - t_3); \\ q &= \frac{\lambda_3}{\delta_3} (t_3 - t_4). \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

Partiendo de estas ecuaciones, es fácil determinar las diferencias de temperatura entre dos medios en cada capa

$$\left. \begin{aligned} t_1 - t_2 &= q \frac{\delta_1}{\lambda_1}; \\ t_2 - t_3 &= q \frac{\delta_2}{\lambda_2}; \\ t_3 - t_4 &= q \frac{\delta_3}{\lambda_3}. \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

La suma de las diferencias de temperatura entre dos medios de cada capa representa la diferencia total de temperaturas entre los dos. Sumando los primeros y segundos miembros del sistema de ecuaciones (m)

$$t_1 - t_4 = q \left( \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} \right). \quad (n)$$

A partir de la relación (n) determinamos el valor de la densidad del flujo calorífico:

$$q = \frac{t_1 - t_4}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} \quad (1-6)$$

Por analogía con lo expuesto anteriormente se puede escribir a continuación la fórmula para calcular  $q$  en un muro de  $n$  capas

$$q = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}} \quad (1-7)$$

Puesto que cada sumando del denominador en la fórmula (1-6) representa la resistencia térmica de la capa, de la ecuación (1-7) se deduce que la resistencia térmica total de la pared multilaminar es igual a la suma de las resistencias térmicas parciales.



Si el valor de la densidad del flujo calorífico, que figura en la ecuación (1-6), se sustituye en la ecuación (m), obtendremos los valores de las temperaturas desconocidas  $t_2$  y  $t_3$ :

$$t_2 = t_1 - q \frac{\delta_1}{\lambda_1}; \quad t_3 = t_2 - q \frac{\delta_2}{\lambda_2} = t_4 + q \frac{\delta_3}{\lambda_3}. \quad (1-8)$$

Dentro de cada capa la temperatura varía linealmente pero para la pared multilaminar la variación total se representa como una línea quebrada (fig. 1-8). Los valores de las temperaturas desconocidas  $t_2$  y  $t_3$  de la pared multilaminar también se pueden determinar en forma gráfica (fig. 1-9). Al construir el gráfico sobre el eje de abscisas se trazan en cualquier escala, pero siguiendo el mismo orden de la ubicación de las capas, los valores de sus resistencias térmicas  $\delta_1/\lambda_1$ ,  $\delta_2/\lambda_2$  y  $\delta_3/\lambda_3$ , luego se trazan sus perpendiculares. En las perpendiculares extremas también en escala arbitraria, pero igual a la anterior, se marcan los valores de las temperaturas exteriores  $t_1$  y  $t_4$ . Los puntos así obtenidos A y C se unen mediante una recta. Los puntos obtenidos por la intersección de esta recta con las perpendiculares intermedias dan los valores de temperaturas buscadas  $t_2$  y  $t_3$ . En dicha construcción el  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ . Entonces:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} \quad \text{y} \quad DE = \frac{BC}{AB} AD.$$

Sustituyendo los valores de los segmentos obtenemos:

$$DE = \frac{t_1 - t_4}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} \frac{\delta_1}{\lambda_1} = q \frac{\delta_1}{\lambda_1} = t_1 - t_2.$$

De modo análogo podemos demostrar que:

$$MN = q \left( \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} \right) = t_1 - t_3.$$

A veces para reducir los cálculos el muro laminar se considera como si estuviese formado por una sola capa (homogénea) de espesor  $\Delta$ . En este caso en el cálculo se introduce el llamado coeficiente equivalente de conductibilidad térmica  $\lambda_{eq}$  que se determina de la ecuación:

$$q = \frac{t_1 - t_4}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} = \frac{\lambda_{eq}}{\Delta} (t_1 - t_4). \quad (o)$$

Como resultado tenemos:

$$\lambda_{eq} = \frac{\Delta}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} = \frac{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} \quad (1-9)$$

De este modo, el coeficiente equivalente de conductibilidad térmica  $\lambda_{eq}$  depende solamente de los valores de las resistencias térmicas y del espesor de las capas separadas.

Al deducir la fórmula de cálculo para un muro de capas múltiples hemos supuesto que las capas se adhieren estrechamente unas a otras y debido al contacto térmico ideal, las superficies de contacto de las distintas capas tienen una misma temperatura. Sin embargo, si las superficies son ásperas, el contacto estrecho es imposible y entre las capas se presentan espacios de aire. Puesto que la conductibilidad térmica del aire es pequeña [ $\lambda \approx 0,025 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$ ], la presencia de los espacios de aire, aunque éstos sean muy finos, puede influir sensiblemente disminuyendo el coeficiente equivalente de conductibilidad térmica de la pared multilaminar. Una influencia análoga ejerce también la capa del óxido del metal. Por eso, durante el cálculo y, en particular durante la medición de la conductibilidad térmica de la pared multilaminar, hay que dedicarle especial atención al grado de estrechez del contacto entre las capas.

**Ejemplo 1-1.** Determinar la pérdida del calor a través de la pared de ladrillos cuya longitud es de 5 m, su altura de 3 m y su espesor de 250 mm, si las superficies del muro tienen temperaturas  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  y  $t_2 = -30^\circ\text{C}$ . El coeficiente de conductibilidad térmica del ladrillo es  $\lambda = 0,6 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$ .

Según la ecuación (1-2)

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (t_1 - t_2) = \frac{0,6}{0,25} [20 - (-30)] = 120 \text{ W/m}^2$$

y

$$Q = qF = 120 \cdot 15 = 1800 \text{ W}.$$

**Ejemplo 1-2.** Determinar el valor del coeficiente de conductibilidad térmica de material de una pared, si la diferencia de temperatura entre dos medios  $\Delta t = 30^\circ\text{C}$ , y para el espesor  $\delta = 30 \text{ mm}$  la densidad del flujo calorífico es  $q = 100 \text{ W/m}^2$ .

De acuerdo con la ecuación (1-2)

$$\lambda = \frac{q\delta}{\Delta t} = \frac{100 \cdot 0,03}{30} = 0,1 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}.$$

**Ejemplo 1-3.** Determinar la densidad del flujo calorífico a través de una pared plana de chamota, cuyo espesor es  $\delta = 0,5 \text{ m}$  y hallar la distribución real de la temperatura, si las superficies exteriores tienen temperaturas  $t_1 = 1000^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = 0^\circ\text{C}$ , respectivamente, y el coeficiente de conductibilidad térmica de la chamota es  $\lambda = 1,0 \cdot (1 + 0,001 t) \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$ .

Primero calculamos la temperatura media de la pared  $t_{med}$ :

$$t_{med} = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{1000 + 0}{2} = 500^\circ\text{C}.$$



Con ayuda de  $t_{med}$  determinamos el valor medio del coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda_{med}$ :

$$\lambda_{med} = 1,0 \cdot (1 + 0,001 t_{med}) = 1,0 \cdot (1 + 0,001 \cdot 500) = 1,5 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}.$$

Al sustituir el valor obtenido para  $\lambda_{med}$  en la ecuación (1-2) obtenemos:

$$q = \frac{\lambda_{med}}{\delta} \Delta t = \frac{1,5}{0,5} \cdot 1000 = 3000 \text{ W/m}^2.$$

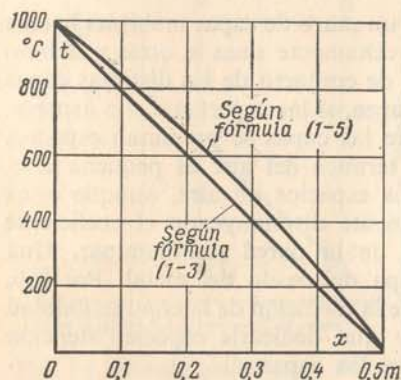


Fig. 1-10. Distribución de temperaturas en la pared, cuando los coeficientes de conductibilidad térmica son constante y variable.

**Ejemplo. 1-4** Determinar la densidad del flujo calorífico que pasa a través de la pared de una caldera si: su espesor es  $\delta_1 = 20$  mm, el coeficiente de conductibilidad térmica del material  $\lambda_1 = 50$  W/(m  $\cdot$   $^\circ$ C) y en su lado interior la pared está cubierta con una capa de incrustación, cuyo espesor es  $\delta_2 = 2$  mm, cuyo coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda_2 = 1,0$  W/(m  $\cdot$   $^\circ$ C). La temperatura de la superficie exterior  $t_1 = 250^\circ\text{C}$  y la de la interior,  $t_3 = 200^\circ\text{C}$ .

Según la ecuación (1-6)

$$q = \frac{t_1 - t_3}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2}} = \frac{250 - 200}{\frac{0,02}{50} + \frac{0,002}{1}} = \frac{50}{0,0024} = 20\,800 \text{ W/m}^2.$$

La temperatura de la superficie interior de la chapa de acero (bajo la incrustación) se determina con ayuda de la fórmula (1-8):

$$t_2 = t_1 - q \left( \frac{\delta_1}{\lambda_1} \right) = 250 - 20\,800 \cdot 0,0004 = 250 - 8,3 = 241,7^\circ\text{C}.$$

**Ejemplo 1-5.** Determinar el valor del coeficiente equivalente de conductibilidad térmica de un paquete de hierro en chapas para transformadores formado por  $n$  chapas, si el espesor de cada chapa es  $\delta_1 = 0,5$  mm y entre éstas está intercalado el papel de  $\delta_2 = 0,05$  mm de espesor. El coeficiente de conductibilidad térmica del hierro es  $\lambda_1 = 60$  y del papel  $\lambda_2 = 0,15$  W/(m  $\cdot$   $^\circ$ C).

De la fórmula (1-9) tenemos:

$$\lambda_{eq} = \frac{\sum_{i=1}^{2n} \delta_i}{\sum_{i=1}^{2n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}} = \frac{0,00055n}{\left( \frac{0,0005}{60} + \frac{0,00005}{0,15} \right) n} = 1,61 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}.$$

### 1-3. Conductibilidad térmica de una pared cilíndrica

**1. Pared homogénea.** Examinemos una pared cilíndrica homogénea (tubo) de longitud  $l$ , cuyo radio interior es  $r_1$  y el exterior  $r_2$ . En las superficies interior y exterior se mantienen las temperaturas constantes  $t_1$  y  $t_2$  de modo que  $t_1 > t_2$  (fig. 1-11) y la temperatura varía solamente en la dirección radial  $r$ . Por consiguiente, el campo de temperatura es aquí unidimensional y las superficies isotérmicas son cilíndricas y tienen eje común con el tubo. Coeficiente de la conductibilidad térmica de material  $\lambda$  es constante. Separemos en el interior de la pared una capa anular de radio  $r$  y espesor  $dr$ , limitada por superficies isotérmicas. La ley de Fourier dice que la cantidad de calor que pasa por unidad de tiempo a través de esta capa es igual a

$$Q = -\lambda F \frac{dt}{dr} = -2\lambda\pi r l \frac{dt}{dr}. \quad (a)$$

Al dividir las variables, tenemos:

$$dt = -\frac{Q}{2\pi\lambda l} \frac{dr}{r}. \quad (b)$$

Después de integrar la ecuación (b) hallamos

$$t = -\frac{Q}{2\pi\lambda l} \ln r + C. \quad (c)$$

Sustituyendo los valores de las variables en los límites de la pared (cuando  $r = r_1$ ,  $t = t_1$  y en el caso de  $r = r_2$ ,  $t = t_2$ ) y despejando la constante  $C$ , obtenemos la fórmula de cálculo siguiente:

$$Q = \frac{2\pi\lambda l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (t_1 - t_2) = \frac{2\pi\lambda l}{\ln \frac{d_2}{d_1}} (t_1 - t_2) = \frac{\pi l (t_1 - t_2)}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}}. \quad (1-10)$$

Por consiguiente, la cantidad de calor transmitida por unidad de tiempo a través de la pared del tubo es directamente proporcional al coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda$ , a la longitud  $l$  y a la diferencia de temperaturas entre dos medios  $\Delta t = t_1 - t_2$  e inversamente proporcional al logaritmo natural de la razón entre los diámetros exterior  $d_2$  e interior  $d_1$  del tubo. La fórmula (1-10) es válida también para el caso en que  $t_1 < t_2$ , es decir, cuando el flujo calorífico va de la superficie exterior a la interior.



La cantidad de calor que pasa a través de la pared del tubo se puede referir o bien a la unidad de longitud  $l$ , o bien a la unidad de la superficie interior  $F_1$  o bien de la exterior  $F_2$  del tubo. En este caso las fórmulas de cálculo toman las siguientes formas, respectivamente:

$$ql = \frac{Q}{l} = \frac{\pi \Delta t}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}}; \quad (1-11)$$

$$q_1 = \frac{Q}{F_1} = \frac{Q}{\pi d_1 l} = \frac{\Delta t}{\frac{1}{2\lambda} d_1 \ln \frac{d_2}{d_1}}; \quad (1-12)$$

$$q_2 = \frac{Q}{F_2} = \frac{Q}{\pi d_2 l} = \frac{\Delta t}{\frac{1}{2\lambda} d_2 \ln \frac{d_2}{d_1}}. \quad (1-13)$$

Puesto que las áreas de las superficies interior y exterior del tubo son diferentes, resultan también distintos los valores de las densidades de los flujos caloríficos  $q_1$  y  $q_2$ . La relación mutua entre ellos se determina mediante la correlación

$$q_1 = \pi d_1 q_1 = \pi d_2 q_2 \quad \text{ó} \quad d_1 q_1 = d_2 q_2.$$

La ecuación de la curva de temperatura en el interior del muro homogéneo cilíndrico se obtiene de la ecuación (c). Introduciendo en esta ecuación los valores de  $Q$  y  $C$  tenemos:

$$t_r = t_1 - \frac{Q}{2\pi\lambda_1} \ln \frac{d_x}{d_1} = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\ln \frac{d_2}{d_1}} \ln \frac{d_x}{d_1}. \quad (1-14)$$

Por consiguiente, en este caso, si el valor del coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda$  permanece constante, la temperatura varía según una curva logarítmica (fig. 1-11). Teniendo en cuenta que el coeficiente de conductibilidad térmica depende de la temperatura  $\lambda = \lambda_0(1 + bt)$ , la ecuación de la curva de temperatura adquiere la siguiente forma:

$$t_r = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_1\right)^2 - \frac{Q}{b\pi\lambda_0 l} \ln \frac{d_x}{d_1}}. \quad (1-15)$$

**2. Pared multilaminar.** Supongamos que una pared cilíndrica está formada por tres capas heterogéneas. Los diámetros y coeficientes de conductibilidad térmica de cada capa se conocen, sus designaciones aparecen en la fig. 1-12. Además, se conocen las temperaturas de las superficies interior y exterior de la pared multilaminar  $t_1$  y  $t_4$ . Pero no se conocen las temperaturas existentes en los lugares de contacto de las capas; estas temperaturas las designamos con  $t_2$  y  $t_3$ .

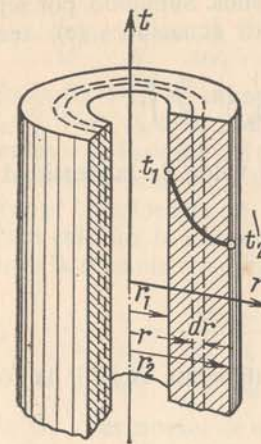


Fig. 1-11. Pared cilíndrica homogénea.

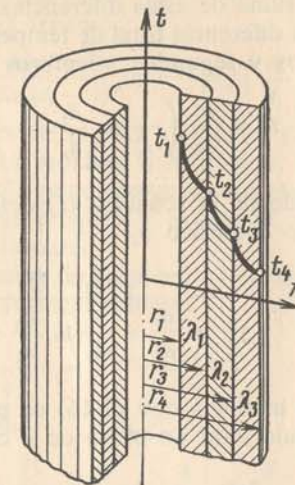


Fig. 1-12. Pared cilíndrica de capas múltiples.

Cuando el régimen térmico es estacionario, a través de todas las capas pasa una misma cantidad de calor. Por eso, tomando como base la ecuación (1-11), se puede plantear:

$$\left. \begin{aligned} q_l &= \frac{2\pi(t_1 - t_2)}{\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1}}; \\ q_l &= \frac{2\pi(t_2 - t_3)}{\frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2}}; \\ q_l &= \frac{2\pi(t_3 - t_4)}{\frac{1}{\lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3}}. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Partiendo de estas ecuaciones se determina la diferencia de temperatura entre dos medios en cada capa

$$\left. \begin{aligned} t_1 - t_2 &= \frac{q_l}{2\pi} \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1}; \\ t_2 - t_3 &= \frac{q_l}{2\pi} \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2}; \\ t_3 - t_4 &= \frac{q_l}{2\pi} \frac{1}{\lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3}. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$



La suma de estas diferencias de temperaturas entre dos medios representa la diferencia total de temperaturas entre ellos. Sumando por separado primeros y segundos miembros del sistema de ecuaciones (e), tenemos:

$$t_1 - t_4 = \frac{q_1}{2\pi} \left( \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3} \right); \quad (f)$$

partiendo de la ecuación (f) determinamos el valor de la densidad lineal del flujo calorífico  $q_1$ :

$$q_1 = \frac{2\pi(t_1 - t_4)}{\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3}}. \quad (1-16)$$

Por analogía con (1-16) se puede inmediatamente escribir la fórmula de cálculo para un muro de  $n$  capas:

$$q_1 = \frac{2\pi(t_1 - t_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}} = \frac{\pi(t_1 - t_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}. \quad (1-17)$$

Los valores desconocidos  $t_2$  y  $t_3$  de las temperaturas de las superficies de contacto entre las capas, se determinan del sistema de ecuaciones (e):

$$\left. \begin{aligned} t_2 &= t_1 - \frac{q_1}{2\pi} \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1}; \\ t_3 &= t_2 - \frac{q_1}{2\pi} \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} = t_4 + \frac{q_1}{2\pi} \frac{1}{\lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3}. \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

Según la ecuación (1-14) dentro de cada capa la temperatura varía según una curva logarítmica y para el muro de capas múltiples en total, la curva de temperatura se representa como una línea quebrada (fig. 1-12).

**3. Fórmulas de cálculo simplificadas.** La fórmula de cálculo logarítmica para el tubo (1-11) se puede simplificar de la forma siguiente:

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} \frac{E_m}{\varphi} (t_1 - t_2) = \frac{\lambda}{\delta} \frac{\pi d_m l}{\varphi} (t_1 - t_2)$$

ó

$$q_1 = \frac{\lambda}{\delta} \frac{\pi d_m}{\varphi} (t_1 - t_2). \quad (1-19)$$

Aquí  $d_m = (d_1 + d_2)/2$  es el diámetro medio y  $\delta = (d_2 - d_1)/2$  es el espesor de la pared del tubo. La influencia de la curvatura del muro se tiene en cuenta, en este caso, mediante el coeficiente de curvatura  $\varphi$ . Su

valor se determina por la relación de los diámetros  $d_2/d_1$ ; en realidad, al comparar las ecuaciones (1-11) y (1-19) tenemos:

$$\varphi = \frac{d_m}{2\delta} \ln \frac{d_2}{d_1} = \frac{d_2 + d_1}{2(d_2 - d_1)} \ln \frac{d_2}{d_1} = \frac{d_2/d_1 + 1}{2(d_2/d_1 - 1)} \ln \frac{d_2}{d_1} = f\left(\frac{d_2}{d_1}\right). \quad (1-20)$$

En la fig 1-13 se exponen los valores de  $\varphi$  para diferentes relaciones de  $d_2/d_1$ . Para  $d_2/d_1 < 2$  el valor de  $\varphi$  es próximo a la unidad. Por eso, si el espesor de la pared del tubo es pequeño en comparación con el diámetro o, lo que es lo mismo, si la razón  $d_2/d_1$  es próxima a la unidad, se puede despreciar la influencia de curvatura de la pared.

Para calcular la conductibilidad térmica de la pared multilaminar de un tubo la fórmula simplificada tiene la forma siguiente:

$$q_1 = \frac{\pi(t_1 - t_{n+1})}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} \frac{\varphi_1}{d_{m1}} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} \frac{\varphi_2}{d_{m2}} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} \frac{\varphi_n}{d_{mn}}} = \frac{\pi(t_1 - t_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} \frac{\varphi_i}{d_{mi}}}, \quad (1-21)$$

donde  $\delta_i$  es espesor de una capa de la pared;

$d_{mi}$  es el diámetro medio;

$\lambda_i$  es el coeficiente de conductibilidad térmica;

$\varphi_i$  es el coeficiente de curvatura de cada capa por separado.

**Ejemplo 1-6.** Una tubería de vapor de 160/170 mm de diámetro está cubierta con dos capas aislantes. El espesor de la primera capa es  $\delta_1 = 30$  mm y el de la segunda  $\delta_2 = 50$  mm. Los coeficientes de conductibilidad térmica del tubo y del aislamiento son, respectivamente:  $\lambda_1 = 50$ ,  $\lambda_2 = 0,15$  y  $\lambda_3 = 0,08$  W/(m · °C). La temperatura de la superficie interior de la tubería de vapor es  $t_1 = 300^\circ\text{C}$  y de la superficie exterior del aislamiento,  $t_4 = 50^\circ\text{C}$ . Determinar la densidad lineal del flujo calorífico y las temperaturas en las superficies de cada capa.

De acuerdo con las condiciones del problema tenemos:

$d_1 = 0,16$  m;  $d_2 = 0,17$  m;  $d_3 = 0,23$  m y  $d_4 = 0,33$  m,

$\ln \frac{d_2}{d_1} = 0,06$ ,  $\ln \frac{d_3}{d_2} = 0,302$  y  $\ln \frac{d_4}{d_3} = 0,362$ .

Aplicando la ecuación (1-16) obtenemos:

$$q_1 = \frac{2 \cdot 3,14(300 - 50)}{\frac{0,06}{50} + \frac{0,302}{0,15} + \frac{0,362}{0,08}} = \frac{1\,570}{6,54} = 240 \text{ W/m}.$$

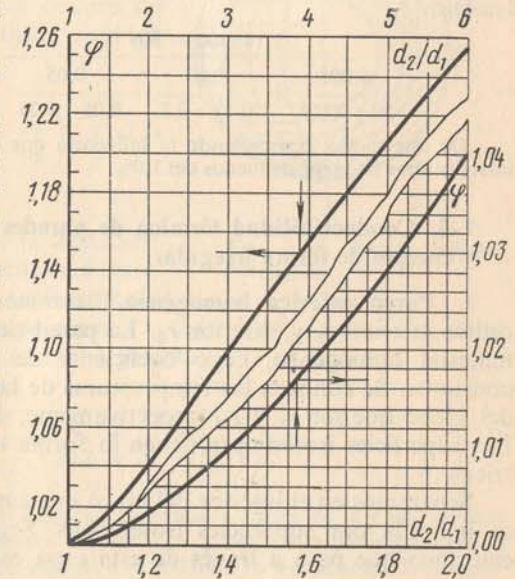


Fig. 1-13. Dependencia del coeficiente de curvatura  $\varphi = f(d_2/d_1)$ .



Luego, según la ecuación (1-18) podemos plantear:

$$t_2 = 300 - \frac{240}{2 \cdot 3,14} \cdot 0,0012 = 300 - 0,046 \approx 300^\circ\text{C}.$$

$$t_3 = 300 - \frac{240}{2 \cdot 3,14} \cdot 2,01 = 300 - 77 = 223^\circ\text{C}$$

ó

$$t_3 = 50 + \frac{240}{2 \cdot 3,14} \cdot 4,53 = 50 + 173 = 223^\circ\text{C}.$$

**Ejemplo 1-7.** Con ayuda de la fórmula simplificada resolver el ejemplo anterior. Puesto que para todas las tres capas  $d_{i+1}/d_i < 2$ , entonces se puede aceptar que  $\varphi = 1$ . En este caso según la condición tenemos:

$$d_{m1} = 165 \text{ mm}; d_{m2} = 200 \text{ mm}; d_{m3} = 280 \text{ mm}; \delta_1 = 5 \text{ mm};$$

$$\delta_2 = 30 \text{ mm}; \delta_3 = 50 \text{ mm}; \lambda_1 = 50 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)};$$

$$\lambda_2 = 0,15 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}; \lambda_3 = 0,08 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}.$$

Sustituyendo las variables por sus valores en la ecuación (1-21), nos resulta la siguiente igualdad:

$$q_l = \frac{3,14 (300 - 50)}{\frac{0,005}{50 \cdot 0,165} + \frac{0,03}{0,15 \cdot 0,2} + \frac{0,05}{0,08 \cdot 0,28}} = \frac{785}{0,0006 + 1 + 2,24} = 242 \text{ W/m}.$$

De este modo, despreciando la influencia que ocasiona la curvatura de la pared introducimos un error de menos del 1,0%.

#### 1-4. Conductibilidad térmica de paredes esféricas y cuerpos de forma irregular

**1. Pared esférica homogénea.** Examinemos un globo hueco con los radios interior  $r_1$  y exterior  $r_2$ . La pared del globo está formada por un material homogéneo, cuyo coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda$  es constante. Se conocen las temperaturas de las superficies interior y exterior del globo que son  $t_1$  y  $t_2$ , respectivamente, de modo que  $t_1 > t_2$  (fig. 1-14). Las superficies isotérmicas tienen la forma de superficies esféricas concéntricas.

Separemos en el interior del muro una capa esférica de radio  $r$  y espesor  $dr$  limitada por superficies isotérmicas. Según la ley de Fourier el flujo calorífico que pasa a través de esta capa es igual a:

$$Q = -\lambda F \frac{dt}{dr} = -4\pi r^2 \frac{dt}{dr}. \quad (a)$$

Despejando  $dt$  obtenemos

$$dt = -\frac{Q}{4\pi\lambda} \frac{dr}{r^2}. \quad (b)$$

Después de integrar esta ecuación tenemos:

$$t = \frac{Q}{4\pi\lambda} \frac{1}{r} + C. \quad (c)$$

Sustituyendo en la ecuación (c) los valores de las magnitudes variables en los límites de la pared (para  $r = r_1$ ,  $t = t_1$  y  $r = r_2$ ,  $t = t_2$ ) y despreciando la constante  $C$ , obtenemos la fórmula de cálculo siguiente:

$$Q = \frac{4\pi\lambda(t_1 - t_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} = \frac{2\pi\lambda\Delta t}{\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right)} = \pi\lambda\Delta t \frac{d_1 d_2}{\delta}, \quad (1-22)$$

donde  $\delta = (d_1 - d_2)/2$  es el espesor de la pared.

La ecuación de la curva de temperatura en la pared esférica homogénea se deduce de la ecuación (c). Después de sustituir aquí los valores de  $Q$  y  $C$ , resulta:

$$t_x = t_1 - \frac{t_1 - t_2}{\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right)} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_x}\right). \quad (1-23)$$

La representación gráfica de la ecuación (1-23) es una hipérbola. Si se tiene en cuenta la dependencia que hay entre el coeficiente de conductibilidad térmica y la temperatura  $\lambda = \lambda_0(1 + bt)$ , la ecuación de la curva de temperatura toma la forma siguiente:

$$t_r = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_1\right)^2 - \frac{Q}{\pi\lambda_0 b} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_x}\right)}. \quad (1-24)$$

**Ejemplo 1-8.** Determinar el flujo calorífico que pasa a través de la pared de una lejiadora esférica giratoria, cuyo diámetro interior  $d_1 = 1,2$  m y el espesor total de la pared de la lejiadora junto con su capa aislante  $\delta = 100$  mm. La temperatura de la superficie interior  $t_1 = 140^\circ\text{C}$  y la de la exterior  $t_2 = 40^\circ\text{C}$ , el coeficiente equivalente de conductibilidad térmica es  $\lambda = 0,1 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$ .

Según la condición del problema el diámetro exterior de la lejiadora  $d_2 = d_1 + 2\delta = 1,2 + 0,2 = 1,4$  m. El flujo calorífico se determina según la fórmula (1-22):

$$Q = \frac{\pi\lambda\Delta t d_1 d_2}{\delta} = \frac{3,14 \cdot 0,1 \cdot 100 \cdot 1,2 \cdot 1,4}{0,1} = 528 \text{ W}.$$

**2. Cuerpos de forma irregular.** Cada una de las fórmulas de cálculo (1-2), (1-10) y (1-22) es aplicable solamente para un tipo determinado de cuerpo geoméricamente regular: plano, cilíndrico o esférico. El cálculo

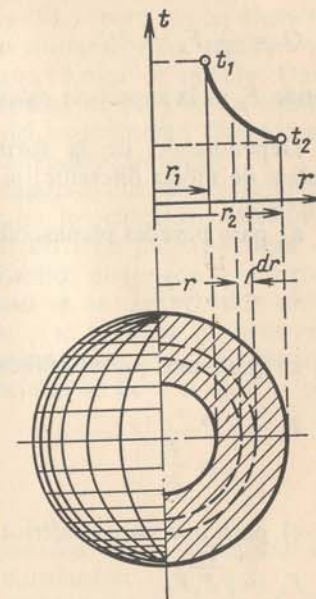


Fig. 1-14. Pared esférica homogénea.



de la conductibilidad térmica para todos estos cuerpos lo abarca una sola fórmula, que tiene la forma siguiente

$$Q = \frac{\lambda}{\delta} F_x = \Delta t, \quad (1-25)$$

donde  $F_x$  es la superficie calculada del cuerpo.

Dependiendo de la forma geométrica del cuerpo  $F_x$  el cálculo se realiza de modo diferente; si  $F_1$  es la superficie interior y  $F_2$ , la exterior, entonces:

a) para paredes planas, cilíndricas y esféricas, cuando  $F_2/F_1 < 2$ ,

$$F_x = \frac{F_1 + F_2}{2}; \quad (d)$$

b) para una pared cilíndrica, cuando  $F_2/F_1 > 2$ ,

$$F_x = \frac{F_2 - F_1}{\ln \frac{F_2}{F_1}}; \quad (e)$$

c) para una pared esférica, cuando  $F_2/F_1 > 2$ ,

$$F_x = \sqrt{F_1 F_2}. \quad (f)$$

La ventaja de la fórmula (1-25) consiste en el hecho de que con su ayuda se puede calcular, aunque de modo aproximado, la conductibilidad térmica para una serie de cuerpos de forma geoméricamente irregular, por ejemplo, la conductibilidad térmica de una pared plana en que  $F_1 \neq F_2$ , es decir, cuando la sección transversal, con respecto a la dirección del flujo calorífico, representa una magnitud variable tanto la conductibilidad térmica de cualesquiera de las secciones cilíndricas limitadas por curvas suaves, como la de todos los cuerpos cerrados en los que sus dimensiones lineales son próximas entre sí.

En la práctica suelen encontrarse casos en que se calculan complicadas combinaciones de diferentes cuerpos, por ejemplo, el piso de hormigón armado con vigas de hierro, las tuberías aisladas con bridas abiertas, los tambores de las calderas, etc. Por lo común el cálculo de la conductibilidad térmica de cuerpos tan complicados se lleva a cabo por separado, según los elementos que los integran, separándolos en planos imaginarios de dirección paralela o perpendicular a la dirección del flujo calorífico. Sin embargo, debido al hecho que las resistencias térmicas entre los elementos separados son distintas y los lugares de contacto de los elementos tienen formas diferentes, la distribución de las temperaturas algunas veces tienen un carácter muy complicado y el flujo calorífico puede tomar una dirección inesperada. Por eso el método indicado para el cálculo de tales objetos es solamente de carácter aproximado. Un cálculo más preciso para los objetos complicados se puede efectuar sólo en el caso de que se conozca la distribución de las isotermas y de las líneas del flujo, ésta se puede deter-

minar experimentalmente con la ayuda de los métodos de analogías hidráulica o eléctrica. En una serie de casos el cálculo suficientemente preciso se puede hacer por medio de la integración sucesiva de la ecuación diferencial de la conductibilidad térmica (véase § 2-2 y 7-1) para cada elemento utilizado en la construcción complicada. No obstante, para realizar esta clase de cálculos es preciso utilizar la moderna técnica de cálculo. Datos más seguros, acerca de la conductibilidad térmica de los objetos complicados, se pueden obtener solo con ayuda del experimento directo, que se lleva a cabo en el mismo objeto, o en su modelo reducido.

Al deducir las fórmulas de cálculo hemos supuesto que las temperaturas superficiales de los cuerpos son constantes. En los cálculos prácticos no siempre se logra a satisfacer esta condición. En tales casos se obra del modo siguiente. Si las temperaturas de los distintos puntos de la superficie no se diferencian sensiblemente, en este caso se asume el valor medio de las temperaturas como el de la superficie y se procede a realizar el cálculo, tomando esta temperatura media como constante. La obtención del valor medio de las temperaturas superficiales se lleva a cabo o bien según la fórmula

$$t_{\text{med}} = \frac{t_1 F_1 + t_2 F_2 + \dots + t_n F_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n}, \quad (g)$$

donde  $F_1, F_2, \dots, F_n$  son los sectores separados de la superficie que tienen temperaturas constantes;

$t_1, t_2, \dots, t_n$  son las temperaturas de estos sectores, o bien mediante la integración:

$$t_{\text{med}} = \frac{1}{F} \int_F t dF. \quad (h)$$

Si la temperatura superficial varía bruscamente, entonces dicho cálculo aproximado puede causar errores considerables. En este caso es preciso llevar a cabo un cálculo más complicado, ligado a la integración de la ecuación diferencial de la conductibilidad térmica, o realizar el experimento directo.

### 1-5. Conductibilidad térmica de los cuerpos con fuentes internas de calor

En la práctica se puede tropezar con casos en que el calor surge en el interior del cuerpo, debido a fuentes internas, por ejemplo, a causa de la circulación de corriente eléctrica, de reacciones químicas, de fisión nuclear, etc. Puesto que el desprendimiento volumétrico de calor puede ser tanto uniforme, como variable, para dichos procesos tiene una gran importancia el concepto de la *potencia de las fuentes internas de calor*. Esta magnitud designada con  $q_v$  determina la cantidad de calor que desprende una unidad de volumen del cuerpo por unidad de tiempo y se mide en  $W/m^3$ . En el caso de absorción del calor en el interior del cuerpo, por ejemplo,



durante la reacción endotérmica, la magnitud  $q_v$  es negativa; ésta caracteriza la intensidad del desprendimiento volumétrico de calor.

En presencia de las fuentes internas (desprendimiento) de calor, la principal tarea consiste en calcular el campo de temperatura en el interior del cuerpo.

**1. Conductibilidad térmica de una pared plana.** Examinemos una pared plana homogénea de espesor  $2\delta$  que tiene el coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda$  constante. En su interior esta pared tiene fuentes de calor  $q_v$  distribuidas uniformemente. El calor desprendido es transmitido por las superficies laterales de la pared al medio ambiente. El proceso de conductibilidad térmica se transcurrirá de modo simétrico por el área de la pared en su sección media, por eso precisamente aquí es conveniente situar el origen de las coordenadas y orientar el eje  $x$  en sentido perpendicular a las superficies laterales (fig. 1-15). De la ecuación del balance térmico se deduce que, en presencia de fuentes internas de calor la densidad del flujo calorífico en una pared plana crece linealmente con el aumento de  $x$  y es igual a:

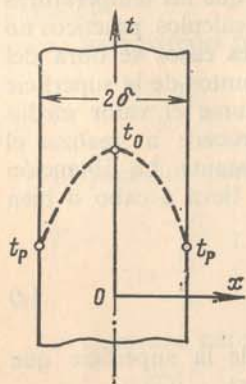


Fig. 1-15. Conductibilidad térmica de una pared plana con fuentes de calor internas.

$q_x = q_v x.$  (a)

Esta ecuación muestra que, cuando  $x = 0$ ,  $q = 0$  y cuando  $x = \delta$ ,  $q_\delta = q_v \delta$ , es decir, logra su valor máximo. Según la ley de Fourier

$$q_x = q_v x = -\lambda \frac{dt}{dx}. \quad (b)$$

Después de realizar la separación de las variables tenemos:

$$dt = -\frac{1}{\lambda} q_v x dx. \quad (c)$$

Integrando esta ecuación obtenemos:

$$t_x = -\frac{1}{2\lambda} q_v x^2 + C. \quad (d)$$

La constante de integración  $C$  se determina a partir de las condiciones de frontera. Cuando  $x = 0$ ,  $t = t_0 = C$  y la ecuación de variación de la temperatura toma la forma:

$$t_x = t_0 - q_v \frac{x^2}{2\lambda}. \quad (1-26)$$

Cuando  $x = \delta$ ,  $t = t_p$ ; en este caso de la ecuación (1-26) se deduce:

$$t_0 - t_p = q_v \frac{\delta^2}{2\lambda} = q_\delta \frac{\delta}{2\lambda}. \quad (1-27)$$

Aquí la diferencia  $t_0 - t_p$  significa la diferencia de temperaturas entre el núcleo y las superficies exteriores del muro plano y  $q_\delta = q_v \delta$  la densidad del flujo calorífico en estas superficies límites (cuando  $x = \delta$ ).

Si no se conoce la temperatura  $t_0$ , el valor de la constante  $C$  se puede expresar por medio de  $t_p$  y la ecuación de la curva de temperatura toma en este caso la forma siguiente:

$$t_x = t_p + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right]. \quad (1-28)$$

Las deducciones expuestas muestran que cuando existen fuentes internas de calor uniformemente repartidas, la distribución de temperaturas, en una pared plana, lleva el carácter parabólico. El valor máximo de la temperatura se halla en el plano medio ( $x = 0$ ).

Siendo grandes las diferencias de temperatura, es necesario tomar en consideración la dependencia que tiene el coeficiente de conductibilidad térmica con la temperatura,  $\lambda = \lambda_0(1 + bt)$ . En este caso la ecuación (c) toma la forma siguiente:

$$(1 + bt) dt = -\frac{1}{\lambda_0} q_v x dx. \quad (e)$$

Integrando la ecuación (e), obtenemos:

$$t + \frac{bt^2}{2} = -\frac{1}{\lambda_0} q_v \frac{x^2}{2} + C. \quad (f)$$

Cuando  $x = 0$ ,  $t = t_0$  y  $C = bt_0^2/2 + t_0$ . Al sustituir el valor de  $C$  en la ecuación (f) y despejando en esta última  $t$ , obtenemos la ecuación de la curva de temperatura que sigue [compárese con (1-26)]:

$$t_x = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left( t_0 + \frac{1}{b} \right)^2 - \frac{q_v x^2}{\lambda_0 b}}. \quad (1-29)$$

**2. Conductibilidad térmica de una barra redonda.** Examinemos una barra (cilíndrica) infinitamente larga de radio  $r_0$  (fig. 1-16), que tiene el coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda$  constante. En el interior de esta barra se hallan fuentes de calor  $q_v$  uniformemente distribuidas. El calor desprendido se transmite por la superficie exterior de la barra al medio ambiente. La ecuación del balance térmico para cualquier elemento cilíndrico en el interior del cuerpo de la barra de radio  $r$  y longitud  $l$  tiene la forma:

$$2\pi r l q_r = \pi r^2 l q_v.$$

De aquí se deduce que, si existen fuentes internas de calor dentro de la barra, la densidad del flujo calorífico  $q_r$  varía de modo proporcional al radio:

$$q_r = \frac{1}{2} r q_v. \quad (g)$$

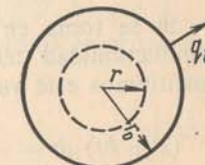


Fig. 1-16. Conductibilidad térmica de una barra redonda con fuentes de calor internas.



Esta ecuación muestra que, cuando  $r = 0$ ,  $q_r = 0$ , si  $r = r_0$ , entonces  $q_{r0} = \frac{1}{2} r_0 q_v$ , es decir, alcanza su valor máximo.

Según la ley de Fourier;

$$q_r = -\lambda \frac{dt}{dr} = \frac{1}{2} r q_v. \quad (h)$$

Después de realizar la separación de las variables, tenemos:

$$dt = -\frac{1}{2\lambda} q_v r dr. \quad (i)$$

Integrando la ecuación (i) obtenemos:

$$t_r = -\frac{1}{4\lambda} q_v r^2 + C. \quad (k)$$

La constante de integración  $C$  se determina a partir de las condiciones de frontera. Cuando  $r=0$ ,  $t=t_0=C$ , la ecuación de la curva de temperatura toma la siguiente forma:

$$t_r = t_0 - \frac{q_v r^2}{4\lambda}. \quad (1-30)$$

Cuando  $r = r_0$ ,  $t = t_p$ , la constante  $C = t_p + q_v r_0^2 / 4\lambda$  y la ecuación (k) toma la configuración siguiente:

$$t_r = t_p + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right]. \quad (1-31)$$

Después de sustraer la ecuación (1-31) de la ecuación (1-30), obtenemos la diferencia de temperatura de acuerdo con el radio de la barra:

$$t_0 - t_p = \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} = \frac{q_l}{4\pi\lambda}, \quad (1-32)$$

donde  $q_l = q_v \pi r_0^2$ .

Si se toma en consideración la dependencia entre el coeficiente de conductibilidad térmica y la temperatura  $\lambda = \lambda_0(1 + bt)$ , entonces, si sustituimos este valor en la ecuación (i) nos queda.

$$(1 + bt) dt = -\frac{1}{2\lambda_0} q_v r dr. \quad (l)$$

Integrándola obtenemos:

$$t + \frac{b}{2} t^2 = -\frac{1}{4\lambda_0} q_v r^2 + C. \quad (m)$$

El valor de la constante de integración  $C$  se determina a partir de las condiciones de frontera. Cuando  $r = 0$ ,  $t = t_0$  y  $C = t_0 + \frac{b}{2} t_0^2$ . Sustituyendo el valor de  $C$  en la ecuación (m) y resolviendo sucesivamente esta última respecto a  $t$ , obtenemos la siguiente ecuación para la curva de temperatura [compárese con (1-30)]:

$$t_r = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left( \frac{1}{b} + t_0 \right)^2 - \frac{q_v r^2}{2b\lambda_0}}. \quad (1-33)$$

**3. Conductibilidad térmica de una pared cilíndrica.** Examinemos una pared cilíndrica (tubo) infinitamente larga que tiene radio interior  $r_1$  y el exterior  $r_2$ . Su coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda$  es constante. En el interior de esta pared se hallan las fuentes de calor  $q_v$  uniformemente distribuidas. El calor desprendido en el seno del muro puede evacuarse al medio ambiente bien sólo a través de la superficie exterior, bien a través de la interior, o bien simultáneamente, a través de ambas superficies del tubo.

a) Cuando el calor se evacua a través de la superficie exterior del tubo. Separemos en la pared una capa anular de radios  $r_1$  y  $r$ , limitada por superficies isotérmicas (fig. 1-17). Según la ley de Fourier, a través de la superficie de la sección de radio  $r$  se transmite un determinado flujo calorífico por unidad de longitud:

$$q_l = -2\pi r \lambda \frac{dt}{dr}. \quad (n)$$

En el caso examinado  $q_l = q_v \pi (r^2 - r_1^2)$ . Sustituyendo este valor en la ecuación (n) y realizando la transformación obtenemos

$$dt = \frac{q_v}{2\lambda} \left( \frac{r_1^2}{r} - r \right) dr. \quad (o)$$

Después de integrar la ecuación (o) tenemos:

$$t = \frac{q_v}{2\lambda} \left( r_1^2 \ln r - \frac{r^2}{2} \right) + C. \quad (p)$$

La constante de integración se determina a partir de las condiciones de frontera. Cuando  $r = r_1$ ;  $t = t_1$  y  $C = t_1 - \frac{q_v}{2\lambda} \left( r_1^2 \ln r_1 - \frac{r_1^2}{2} \right)$ .

Al sustituir el valor de  $C$  en la ecuación (p) obtenemos la ecuación de la curva de temperatura

$$t_r = t_1 - \frac{q_v r_1^2}{4\lambda} \left[ \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 - 2 \ln \frac{r}{r_1} - 1 \right]. \quad (1-34)$$

Suponiendo que en esta ecuación  $r = r_2$ , la diferencia de temperaturas en la pared será:

$$t_1 - t_2 = \frac{q_v r_1^2}{4\lambda} \left[ \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 2 \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right], \quad (1-35)$$



o

$$t_1 - t_2 = \frac{q_0(r_2 - r_1)^2}{4\lambda} \left( 1 - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right) = \frac{q_v}{4\pi\lambda} \left( 1 - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right). \quad (1-35a)$$

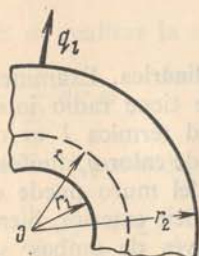


Fig. 1-17. Conductibilidad térmica de una pared cilíndrica con fuentes de calor internas y evacuación del calor a través de la superficie exterior.

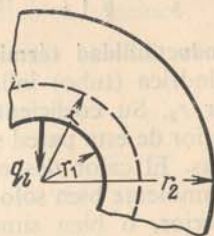


Fig. 1-18. Conductibilidad térmica de una pared cilíndrica con fuentes de calor internas y evacuación del calor a través de la superficie interior.

Si se tiene en cuenta la dependencia existente entre el coeficiente de conductibilidad térmica y la temperatura  $\lambda = \lambda_0(1 + bt)$ , por lo que la ecuación de la curva de temperatura toma el aspecto siguiente:

$$t_r = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_1\right)^2 - \frac{q_v r_1^2}{2b\lambda_0} \left[ \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 - 2 \ln \frac{r}{r_1} - 1 \right]}. \quad (1-36)$$

b) Cuando el calor se evacua a través de la superficie interior del tubo. El esquema del proceso se expone en la fig. 1-18. La deducción de las fórmulas de cálculo en este caso es completamente idéntica a la realizada en el caso anterior. Por eso las ecuaciones finales que se aplican para el campo de temperatura y la diferencia de temperaturas son iguales a las ecuaciones (1-34)–(1-36), a excepción de que en éstas los subíndices 1 y 2 se invierten (es decir, en 2 y 1). Estas ecuaciones reducidas a una forma cómoda, para los cálculos prácticos tienen el aspecto siguiente: la ecuación de la curva de temperatura,

$$t_r = t_2 - \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 2 \ln \frac{r_2}{r} + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - 1 \right]; \quad (1-37)$$

la de la diferencia de temperaturas en la pared,

$$t_2 - t_1 = \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 2 \ln \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - 1 \right]; \quad (1-38)$$

$$t_2 - t_1 = \frac{q_v(r_2^2 - r_1^2)}{4\lambda} \left( \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right) = \frac{q_l}{4\pi\lambda} \left( \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right). \quad (1-38a)$$

Si se tiene en cuenta la dependencia que hay entre el coeficiente de conductibilidad térmica y la temperatura  $\lambda = \lambda_0(1 + bt)$ , la ecuación de la curva de temperatura adquiere la forma siguiente:

$$t_r = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_2\right)^2 - \frac{q_v r_2^2}{2b\lambda_0} \left[ 2 \ln \frac{r_2}{r} + \left(\frac{r}{r_2}\right)^2 - 1 \right]}. \quad (1-39)$$

c) Cuando el calor se evacua a través de ambas superficies del tubo. En primer caso (a) la temperatura máxima la tiene la superficie interior del tubo, en el segundo (b) la exterior y en el tercero (c) dicha superficie (se halla en cierto lugar del interior de la pared; para esta superficie  $q = 0$ ). Supongamos que el radio de esta superficie es igual a  $r_0$  y su temperatura es  $t_0$  (fig. 1-19). Entonces, aprovechando las ecuaciones (1-35) y (1-38), tendremos:

$$t_0 - t_2 = \frac{q_v r_0^2}{4\lambda_2} \left[ \left(\frac{r_2}{r_0}\right)^2 - 2 \ln \frac{r_2}{r_0} - 1 \right] \quad (r)$$

y

$$t_0 - t_1 = \frac{q_v r_0^2}{4\lambda_1} \left[ 2 \ln \frac{r_0}{r_1} + \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 - 1 \right]. \quad (s)$$

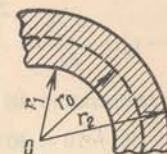


Fig. 1-19. Conductibilidad térmica de una pared cilíndrica con fuentes de calor internas y evacuación del calor a través de ambas superficies simultáneamente.

Después de restar los primeros y segundos miembros de estas ecuaciones obtenemos:

$$t_1 - t_2 = \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} \left[ \left(\frac{r_2}{r_0}\right)^2 - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 + 2 \ln \frac{r_0}{r_1} - 2 \ln \frac{r_0}{r_2} \right]. \quad (t)$$

Despejando la ecuación (t) respecto a  $r_0$  hallamos:

$$r_0^2 = \frac{4\lambda(t_1 - t_2)}{q_v \left[ 2 \ln \frac{r_1}{r_2} - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 + 1 \right]} = \frac{q_v(r_2^2 - r_1^2) - 4\lambda(t_1 - t_2)}{2q_v \ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (1-40)$$

Al sustituir los valores hallados de  $r_0$  en las ecuaciones (r) y (s) determinamos el valor de  $t_0$ . Si  $t_1 = t_2$ , la ecuación (1-40) se simplifica y toma la forma siguiente:

$$r_0^2 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (1-40a)$$

La última expresión significa que en este caso  $r_0$  no depende de las condiciones térmicas y se determina solamente por las dimensiones del tubo (por ejemplo, cuando  $r_2 = 2$  y  $r_1 = 1$ ,  $r_0 = 1,46$ ).



**Ejemplo 1-9.** A través de una barra de acero inoxidable de 10 mm de diámetro circula una corriente eléctrica que provoca un desprendimiento volumétrico de calor cuya potencia es  $q_v = 2,4 \cdot 10^7 \text{ W/m}^3$ . En la superficie de la barra se mantiene la temperatura  $t_p = 30^\circ\text{C}$ . Hallar la temperatura en el eje de la barra  $t_0$  y la densidad del flujo calorífico en la superficie exterior de la barra, sabiendo que el coeficiente de conductibilidad térmica del acero es  $\lambda = 15 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$ .

La diferencia de temperaturas  $t_0 - t_p$  se determina según la fórmula (1-32);

$$t_0 - t_p = \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} = \frac{2,4 \cdot 10^7 \left( \frac{10}{2} \cdot 10^{-3} \right)^2}{4 \cdot 15} = 10^\circ\text{C}.$$

La temperatura del eje de la barra es

$$t_0 = 30 + 10 = 40^\circ\text{C}.$$

La densidad del flujo calorífico en la superficie de la barra se determina mediante la correlación (g):

$$q = \frac{1}{2} r_0 q_v = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{2} \cdot 10^{-3} \cdot 2,4 \cdot 10^7 = 6 \cdot 10^4 \text{ W/m}^2.$$

## CAPITULO 2

### INTERCAMBIO DE CALOR POR CONVECCIÓN

#### 2-1. Nociones y definiciones generales

El proceso de la transferencia térmica de una superficie de un sólido a un líquido se llama *intercambio de calor por convección o emisión calorífica*. En este caso la transferencia de calor se realiza debido a la acción simultánea de la conductibilidad térmica y la convección.

El fenómeno de la conductibilidad térmica en los líquidos y gases, al igual que en los sólidos, lo determina de modo completo el coeficiente de conductibilidad térmica y el gradiente de temperatura (véase el cap. 1). El fenómeno de convección que es segunda forma elemental de propagación del calor tiene otro aspecto. En este caso el proceso de transferencia térmica está ligado inseparablemente con la transferencia de masa fluida. Por eso la convección es posible solamente en los líquidos y gases cuyas partículas son capaces de desplazarse con facilidad.

Según la naturaleza de su surgimiento se distinguen dos formas de movimiento: *libre y forzado*. Llámase libre al movimiento que se opera a consecuencia de la diferencia entre las densidades de las partículas calientes y frías del líquido en el campo de gravitación. El surgimiento y la intensidad del movimiento libre se determinan por las condiciones térmicas del proceso y dependen del género del líquido, la diferencia de temperaturas, la tensión del campo de gravitación y el volumen del espacio en que se desarrolla el proceso. El movimiento libre se llama también convección libre. Se conoce como *forzado* el movimiento que surge bajo la acción de un agente externo, por ejemplo, una bomba, un ventilador, etc. En caso general a la par con el movimiento forzado puede desarrollarse también el libre. La influencia relativa de este último es tanto mayor, cuanto más grande sea la diferencia de temperaturas en los puntos aislados del líquido y cuanto menor sea su propia velocidad.

La intensidad del intercambio de calor por convección la caracteriza el *coeficiente de traspaso del calor*  $\alpha$ , el cual se determina con ayuda de la fórmula de Newton—Richman.

$$Q = \alpha(t_p - t_{fl}) F. \quad (2-1)$$



Según esta ley el flujo calorífico  $Q$  es proporcional a la superficie de cambio de calor  $F$  y la diferencia de temperaturas existente entre la pared y el líquido ( $t_p - t_{fl}$ ).

El coeficiente de traspaso del calor se puede determinar como la cantidad de calor entregada en unidad de superficie por unidad de tiempo, cuando la diferencia de temperaturas entre la superficie y el líquido es igual a un grado:

$$\alpha = \frac{Q}{F(t_p - t_{fl})} \quad (2-2)$$

Generalmente el coeficiente de traspaso del calor puede variar a lo largo de la superficie de cambio de calor, por lo cual se diferencian el coeficiente medio de traspaso del calor por la superficie y el coeficiente *local* de traspaso del calor que corresponde a un elemento unitario de superficie.

Los procesos de emisión calorífica están inseparablemente vinculados a las condiciones del movimiento del líquido. Se conocen dos regímenes principales de corriente: *el laminar* y *el turbulento*. Cuando el régimen es laminar la corriente tiene carácter tranquilo, en forma de chorros. Cuando el régimen es turbulento el movimiento es caótico, vertiginoso (fig. 2-1). El cambio del régimen de movimiento tiene lugar cuando se alcanza cierta velocidad "crítica" que es diferente para cada caso concreto.

Como resultado de investigaciones especiales O. Reynolds estableció en el año 1883 que generalmente el régimen de corriente del líquido no se determina solamente por la velocidad, sino por un complejo adimensional especial  $wl/\nu$  el cual está compuesto de la velocidad de movimiento del líquido  $w$ , el coeficiente cinemático de viscosidad del líquido  $\nu$  y la dimensión característica  $l$  del canal o del cuerpo aerodinámico. En la actualidad dicho complejo lleva el nombre de *Número de Reynolds* y se designa con el símbolo  $Re = wl/\nu$ . La transición del régimen laminar al turbulento tiene lugar al alcanzar este número el valor crítico  $Re_{cr}$ . Por ejemplo, durante el movimiento de un líquido en los tubos  $Re_{cr} = w_{cr}d/\nu = 2 \cdot 10^3$ .

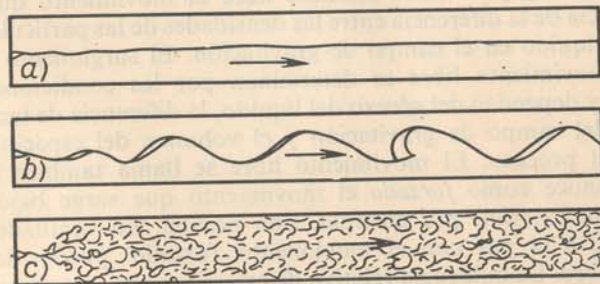


Fig. 2-1. Carácter del movimiento de un líquido en un tubo cuando los regímenes son: (a) laminar, (b) transitorio y (c) turbulento.

En el caso de movimiento turbulento todo el flujo está saturado de remolinos que se desplazan desordenadamente, surgen o desaparecen ininterrumpidamente. Todavía no está descifrado por completo el mecanismo

de formación de dichos remolinos. Una de las causas de su aparición es que la corriente laminar pierde su estabilidad lo que se acompaña con la formación de remolinos, que al difundirse en núcleo y al desarrollarse luego, ocupan todo el flujo. A la par con esto, como resultado de la viscosidad del líquido, estos torbellinos se atenúan paulatinamente y desaparecen. Debido a la interrumpida formación de torbellinos y su posterior difusión, tiene lugar un revuelto intenso del líquido que lleva el nombre de la mezcla turbulenta. Cuanto mayor es el número de torbellinos, tanto más intenso es el mezclado del líquido y tanto mayor es su turbulencia. Hay dos tipos de turbulencia: natural y artificial. La primera se establece de modo natural. Para el caso del movimiento estabilizado dentro de un tubo liso la turbulencia la determina completamente el valor del número  $Re$ . La segunda se provoca artificialmente introduciendo en el flujo cualesquiera obstáculos; por ejemplo, redes u otras fuentes de perturbación. Sin embargo, en presencia de cualquier tipo de turbulencia, cerca de la superficie, en una capa fina, a consecuencia del rozamiento viscoso la corriente del líquido se frena y la velocidad llega hasta cero. A dicha capa suelen llamarla *subcapa viscosa*.

Para los procesos de la emisión calorífica el régimen de movimiento que se opera en el fluido tiene gran importancia, puesto que este régimen determina el mecanismo de transferencia de calor. Cuando el régimen es laminar la transferencia térmica en la dirección de la normal a la pared se realiza en lo fundamental por medio de la conductibilidad térmica. Cuando el régimen es turbulento dicho método de transferencia se conserva solamente en la subcapa viscosa, mientras que en el seno del núcleo turbulento la transferencia se efectúa debido al mezclado intenso de las partículas del líquido. En estas condiciones la intensidad de la emisión calorífica de los gases y líquidos corrientes se determina, en lo fundamental, por la resistencia al paso del calor (resistencia térmica) de la subcapa adyacente a la pared. Esta resistencia, comparada con la resistencia térmica del núcleo, resulta ser determinante. Es fácil de cerciorarse de esto, si se observa la variación de la temperatura del líquido en la dirección de la normal a la pared (fig. 2-2). Como se ve, la máxima variación de la temperatura tiene lugar dentro de los límites de la capa fina situada cerca de la superficie. A través de esta capa el calor se transmite por medio de la conductibilidad térmica. Por consiguiente, tanto para el régimen laminar de la corriente, como para el turbulento situados cerca de la superficie es aplicable la ley de Fourier:

$$q = -\lambda \text{ grad } t, \quad (2-3)$$

donde  $\text{grad } t$  es el gradiente de temperatura en las capas del líquido adyacentes a la superficie del sólido.

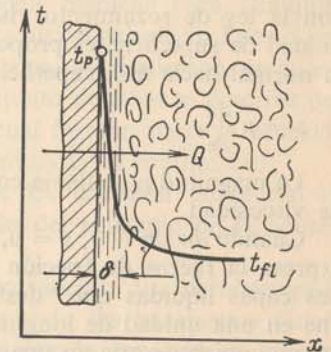


Fig. 2-2. Carácter de la variación de la temperatura en la capa límite al calentar el líquido.



El proceso de la emisión calorífica es complicado y el coeficiente de traspaso del calor representa una función complicada con diferentes magnitudes que caracterizan este proceso. En caso general el coeficiente de traspaso del calor es una función de la forma  $\Phi$ , de las dimensiones  $l_1, l_2, \dots$ , de la temperatura de la superficie de caldeo  $t_p$ , de la velocidad del líquido  $w$ , de su temperatura  $t_{fl}$  y de las propiedades físicas del líquido, tales como: el coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda$ , el calor específico  $c_p$ , la densidad  $\rho$ , el coeficiente de viscosidad  $\mu$  y otros factores:

$$\alpha = f(w, t_p, t_{fl}, \lambda, c_p, \rho, \mu, a, \Phi, l_1, l_2, \dots) \quad (2-4)$$

Actualmente como portadores de calor se usan las más diferentes sustancias: aire, gases, agua, aceite, benceno, alcoholes, metales en fusión y diferentes mezclas especiales. Dependiendo del género y las propiedades físicas de estas sustancias la emisión calorífica transcurre de modo diferente y peculiar. Las propiedades físicas de cada agente portador de calor tienen sus valores determinados y, como regla, están en función de la temperatura, y algunos de éstos, también de la presión.

El coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda$  caracteriza la capacidad de la sustancia para conducir el calor (véase cap. 1).

El calor específico determina la cantidad del calor necesaria para calentar 1 kg de la sustancia en un grado. El calor específico a presión constante se designa con  $c_p$  (capacidad calorífica a presión constante) y  $c_v$  a volumen constante (capacidad calorífica a volumen constante).

La densidad  $\rho$  de la sustancia representa la relación de su masa a su volumen.

El coeficiente de conductibilidad de la temperatura  $a = \lambda/c_p$  caracteriza la velocidad de variación de la temperatura en el cuerpo (véase cap. 7).

Viscosidad. Todos los líquidos reales tienen viscosidad; entre las partículas o las capas que se mueven a diferentes velocidades, siempre surge una fuerza de rozamiento interno que se opone al movimiento. De acuerdo con la ley de rozamiento viscoso de Newton esta fuerza tangencial por unidad de superficie, es proporcional a la variación de la velocidad según la normal hacia esta superficie:

$$s = \mu \frac{dw}{dn}.$$

La magnitud  $\mu$  se llama coeficiente de viscosidad o coeficiente dinámico de viscosidad.

Cuando  $dw/dn = 1$ ,  $s = \mu$ , por consiguiente, el coeficiente de viscosidad expresa la fuerza de fricción por unidad de superficie de contacto entre dos capas líquidas que "deslizan" una sobre otra, con la condición de que en una unidad de longitud de la normal a la superficie, la velocidad del movimiento varía en una unidad.

En las ecuaciones de hidrodinámica y termotransferencia con frecuencia se presenta la relación entre el coeficiente de viscosidad y la densidad que se denomina coeficiente cinemático de viscosidad:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

El coeficiente térmico de dilatación cúbica  $\beta$  caracteriza la variación relativa del volumen cuando la temperatura aumenta en un grado (a presión constante):

$$\beta = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_{p = \text{const}},$$

donde  $v$  es el volumen específico en  $\text{m}^3/\text{kg}$ .

Para los gases el coeficiente térmico de dilatación cúbica se determina por la fórmula siguiente:

$$\beta = \frac{1}{T}.$$

## 2-2. Ecuaciones diferenciales del intercambio térmico

Estudiar cualquier fenómeno significa establecer la dependencia entre las magnitudes que lo caracterizan. Para los fenómenos complicados, en que las magnitudes determinantes varían en el tiempo y el espacio, es muy difícil establecer la dependencia entre las variables. En tales casos, aplicando las leyes generales de la física, se limita a establecer una relación entre las variables (coordenadas, tiempo y propiedades físicas) que abarque un lapso breve y un volumen elemental del espacio. La dependencia así obtenida es la ecuación diferencial general del proceso examinado. Después de integrar esta ecuación obtenemos la dependencia analítica entre las magnitudes para todo el dominio de la integración en el intervalo de tiempo estudiado.

Dichas ecuaciones diferenciales se pueden plantear para cualquier proceso y, en particular, para el proceso de emisión calorífica. Puesto que la emisión calorífica no se determina solamente por los fenómenos térmicos, sino también por los hidrodinámicos, el conjunto de éstos se describe por un sistema de ecuaciones diferenciales del cual forman parte la ecuación de la conductibilidad térmica, la de movimiento y la de continuidad.

1. Ecuación de conductibilidad térmica. La ecuación diferencial de conductibilidad térmica se deduce, partiendo del principio de la conservación de la energía.

Separemos en el seno del flujo en movimiento un paralelepípedo elemental de aristas  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$  y, considerando los parámetros físicos  $\lambda$ ,  $c_p$  y  $\rho$  como constantes, escribamos para éste la ecuación de balance térmico. Si se desprecia la variación de presión, entonces, según el primer principio de la termodinámica, la cantidad de calor suministrada es igual al cambio de la entalpía del cuerpo.

Calculemos la afluencia de calor a través de las caras del elemento debidas a la conductibilidad térmica. De acuerdo con la ley de Fourier



[ecuación (1-1)] la cantidad de calor que pasa durante el tiempo  $d\tau$ , en la dirección del eje  $x$ , a través de la cara  $ABCD$  (fig. 2-3) es igual a:

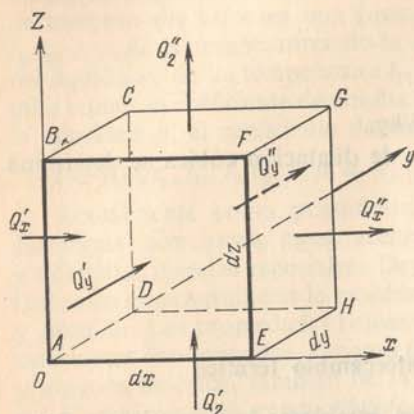


Fig. 2-3. Para deducir la ecuación diferencial de conductibilidad térmica.

$$Q'_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} dy dz d\tau,$$

y a través de la cara  $EFGH$  que tiene la temperatura  $t + \frac{\partial t}{\partial x} dx$  durante el mismo tiempo, es:

$$Q''_x = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( t + \frac{\partial t}{\partial x} dx \right) dy dz d\tau.$$

Restando de la primera igualdad la segunda, obtenemos

$$dQ_x = Q'_x - Q''_x = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx dy dz d\tau.$$

De modo análogo, en las direcciones de los ejes  $y$  y  $z$ , tenemos:

$$dQ_y = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dx dy dz d\tau,$$

$$dQ_z = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} dx dy dz d\tau.$$

La cantidad total de calor que contiene el elemento de volumen de lados  $dx dy dz$ , durante el tiempo  $d\tau$ , es igual a la suma de estas tres expresiones, es decir:

$$dQ = dQ_x + dQ_y + dQ_z = \lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) dx dy dz d\tau. \quad (a)$$

Como resultado de tal afluencia de calor la temperatura del elemento cambiará en la magnitud  $\frac{Dt}{d\tau} d\tau$  \* y la entalpia, en la magnitud

$$dQ = c_p \rho \frac{Dt}{d\tau} dx dy dz d\tau. \quad (b)$$

\* La variación total de cualquier magnitud  $\varphi$  (presión, velocidad, densidad o temperatura) de un elemento del líquido en movimiento es consecuencia de dos fenómenos que son: la variación con el transcurso del tiempo y la variación a consecuencia de desplazamiento del elemento desde un punto del espacio a otro.

Basándose en el concepto de derivada total puede escribirse:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{d\tau},$$

Los primeros miembros de las expresiones (a) y (b) son iguales y, por consiguiente, son iguales también sus segundos miembros. Igualándolos entre sí, obtenemos:

$$c_p \rho \frac{Dt}{d\tau} dx dy dz d\tau = \lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) dx dy dz d\tau.$$

Después de reducir en  $dx, dy, dz, d\tau$  y trasladar  $c_p \rho$  al segundo miembro, la ecuación queda de la siguiente forma:

$$\frac{Dt}{d\tau} = \frac{\lambda}{c_p \rho} \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) = a \nabla^2 t. \quad (2-5)$$

Esta es precisamente la ecuación diferencial de conductibilidad térmica de Fourier—Kirchhoff que establece la relación entre las variaciones temporales y espaciales de la temperatura en cualquier punto del medio en movimiento; aquí  $a$  es el coeficiente de conductibilidad de la temperatura y  $\nabla^2$  el operador de Laplace.

Puesto que

$$\frac{Dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z},$$

entonces, después de sustituir este valor en la ecuación (2-5), tenemos:

$$\frac{dt}{d\tau} + w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right). \quad (2-5 a)$$

En esta forma la ecuación se aplica, durante el estudio del proceso de conductibilidad térmica, a los líquidos en movimiento. Para ser empleada en los sólidos la ecuación (2-5 a) toma el aspecto:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right). \quad (2-6)$$

**2. Ecuación de movimiento.** En la ecuación (2-5 a) a la par con la temperatura  $t$  están presentes también tres variables:  $w_x, w_y$  y  $w_z$ . Esto demuestra que el campo de temperatura, en un líquido en movimiento, depende además de la distribución de las velocidades. A esta última la describe la ecuación diferencial de movimiento cuya deducción se basa en la segunda ley de Newton, que dice: la fuerza directamente proporcional al producto de la masa por la aceleración.

donde  $dx/d\tau, dy/d\tau$  y  $dz/d\tau$  tienen el sentido de las componentes de la velocidad  $w_x, w_y$  y  $w_z$ . Esta derivada si está relacionada con la materia o la sustancia en movimiento se denomina derivada substancial y se designa con un símbolo especial:

$$\frac{D\varphi}{d\tau} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + w_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

donde  $\partial \varphi / \partial \tau$  representa la variación local, y

$$w_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + w_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + w_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

es la variación convectiva de la magnitud  $\varphi$ .



Separaremos en el flujo de un líquido en movimiento un paralelepípedo elemental con aristas  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$ . Sobre el elemento separado actúan tres fuerzas: fuerza de gravedad, resultante de las fuerzas de presión y resultante de las fuerzas de fricción. Hallemos las proyecciones de estas fuerzas sobre el eje  $x$  (dirección y sentido de los ejes véase en la fig. 2-4).

a) La fuerza de gravedad se aplica en el centro de gravedad del elemento de volumen  $dv$ . Su proyección sobre el eje  $x$  es igual al producto de la proyección de aceleración de la caída libre  $g_x$  por la masa del elemento  $\rho dv$ , a saber:

$$g_x \rho dv = g_x \rho dx dy dz. \quad (c)$$

b) La resultante de las fuerzas de presión se determina haciendo las consideraciones siguientes. Si en la cara superior del elemento la presión del líquido es igual a  $p$ , en este caso sobre la superficie elemental  $dy dz$  actúa una fuerza  $p dy dz$ . En la cara inferior la presión del líquido es igual a  $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$  y sobre la misma actúa la fuerza  $-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\right) dy dz$ . El signo negativo indica aquí que la fuerza actúa en sentido opuesto al sentido del eje  $x$ . La resultante de estas fuerzas es igual a su suma algebraica:

$$p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz. \quad (d)$$

c) Durante el movimiento de los líquidos, en la realidad siempre surge la fuerza de fricción. El método más simple usado para encontrar la expresión

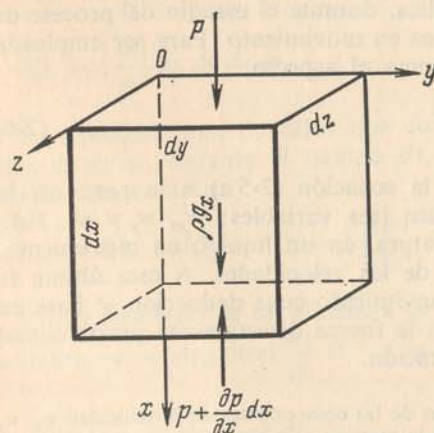


Fig. 2-4. Para deducir la ecuación diferencial del movimiento de un líquido.

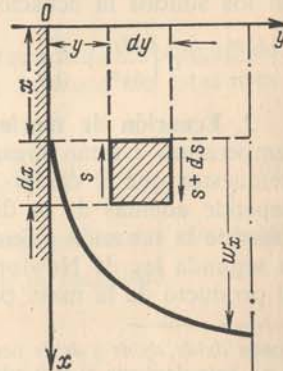


Fig. 2-5. Fuerza de frotamiento que actúa sobre un elemento del líquido en movimiento.

sión de esta fuerza, consiste en estudiar un flujo plano laminar en el que la velocidad  $w_x$  varía solamente en la dirección del eje  $y$ . En este caso la fuerza de fricción surge solamente en las caras laterales del elemento (fig. 2-5). Cerca de la cara izquierda la velocidad de movimiento de las

partículas es menor que en el mismo elemento, por lo que aquí, en la sección  $y$  la fuerza de fricción está orientada en sentido opuesto al del movimiento y es igual a  $-s dx dz$ . Cerca de la cara derecha del elemento, al contrario, la velocidad de movimiento de las partículas del líquido es mayor que en el mismo elemento, por eso aquí, en la sección  $y + dy$  la fuerza de fricción está orientada en la misma dirección y sentido del movimiento y es igual a  $\left(s + \frac{ds}{dy} dy\right) dx dz$ .

La resultante de estas fuerzas es igual a su suma algebraica:

$$\left(s + \frac{ds}{dy} dy\right) dx dz - s dx dz = \frac{ds}{dy} dx dy dz,$$

donde  $s$  es la fuerza tangencial de fricción por unidad de superficie; según la ley de Newton  $s = \mu \frac{dw_x}{dy}$ .

Sustituyendo este valor en la ecuación anterior y aceptando  $\mu = \text{const}$ , obtenemos:

$$\frac{ds}{dy} dv = \mu \frac{d^2 w_x}{dy^2} dv.$$

Sin embargo, esta expresión relativamente simple se tiene solamente para el movimiento unidimensional. Pero para el caso general en que  $w_x$  varía en todas las tres direcciones, la proyección de las resultantes de las fuerzas de fricción sobre el eje  $x$  se determina mediante la expresión siguiente:

$$\mu \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right) dv = \mu \nabla^2 w_x dv. \quad (e)$$

Sumando ahora las expresiones (c), (d) y (e) obtenemos la proyección de la resultante de todas las fuerzas aplicadas al volumen  $dv$  sobre el eje  $x$ :

$$\left[ \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right) \right] dv. \quad (f)$$

De acuerdo con el segundo principio de la mecánica esta resultante es igual al producto de la masa del elemento  $\rho dv$  por su aceleración  $Dw_x/dt$ :

$$\rho \frac{Dw_x}{dt} dv = \rho \left( \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) dv. \quad (g)$$

<sup>1)</sup> Véase la llamada en la pág. 46.



Igualando entre sí las ecuaciones (f) y (g) y reduciéndolas en  $dv$  podemos escribir:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + \rho \left( w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) &= \\ = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (2-7)$$

Todos los términos de esta ecuación, tienen las dimensiones de fuerza por unidad del volumen ( $N/m^3$ ).

Por el mismo procedimiento se pueden obtener también las ecuaciones para las proyecciones de las fuerzas resultantes en los ejes  $y$  y  $z$ , o sea:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial w_y}{\partial \tau} + \rho \left( w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) &= \\ = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2} \right); \end{aligned} \quad (2-7 a)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial w_z}{\partial \tau} + \rho \left( w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) &= \\ = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (2-7 b)$$

La ecuación (2-7) es precisamente la ecuación diferencial de movimiento del líquido viscoso incompresible, es decir, la ecuación de Navier—Stokes. Esta es válida tanto para el movimiento laminar, como para el turbulento.

**3. Ecuación de continuidad.** Puesto que en la ecuación de movimiento apareció una incógnita nueva, la presión  $p$ , el número de incógnitas en las ecuaciones (2-5) y (2-7) pasó a ser mayor que el número de ecuaciones, es decir, el sistema resultó ser no cerrado. Para obtener el sistema cerrado es necesario agregar a las ecuaciones presentes una ecuación más, la de continuidad, que se deduce con ayuda del principio de la conservación de la masa.

Separemos en el flujo de un líquido en movimiento un paralelepípedo elemental con lados  $dx$ ,  $dy$  y  $dz$  y calculemos la masa del líquido que fluye a través de éste en el tiempo  $d\tau$  (fig. 2-6).

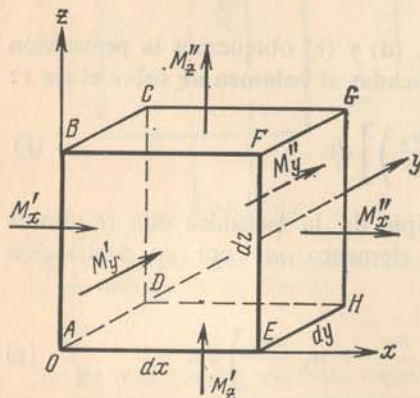


Fig. 2-6. Para deducir la ecuación diferencial de continuidad.

En la dirección del eje  $x$  a través de la cara  $ABCD$  entra la masa del líquido

$$M'_x = \rho w_x dy dz d\tau.$$

A través de la cara opuesta  $EFGH$  sale la masa  $M''_x$ :

$$M''_x = \left[ \rho w_x + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} dx \right] dy dz d\tau.$$

Al sustraerle a la segunda igualdad la primera obtenemos el exceso de masa del líquido que sale del volumen en la dirección del eje  $x$ , es decir:

$$dM_x = M''_x - M'_x = \frac{\partial}{\partial x} (\rho w_x) dx dy dz d\tau.$$

Del modo análogo para las direcciones según los ejes  $y$  y  $z$  tenemos:

$$dM_y = \frac{\partial}{\partial y} (\rho w_y) dx dy dz d\tau;$$

$$dM_z = \frac{\partial}{\partial z} (\rho w_z) dx dy dz d\tau.$$

El exceso total de masa del líquido que sale, es igual a la suma de estas expresiones:

$$dM = \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho w_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w_z) \right] dv d\tau.$$

Este exceso está condicionado por la disminución de la densidad del líquido en el volumen  $dv$ , y es igual a la variación de la masa del volumen dado en función del tiempo. Por consiguiente,

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} (\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho w_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w_z) \right] dv d\tau = - \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dv d\tau.$$

Después de reducir y trasladar todos los términos al primer miembro de esta igualdad, encontramos finalmente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0. \quad (2-8)$$

Esta es precisamente la ecuación diferencial de continuidad en su forma más general. Los líquidos incompresibles tienen densidad constante. En este caso la ecuación (2-8) se simplifica así:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0. \quad (2-9)$$

**4. Condiciones de contorno.** El sistema de ecuaciones diferenciales para los procesos del intercambio de calor por convección abarca una



cantidad sin número de procesos de emisión calorífica, descritos por dichas ecuaciones. Pero ocurre que al mismo tiempo cada uno de éstos se diferencia de los otros en ciertos aspectos particulares. Para limitar el problema, separar el proceso examinado de la cantidad sin número y para definirlo unívocamente, es decir, dar su descripción matemática completa, se hace necesario agregar al sistema de ecuaciones diferenciales la descripción matemática de todas sus características particulares, las que se llaman **condiciones de univocidad o de contorno**.

Las condiciones de univocidad constan de:

*condiciones geométricas* que caracterizan la forma y las dimensiones del sistema en que desarrolla el proceso;

*condiciones físicas* que caracterizan las propiedades físicas del medio y del cuerpo;

*condiciones de frontera* que caracterizan las particularidades con que se desarrolla el proceso en los extremos y contornos del cuerpo;

*condiciones de tiempo* que caracterizan las particularidades del proceso, en el tiempo.

Cuando para cualquier caso concreto, están dadas las condiciones de univocidad, entonces éstas, junto con el sistema de ecuaciones diferenciales, conforman la **descripción matemática** del proceso dado. De este modo después de resolver el sistema de ecuaciones puede obtenerse la descripción completa del proceso con todos sus detalles: campo de temperaturas, velocidades, presiones, etc.

Por lo común, para los cálculos técnicos el coeficiente de conductibilidad térmica es fundamental. Este coeficiente se determina mediante la ecuación (2-1). Si se conoce el campo de temperaturas, la determinación del coeficiente de conductibilidad térmica se basa sobre los postulados que a continuación se transcriben.

El flujo de calor que transmite el líquido a la pared pasa a la superficie a través de la capa del líquido adyacente a esta, en forma de la conductibilidad térmica, lo que permite determinar dicho flujo con ayuda de la ley de Fourier:

$$dQ = -\lambda \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n \rightarrow 0} dF.$$

De otra parte, para el mismo elemento de la superficie la ley de Newton—Richman dice:

$$dQ = \alpha(t_p - t_{f1}) dF.$$

Igualando los segundos miembros de estas dos ecuaciones obtenemos

$$\alpha = -\frac{\lambda}{t_p - t_{f1}} \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n \rightarrow 0}. \quad (2-10)$$

Esta ecuación se llama *ecuación de emisión calorífica* y permite determinar el coeficiente de traspaso del calor, si se conoce el campo de temperatura en el líquido.

Las condiciones de univocidad se pueden dar en forma de los valores numéricos, de dependencias funcionales o en la forma tabular. Si se examina, por ejemplo, el caso de la emisión calorífica durante el movimiento de un líquido en un tubo. En este caso se pueden dar las siguientes condiciones de univocidad:

1. El tubo es liso, de sección circular; su diámetro interior es  $d$  y su longitud,  $l$ .

2. El agente de transformación, o sea, el portador de calor para nuestro caso el agua que es líquido incompresible, cuyas propiedades físicas son:  $\lambda(t)$ ,  $c_p(t)$ ,  $\mu(t)$  y  $\rho(t)$ . Cuando se puede prescindir de la dependencia entre las propiedades físicas y la temperatura, las propiedades se dan simplemente como los valores numéricos de  $\lambda$ ,  $c_p$ ,  $\mu$  y  $\rho$ .

3. La temperatura del líquido en la entrada es igual a  $t_{f1}$  y en la superficie del tubo, a  $t_p$ . La velocidad en la entrada es igual a  $w$  y cerca de la misma pared  $w = 0$ . Si la temperatura y la velocidad en la entrada no son constantes, entonces es necesario plantear la ley de su distribución según la sección.

4. Para los procesos estacionarios las condiciones de univocidad en el tiempo se eliminan.

De este modo la descripción matemática del proceso de emisión calorífica consta de: 1) la ecuación de conductibilidad térmica; 2) la ecuación de movimiento; 3) la ecuación de continuidad; 4) la ecuación de emisión calorífica y 5) las condiciones de univocidad.

En la actualidad, sólo para un número limitado de problemas, los más simples, al introducir determinadas suposiciones con el fin de simplificarlos, se han logrado obtener soluciones analíticas para el sistema de ecuaciones diferenciales del intercambio de calor por convección. Dicha situación se explica por la gran complejidad de las ecuaciones o, en fin de cuentas, por el carácter complejo y multilateral del contenido de los mismos procesos.

A causa de las limitadas posibilidades para llevar a cabo la resolución analítica de las ecuaciones diferenciales aducidas anteriormente, el experimento adquiere gran importancia en el estudio de los procesos de emisión calorífica. El estudio experimental de complicados procesos que dependen de un gran número de factores es un trabajo difícil. Además, al organizar el experimento, aparte del estudio detallado del proceso en mención, siempre se suele plantear también la tarea de obtener los datos útiles para calcular otros procesos afines al estudiado. Uno de los métodos para resolver este problema es la teoría de la semejanza, que por su esencia es la teoría del experimento (19, 36).

### 2-3. Fundamentos de la teoría de la semejanza

La teoría de la semejanza es la ciencia que estudia la similitud de los fenómenos. En la geometría, de donde se tomó este término por primera vez nos encontramos con el concepto de la semejanza. Como se conoce las figuras semejantes geométricamente, por ejemplo, los triángulos expues-



tos en la fig. 2-7, poseen la propiedad de que sus ángulos respectivos son iguales y los lados homólogos, proporcionales, es decir,

$$l'_1/l'_1 = l'_2/l'_2 = l'_3/l'_3 = c_1, \quad (2-11)$$

donde  $l'_1, l'_2$  y  $l'_3$  son las dimensiones lineales de los lados de una figura;  
 $l''_1, l''_2$  y  $l''_3$  son las dimensiones lineales homólogas de otra figura semejante a la primera;  
 $c_1$  es el factor de proporcionalidad o la constante de la similitud geométrica.

La condición (2-11) es la enunciación matemática de la semejanza geométrica. Esta condición se verifica para cualesquier segmentos de las

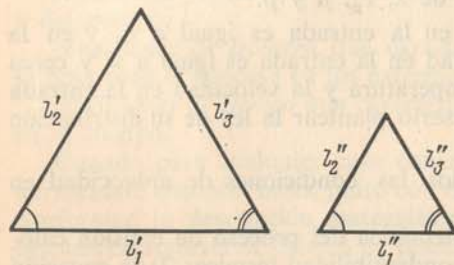


Fig. 2-7. Triángulos geoméricamente semejantes.

figuras semejantes, por ejemplo, alturas, medianas, etc. Si además las figuras semejantes se orientan de idéntico modo, entonces debido a la igualdad entre sus ángulos correspondientes sus lados homólogos serán paralelos. Cuando se conocen las condiciones de semejanza se pueden resolver una serie de problemas prácticos. Aprovechando las propiedades de semejanza de los triángulos, por ejemplo, se puede

determinar la altura de un árbol o el ancho de un río sin tener que realizar mediciones de altura o anchura.

El concepto de semejanza se puede extender a cualquier fenómeno físico. Se puede hablar, por ejemplo, acerca de la semejanza cinemática del cuadro que representa el movimiento de dos flujos de un líquido, — semejanza cinemática de la semejanza de las fuerzas que provocan movimientos similares, — semejanza dinámica; de la semejanza del cuadro de distribución de temperaturas y flujos caloríficos, la semejanza calorífica, etc.

En caso general el concepto de semejanza entre los fenómenos físicos se reduce a los postulados siguientes:

a) El concepto de semejanza en cuanto a los fenómenos físicos es aplicable solamente a fenómenos de un mismo género con igual calidad, y que se describen analíticamente con ecuaciones que tienen tanto iguales la forma, como el contenido.

Si la descripción matemática de dos fenómenos cualesquiera tiene forma igual, pero su contenido físico es diferente, dichos fenómenos se denominan *análogos*. Tal analogía se da, por ejemplo, entre los procesos de la conductibilidad térmica, electroconductibilidad y difusión.

b) La premisa obligatoria para la semejanza entre los fenómenos físicos ha de ser su *semejanza geométrica*. Para que exista esta última es necesario que los fenómenos en mención siempre se desarrollan en sistemas geoméricamente semejantes.

c) Al llevar a cabo el análisis de los fenómenos semejantes pueden compararse únicamente las magnitudes homogéneas sólo en los puntos homólogos del espacio y en los momentos homólogos del tiempo.

Llámanse *homogéneas* a las magnitudes que tienen un mismo sentido físico e igual dimensión. Se denominan *homólogos* a los puntos de los sistemas geoméricamente semejantes cuyas coordenadas satisfacen la condición (2-11):

$$x'' = c_1 x', \quad y'' = c_1 y', \quad z'' = c_1 z'.$$

Dos intervalos de tiempo  $\tau'$  y  $\tau''$  se conocen como *homólogos* si tienen el origen común de cálculo y están ligados con una transformación por similitud, es decir,  $\tau'' = c_1 \tau'$ .

d) Finalmente la semejanza de dos fenómenos físicos significa que todas las magnitudes que caracterizan los fenómenos examinados son similares. Esto significa que en los puntos homólogos del espacio y en los instantes homólogos cualquier magnitud  $\phi'$  del primer fenómeno es proporcional a la magnitud homogénea  $\phi''$  del segundo fenómeno, es decir:

$$\phi'' = c_\phi \phi'. \quad (2-12)$$

El factor de proporcionalidad  $c_\phi$  se denomina *constante de semejanza*; el factor  $c_\phi$  no depende de las coordenadas, ni del tiempo. Simultáneamente cada magnitud física  $\phi$  tiene su constante de semejanza  $c_\phi$  que se diferencia numéricamente de las otras. Para conocer a qué magnitud se refiere la constante en mención, a cada una de éstas se le agrega el índice correspondiente.

Así pues, la esencia de la semejanza entre dos fenómenos significa que hay una similitud entre los campos de las magnitudes físicas homónimas que definen estos fenómenos. En el proceso del intercambio de calor por convección la temperatura, la velocidad, la presión, y frecuentemente los parámetros físicos del medio (coeficiente de viscosidad, conductibilidad térmica, densidad y otros) pueden tener en diferentes puntos valores distintos. Sin embargo la similitud entre dos procesos semejantes se da cuando todas estas magnitudes en todo el volumen de los sistemas examinados son semejantes, es decir, existe similitud de campos entre estas magnitudes. Para cada una de estas magnitudes: velocidad  $w$ , diferencia de temperaturas entre dos medios  $\Delta t$ , etc., existe su propia constante de semejanza  $c_w, c_{\Delta t}$ , etc. La enumeración completa de todas las magnitudes que caracterizan los fenómenos examinados se puede establecer solamente a partir de la descripción matemática de los fenómenos.

Las constantes de semejanza en los mismos fenómenos para diferentes magnitudes no se pueden designar o elegir arbitrariamente. Entre estas constantes siempre existen *correlaciones estrictamente determinadas* que se deducen a partir del análisis de la descripción matemática de los procesos. Estas correlaciones tienen importancia central en la teoría de la semejanza, puesto que establecen la existencia de magnitudes especiales denominadas *números de semejanza (invariantes)*; los que conservan para todos los fenómenos semejantes el mismo valor numérico. Los números de semejanza



son complejos adimensionales formados por las magnitudes que caracterizan el fenómeno. Su propiedad característica es dimensión cero. Es normal dar a los números de semejanza los nombres de los científicos que se han destacado en el trabajo científico de la esfera correspondiente y designarlos con las dos letras iniciales de su apellido, por ejemplo: Re (Reynolds), Eu (Euler), Nu (Nusselt) o simplemente con las letras:  $K$ ,  $N$ , etc.

Los números de semejanza pueden obtenerse para cualquier proceso físico. Para esto es preciso disponer de su descripción matemática. Pues ésta es la premisa indispensable de la teoría de la semejanza. Sin esto toda esta teoría se reduciría a la simple definición de similitud.

Los principales postulados de la teoría de la semejanza se pueden enunciar en forma de tres teoremas. *El primer teorema* establece la relación entre las constantes de semejanza y permite hallar los números de semejanza. En su forma general este teorema se enuncia así: *los procesos semejantes tienen iguales números de semejanza*.

*El segundo teorema* de semejanza define que la dependencia existente entre las variables que caracterizan cualquier proceso, puede representarse como la dependencia entre los números de semejanza  $K_1, K_2, \dots, K_n$ :

$$f(K_1, K_2, \dots, K_n) = 0. \quad (2-13)$$

La dependencia del tipo (2-13) se llama *ecuación de semejanza*. Puesto que para todos los procesos semejantes los números de semejanza conservan un mismo valor, las ecuaciones de semejanza son también iguales para ellos. Por consiguiente, al representar los resultados de cualquier experimento en forma de números de semejanza obtenemos la dependencia general, que es válida para todos los procesos semejantes.

Hasta este momento hemos considerado las propiedades de los fenómenos semejantes partiendo de la existencia de estos. Sin embargo es posible plantear el problema inverso: ¿qué condiciones son necesarias y suficientes para que los procesos sean semejantes? La respuesta a esta pregunta la da *el tercer teorema de semejanza* que se enuncia así: *Son semejantes aquellos procesos cuyas condiciones de univocidad son idénticas, y cuyos números de semejanza, compuestos por las magnitudes que forman parte de las condiciones de univocidad, tienen idéntico valor numérico<sup>1)</sup>*.

Según muestra este teorema resulta necesario separar de modo especial los números de semejanza compuestos por las magnitudes que forman parte de las condiciones de univocidad. Dichos números se llaman *determinantes* o *criterios de semejanza*. La invariancia (identidad) de dichos números determinantes es la condición que se debe cumplir para obtener la semejanza. Pero la identidad de los números de semejanza que contienen también otras magnitudes no presentes en las condiciones de univocidad, se obtiene por sí misma como resultado de la similitud establecida; estos números de semejanza se llaman *determinados*.

<sup>1)</sup> En la literatura la identidad de los valores numéricos se designa mediante la palabra ídem.

Pues, la teoría de la semejanza permite encontrar las ecuaciones de semejanza válidas para todos los procesos iguales sin integrar las ecuaciones diferenciales, a partir de éstas y aplicando los datos experimentales hallar los números de semejanza.

Sin embargo, tales dependencias generales están limitadas por las condiciones de semejanza, por lo que de dichas dependencias no pueden hacerse deducciones que salgan fuera de los límites de estas limitaciones. Es necesario recordar siempre que la teoría de la semejanza no da una solución general: esta teoría permite solamente generalizar los datos experimentales en la esfera limitada por las condiciones de semejanza. Por eso es correcto extender los resultados de un experimento separado sólo a fenómenos y procesos semejantes.

Explicemos los postulados generales de la teoría de la semejanza con un ejemplo particular tomado de la hidromecánica. Para esto examinemos uno de los casos más simples del movimiento del líquido o del gas forzado isotérmico estacionario, dentro de un canal plano. El esquema de este movimiento se muestra en la fig. 2-8. En la entrada del canal la velocidad del movimiento es constante. A medida de que el fluido avanza a lo largo del canal, debido a las fuerzas de rozamiento viscoso, las partículas del líquido próximas a la superficie se demoran. En el flujo surge entonces un campo variable de velocidades.

Efectuemos el análisis de similitud de tales corrientes. Para esto examinemos dos canales semejantes cuyas dimensiones son  $l', h'$  y  $l'', h''$ , respectivamente. La similitud geométrica de los sistemas está caracterizada por la constante de semejanza geométrica:

$$l'/l'' = h'/h'' = c_l. \quad (2-14)$$

Los puntos homólogos de estos sistemas los determinan las coordenadas  $x', y'$  y  $x'', y''$ , enlazados entre sí por la constante de semejanza geométrica:

$$x'/x'' = y'/y'' = c_l. \quad (2-15)$$

Para las corrientes estacionarias el sistema de ecuaciones diferenciales puede escribirse en la forma siguiente<sup>1)</sup>:

$$\rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right); \quad (2-16)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \quad (2-17)$$

La ecuación (2-16) está deducida de la ecuación general de movimiento de Navier - Stokes (citada en el § 2-2). Además subrayemos lo siguiente: en la ecuación total de Navier - Stokes figura la magnitud  $g_x \rho$  que es la fuerza de gra-

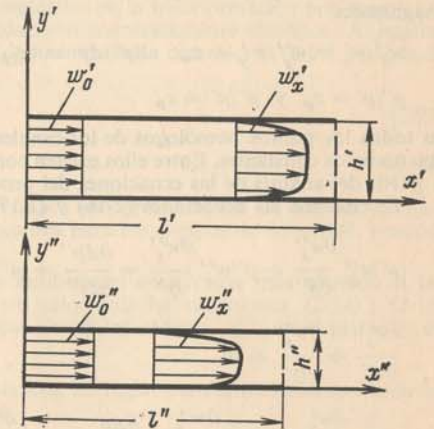


Fig. 2-8. Para analizar la similitud que tiene el movimiento isotérmico forzado del líquido en los canales planos.

<sup>1)</sup> Para simplificar, aquí no se traza la proyección de la ecuación de movimiento sobre el eje  $y$ . Pues, al realizar el análisis de la semejanza esto no limita la generalización del proceso.



vedad del volumen unitario del medio. Sin embargo, la fuerza de gravedad puede influir en la forma y el carácter del flujo solamente en dos casos.

En primer lugar, cuando existe irregularidad espacial en la distribución de la densidad del medio. En este caso en el sistema aparecen las corrientes de convección libre.

En segundo lugar (si la densidad es constante), la fuerza de gravedad puede influir en el cuadro del flujo del líquido cuando hay superficies libres en el sistema, es decir, de hecho en los sistemas bifásicos.

Ambos casos serán examinados adelante.

En un flujo forzado, donde la densidad es constante y sin superficies libres, la masa de cada elemento del medio se equilibra con el incremento hidrostático de presión  $p_{st}$ , es decir, con la parte de presión variable en el espacio que existiría en el sistema, si el líquido permaneciera en estado de reposo:

$$g_x p = \partial p_{st} / \partial x; \quad g_y p = \partial p_{st} / \partial y.$$

Si bajo la presión  $p$  se entiende la diferencia entre la presión total  $P$  y el incremento hidrostático de presión  $p_{st}$ , es decir,  $p = P - p_{st}$ , entonces en todos los casos análogos la fuerza de gravedad desaparece por completo de la ecuación de movimiento. Precisamente esta magnitud figura en la ecuación (2-16).

El sistema de ecuaciones (2-16) y (2-17) permite determinar las magnitudes que tienen importancia para los procesos. Puesto que la presión  $p$  se encuentra en la ecuación sólo bajo el signo de la derivada, esto significa que para el proceso tiene importancia únicamente la diferencia de presiones y no su valor absoluto. Como la diferencia es más cómodo emplear en el examen de los flujos la diferencia que hay entre las presiones en la entrada  $p_0$  y su valor corriente  $p$ :

$$\Delta p = p_0 - p.$$

Este método resulta cómodo también para muchos otros problemas hidromecánicos.

La lista de las magnitudes esenciales incluye: la velocidad  $w_x$  y  $w_y$ , la diferencia de presiones  $\Delta p$ , la densidad  $\rho$  y el coeficiente de viscosidad del medio  $\mu$ . La semejanza de dos corrientes significa, según la determinación general, la proporcionalidad entre sus magnitudes

$$w'_x / w'_y = w''_x / w''_y = c_w; \quad \Delta p' / \Delta p'' = c_{\Delta p}; \quad (2-18)$$

$$\rho' / \rho'' = c_\rho \quad \text{y} \quad \mu' / \mu'' = c_\mu$$

en todos los puntos homólogos de los canales. Las constantes de semejanza  $c_w$ ,  $c_{\Delta p}$ , etc. son números constantes. Entre ellos existen correlaciones determinadas que se establecen a partir del análisis de las ecuaciones del proceso.

Escribamos las ecuaciones (2-16) y (2-17) para cada uno de estos dos procesos:

$$\rho'' w''_x \frac{\partial w''_x}{\partial x''} + \rho'' w''_y \frac{\partial w''_x}{\partial y''} = \frac{\partial \Delta p''}{\partial x''} + \mu'' \left( \frac{\partial^2 w''_x}{\partial x''^2} + \frac{\partial^2 w''_x}{\partial y''^2} \right); \quad (a)$$

$$\frac{\partial w''_x}{\partial x''} + \frac{\partial w''_y}{\partial y''} = 0; \quad (b)$$

$$\rho' w'_x \frac{\partial w'_x}{\partial x'} + \rho' w'_y \frac{\partial w'_x}{\partial y'} = \frac{\partial \Delta p'}{\partial x'} + \mu' \left( \frac{\partial^2 w'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'_x}{\partial y'^2} \right); \quad (c)$$

$$\frac{\partial w'_x}{\partial x'} + \frac{\partial w'_y}{\partial y'} = 0. \quad (d)$$

Sustituyamos ahora en el sistema de ecuaciones (a) y (b) las magnitudes que llevan el índice'', por sus valores expresados mediante las constantes de semejanza y las magni-

tudes con el índice'. Para ello se emplean las ecuaciones (2-15) y (2-18), es decir,  $x'' = c_l x'$ ,  $w''_x = c_w w'_x$ , etc. En tal caso este sistema de ecuaciones tomará la forma <sup>1)</sup>:

$$\frac{c_\rho c_w^2}{c_l} \left( \rho' w'_x \frac{\partial w'_x}{\partial x'} + \rho' w'_y \frac{\partial w'_x}{\partial y'} \right) =$$

$$= \frac{c_{\Delta p}}{c_l} \frac{\partial \Delta p'}{\partial x'} + \frac{c_\mu c_w}{c_l^2} \mu' \left( \frac{\partial^2 w'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w'_x}{\partial y'^2} \right); \quad (2-19)$$

$$\frac{c_w}{c_l} \left( \frac{\partial w'_x}{\partial x'} + \frac{\partial w'_y}{\partial y'} \right) = 0. \quad (2-20)$$

El sistema resultante contiene sólo las magnitudes con el índice'. Por consiguiente, se describe ahora el primer proceso para el que también existe el sistema de ecuaciones (c) y (d). Puesto que para un mismo proceso no pueden existir dos descripciones matemáticas diferentes, el sistema de ecuaciones deducido (2-19) y (2-20) debe ser idéntico al sistema de ecuaciones (c) y (d). De aquí emanan las condiciones para obtener relaciones entre las constantes de semejanza.

En la ecuación de continuidad (2-20) el multiplicador  $c_w/c_l$  se reduce, por lo tanto, esta ecuación no impone ninguna limitación en la elección de las constantes de semejanza.

La ecuación de movimiento (2-19) pasará a ser idéntica a la ecuación (c), si todos los tres multiplicadores  $c_\rho c_w^2/c_l$ ,  $c_{\Delta p}/c_l$  y  $c_\mu c_w/c_l^2$  son iguales por lo que se pueden reducir. Notemos que cada uno de los multiplicadores enumerados representa una constante de semejanza de las fuerzas que actúan en el flujo. Dichas fuerzas son: inercia, presión y viscosidad. Por eso la correlación:

$$c_\rho c_w^2/c_l = c_{\Delta p}/c_l = c_\mu c_w/c_l^2 \quad (2-21)$$

expresa la condición de la semejanza dinámica y significa que para corrientes hidromecánicas semejantes los multiplicadores empleados en la transformación por semejanza de las fuerzas de inercia, presión y viscosidad son numéricamente idénticos. Al igualar estos multiplicadores uno a otro por pares deducimos de la correlación (2-21) dos condiciones:

$$c_\rho c_w c_l / c_\mu = 1; \quad (2-22)$$

$$c_{\Delta p} / c_\rho c_w^2 = 1. \quad (2-23)$$

Estas correlaciones de la semejanza dinámica son precisamente las ecuaciones buscadas que relacionan las constantes de semejanza para los campos de velocidad, presión, densidad y viscosidad.

Estas ecuaciones pueden representarse también en otra forma más cómoda si las constantes de semejanza se sustituyen por sus valores de las ecuaciones (2-14) y (2-18) y se agrupan luego todas las magnitudes que llevan los índices' y '' en el primer y en

<sup>1)</sup> Puesto que  $c_\phi$  son los números constantes, las reglas para la transformación de las derivadas son siguientes:

$$\frac{\partial \phi''}{\partial x''} = \frac{\partial (c_\phi \phi')}{\partial (c_l x')} = \frac{c_\phi}{c_l} \frac{\partial \phi'}{\partial x'};$$

y en general,

$$\frac{\partial^n \phi''}{\partial x''^n} = \frac{c_\phi}{c_l^n} \frac{\partial^n \phi'}{\partial x'^n}.$$



el segundo miembros, respectivamente. En este caso es cómodo expresar la constante  $c_w$  por medio de las ecuaciones de las velocidades a la entrada de los canales:

$$c_w = w_0''/w_0'.$$

Entonces en vez de las condiciones (2-22) y (2-23) obtenemos las equivalentes a éstas:

$$\rho' w_0' l' / \mu' = \rho'' w_0'' l'' / \mu'' = Re = \text{idem}; \quad (2-24)$$

$$\frac{p_0' - p_1'}{\rho' w_0'^2} = \frac{p_0'' - p_1''}{\rho'' w_0''^2} = Eu = \text{idem} \quad (2-25)$$

Los números de Reynolds (Re) y de Euler (Eu) obtenidos anteriormente conservan para todas las corrientes hidromecánicas semejantes un mismo valor numérico.

De este modo se ha demostrado para el ejemplo examinado el primer teorema de semejanza que dice: los procesos semejantes tienen los números de semejanza iguales.

Ahora examinemos el caso en que para el canal marcado con el índice ' (fig. 2-8) está dada en la entrada, otra velocidad  $w_0'$  diferente del valor antiguo  $w_0$ . En el flujo se establecerá una distribución de velocidades distinta. También, a consecuencia del cambio de condiciones, la diferencia total de presiones  $\Delta p_1'$  resultará diferente de la antigua  $\Delta p$ . Este nuevo movimiento ya no es semejante al antiguo. A éste le corresponderá un nuevo grupo de corrientes semejantes y para éste puede repetirse todo el proceso de los razonamientos anteriores. En resumen resultará que para el nuevo grupo de corrientes las condiciones de invariancia de los números de semejanza (2-24) y (2-25) tomarán la forma:

$$Re_1 = \text{idem} \text{ y } Eu_1 = \text{idem}.$$

La diferencia consiste en que ahora ambos números de semejanza tienen distintos valores numéricos. Si se cambia de nuevo la velocidad  $w_0'$ , obtenemos una nueva diferencia  $\Delta p_2'$  y nuevos valores para  $Re_2$  y  $Eu_2$  en el grupo de corrientes semejantes del que se habla.

De aquí se deduce que la dependencia parcial entre las variables  $w_0$  y  $\Delta p$

$$\varphi(w_0, \Delta p) = 0$$

puede representarse como:

$$f(Re, Eu) = 0, \quad (2-26)$$

que es la llamada **ecuación de semejanza**. La posibilidad de presentar la dependencia entre las variables como la dependencia entre los números de semejanza se establece con la ayuda del segundo teorema de semejanza.

En los casos examinados anteriormente fue prefijada la velocidad de corriente del líquido en la entrada, mientras que la diferencia de presiones la determinaba el mismo desarrollo del fenómeno, o, en otras palabras, estaba en la función del proceso. Al dar la velocidad, para realizar el desarrollo unívoco del proceso de movimiento, el número de Reynolds resulta formado completamente por las magnitudes que entran en las condiciones de univocidad. Por lo tanto éste es el número determinante de la semejanza (criterio de semejanza). Al contrario, el número de Euler incluye la diferencia entre las presiones y resulta definido.

Según el tercer teorema de semejanza las condiciones necesarias y suficientes para que dos procesos sean semejantes se dan cuando son iguales los números determinantes de semejanza. De este modo la condición

$$Re' = Re''$$

(2-27)

determina la similitud de las corrientes hidromecánicas en los sistemas marcados con los índices ' y ''. La identidad de los números de semejanza a determinar

$$Eu' = Eu''$$

se obtiene como consecuencia de la semejanza ya establecida.

La ecuación de semejanza (2-26) es conveniente escribirla en forma que el número de semejanza determinado esté en función del determinante <sup>1)</sup>

$$Eu = f(Re). \quad (2-28)$$

## 2-4. Semejanza de los procesos de intercambio de calor por convección

Los procesos del intercambio de calor durante el movimiento forzado de un agente portador de calor y la convección libre se desarrollan de un modo distinto. Para estos procesos también resultan diferentes los números de semejanza. Por eso es conveniente examinar inicialmente estos dos casos por separado.

**Condiciones de semejanza en el intercambio de calor durante el movimiento forzado del agente portador de calor.** En práctica se encuentra gran número de diferentes problemas en que el intercambio de calor se realiza en condiciones en que el agente portador de calor tiene un movimiento forzado. Los problemas se diferencian por su forma geométrica y por la configuración de los sistemas en que transcurre el proceso del intercambio de calor; por el cuadro cinemático y el régimen de escurrimiento del flujo. También pueden ser distintos los mismos agentes portadores de calor: líquidos y gases. Sin embargo para todos estos procesos semejantes las condiciones de similitud tienen un aspecto uniforme y universal que se determina con ayuda de la teoría de la semejanza.

Ante todo pueden ser semejantes sólo los procesos del intercambio de calor que transcurren en sistemas geoméricamente semejantes. Entonces, la premisa indispensable para que se halle similitud debe ser la semejanza entre los campos de velocidad, de temperaturas y de presiones en las secciones de entrada o inicial de tales sistemas. Si se cumplen estas condiciones, los procesos estacionarios del intercambio de calor por convección durante el movimiento forzado serán semejantes si se cumple que:

$$\left. \begin{aligned} Re &= \text{idem}; \\ Pr &= \text{idem}. \end{aligned} \right\} \quad (2-29)$$

<sup>1)</sup> Notemos que las condiciones de univocidad en diferentes problemas pueden formularse de distinto modo. Al cambiar la enunciación como determinantes pueden pasar otros números de semejanza. Por consiguiente, el concepto del „número de semejanza determinante” no es una propiedad inherente a un cierto número de semejanza. Así, por ejemplo, en el proceso examinado del escurrimiento de un líquido puede asegurarse la univocidad de movimiento también dando la diferencia total de las presiones en los extremos del canal, mientras que la velocidad de la corriente y el gasto resultarán estar en función del proceso. En este caso como determinante intervendrá otro número de semejanza:

$$f(Eu, Re) = \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} \frac{l}{v}$$



El número de Reynolds [véase la ecuación (2-24)] determina la similitud hidromecánica entre las corrientes de los agentes portadores de calor pues:

$$Re = \frac{w_0 l}{\nu}, \quad (2-30)$$

donde  $w_0$  es la velocidad característica, corrientemente media, del líquido o del gas en la sección inicial del sistema;

$l$  es la dimensión característica geométrica del sistema, (por ejemplo, el diámetro del canal, la longitud de la lámina, etc.);

$\nu$  es el coeficiente cinemático de viscosidad del agente portador de calor.

El número de Prandtl es la característica termofísica del agente portador de calor. Está compuesto solamente de los parámetros físicos:

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} \quad \text{o} \quad Pr = \frac{\nu}{a} \quad (2-31)$$

[puesto que  $\nu = \mu/\rho$  y  $a = \lambda/c_p \rho$ ] y sus valores numéricos se dan en las tablas.

Cuando son iguales los números  $Re$  las condiciones de igualdad de los números  $Pr$  aseguran la semejanza térmica, es decir, la similitud de los campos de las diferencias de temperaturas entre dos medios y de los flujos térmicos en todo el volumen de los sistemas examinados.

Según la teoría de la semejanza en los procesos donde ésta exista deben ser también iguales los números de semejanza determinados. En los procesos del intercambio de calor por convección en calidad de número determinado interviene el número de Nusselt  $Nu$  que caracteriza la intensidad del proceso de intercambio de calor por convección:

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}, \quad (2-32)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de traspaso del calor;  $l$  es la dimensión geométrica característica;  $\lambda$  es el coeficiente de conductibilidad térmica del agente portador de calor.

Así, las condiciones (2-29) son las de invariancia (identidad) de los números de semejanza determinantes. Con esto se asegura la semejanza de los procesos. La invariancia del número de semejanza determinado ( $Nu$ ), es decir, la correlación

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda} = \text{idem}, \quad (2-33)$$

es consecuencia de la similitud que se ha establecido.

La ecuación de semejanza para los procesos del intercambio de calor por convección, durante el movimiento forzado del agente portador de calor tiene la forma:

$$Nu = f(Re, Pr). \quad (2-34)$$

Las condiciones de semejanza expuestas anteriormente se determinan mediante el análisis de la descripción matemática de los procesos. En el caso del movimiento forzado del agente portador de calor el cuadro hidromecánico no depende del intercambio de calor<sup>1)</sup>, es por eso que las condiciones de la semejanza hidromecánica son la premisa indispensable de la similitud térmica. Estas condiciones ya las hemos analizado en el § 2-3 y se vio que éstas se reducen a la similitud de los campos de velocidad y de presión en la sección de entrada de los sistemas y al cumplimiento de la condición:

$$Re = \text{idem}.$$

La igualdad de los números de  $Re$  se desprende de la ecuación que enlaza las constantes de semejanza (2-22):

$$c_p c_w c_l / c_\mu = 1.$$

Por eso aquí queda por examinar aquellas ecuaciones de enlace complementarias entre las constantes de semejanza determinadas por la ecuación de conductibilidad térmica

$$c_p \rho w_x = \frac{\partial t}{\partial x} + c_p \rho w_y \frac{\partial t}{\partial y} = \lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right), \quad (2-35)$$

con la ecuación de emisión calorífica

$$\alpha = - \frac{\lambda}{t_p - t_{fl}} \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n \rightarrow 0}, \quad (2-36)$$

En estas ecuaciones la temperatura entra solamente como la derivada o en forma de la diferencia. Esto significa que en los procesos de intercambio de calor por convección sólo tienen importancia las diferencias de temperaturas y no los valores absolutos. Por eso hay que considerar la similitud de las diferencias de temperaturas entre dos medios  $\nu$ , leyendo la temperatura partiendo de su valor fijo en condiciones de univocidad. Para dos procesos de intercambio de calor semejantes partiendo de la determinación general de la semejanza tenemos:

$$\left. \begin{aligned} v''/v' &= c_v; \quad \lambda''/\lambda' = c_\lambda; \quad c_p''/c_p' = c_{c_p}; \\ \rho''/\rho' &= c_\rho; \quad \alpha''/\alpha' = c_\alpha; \quad w''/w' = c_w \end{aligned} \right\} \quad (2-37)$$

esto es válido para todos los puntos homólogos de los sistemas definidos por la condición:

$$x''/x' = y''/y' = l''/l' = c_l. \quad (2-38)$$

Aquí  $c_v, c_\lambda, \dots, c_l$  son los números constantes.

Ahora escribamos las ecuaciones (2-36) y (2-35) para cada proceso:

$$c_p'' \rho'' w_x'' \frac{\partial v''}{\partial x''} + c_p'' \rho'' w_y'' \frac{\partial v''}{\partial y''} = \lambda'' \left( \frac{\partial^2 v''}{\partial x''^2} + \frac{\partial^2 v''}{\partial y''^2} \right); \quad (a)$$

$$\alpha'' = - \frac{\lambda''}{t_p'' - t_{fl}''} \left( \frac{\partial v''}{\partial n} \right)_{n'' \rightarrow 0}; \quad (b)$$

$$c_p' \rho' w_x' \frac{\partial v'}{\partial x'} + c_p' \rho' w_y' \frac{\partial v'}{\partial y'} = \lambda' \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right); \quad (c)$$

$$\alpha' = - \frac{\lambda'}{t_p' - t_{fl}'} \left( \frac{\partial v'}{\partial n} \right)_{n' \rightarrow 0}. \quad (d)$$

<sup>1)</sup> Para los límites en que están presentes en el flujo las diferencias de temperaturas, debido a que el cambio de las propiedades físicas del agente portador de calor no es grande por su cantidad y este efecto se puede no tomar en consideración.



Expresemos todas las magnitudes con el índice " con las constantes de semejanza y las magnitudes de las condiciones (2-37) y (2-38) con el índice ', es decir:

$$v'' = c_v v'; \quad x'' = c_l x';$$

etc., y sustituyamos estos valores en las ecuaciones (a) y (b). En este caso nos resulta:

$$\left( \frac{c_p c_\rho c_w c_v}{c_l} \right) \left( c'_p \rho' w'_x \frac{dv'}{dx'} + c'_p \rho' w'_y \frac{dv'}{dy'} \right) =$$

$$= \left( \frac{c_\lambda c_v}{c_l^2} \right) \lambda' \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right); \quad (2-39)$$

$$c_\alpha \alpha' = - \frac{c_\lambda}{c_l} \frac{\lambda'}{t'_p - t'_{fl}} \left( \frac{\partial v'}{\partial n'} \right)_{n' \rightarrow 0}. \quad (2-40)$$

Ahora se ve que para las magnitudes con el índice ' existen dos parejas de ecuaciones: el par (c), (d) y el par (2-39), (2-40), que están ligadas con las mismas variables. Por lo tanto estas ecuaciones deben ser idénticas unas a otras. La ecuación de conductibilidad térmica (2-39) pasará a ser idéntica a la ecuación (c), si los multiplicadores  $c_p c_\rho c_w c_v / c_l$  y  $c_\lambda c_v / c_l^2$  son iguales. Notemos que cada uno de estos multiplicadores es la constante de semejanza para el flujo calorífico en los puntos homólogos de los agentes portadores de calor. El multiplicador  $c_p c_\rho c_w c_v / c_l$  es la constante de semejanza para el flujo calorífico transferido por la convección. El multiplicador  $c_\lambda c_v / c_l^2$  es la misma constante para el flujo calorífico transmitido por la conductibilidad térmica. Por eso la igualdad

$$c_p c_\rho c_w c_v / c_l = c_\lambda c_v / c_l^2 \quad (2-41)$$

es la condición de la semejanza térmica. Esta igualdad muestra que para los procesos térmicos semejantes los multiplicadores de la transformación semejante de los flujos térmicos son numéricamente iguales (2-41) se puede escribir también en otra forma:

$$c_p c_\mu / c_\lambda = 1, \quad (2-42)$$

reduciendo las magnitudes iguales y despejando la constante  $c_w$  de la ecuación (2-22)

$$\text{La identidad de las ecuaciones, (d) y (2-40) se cumple en la condición de} \quad (2-43)$$

$$c_\alpha c_l / c_\lambda = 1.$$

También se pueden presentar las correlaciones (2-42) y (2-43) en otra forma, más cómoda, si en vez de las constantes de semejanza se dan sus valores a partir de las condiciones de (2-37) y (2-38) y luego se agrupan las magnitudes que llevan los índices ' y '', respectivamente, en el primer y el segundo miembros de las igualdades. En este caso la constante  $c_\alpha$  puede representarse por medio de la igualdad que relaciona los coeficientes medios de traspaso del calor:

$$c_\alpha = \bar{\alpha}'' / \bar{\alpha}'.$$

Entonces obtendremos:

$$c'_p \mu' / \lambda' = c''_p \mu'' / \lambda'' = \text{Pr} = \text{idem}; \quad (2-44)$$

$$\bar{\alpha}' / l' \lambda' = \bar{\alpha}'' / l'' \lambda'' = \text{Nu} = \text{idem}. \quad (2-45)$$

El número de Prandtl Pr está compuesto por los parámetros físicos prefijados en las condiciones de unicidad; este es el número determinante de semejanza. El número de Nusselt (Nu) incluye el coeficiente de traspaso del calor que es la función del proceso, este es el número de semejanza determinado.

De este modo, basándose en el tercer teorema de semejanza la igualdad de los números Re y Pr asegura la similitud de los procesos del intercambio de calor por convección durante el movimiento forzado. La identidad de los números Nu es la consecuencia de la similitud ya establecida.

**Condiciones de semejanza de los procesos de intercambio de calor durante la convección libre.** El proceso de convección libre surge como consecuencia de la diferencia entre las densidades de las partículas calientes y las frías del agente portador de calor. Para la mayoría de los agentes portadores de calor, en este intervalo de temperaturas que suele usarse en la práctica, la dependencia que tiene la densidad en función de la temperatura pues con la aproximación suficiente se puede considerar como una dependencia lineal. De este modo, si en un punto alejado del cuerpo caliente la temperatura del agente portador de calor es igual a  $t_{fl}$  y en cierto punto cerca de la superficie es igual a  $t$ , se puede considerar que los valores correspondientes de densidad  $\rho_{fl}$  y  $\rho$  están ligados por la ecuación

$$\rho = \rho_{fl} [1 - \beta(t - t_{fl})], \quad (2-46)$$

donde  $\beta$  es el coeficiente térmico de dilatación cúbica del medio.

Puesto que  $\rho < \rho_{fl}$ , sobre las partículas del líquido caliente que tiene la temperatura  $t$ , actúa una fuerza de sustentación de Arquímedes igual a:

$$g(\rho_{fl} - \rho) = g\rho_{fl}\beta(t - t_{fl}). \quad (2-47)$$

Precisamente esta fuerza provoca el movimiento de convección del medio.

De la ecuación (2-47) se deduce que la fuerza de sustentación será tanto mayor, cuanto más altos sean los valores de las magnitudes siguientes: la intensidad del campo de gravitación  $g$ , el coeficiente térmico de dilatación cúbica  $\beta$  y la diferencia de temperaturas entre dos medios  $\Delta t$ .

Los procesos de convección libre tienen una amplia propagación en diferentes esferas de la técnica moderna. Sin embargo, a pesar de la diversidad de los esquemas prácticos para realización, en todos los procesos similares las condiciones de semejanza tienen un aspecto universal definido por la teoría de la semejanza.

Pueden ser ante todo semejantes los procesos que transcurren en los sistemas geoméricamente semejantes. Luego, como la premisa indispensable de semejanza de los procesos de intercambio térmico, en caso de la convección libre, ha de existir la similitud de los campos de temperatura en las superficies de calefacción o de enfriamiento. Al cumplir estas exigencias los procesos estacionarios de la convección libre serán semejantes, si se cumplen las condiciones:

$$\text{Gr} = \text{idem}; \quad (2-48)$$

$$\text{Pr} = \text{idem}. \quad (2-49)$$

El número Gr caracteriza la eficacia relativa de la fuerza de sustentación que provoca el movimiento de convección libre del medio y tiene el siguiente aspecto:

$$\text{Gr} = g\beta\Delta t \frac{l^3}{\nu^2} \quad (2-50)$$



donde  $g$  es la aceleración de la caída libre;  $\beta$  es el coeficiente térmico de dilatación cúbica del medio;  $\Delta t$  es la diferencia de temperaturas característica entre dos medios;  $l$  es la dimensión característica lineal del sistema;  $\nu$  es el coeficiente cinemático de viscosidad.

El número  $Pr$  es la característica termofísica del agente portador de calor:

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a}. \quad (2-51)$$

Las condiciones (2-48) y (2-49) aseguran la semejanza de los procesos de la convección libre, es decir, la analogía de los campos de las diferencias de temperaturas entre dos medios de los flujos caloríficos con las velocidades en los sistemas geoméricamente semejantes. Al cumplir estos requisitos el número de semejanza determinado (número de Nusselt)  $Nu$ , también resulta ser el mismo en tales sistemas:

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda} = \text{ídem}. \quad (2-52)$$

La ecuación de semejanza para los procesos del intercambio de calor durante la convección libre tiene la forma:

$$Nu = f(Gr, Pr). \quad (2-53)$$

Los números de semejanza pueden obtenerse del análisis de la descripción matemática para los procesos de la convección libre. En estos procesos las partes hidrodinámica y térmica resultan mutuamente ligadas.

Para los procesos de convección libre el sistema de ecuaciones diferenciales tiene la forma:

$$c_p \rho w_x \frac{\partial t}{\partial x} + c_p \rho w_y \frac{\partial t}{\partial y} = \lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right); \quad (2-54)$$

$$\rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\rho g \beta (t - t_{f1}) - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right); \quad (2-55)^*$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0. \quad (2-56)$$

El coeficiente de traspaso del calor se determina por la ecuación:

$$\alpha = - \frac{\lambda}{t_p - t_{f1}} \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_{n \rightarrow 0}. \quad (2-57)$$

\*) Para simplificar aquí no está trazada la proyección de la ecuación de movimiento sobre el eje  $y$ . Esto no conduce a una limitación del carácter general de las deducciones durante el análisis de las condiciones de semejanza. En la ecuación de movimiento,  $p$  es aquella parte de la presión total  $P$  que no está ligada con el incremento hidrostático de las presiones  $p_{st}$  en estado de reposo, cuando en todo el sistema la temperatura  $t_{f1}$  es constante y la densidad es igual a  $\rho_{f1}$ . Pues,  $p = P - p_{st}$ ,  $\partial p_{st} / \partial x = g_x \rho_{f1}$ .

La temperatura  $t$  se incluye en estas ecuaciones sólo en forma de las derivadas o diferencias, y la presión  $p$ , en forma de la derivada. Esto significa que para el proceso tienen importancia solamente las diferencias de temperaturas entre dos medios  $\nu$  y las diferencias de presión  $\Delta p$ , cuya similitud de los campos es preciso examinar al formular la analogía de los procesos. Según la definición general de la semejanza para dos procesos que lo sean las constantes de semejanza serán:

$$\nu'/\nu = c_v; w'/w = c_w; \Delta p'/\Delta p = c_{\Delta p};$$

$$\alpha'/\alpha = c_\alpha; (g\beta)'/g\beta = c_{g\beta}$$

y de manera análoga para los parámetros físicos:

$$c_\rho; c_{c_p}; c_\lambda; c_\mu \quad (2-58)$$

en todos los puntos homólogos de los sistemas determinados por la condición:

$$x''/x' = y''/y' = l''/l' = c_l,$$

son los números constantes.

Luego, obrando de modo análogo a los casos anteriores [es decir, escribiendo el sistema de ecuaciones de (2-54) a (2-56) para estos dos procesos y sustituyendo en un sistema todas las magnitudes, expresadas mediante las constantes de semejanza por las magnitudes correspondientes para el segundo sistema], obtenemos las condiciones que relacionan las constantes de semejanza.

La ecuación de conductibilidad térmica (2-54) proporciona a la ya conocida condición de la semejanza térmica:

$$c_p c_\rho c_w c_v / c_l = c_\lambda c_v / c_l^2. \quad (2-59)$$

En la ecuación de movimiento (2-55) [si se compara con la ecuación (2-16) examinada anteriormente] entra en forma complementaria la fuerza de sustentación. Por eso la condición que se obtuvo antes de la similitud dinámica (2-21) ahora incluye una magnitud más:

$$c_\rho c_w^2 / c_l = c_\rho c_{g\beta} c_v = c_{\Delta p} / c_l = c_\mu c_w / c_l^2. \quad (2-60)$$

La ecuación de continuidad (2-56) no impone, al igual que antes, limitaciones en la elección de las constantes de semejanza. De la ecuación (2-57), lo mismo que en caso del movimiento forzado, tenemos:

$$c_\alpha = c_\lambda / c_l. \quad (2-61)$$

Ahora transformemos las correlaciones obtenidas. De la condición (2-59) se deduce:

$$c_p c_\rho c_w c_l / c_\lambda = 1.$$

La condición de semejanza dinámica (2-60), después de examinar las igualdades por pares, da tres correlaciones:

$$c_\rho c_{g\beta} c_v^2 / c_\mu c_w = 1; c_\rho c_w c_l / c_\mu = 1; c_{\Delta p} / c_l c_{g\beta} c_\rho c_v = 1.$$

Puesto que en el proceso de la convección libre la velocidad está en función del proceso, es conveniente eliminar la constante de semejanza  $c_w$  de las demás correlaciones utilizando la igualdad  $c_\rho c_w c_l / c_\mu = 1$ . Entonces las cuatro correlaciones precedentes se puede reescribir de la forma:

$$c_p c_\mu / c_\lambda = 1; \quad (2-62)$$

$$\frac{c_p}{c_\rho} c_{g\beta} c_l^2 = 1; \quad (2-63)$$

$$c_{\Delta p} c_l / c_\mu = 1; \quad (2-64)$$

$$c_{\Delta p} / c_\rho c_{g\beta} c_v = 1. \quad (2-65)$$



Y, finalmente, la condición (2-61) la escribiremos así:

$$c_x c_l / c_\lambda = 1. \quad (2-66)$$

Al introducir en las ecuaciones (2-62) — (2-66) en vez de las constantes de semejanza sus valores de la ecuación (2-58), tenemos:

$$c'_p \mu' / \lambda' = c''_p \mu'' / \lambda'' = \text{Pr} = \text{idem}; \quad (2-67)$$

$$g' \beta' \Delta t' \frac{l'^3}{\nu'^2} = g'' \beta'' \Delta t'' \frac{l''^3}{\nu''^2} = \text{Gr} = \text{idem}; \quad (2-68)$$

$$w' l' / \nu' = w'' l'' / \nu'' = \text{Re} = \text{idem}; \quad (2-69)$$

$$\Delta p' / \rho' g' \beta' \Delta t' l' = \Delta p'' / \rho'' g'' \beta'' \Delta t'' l'' = \text{idem}; \quad (2-70)$$

$$\alpha' l' / \lambda' = \alpha'' l'' / \lambda'' = \text{Nu} = \text{idem}. \quad (2-71)$$

Los números de Prandtl (Pr) y de Grashof (Gr) están compuestos por las magnitudes dadas en las condiciones de univocidad; estos números de semejanza determinan los procesos del intercambio de calor durante la convección libre. Los tres números de semejanza restante contienen las magnitudes que están en función del proceso: velocidad  $w$ , diferencia de presiones  $\Delta p$  y coeficiente de traspaso del calor  $\alpha$  los cuales son números de semejanza determinados. De acuerdo con el tercer teorema de semejanza su invariancia es consecuencia de la semejanza establecida, si está asegurada la identidad (invariancia) de los números de semejanza determinantes (criterios de semejanza): Gr y Pr. La intensidad de la emisión calorífica se determina mediante el número de Nusselt, por eso la ecuación de semejanza para la emisión calorífica cuando hay convección libre tiene la forma:

$$\text{Nu} = f(\text{Gr}, \text{Pr}).$$

Los dos números determinados de semejanza restantes que figuran en las ecuaciones (2-69) y (2-70) caracterizan las magnitudes hidromecánicas: las velocidades y las diferencias de presiones que surgen en el transcurso de los procesos de convección libre. Estos dos números de semejanza también están en función de Gr y Pr. Por eso para cada uno de éstos se pueden escribir sus propias ecuaciones de semejanza, de la misma forma que tiene la ecuación de semejanza para el intercambio de calor (2-53). Es conveniente aplicar dichas ecuaciones para generalizar los datos experimentales, de acuerdo con las características hidromecánicas de los procesos de la convección libre, cuando este aspecto del proceso presente también interés práctico. Sin embargo, por lo común, estos datos son necesarios sólo para resolver algunos problemas especiales.

**Condiciones de semejanza de los procesos de intercambio de calor por convección, durante el movimiento libre y forzado simultáneo del agente portador de calor.** El análisis de las condiciones de semejanza, para los casos del movimiento forzado y de la convección libre por separado, se expuso anteriormente. En la práctica, sin embargo, se encuentran también los casos cuando a la par con el movimiento forzado, en el sistema se desarrollan las corrientes de convección libre bajo la acción de las fuerzas de sustentación, es decir, tiene lugar simultáneamente la corriente forzada y libre del agente portador de calor. En tal caso que es más complicado, para cumplir las condiciones de semejanza de los procesos, es necesaria la invariancia (identidad) ya no de dos, sino de tres números determinantes de semejanza: de Reynolds, de Grashof y de Prandtl. La ecuación correspondiente de semejanza para la emisión calorífica cuando existe movimiento simultáneo forzado y libre toma la forma:

$$\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Gr}, \text{Pr}). \quad (2-72)$$

Esta ecuación de semejanza es la correlación general de la cual emanan como casos particulares (2-34) y (2-53). Cuando la influencia de las fuerzas de sustentación caracterizadas por el número Gr, deja de ser esencial, se puede omitir este número en la ecuación de semejanza (2-72) y ésta se transforma en la ecuación (2-34). Por el contrario, cuando se termina el movimiento forzado, el número Re deja de ser determinante y de la ecuación (2-72) se deduce la ecuación (2-53).

Durante el movimiento conjunto forzado y libre simultáneo los procesos hidromecánicos y térmicos están mutuamente ligados, por eso el número determinado de semejanza de Euler puede representarse en la forma:

$$\text{Eu} = \varphi(\text{Re}, \text{Gr}, \text{Pr}), \quad (2-73)$$

es decir, éste se encuentra en función de los mismos números determinantes de semejanza.

Las condiciones de semejanza expuestas anteriormente se refieren a los procesos estacionarios del intercambio de calor por convección. Para los procesos no estacionarios, es decir, para los que cambian con el transcurso del tiempo, es necesario agregar una condición más que define la similitud de los procesos en el tiempo:

$$\text{Fo} = \frac{a\tau}{l^2} = \text{idem}; \quad (2-74)$$

donde  $a$  es el coeficiente de conductibilidad de la temperatura del líquido;  $\tau$  es el tiempo y  $l$  es la dimensión geométrica característica.

El número de semejanza (Fo) se llama *número de Fourier*.

**Números de semejanza y ecuaciones de semejanza.** Resumamos el análisis en su totalidad. La aplicación de los principios generales de la teoría de semejanza de los fenómenos físicos en los procesos del intercambio de calor por convección permite establecer las condiciones que definen la similitud de estos procesos, y además posibilita obtener las ecuaciones de semejanza (2-34), (2-53), (2-73), que sirven de base para la generalización de los datos experimentales y la simulación de los procesos térmicos.

A veces, al generalizar los datos experimentales del intercambio de calor, en calidad de los números de semejanza se usan ciertas combinaciones formadas por los números que entran en la ecuación principal (2-72). Tales números de semejanza transformados tienen sus nombres; citemos los más importantes de éstos.

Se denomina *número de Paclet* (Pe) al producto de los números Re y Pr:

$$\text{Pe} = \text{RePr} \quad \text{o} \quad \text{Pe} = \frac{wl}{a}, \quad (2-75)$$

donde  $w$  es la velocidad de la corriente del agente portador de calor característica para el proceso;  $l$  es la dimensión geométrica característica del sistema;  $a$  es el coeficiente de conductibilidad de la temperatura del agente portador de calor.



Se denomina *número de Stanton* (St) el cociente de la división del número Nu sobre el Pe:

$$St = Nu/Pe \quad \text{o} \quad St = \frac{\alpha}{c_p \rho w}, \quad (2-76)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de traspaso del calor;  $c_p$  es el calor específico a la presión constante del agente portador de calor;  $\rho$  es la densidad del agente portador de calor;  $w$  es la velocidad característica.

El producto del número Gr por el Pr a veces se llama *número de Rayleigh* (Ra):

$$Ra = GrPr \quad \text{o} \quad Ra = g\beta\Delta t \frac{l^3}{\nu a}, \quad (2-77)$$

donde  $g$  es la aceleración de la caída libre;  $\beta$  es el coeficiente térmico de dilatación cúbica del agente portador de calor;  $\Delta t$  es la diferencia característica de temperaturas entre dos medios;  $l$  es la dimensión lineal característica;  $\nu$  es el coeficiente cinemático de viscosidad del agente portador de calor y  $a$  es el coeficiente de conductibilidad de la temperatura del agente portador de calor.

Al usar estos números de semejanza, las ecuaciones de semejanza toman un aspecto exterior diferente, aunque ésta es en esencia solamente una forma diferente de escribir la misma relación entre las magnitudes.

Explicemos esto con el ejemplo siguiente. Si se ha obtenido como resultado de la generalización de los datos experimentales, la fórmula para un determinado proceso de la emisión calorífica en caso del movimiento forzado del agente portador de calor:

$$Nu = cRe^n Pr^m,$$

donde  $c$  es el coeficiente numérico constante;  $n$  y  $m$  son los exponentes constantes.

Si ambos miembros de esta ecuación se dividen en la magnitud  $Re$   $Pr$ , la ecuación también puede escribirse en la forma:

$$St = cRe^{n-1} Pr^{m-1}.$$

Finalmente, a cambio del número  $Re$  se puede introducir en la ecuación la magnitud  $Re = Pe/Pr$ . Entonces obtenemos:

$$St = cPe^{n-1} Pr^{m-n}.$$

Está claro que estas tres correlaciones son simplemente tres formas diferentes de escribir una misma dependencia. Este ejemplo muestra que las ecuaciones de semejanza que tienen un aspecto exterior diferente, tales como

$$Nu = f_1(Re, Pr); \quad St = f_2(Re, Pr); \quad St = f_3(Pe, Pr),$$

en realidad representan las diferentes formas de escribir una misma dependencia funcional.

Para los procesos no estacionarios a veces en lugar del número de Fourier se usa otro número de semejanza que se denomina *número de homocromaticidad*  $Ho$ :

$$Ho = Fo Pe \quad \text{o} \quad Ho = \frac{\tau w}{l}, \quad (2-78)$$

donde  $\tau$  es el tiempo.

Las condiciones de semejanza para procesos del intercambio de calor por convección se han obtenido suponiendo que el coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda$ , el coeficiente de viscosidad  $\mu$  y el calor específico a una presión constante  $c_p$  del medio, son constantes en toda la esfera de desarrollo del proceso. En realidad estas propiedades físicas dependen de la temperatura, de modo que para diferentes agentes portadores de calor el carácter de las dependencias  $\lambda = \lambda(t)$ ,  $\mu = \mu(t)$ ,  $c_p = c_p(t)$  es distinto. Durante el proceso del intercambio de calor la temperatura del agente portador de calor varía y, por consiguiente, también las propiedades físicas no permanecen constantes. La semejanza de los procesos se cumple con tanto mayor rigor, cuanto menor es el cambio relativo de estas propiedades, es decir, cuanto más débil es la dependencia de  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $c_p$  en función de  $t$ , cuanto menores son las mismas diferencias de temperaturas entre dos medios en el sistema y cuanto menores sean los flujos caloríficos. Cuando la variación de las propiedades es considerable la semejanza estricta, según muestra el análisis, resulta imposible en caso general. En estas condiciones tiene lugar sólo una semejanza aproximada. Hay que tomar en consideración esta circunstancia al generalizar los datos experimentales.

## 2-5. Generalización de los datos experimentales a base de la teoría de la semejanza

Antes de llevar a cabo cualquier experimento siempre es necesario conocer de antemano: 1) qué magnitudes hay que medir durante el experimento; 2) cómo elaborar los resultados del ensayo; 3) qué fenómenos son semejantes al estudiado. La respuesta a estas preguntas la contienen los tres teoremas de semejanza expuestos anteriormente.

El primer teorema responde a la primera pregunta: durante los experimentos hay que medir todas las magnitudes que se contienen en los números de semejanza del proceso que se estudia.

El segundo teorema responde a la segunda pregunta: los resultados del ensayo es conveniente expresarlos en los números de semejanza y la dependencia entre ellos debe representarse en forma de las ecuaciones de semejanza, esto permite hallar la regularidad general aplicable a todos los procesos análogos al estudiado.

La respuesta a la tercera pregunta la da el tercer teorema. Son semejantes aquellos fenómenos en que son semejantes las condiciones de uniformidad y son iguales los números determinantes de semejanza (criterios de similitud).



Debido a estas respuestas la teoría de la semejanza en realidad, es la teoría del experimento. Durante el experimento hay que dedicar una atención especial a la etapa de elaboración de los datos que se toman y su generalización sobre la base de la teoría de semejanza.

Por ejemplo, si se disponen de los datos de medición del coeficiente de traspaso del calor  $\alpha$ , cuando el aire se somete al movimiento forzado, según los datos experimentales puede obtenerse la dependencia gráfica entre el cambio del coeficiente de traspaso del calor, y la variación de la velocidad de movimiento del aire  $w$ :

$$\alpha = f(w).$$

Esta dependencia puede describirse también mediante la fórmula empírica generalmente representada en forma de la función potencial:

$$\alpha = c_1 w^n, \quad (2-79)$$

donde  $c_1$  y  $n$  son ciertos números constantes.

Además es necesario siempre tener en cuenta que como resultado de una elaboración tal, de los datos se pueden obtener sólo fórmulas particulares que son válidas únicamente para las condiciones existentes durante la realización del ensayo. Para otras condiciones (objetos, medios activos, temperaturas, etc.) dichas fórmulas particulares no son aplicables en absoluto.

Durante el estudio de cualquier proceso concreto por lo general siempre se plantea el problema de obtener además los datos para el cálculo de otros procesos semejantes al estudiado. Para tener la posibilidad de extender los resultados de los ensayos aislados a todos sus procesos semejantes es preciso llevar a cabo la elaboración de los resultados experimentales expresándolos como números de semejanza.

Durante la elaboración de los resultados de los ensayos, en el ejemplo aducido anteriormente, en calidad del medio activo se usó el aire para el que el número  $Pr$  tiene el valor constante:  $Pr = 0,7$ . Por eso la ecuación de semejanza (2-34) en este caso toma la forma:

$$Nu = f(Re) \quad \text{o} \quad \alpha l / \lambda = f(wl / \nu).$$

Al representar los resultados de los experimentos como la dependencia entre los números  $Nu$  y  $Re$ , en vez de la fórmula particular (2-79), obtenemos:

$$Nu = c Re^n, \quad (2-80)$$

donde  $c$  es el coeficiente numérico constante.

La dependencia (2-80) tiene carácter general y es justa para todos los procesos análogos al dado. La fórmula generalizada (2-80) permite establecer qué influencia sobre el coeficiente de traspaso del calor  $\alpha$  ejercen las magnitudes tales como la dimensión geométrica del sistema  $l$ , el coeficiente cinemático de viscosidad  $\nu$  del medio, etc., que no se varían durante los experimentos. Con esto se elimina la necesidad de realizar las mediciones complementarias.

Demostremos ahora cómo dichas funciones se determinan en la práctica. Sea una dependencia exponencial de la forma (2-80). Al tomar los logaritmos de esta ecuación y designar el  $\log Re$  por medio de  $x$ , el  $\log Nu$  por  $y$  y el  $\log c$  por  $A$ , obtenemos:

$$y = A + nx.$$

La última relación es la ecuación de la recta, en este caso  $A = y$ , cuando  $x = 0$ , y  $n = \operatorname{tg} \varphi$ , donde  $\varphi$  es el ángulo de inclinación de la recta respecto al eje de las abscisas (fig. 2-9). Según el gráfico se determina el valor

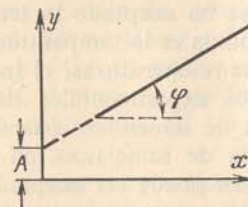


Fig. 2-9. Método gráfico para determinar la dependencia exponencial entre las variables.

de  $n$  como la proporción entre los catetos. Determinado el valor de  $n$ , se calcula también el valor de la constante con ayuda de la razón  $c = Nu/Re^n$  a la que satisface cualquier punto de la recta. Para comprobar la posibilidad de aplicar la dependencia exponencial, se usa el hecho de que en coordenadas logarítmicas todos los puntos experimentales deben ubicarse sobre una recta. Si los puntos se sitúan según una curva, entonces esta curva se sustituye corrientemente por una línea quebrada. Para algunos tramos separados de tal curva los valores de  $c$  y  $n$  son diferentes. Si la magnitud buscada es función de dos argumentos, en el gráfico se obtiene una familia de rectas, el segundo argumento se toma en calidad del parámetro.

Puesto que durante el proceso del intercambio de calor la temperatura del líquido no es fija, varían, por consiguiente, también los valores de sus magnitudes físicas. Por eso hay que tener en cuenta esta circunstancia al generalizar los datos experimentales. Uno de los caminos que permite tomarla en consideración, consiste en la obtención de los valores medios de los parámetros físicos mediante el empleo de la *temperatura determinante*, según la cual se definen los valores de los parámetros físicos que entran en los números de semejanza. Es bastante divulgado el hecho de elegir como temperatura media determinante a  $t_{med} = 0,5(t_p + t_{fl})$ , donde  $t_p$  es la temperatura de la superficie y  $t_{fl}$ , la temperatura del líquido. En una serie de casos en calidad de determinante se elige bien la temperatura media del líquido  $t_{fl}$ , bien la temperatura de la superficie de calefacción  $t_p$ , o la temperatura del líquido en la entrada en el dispositivo cambiador de calor  $t'_{fl}$ , etc. Sin embargo es preciso tener en cuenta que no existe una temperatura universal, al elegir la cual, se considere automáticamente en todos los casos la dependencia entre la emisión calorífica y los cambios de las propiedades físicas con la variación de la temperatura. Por eso



durante la elaboración de los datos experimentales del intercambio de calor y la resistencia hidráulica es conveniente recomendar tomar como temperatura determinante la que suele ser dada en los cálculos técnicos, o la que se puede determinar con facilidad. Luego se requiere tomar en consideración, si es necesario, la influencia ejercida por el cambio de las propiedades físicas del agente portador de calor mediante la introducción de una corrección adicional (multiplicador) en las ecuaciones generalizadas de semejanza.

Durante la anotación de las fórmulas de cálculo hay que marcar con un índice la temperatura determinante aceptada. Si, por ejemplo, como temperatura determinante se ha aceptado la temperatura de la pared, se pone el índice "p" y si aceptada es la temperatura del flujo, el índice "fl"; si se toma la media de estas temperaturas, el índice "med".

Al generalizar los datos experimentales tiene importancia también el problema de la elección de *dimensión determinante*. Aunque desde el punto de vista de la teoría de semejanza, en los sistemas geométricos análogos cualquier dimensión puede ser aceptada como el determinante; en calidad de tal dimensión es conveniente tomar la que determina el desarrollo del proceso. Entonces las dependencias generalizadas para los sistemas que pertenecen al mismo tipo, pero no son geoméricamente semejantes, resultan próximas o incluso iguales, lo que presenta gran comodidad para los cálculos prácticos. Por ejemplo, durante el intercambio de calor por convección en los tubos redondos como dimensión determinante se toma por lo general su diámetro. Para los canales de sección irregular y complicada es conveniente tomar el diámetro equivalente, igual al área de la sección transversal del canal multiplicada por cuatro y dividida en el perímetro mojado total de la sección (independientemente de qué parte de este perímetro participe en el intercambio térmico). Cuando el flujo currentilíneo contornea transversalmente un tubo o un haz de tubos como dimensión determinante se toma su diámetro, y cuando este flujo contornea una chapa, se toma su longitud en la dirección del movimiento. Cuando se acepta la longitud como dimensión determinante se pone el índice  $l$  y si el diámetro, el índice  $d$ . En este caso el número Re, por ejemplo, hay que escribir del siguiente modo:

$$\text{Re}_{df1} = \frac{wd}{\nu_{f1}} \quad \text{o} \quad \text{Re}_{lf1} = \frac{wl}{\nu_{f1}}.$$

En nuestros días los datos experimentales del intercambio de calor, como regla, se elaboran con los números de semejanza. Pero en los pronósticos y manuales todavía se encuentran a veces las fórmulas de este tipo:

$$\alpha = A\Delta t^n \quad \text{y} \quad \alpha = Bw^m. \quad (2-81)$$

Sin embargo estas fórmulas simples sólo se pueden usar si en el aparato diseñado las condiciones de desarrollo del proceso corresponden exactamente a las que existían durante la realización de los ensayos que sirvieron de base para obtener estas fórmulas. En dichas fórmulas, de los muchos factores que realmente influyen, se toman en consideración sólo algunos,

por ejemplo, la diferencia de temperaturas entre dos medios  $\Delta t$  o sólo la velocidad  $w$ .

Pero si las condiciones del aparato diseñado y las que tenían lugar durante el experimento, son diferentes, entonces durante los cálculos hay que usar fórmulas en las que aparezcan el mayor número de variables que determinen la realización del proceso. Esta exigencia la satisfacen solamente las dependencias generalizadas. Por eso, al elegir la fórmula de cálculo, hay que sin duda darle preferencia a estas dependencias.

Inicialmente parece que durante el uso de las fórmulas generalizadas es preciso realizar un gran trabajo de cálculo. En realidad estas dificultades no son tan grandes. Es necesario solamente recordar que los números de semejanza Nu, Re, Gr, Pr y otros son símbolos convencionales. Al introducir sus valores, siempre se puede representar la dependencia de la magnitud buscada en función de las otras magnitudes en forma explícita.

Además, teniendo en cuenta las condiciones concretas del intercambio de calor, se puede realizar una serie de simplificaciones y reducir una dependencia complicada de la forma (2-80) a una simple del tipo (2-81). La nueva fórmula obtenida se diferenciará solamente en el coeficiente constante que tenga en cuenta todas las particularidades del caso examinado del intercambio de calor. De este modo, se pueden usar las fórmulas del tipo (2-81) solamente para unos cuantos casos concretos del intercambio de calor. Un ejemplo de transformación y simplificación de la ecuación de semejanza se da a continuación.

Partiendo de los ensayos, destinados a estudiar la emisión calorífica durante el movimiento del aire dentro de un tubo, se estableció la siguiente dependencia generalizada:

$$\text{Nu}_{df1} = 0,018 \text{ Re}_{df1}^{0,80}.$$

Después de introducir los valores de  $\text{Nu}_{df1}$  y  $\text{Re}_{df1}$  la dependencia toma la forma:

$$\frac{\alpha d}{\lambda_{f1}} = 0,018 \left( \frac{wd}{\nu_{f1}} \right)^{0,80},$$

de donde

$$\alpha = 0,018 \frac{\lambda_{f1}}{\nu_{f1}^{0,80}} \frac{w^{0,80}}{d^{0,20}}. \quad (2-82)$$

Cuando la dependencia analizada está presentada en forma tan explícita, es fácil estimar el papel y la influencia de las magnitudes separadas en el proceso de la emisión calorífica. La influencia de cada magnitud es tanto mayor, cuanto mayor es su exponente. Por esto en la ecuación (2-82) el primer lugar lo ocupa la conductibilidad térmica del líquido  $\lambda_{f1}$ , luego van la velocidad  $w$ , el coeficiente cinemático de viscosidad del líquido  $\nu_{f1}$  y, al final, el diámetro del tubo  $d$ .



La fórmula (2-82) puede representarse así:

$$\alpha = B \frac{w^{0,80}}{d^{0,20}}, \quad (2-83)$$

donde el coeficiente  $B = 0,018 \frac{\lambda_{f1}}{w_{f1}^{0,80}}$ , depende solamente de la temperatura media del aire y su valor se puede calcular de antemano.

Por su aspecto exterior la fórmula (2-83) es análoga a la fórmula (2-81), pero su contenido es diferente: la fórmula (2-83) toma en consideración adicionalmente la influencia de la temperatura y la del diámetro de la tubería. El ejemplo aducido muestra que cualquier ecuación de semejanza se puede transformar y reducir a una dependencia simple y cómoda para los cálculos técnicos.

**Ejemplo 2-1.** Valiéndose del tubo de diámetro  $d = 12$  mm se realizó la investigación de la emisión calorífica en un flujo transversal del aire. Los resultados de estos ensayos se exponen en la tabla 2-1. Es necesario establecer las dependencias  $\alpha = f(w)$  y  $Nu_{df1} = f(Re_{df1})$ .

Tabla 2-1

| $w, \text{ m/s}$ | $\alpha, \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}$ | $Re_{df1} \times 10^{-3}$ | $Nu_{df1}$ | $w, \text{ m/s}$ | $\alpha, \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}$ | $Re_{df1} \times 10^{-3}$ | $Nu_{df1}$ |
|------------------|--|---------------------------|------------|------------------|--|---------------------------|------------|
| 6,8              | 72,1   | 5,45                      | 39,9       | 14,2             | 113  | 11,6                      | 62,5       |
| 8,45             | 81,6   | 6,87                      | 45,1       | 19,1             | 136  | 15,1                      | 75,5       |
| 10,1             | 91,8   | 9,04                      | 50,6       | 24,8             | 155  | 20,2                      | 86,1       |
| 11,9             | 102,6  | 9,55                      | 56,4       | 25,8             | 162  | 20,4                      | 87,9       |

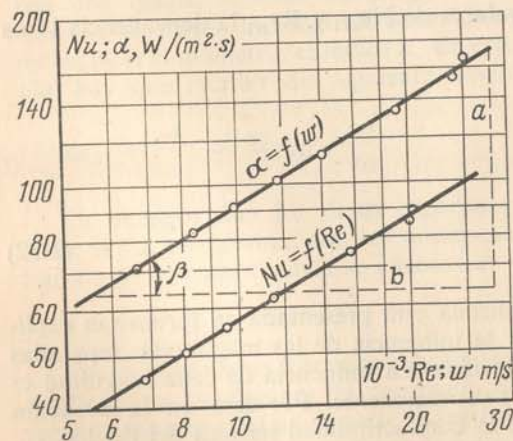


Fig. 2-10. Determinación de la dependencia exponencial entre las variables.

dichas determinaciones y tomar su media aritmética:

$$\text{cuando } w = 6 \text{ m/s, } c = \frac{67,5}{6^{0,6}} = \frac{67,5}{2,94} = 22,9;$$

$$\text{cuando } w = 12 \text{ m/s, } c = \frac{102}{12^{0,6}} = \frac{102}{4,45} = 22,9;$$

$$\text{cuando } w = 25 \text{ m/s, } c = \frac{158}{25^{0,6}} = \frac{158}{6,9} = 22,9.$$

El valor de la media aritmética  $c = 22,9$  y por eso definitivamente tenemos  $\alpha = 22,9 w^{0,6}$ .

Al realizar operaciones análogas para la segunda dependencia buscada  $Nu_{df1} = f(Re_{df1})$ , obtenemos  $Nu_{df1} = 0,227 Re_{df1}^{0,6}$ .

La última fórmula se puede desarrollar y representar, por ejemplo, de esta forma:

$$\alpha = 0,227 \frac{\lambda_{f1}}{d^{0,6}} \frac{w^{0,6}}{d^{0,4}}.$$



## INTERCAMBIO DE CALOR EN LÍQUIDOS Y GASES

### 3.1. Emisión calorífica durante el flujo currentilíneo alrededor de una superficie plana (una placa)

1. **Condiciones hidrodinámicas de desarrollo del proceso.** Cuando un líquido fluye a lo largo de una superficie plana tiene lugar la formación de una dinámica capa límite, dentro de cuyos límites la velocidad cambia debido a las fuerzas de fricción viscosa. Dicho cambio va desde el valor de velocidad del flujo no perturbado  $w_0$  en la frontera exterior de la capa, hasta cero en la misma superficie de la placa. A medida de que el flujo corre a lo largo de la superficie, el espesor de la capa límite crece paulatinamente; la acción frenadora de la pared se propaga a capas del líquido cada vez más lejanas de ésta. A distancias pequeñas del borde de ataque de la placa, la capa límite es muy delgada y la corriente del líquido dentro de sus límites tiene carácter de chorros laminares. Luego, a cierta distancia  $x_{cr}$  en la capa límite comienzan a surgir remolinos y la corriente adquiere un carácter turbulento. Los remolinos contribuyen al mezclado intensivo del líquido en la capa límite, sin embargo en la proximidad inmediata a la superficie los torbellinos se apaciguan y en este lugar permanece inalterada una subcapa viscosa muy fina. El cuadro que describe el proceso se expone en la fig. 3-1.

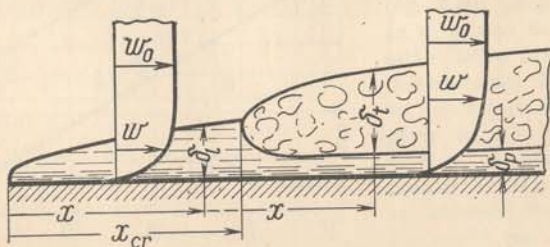


Fig. 3-1. Esquema de movimiento de un líquido durante el flujo currentilíneo alrededor de una placa.

El espesor de la capa límite  $\delta$  depende de la distancia a partir del borde de ataque de la placa, de la velocidad del flujo  $w_0$  y el coeficiente cinemático de viscosidad  $\nu$ . Cuando la capa límite es laminar

$$\delta_l = 5 \frac{x}{\text{Re}_x^{1/2}} = 5 \left( \frac{x\nu}{w_0} \right)^{1/2}. \quad (3-1)$$

Cuando la capa límite es turbulenta,

$$\delta_t = 0,37 \frac{x}{\text{Re}_x^{0,2}} = 0,37 \left( \frac{x^4\nu}{w_0} \right)^{1/5} \quad (3-2)$$

donde  $\text{Re}_x = w_0 x / \nu$  es el número de Reynolds en que, como dimensión característica, se acepta la distancia  $x$ .

El paso al régimen turbulento de la corriente en la capa límite se determina por el valor crítico del número de Reynolds:

$$\text{Re}_{x_{cr}} = \frac{w_0 x_{cr}}{\nu},$$

el que, cuando existe flujo currentilíneo longitudinal alrededor de la placa, generalmente se toma igual a  $5 \cdot 10^5$ .

Un análisis más detallado muestra que la magnitud  $\text{Re}_{cr}$  depende de una serie de factores. La influencia básica la ejerce el grado de turbulencia inicial del flujo que corre al encuentro, es decir, la presencia de perturbaciones y remolinos iniciales en el flujo. Normalmente se acepta caracterizar el grado de turbulencia del flujo mediante la relación entre la magnitud de la velocidad media de las pulsaciones turbulentas  $v_p$  y la velocidad de movimiento del flujo  $w_0$ , es decir, mediante el coeficiente  $k = v_p / w_0$ . Cuanto más alta es la turbulencia inicial del flujo, tanto menor es la magnitud  $\text{Re}_{cr}$ . La velocidad media de las pulsaciones en el flujo se determina como

$$v_p = \sqrt{\frac{1}{3} (\vec{v})_{med}^2}$$

donde  $\vec{v}'$  es el valor instantáneo del vector de la velocidad de pulsación;

$(\vec{v}')_{med}^2$  es el valor medio respecto al tiempo del cuadrado de  $\vec{v}'$ .

Además, sobre la magnitud  $\text{Re}_{cr}$  puede influir la rugosidad de la superficie de placa, la intensidad del intercambio de calor, etc. El mismo paso del régimen laminar de corriente del líquido al turbulento en la capa límite, según muestran los datos experimentales, no se opera en un punto, sino en un sector determinado, debido a lo cual a veces se introducen dos valores:  $\text{Re}_{cr1}$  y  $\text{Re}_{cr2}$ , donde  $\text{Re}_{cr1} = w_0 x_{cr1} / \nu$  es el número crítico de Reynolds, que corresponde al paso del régimen laminar de la corriente al transitorio, cuando en la capa límite surgen primeros remolinos y pulsaciones;  $\text{Re}_{cr2} = w_0 x_{cr2} / \nu$  es el número crítico de Reynolds para el paso al régi-



men turbulento desarrollado de la corriente. En la fig. 3-2 se dan las dependencias  $Re_{cr1}$  y  $Re_{cr2}$  en función del grado de la turbulencia inicial del flujo que corre al encuentro.

H. Blasius fue el primero que realizó en 1908 el cálculo teórico de la distribución de velocidades en la capa límite laminar. Determinó que la relación entre las velocidades  $w(x, y)/w_0$  depende solamente de una variable  $\eta = y\sqrt{w_0/\nu x}$ ; es decir, el perfil de la velocidad en la capa límite tiene la forma:

$$w/w_0 = f(\eta). \quad (3-3)$$

El gráfico de este perfil se expone en la fig. 3-3. Aunque desde un punto de vista teóricamente estricto  $w$  tiende hacia el valor de  $w_0$  sólo asintóticamente, en la fig. 3-3

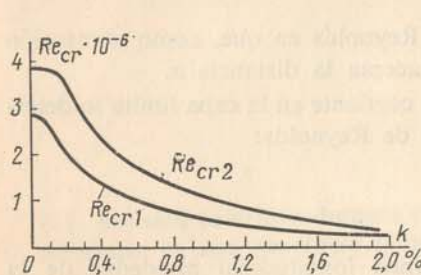


Fig. 3-2. Dependencia entre el número crítico  $Re$  y el grado de turbulencia del flujo.

se ve que, siendo el valor de  $\eta \approx 5$ , la diferencia entre  $w$  y  $w_0$  prácticamente desaparece (más exactamente, cuando  $\eta \approx 5$ ,  $w \approx 0,99 w_0$ ). Este valor de  $\eta = 5$  determina la distancia  $y = \delta$  que se toma, corrientemente, como el espesor de la capa límite laminar; de aquí se deduce la fórmula (3-1).

El flujo que corre alrededor de la placa, ejerce sobre ésta una acción dinámica determinada. Esta acción encuentra su expresión en forma de la fuerza aplicada a la superficie de la placa y dirigida por la tangente a ésta en sentido del movimiento del líquido. La fuerza tangencial por unidad de superficie de la placa se llama esfuerzo tangencial de fricción y se determina según la ley de rozamiento viscoso de Newton como:

$$s = \mu \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y \rightarrow 0}.$$

La derivada  $\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y \rightarrow 0}$  teniendo en cuenta la dependencia (3-3) puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y \rightarrow 0} = \frac{dw}{d\eta} \Big|_{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial \eta}{\partial y} = w_0 \sqrt{\frac{w_0}{\nu x}} \frac{df}{d\eta} \Big|_{\eta \rightarrow 0} = 0,33 w_0 \sqrt{\frac{w_0}{\nu x}},$$

puesto que en la fig. 3-3 se ve que

$$\frac{df}{d\eta} \Big|_{\eta \rightarrow 0} = \text{tg} \beta = 0,33.$$

Por eso definitivamente obtenemos:

$$s = 0,33 \rho w_0^2 (\nu_0 x / \nu)^{-1/2}. \quad (3-4)$$

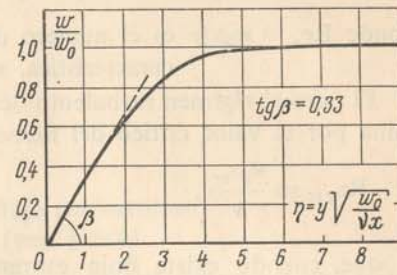


Fig. 3-3. Distribución de las velocidades cuando el régimen de la corriente en la capa límite es laminar.

Esta expresión determina el valor del esfuerzo tangencial de fricción  $s$  en el punto situado a una distancia  $x$  del borde de ataque de la placa.

El esfuerzo tangencial medio en el tramo  $0 - l$  es:

$$\bar{s} = \frac{1}{l} \int_0^l s dx.$$

Después de realizar los cálculos tenemos:

$$\bar{s} = 0,66 \rho w_0^2 (\nu_0 l / \nu)^{-1/2}. \quad (3-5)$$

De las ecuaciones (3-4) y (3-5) se deduce que el esfuerzo tangencial para la corriente laminar, en la capa límite, disminuye a lo largo de la placa según la ley  $x^{-1/2}$  ó  $l^{-1/2}$ .

Como muestran los datos experimentales, en la capa límite turbulenta la distribución de velocidades tiene la forma representada en coordenadas relativas en la fig. 3-4 (curva 1). Esta distribución de velocidades con una buena aproximación se describe por la correlación

$$w/w_0 = (y/\delta)^{1/7} \quad (3-6)$$

la cual es justa para la zona turbulenta de la capa límite.

En la capa muy fina (viscosa), cerca de la misma superficie, la variación de las velocidades tiene carácter rectilíneo. A título de comparación en la fig. 3-4 se muestra también en las mismas coordenadas (curva 2) la distribución de las velocidades para el caso de una corriente laminar en la capa límite.

El esfuerzo tangencial de fricción, al existir la capa límite turbulenta, según los datos experimentales, se determina mediante la expresión

$$s = 0,03 \rho w_0^2 (\nu_0 x / \nu)^{-1/5}. \quad (3-7)$$

El valor medio constituye:

$$\bar{s} = 0,037 \rho w_0^2 (\nu_0 l / \nu)^{-1/5}. \quad (3-8)$$

Estas fórmulas son válidas para todos los valores de  $Re$  hasta  $10^7$ .

La fórmula (3-7) muestra que el esfuerzo tangencial de fricción disminuye en presencia de la capa límite turbulenta según la ley de  $x^{-1/5}$ , es decir, en menor grado que en el caso de la capa límite laminar.

**2. Emisión calorífica.** Cuando la superficie de la placa  $t_p$  y del flujo que corre al encuentro de ésta  $t_{fl}$  tienen diferentes temperaturas, entre la superficie y el flujo del agente portador de calor (líquido o gas) se realiza un proceso del intercambio de calor. Según la ley de Newton-Richman:

$$q = \alpha(t_p - t_{fl})$$

la densidad del flujo calorífico es proporcional a la magnitud de la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $t_p - t_{fl}$ . El coeficiente de traspaso del calor  $\alpha$  depende del cuadro hidrodinámico y el régimen de corriente del agente portador de calor, de la distancia  $x$  a partir del borde de ataque de la placa y las propiedades termofísicas del medio.

Durante el intercambio de calor, cerca de la superficie de la placa, se forma una capa límite térmica dentro de cuyos límites la temperatura del

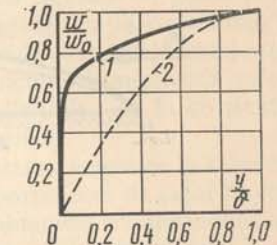


Fig. 3-4. Distribución de las velocidades en la capa límite en las coordenadas relativas.

1 — régimen turbulento de corriente; 2 — régimen laminar de corriente.



agente portador de calor varía desde un valor igual a la temperatura de la pared  $t_p$ , hasta el valor de la temperatura del flujo lejos de la superficie  $t_{fl}$  (fig. 3-5). El carácter de la distribución de la temperatura en la capa límite térmica depende del régimen de la corriente del líquido en la capa límite dinámica. El carácter mismo de formación de la capa térmica resulta

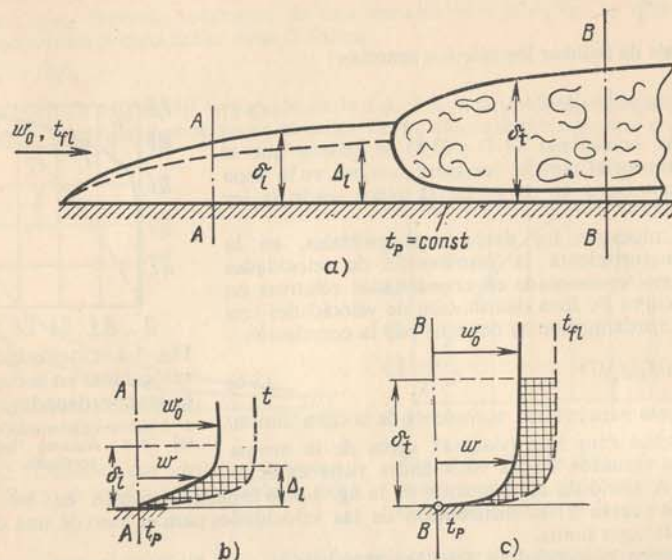


Fig. 3-5. Capas límites térmica y dinámica cuando el flujo currentilíneo contornea una placa (a). Campo de temperaturas y velocidades en las capas límites laminar (b) y turbulenta (c).

muy semejante al carácter del desarrollo de la capa límite dinámica. Así pues, en la capa límite laminar la relación entre los espesores de las capas dinámica  $\delta_l$  y térmica  $\Delta_l$  depende solamente del número de Prandtl, es decir, de las propiedades termofísicas del agente portador de calor. Esto significa que la dependencia de  $\Delta_l$  en función de la velocidad  $w_0$  y la distancia  $x$  permanece la misma que para la capa dinámica. Para el valor  $Pr = 1$ , los espesores de las capas resultan iguales entre sí:  $\Delta_l = \delta_l$ . Si la corriente es laminar, la transferencia de calor entre las capas del líquido que se mueven a lo largo de la superficie, se efectúa mediante la conductibilidad térmica. Si existe la capa límite turbulenta, el cambio fundamental de la temperatura se realiza en la fina subcapa viscosa que está cerca de la superficie y a través de la cual el calor se transfiere también sólo por medio de la conductibilidad térmica. En el núcleo turbulento de la capa límite, debido al mezclado intenso del líquido, el cambio de la temperatura es insignificante y el campo de temperaturas tiene un carácter uniforme, de pendiente suave. De tal modo, tanto en el régimen laminar como en el de movimiento turbulento del líquido, en la capa límite entre la distribución de temperaturas y la de velocidades existe una similitud cualitativa (fig. 3-5, b, c).

Al aumentar la diferencia de temperaturas  $t_p - t_{fl}$  tiene lugar una complicación adicional en el proceso, la cual está ligada al cambio de los parámetros físicos del agente portador de calor con la temperatura. Cuanto más grandes son las diferencias de temperaturas, tanto más se diferencian la viscosidad, la conductibilidad térmica y el calor específico del agente portador de calor, en los distintos puntos de la capa límite. En resumidas cuentas este efecto ejerce su influencia sobre la intensidad de la emisión calorífica. Por ejemplo, si el calor se transmite del líquido de goteo a la pared (es decir, tiene lugar el enfriamiento del líquido en la capa límite), la temperatura de las capas de líquido cerca de la superficie comienza a ser menor y la viscosidad mayor y, por consiguiente, disminuye la velocidad de corriente. El cambio del cuadro hidrodinámico de la corriente motiva también el cambio de la emisión calorífica.

Al generalizar los numerosos datos experimentales acerca de la emisión calorífica, para el caso de que diferentes agentes portadores de calor fluyen longitudinalmente alrededor de la placa, se han obtenido las dependencias de cálculo siguientes.

En caso del régimen de corriente laminar, en la capa límite el coeficiente local de traspaso del calor se determina de la correlación (26)

$$Nu_{xfl} = 0,33 Re_{xfl}^{0,5} Pr_{fl}^{0,33} (Pr_{fl}/Pr_p)^{0,25}. \quad (3-9)$$

Para determinar el coeficiente medio de traspaso del calor a partir de la relación (3-9) puede obtenerse la dependencia

$$\overline{Nu}_{lfl} = 0,66 Re_{lfl}^{0,5} Pr_{fl}^{0,33} (Pr_{fl}/Pr_p)^{0,25}. \quad (3-10)$$

Cuando el régimen de la corriente es turbulento, en la capa límite el coeficiente local de traspaso del calor se determina de la relación [64]

$$\overline{Nu}_{xfl} = 0,03 Re_{xfl}^{0,8} Pr_{fl}^{0,43} (Pr_{fl}/Pr_p)^{0,25}. \quad (3-11)$$

Para determinar el coeficiente medio de traspaso del calor partiendo de la relación (3-11), se utiliza la dependencia

$$\overline{Nu}_{lfl} = 0,037 Re_{lfl}^{0,8} Pr_{fl}^{0,43} (Pr_{fl}/Pr_p)^{0,25}. \quad (3-12)$$

En las correlaciones enumeradas de (3-9) a (3-12)

$$Nu_{xfl} = \alpha x / \lambda_{fl}; \quad \overline{Nu}_{lfl} = \bar{\alpha} l / \lambda_{fl};$$

$$Re_{xfl} = w_0 x / \nu_{fl}; \quad Re_{lfl} = w_0 l / \nu_{fl};$$

$$Pr_{fl} = \nu_{fl} / a_{fl}; \quad Pr_p = \nu_p / a_p.$$

Los índices "fl" y "p" señalan que las propiedades físicas del agente portador de calor se refieren a  $t_{fl}$  y  $t_p$ , respectivamente. El multiplicador  $(Pr_{fl}/Pr_p)^{0,25}$ , que forma parte de estas fórmulas, es la corrección que toma en consideración la influencia de la variación de los parámetros físicos del agente portador de calor durante el cambio de la temperatura para la emisión calorífica. Puede decirse que este multiplicador caracteriza la dependencia entre la emisión calorífica y la dirección y magnitud del flujo calorífico.



Al calentar un líquido de goteo (orientación directa del flujo calorífico),  $Pr_{fl}/Pr_p > 1$ , y al enfriarlo (orientación inversa del flujo calorífico),  $Pr_{fl}/Pr_p < 1$ .

Al utilizar las fórmulas de cálculo, enumeradas en las ecuaciones de (3-9) a (3-12) para los gases, aquellas pueden simplificarse.

Cuando se trata del aire,  $Pr=0,71$  y las fórmulas de cálculo para la emisión calorífica media toman la forma:

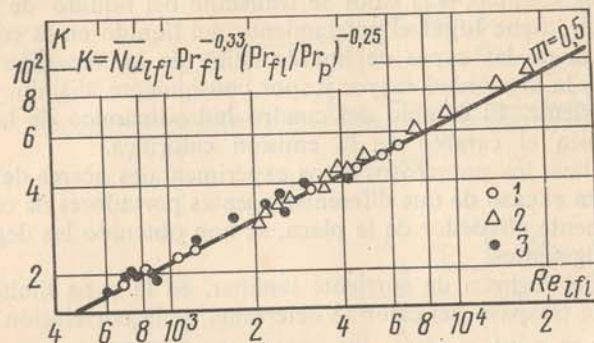


Fig. 3-6. Emisión calorífica media de las placas en el régimen laminar de corriente.

1 — aire; 2 — agua; 3 — aceite para transformadores

a) para el régimen laminar de corriente en la capa límite

$$\overline{Nu}_{fl} = 0,57 Re_{fl}^{0,5}; \quad (3-13)$$

b) para el régimen turbulento de corriente en la capa límite

$$\overline{Nu}_{fl} = 0,032 Re_{fl}^{0,8}. \quad (3-14)$$

Las fórmulas de (3-9) a (3-14) son aplicables para las condiciones en que la temperatura de la placa es constante ( $t_p = const$ ), es decir, no cambia por la longitud.

En la fig. 3-6 se exponen los resultados de la generalización de los datos experimentales acerca de la emisión calorífica media de una placa en la capa límite laminar [26]. En la fig. 3-7 se muestran los resultados de la generalización de los datos experimentales de la emisión calorífica de una placa cuando la capa límite es turbulenta [64].

El cambio cualitativo del coeficiente local de traspaso del calor  $\alpha_{loc}$  según la longitud de la placa se presenta en la fig. 3-8. La disminución de  $\alpha_{loc}$  en el tramo inicial 1 de la placa está ligada con el desarrollo de la capa límite laminar; aquí de la relación (3-9) se deduce que  $\alpha_{loc}$  es proporcional a  $1/\sqrt{x}$ . La zona transitoria 2 se caracteriza por el aumento de la emisión calorífica debido a la aparición del mezclado turbulento. En la zona de la capa límite turbulenta desarrollada 3 es propio un cambio más

suave de  $\alpha_{loc}$  por la longitud;  $\alpha_{loc}$  es proporcional a  $1/\sqrt{x}$ , lo que se obtiene de la relación (3-11).

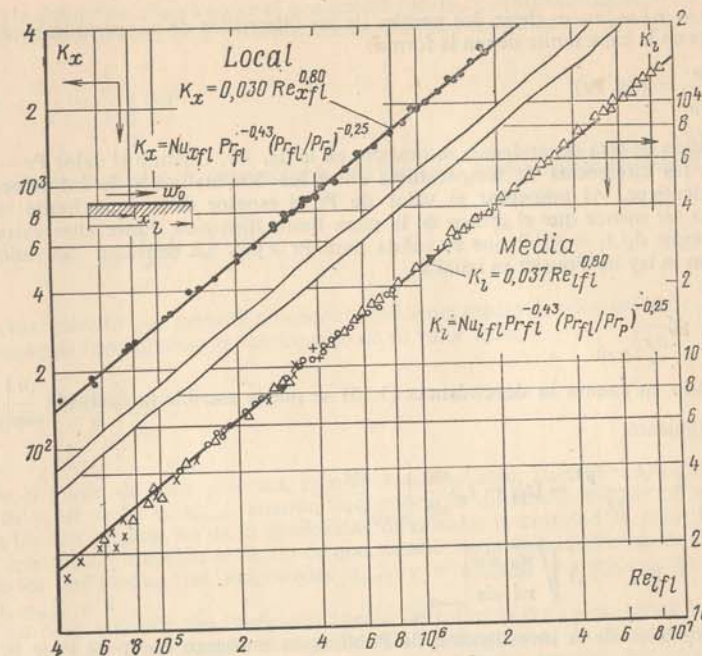


Fig. 3-7. Emisiones caloríficas local y media de una placa cuando el régimen de corriente del líquido es turbulento.

El cálculo teórico de distribución de las temperaturas y de la emisión calorífica en la capa límite laminar, lo realizó por primera vez Pohlhausen en el año 1921. En esta investigación las propiedades físicas del agente portador de calor y la temperatura de la superficie de la placa según la longitud se suponían constantes. Pohlhausen determinó que la relación entre las diferencias de temperaturas entre los dos medios  $(t - t_p)/(t_{fl} - t_p)$ , siendo fijo el valor del número de  $Pr$ , depende solamente de una

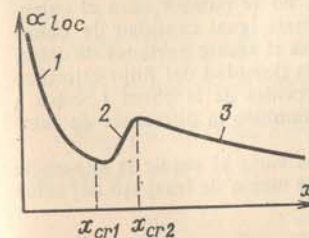


Fig. 3-8. Variación del coeficiente local de traspaso del calor a lo largo de una placa.

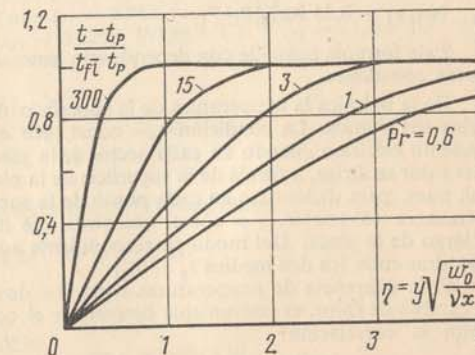


Fig. 3-9. Perfiles de las diferencias de temperaturas entre los dos medios en la capa límite laminar para diferentes valores de  $Pr$ .



variable  $\eta = y \sqrt{w_0/\nu x}$ , es decir, los perfiles de las diferencias de temperaturas entre los dos medios en la capa límite tienen la forma:

$$\frac{t - t_p}{t_{f1} - t_p} = \varphi(\eta, Pr). \quad (3-15)$$

El gráfico de esta dependencia se muestra en la fig. 3-9. Cuando el valor  $Pr = 1$ , los perfiles de las diferencias de temperaturas entre los dos medios y de las velocidades resultan idénticos. Al aumentar el valor de  $Pr$  el espesor de la capa límite térmica comienza a ser menor que el grosor de la capa límite dinámica. Entre ellas existe una relación simple  $\delta_1/\delta_1 = Pr^{1/3}$  que es válida para  $Pr \geq 0.6$ . La densidad del flujo calorífico, según la ley de Fourier es igual a:

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=0}.$$

Teniendo en cuenta la dependencia (3-15) se puede escribir la derivada  $\frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=0}$  en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \frac{\partial(t - t_p)}{\partial y} = (t_{f1} - t_p) \frac{d\varphi}{d\eta} \Big|_{\eta=0} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\ &= (t_{f1} - t_p) \sqrt{\frac{w_0}{\nu x}} \frac{d\varphi}{d\eta} \Big|_{\eta=0}. \end{aligned}$$

Los resultados de la investigación de Pohlhausen muestran que para  $Pr \geq 0.6$ , la derivada  $\frac{d\varphi}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = 0.33 Pr^{1/3}$ . Por eso, en resumen la densidad del flujo calorífico es igual a:

$$q = 0.33 \lambda (t_{f1} - t_p) \sqrt{\frac{w_0}{\nu x}} Pr^{1/3},$$

o en forma adimensional;

$$\alpha x / \lambda = 0.33 (w_0 x / \nu)^{1/2} Pr^{1/3},$$

ó

$$Nu_{x f1} = 0.33 Re_{x f1}^{1/2} Pr^{1/3}. \quad (3-16)$$

Esta fórmula coincide con dependencia generalizada (3-9) en el caso de propiedades físicas constantes.

En la práctica la temperatura de la superficie de la placa no siempre resulta igual en todos sus puntos. La condición  $t_p = \text{const}$ , por ejemplo, no se cumple para el calentamiento eléctrico cuando en cada sector de la placa se libera igual cantidad de calor. Este calor se dirige, a través de la superficie de la placa hacia el agente portador de calor. Así, pues, para dicho caso en cada punto de la superficie la densidad del flujo calorífico permanece invariable,  $q = \text{const}$ , mientras que la temperatura de la pared  $t_p$  crece a lo largo de la placa. Del modo correspondiente aumenta también la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $t_p - t_{f1}$ .

Si la diferencia de temperaturas entre los dos medios varía al seguir la superficie de cambio de calor, es conveniente determinar el coeficiente medio de traspaso del calor según la correlación:

$$\bar{\alpha} = \frac{Q}{(\bar{t}_p - \bar{t}_{f1})F} = \frac{\bar{q}}{\bar{t}_p - \bar{t}_{f1}}. \quad (3-17)$$

Esta definición muestra que el coeficiente medio de traspaso del calor es el cociente que se obtiene, al dividir la densidad media del flujo calorífico por la superficie

$$\bar{q} = \frac{Q}{F} = \frac{1}{F} \int q dF$$

en la diferencia media de temperaturas entre los dos medios según la superficie

$$(\bar{t}_p - \bar{t}_{f1}) = \frac{1}{F} \int (t_p - t_{f1}) dF.$$

Otro método que permite obtener el coeficiente medio de traspaso del calor consiste en conseguir formalmente el valor medio de su valor local,

$$\alpha_{\text{med}} = \frac{1}{F} \int \alpha dF, \quad (3-18)$$

desde el punto de vista práctico, es menos conveniente, puesto que, incluso el conocimiento del valor de  $\alpha_{\text{med}}$ , cuando se conoce la diferencia media de temperaturas entre los dos medios, no da la posibilidad de calcular la cantidad de calor transmitido. Hay que prestar atención al hecho de que, siendo variable la diferencia de temperaturas entre los dos medios, las magnitudes  $\alpha_{\text{med}}$  y  $\bar{\alpha}$  no son numéricamente iguales, es decir,  $\alpha_{\text{med}} \neq \bar{\alpha}$ .

La determinación del coeficiente medio de traspaso del calor, según la correlación (3-17), también tiene aquella ventaja de que las ecuaciones de cálculo (3-10) y (3-12) para la emisión de calor media de una placa isotérmica resultan por lo común útiles para hallar con el suficiente grado de precisión el coeficiente medio de traspaso de calor de la placa que tiene variable la diferencia de temperaturas entre los dos medios por la longitud. Así, por ejemplo, si empleamos este método al calcular el coeficiente medio de traspaso de calor para una placa en la que  $q = \text{const}$ , las correcciones por ausencia de estado isotérmico alcanzan aproximadamente el +6%, cuando la capa límite es laminar, y, el +1% cuando la capa límite es turbulenta.

En total, la falta de propiedades isotérmicas en la superficie de la placa se revela en mayor grado en la capa límite laminar [26].

**Ejemplo 3-1.** El aire suministrado con una velocidad de  $w_0 = 8 \text{ m/s}$  está dirigido contra una chapa lisa de  $b = 1 \text{ m}$  de ancho y  $l = 1.2 \text{ m}$  de largo. Determinar el coeficiente medio de traspaso de calor  $\bar{\alpha}$  y el flujo calorífico total  $Q$ , si la temperatura de la placa  $t_p = 60^\circ\text{C}$  y la temperatura del aire  $t_{f1} = 20^\circ\text{C}$ .

Cuando  $t_{f1} = 20^\circ\text{C}$  tenemos:  $\lambda_{f1} = 0.0259 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$  y  $\nu_{f1} = 15.06 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

$$Re_{l f1} = \frac{w_0 l}{\nu_{f1}} = \frac{8 \cdot 1.2}{15.06 \cdot 10^{-6}} = 6.35 \cdot 10^5;$$

$$Re_{l f1}^{0.8} = 4.48 \cdot 10^4.$$

Al introducir estos valores en la ecuación (3-14) obtenemos:

$$\overline{Nu}_{l f1} = 0.032 Re_{l f1}^{0.8} = 0.032 \cdot 4.48 \cdot 10^4 = 1.42 \cdot 10^3,$$

de donde:

$$\bar{\alpha} = \frac{\overline{Nu}_{l f1} \lambda_{f1}}{l} = \frac{1.42 \cdot 10^3 \cdot 0.0259}{1.2} = 30.6 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)};$$

$$Q = \bar{\alpha} F \Delta t = \bar{\alpha} b l (t_p - t_{f1}) = 30.6 \cdot 1 \cdot 1.2 (60 - 20) = 1470 \text{ W}.$$



### 3-2. Emisión calorífica al fluir el líquido por los tubos

1. **Condiciones hidrodinámicas del desarrollo del proceso.** Durante el movimiento forzado del líquido en los tubos se distinguen dos regímenes de corriente: laminar y turbulento. El régimen laminar se observa, cuando son pequeñas las velocidades de movimiento del líquido. Cuando las velocidades del flujo superan cierto valor  $w_{cr}$ , el régimen de la corriente se transforma en turbulento. Para líquidos y tuberías diferentes la velocidad crítica es distinta. El régimen de la corriente del líquido se determina por la magnitud del número  $Re = wd/v$ . Si  $Re$  es menor del crítico  $Re_{cr}$ , entonces el régimen de la corriente es laminar. Durante el movimiento del líquido en los tubos  $Re_{cr} = 2 \cdot 10^3$ . El régimen turbulento desarrollado se establece, cuando los valores de  $Re > 1 \cdot 10^4$ . La gama de variación de  $Re$  desde  $2 \cdot 10^3$  hasta  $1 \cdot 10^4$  corresponde al régimen transitorio de la corriente.

La distribución parabólica de las velocidades según la sección (fig. 3-10, a) es característica para el régimen isotérmico laminar. Para ella

$$w = w_0 (1 - y^2/r^2),$$

donde  $w_0$  es la velocidad en el eje del tubo;

$w$  es la velocidad a una distancia  $y$  del eje y

$r$  es el radio del tubo.

En los cálculos prácticos, normalmente, se utilizan los valores medios de la velocidad:

$$\bar{w} = \frac{1}{f} \int w df = \frac{V}{f}, \quad (3-19)$$

donde  $\bar{w}$  es la velocidad media;

$f$  es el área de la sección transversal del tubo y

$V$  es el gasto volumétrico del líquido.

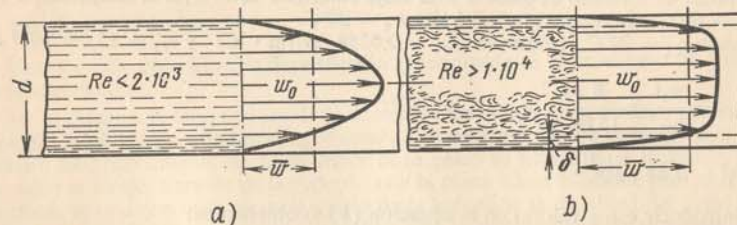


Fig. 3-10. Distribución de las velocidades en la sección cuando los regímenes del movimiento de un líquido en un tubo son laminar (a) y turbulento (b).

La relación entre la velocidad media y la máxima en caso del régimen laminar de corriente es constante:  $\bar{w}/w_0 = 0,5$ .

Para el régimen turbulento desarrollado de movimiento de un líquido, la distribución de las velocidades en una sección del tubo tiene la forma de parábola truncada (fig. 3-10, b). Cerca de la pared del tubo la curva

cambia de modo brusco y en la parte media de la sección, en el núcleo turbulento del flujo, varía de modo suave. La velocidad máxima se observa también en el eje del tubo.

La relación entre la velocidad media y la máxima es la función del número  $Re$

$$\bar{w}/w_0 = f(Re).$$

En la fig. 3-11 esta dependencia se muestra en forma gráfica.

Las leyes citadas para la distribución de las velocidades según la sección del tubo, son válidas sólo para el así llamado **movimiento hidrodinámicamente estabilizado**. La estabilización no se produce inmediatamente, sino a

cierta distancia de la entrada al tubo. En el tramo de entrada el carácter de movimiento y la distribución de las velocidades sufren grandes cambios. El proceso de estabilización del perfil de las velocidades se realiza del modo siguiente. Cerca de la sección de entrada, en la superficie del tubo, se forma una capa límite dinámica cuyo espesor crece paulatinamente a medida que aumenta la distancia a partir de la entrada del tubo. A cierto alejamiento de la entrada, en el tubo se efectúa la convergencia de las capas y la corriente adquiere un carácter estabilizado. En la fig. 3-12 se presenta en forma esquemática un desarrollo semejante de dicho proceso. Si el número  $Re = \bar{w}d/v$  es menor que el crítico, entonces en toda la longitud del tubo el movimiento hidrodinámico inicial de estabilización la corriente en la capa límite tiene el carácter laminar (fig. 3-12, a). Cuando  $Re > Re_{cr}$ ,

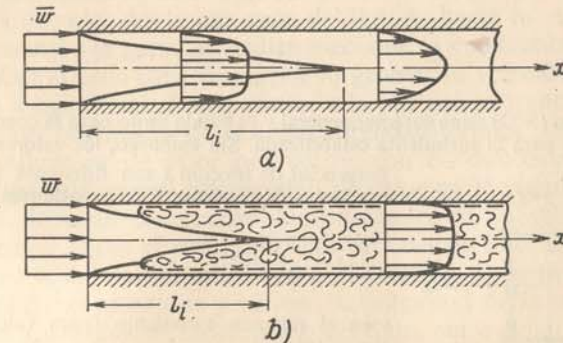


Fig. 3-12. Estabilización hidrodinámica de la corriente de un líquido en un tubo.

a — régimen laminar de corriente; b — régimen turbulento de corriente

en la zona próxima a la sección de entrada se forma, al principio, una capa límite laminar que luego se transforma en turbulenta. Después de que las



capas límites turbulentas convergen, se forma la corriente turbulenta estabilizada del líquido (fig. 3-12, b). Sin embargo, cerca de la misma superficie, en una subcapa viscosa muy fina la corriente sigue conservando carácter laminar.

La longitud del tramo hidrodinámico inicial de estabilización del flujo en el régimen laminar se determina mediante la correlación:

$$l_{in} = 0,05 d Re, \quad (3-20)$$

es decir, el valor de  $l_{in}$  es tanto mayor, cuanto más grande es el número  $Re = \bar{w}d/\nu$ .

Para la corriente turbulenta la magnitud  $l_{in}$  depende poco de  $Re$  y es aproximadamente

$$l_{in} \approx 15 d. \quad (3-21)$$

Cuando la corriente del líquido en el tubo está estabilizada, la presión en sentido de movimiento del flujo disminuye. En cada tramo la diferencia de presiones equilibra la fuerza del esfuerzo tangencial de fricción  $s$  en las paredes del tubo, la cual surge como resultado de la presencia de las fuerzas de viscosidad. Para un elemento (porción) del líquido encerrado en el volumen  $\frac{\pi d^2}{4} dx$  (fig. 3-13) la ecuación de equilibrio de fuerzas tiene la forma siguiente. La fuerza de presión aplicada a este volumen es igual a la diferencia de presiones totales en sus caras derecha e izquierda:

$$(p - dp) \frac{\pi d^2}{4} - p \frac{\pi d^2}{4} = -dp \frac{\pi d^2}{4}.$$

La fuerza del esfuerzo tangencial de fricción aplicada a la superficie lateral de elemento que tiene el área  $\pi d dx$ , es igual a  $s \pi d dx$ , donde  $s$  es el esfuerzo tangencial de fricción por unidad de superficie de la pared. La ecuación de equilibrio de estas fuerzas es:

$$-dp \frac{\pi d^2}{4} = s \pi d dx$$

o

$$-\frac{dp}{dx} = 4 \frac{s}{d}. \quad (3-22)$$

La correlación (3-22) tiene carácter general y es válida tanto para la corriente laminar del líquido, como para la turbulenta estabilizada. Sin embargo, los valores del esfuerzo tangencial de fricción  $s$  son diferentes para los dos regímenes de corriente. En el caso de régimen laminar:

$$s = \frac{8}{Re} \rho \bar{w}^2; \quad (3-23)$$

y en el régimen turbulento (para valores hasta de  $Re \approx 10^6$ )

$$s = \frac{0,0395}{Re^{1/4}} \rho \bar{w}^2. \quad (3-24)$$

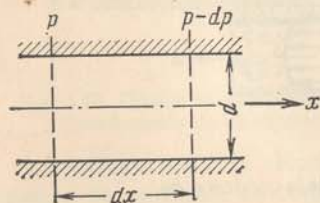


Fig. 3-13. Elemento de líquido en un tubo

El esfuerzo tangencial de fricción  $s$ , para corriente isotérmica de un líquido incompresible, permanece constante en toda la longitud del tubo. Por eso la ecuación de equi-

brio de fuerzas (3-22) puede escribirse también en forma de diferencias finitas de presiones

$$\Delta p = 4s \frac{l}{d}, \quad (3-25)$$

donde  $\Delta p = p_1 - p_2$  es la diferencia de presiones en un tramo del tubo de longitud  $l$ .

Si ambos miembros de la ecuación (3-25) se dividen por la altura cinética (presión dinámica)  $\rho \bar{w}^2$ , entonces a la izquierda tenemos el número de Euler ( $Eu = \Delta p / \rho \bar{w}^2$ ) y la ecuación toma la forma:

$$Eu = 4 \frac{s}{\rho \bar{w}^2} \frac{l}{d}. \quad (3-26)$$

En la hidromecánica se acepta caracterizar la resistencia mediante un coeficiente adimensional que se llama coeficiente de resistencia de rozamiento y se designa, por lo común, con  $\xi$ . Está ligado con el número de Euler por la siguiente correlación simple:

$$\xi = 2 Eu \frac{d}{l} \quad (3-26 a)$$

o en forma desarrollada

$$\Delta p = \xi \frac{\rho \bar{w}^2 l}{2 d}. \quad (3-26 b)$$

De las ecuaciones (3-23) — (3-26) se deduce que, si la corriente es laminar en tubos redondos, el coeficiente de resistencia se determina como

$$\xi = 64/Re, \quad (3-27)$$

y si la corriente es turbulenta

$$\xi = 0,316/Re^{1/4}. \quad (3-28)$$

La correlación (3-27) representa la ley de Poiseuille. La correlación (3-28) se conoce con el nombre de la ley de Blasius.

**2. Emisión calorífica en el régimen laminar.** En la corriente laminar la transferencia de calor desde una capa del líquido hacia la otra en la dirección de la normal a la pared se realiza mediante la conductibilidad térmica. Al mismo tiempo cada capa tiene, por lo general su velocidad diferente de movimiento longitudinal. Por lo tanto, a la par con la transferencia transversal de calor, por medio de la conductibilidad térmica, tiene lugar también la transferencia de calor por convección en dirección longitudinal. Como resultado de esto el intercambio de calor en el régimen laminar de la corriente depende del cuadro hidrodinámico de movimiento.

Examinemos ahora el desarrollo del proceso de intercambio de calor a lo largo del tubo. Supongamos que en la sección de entrada la temperatura del líquido es constante y difiere en magnitud de la temperatura de pared del tubo. Durante el movimiento del flujo, entre el líquido y la pared tiene lugar un proceso de intercambio de calor y la temperatura del líquido varía paulatinamente. Al principio, en la proximidad de la sección de entrada, la variación de la temperatura tiene lugar sólo en la fina capa situada cerca de la superficie. Luego, a medida que aumenta la distancia a la sección de entrada, una parte cada vez mayor del flujo participa en el



proceso del intercambio térmico. Así pues, el desarrollo del proceso de intercambio térmico en el interior de los tubos al principio se verifica en sentido cualitativo, del mismo modo como esto se realiza cuando la capa límite en una placa es laminar (véase §3-1). Cerca de la superficie de tubo se forma una capa límite térmica cuyo espesor aumenta paulatinamente en sentido de movimiento del flujo. A cierta distancia de la entrada de tubo  $l_{in, t}$ , las capas límites térmicas convergen y en el proceso del intercambio de calor participa luego todo el flujo del líquido. La distancia  $l_{in, t}$  puede evaluarse de modo aproximado mediante la dependencia:

$$l_{in, t} \approx 0,05 d Re Pr.$$

En la práctica normalmente el régimen laminar se encuentra durante el flujo de agentes portadores de calor suficientemente viscosos, como lo son diferentes aceites, para los cuales los valores de  $Pr$  habitualmente superan de modo considerable la unidad. En estas condiciones la longitud del tramo inicial térmico de estabilización  $l_{in, t}$  resulta suficientemente grande. Así, por ejemplo, si  $Re = 200$  y  $Pr = 500$ , entonces  $l_{in, t} \approx 5000 d$ .

A una distancia mayor que  $l_{in, t}$  el perfil de distribución de temperaturas por la sección del tubo sigue cambiándose de la manera expuesta esquemáticamente en la fig. 3-14.

Dentro de los límites del tramo inicial térmico de estabilización el gradiente de temperatura  $(\partial t / \partial n)_{n \rightarrow 0}$  correspondiente al líquido que se halla cerca de la pared, decrece a medida que aumenta la distancia a partir de la entrada, de modo más rápido que la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $(\bar{t}_{fl, x} - t_p)$ , puesto que la parte central del flujo todavía no participa en el intercambio de calor. Por eso de la ecuación de emisión calorífica,

$$\alpha_{loc} = -\lambda \frac{(\partial t / \partial n)_{n \rightarrow 0}}{\bar{t}_{fl, x} - t_p} = \frac{q_x}{\bar{t}_{fl, x} - t_p} \quad (3-29)$$

se deduce que el coeficiente local de traspaso del calor  $\alpha_{loc}$  disminuye paulatinamente a lo largo del tubo. La disminución del coeficiente local

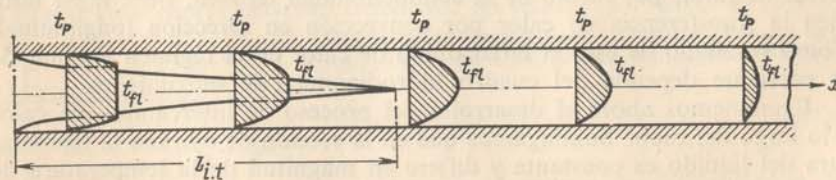


Fig. 3-14. Variación en la distribución de temperaturas según la sección y a lo largo de un tubo cuando en éste se mueve un líquido.

de traspaso del calor continúa hasta que las capas límites térmicas convergen. Luego ambas magnitudes  $\partial t / \partial n$  y  $\bar{t}_{fl, x} - t_p$  decrecen con igual velocidad y el coeficiente local de traspaso del calor adquiere un valor cons-

tante. En la fig. 3-15 se exponen los cambios de los coeficientes local y medio de traspaso del calor en dependencia de la longitud del tubo. Este gráfico muestra que la distancia a la que tiene lugar la estabilización de los coeficientes medios de traspaso del calor  $\bar{l}_{in, t}$  es siempre mayor que la que corresponde a la estabilización de los coeficientes locales de traspaso del calor  $l_{in, t}$ .

En la ecuación (3-29) la magnitud  $\bar{t}_{fl, x}$  es la temperatura media del flujo en la sección dada. Esta a veces se llama temperatura de mezclado, puesto que corresponde a la que adquiere el flujo, si está bien mezclado. La temperatura  $\bar{t}_{fl, x}$  se determina generalmente por la expresión:

$$\bar{t}_{fl, x} = \frac{\int_f c_p \rho w t_{fl} df}{\int_f c_p \rho w df} \quad (3-30)$$

Si se menosprecia la dependencia de  $c_p$  y  $\rho$  en función de la temperatura, la ecuación (3-30) toma la forma:

$$\bar{t}_{fl, x} = \frac{\int_f w t_{fl} df}{\int_f w df} = \frac{1}{V} \int_f w t_{fl} df, \quad (3-30a)$$

donde  $V$  es el gasto volumétrico del líquido.

En el primer caso [la ecuación 3-30)] la obtención de valores medios de temperatura se realiza según la entalpía del líquido, en el segundo [la

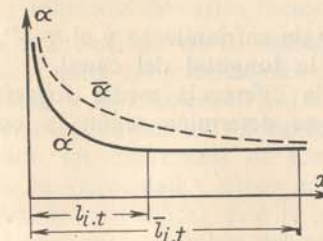


Fig. 3-15. Variación de los coeficientes local y medio de traspaso del calor en función de la longitud del tubo

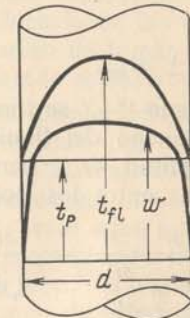


Fig. 3-16. Variación de la velocidad y la temperatura de un líquido en la sección de un tubo.

ecuación 3-30a)], según su gasto volumétrico. Por consiguiente, para obtener los valores medios de temperatura es necesario tener las distribuciones, medidas simultáneamente, de velocidad y de temperatura en la sección examinada (fig. 3-16). Si la velocidad es igual por toda la sección del canal,



la fórmula que permite obtener valores medios (3-30a), queda así:

$$\bar{t}_{flx} = \frac{1}{f} \int_f t df. \quad (3-30b)$$

Al aplicar solamente la medición, sin recurrir a los cálculos ulteriores, se puede obtener la temperatura media en la sección solamente cuando el líquido se ha mezclado intensamente antes de llegar al punto de medición.

La magnitud  $q_x$ , en la ecuación (3-29), da la densidad local del flujo calorífico para una sección determinada.

Para calcular el coeficiente medio de traspaso del calor,

$$\bar{\alpha} = \frac{Q}{F(\bar{t}_{fl} - \bar{t}_p)} = \frac{q}{\bar{t}_{fl} - \bar{t}_p} \quad (3-31)$$

es necesario, normalmente, conocer los valores medios de la temperatura del líquido  $\bar{t}_{fl}$  y de la pared  $\bar{t}_p$  de acuerdo con la longitud del tubo o del canal. Si la temperatura  $\bar{t}_p$  varía en grado insignificante, entonces la obtención de los valores medios de temperatura  $t_{fl}$  por la longitud se verifica del modo siguiente.

Si la variación de la temperatura media a lo largo del tubo es pequeña, la magnitud  $\bar{t}_{fl}$  puede determinarse como la media aritmética de los valores de las temperaturas medias en las secciones inicial  $t'_{fl}$  y final  $t''_{fl}$  del tubo:

$$\bar{t}_{fl} = \frac{1}{2} (t'_{fl} + t''_{fl}). \quad (3-32a)$$

En caso general la obtención de los valores medios se realiza según la fórmula:

$$\bar{t}_{fl} = t_p \pm \Delta t_{log}, \quad (3-32b)$$

donde el signo "+" se toma en caso de enfriamiento y el "-", en caso de calentamiento del líquido según la longitud del canal.

La magnitud  $\Delta t_{log}$  denominada la diferencia media logarítmica de temperaturas entre los dos medios, se determina según la correlación

$$\Delta t_{log} = \frac{\Delta t' - \Delta t''}{\ln \frac{\Delta t'}{\Delta t''}} = \frac{\Delta t' - \Delta t''}{2,303 \lg \frac{\Delta t'}{\Delta t''}}, \quad (3-32c)$$

donde  $\Delta t'$  y  $\Delta t''$  son las diferencias de temperaturas entre los dos medios en las secciones inicial y final del tubo o canal (fig. 3-17, a, b).

La diferencia media logarítmica de temperaturas entre los dos medios siempre es menor que la media aritmética, pero cuando  $\Delta t'/\Delta t'' < 2$  la diferencia entre ellas resulta insignificante (menor que el 4%). Al cumplir esta condición en vez de la ecuación (3-32 b) se puede usar la correlación más simple (3-32 a).

Si en la superficie del tubo se mantiene la densidad constante del flujo calorífico  $q_x = \text{const}$ , lo que ocurre en la práctica (por ejemplo, en el caso del calentamiento eléctrico uniforme de un tubo), entonces la temperatura media del líquido por la longitud siempre se determina como la media aritmética de los valores de las temperaturas medias en las secciones inicial y final del tubo, o sea, según la ecuación (3-32 a).

La magnitud y el carácter del cambio del coeficiente local de traspaso del calor, según la longitud del tubo, dependen de una serie de factores tales como el perfil de temperatura del líquido en la entrada, el perfil inicial de la velocidad y las condiciones de entrada del líquido en el tubo o canal y el carácter del cambio de temperatura de la pared de acuerdo con la longitud del tubo. Con frecuencia en la práctica estas condiciones no se conocen con la precisión debida, lo que motiva dificultades durante el cálculo preciso de la intensidad local del intercambio térmico. El material [74] contiene la investigación detallada de cómo diferentes factores influyen en la emisión calorífica, si el régimen de corriente es laminar.

Los valores del coeficiente medio de traspaso del calor, según la longitud del tubo, dependen en menor grado de la influencia de las condiciones mencionadas anteriormente, puesto que en proceso de tomar los valores medios, la influencia de varios factores por separado se suaviza.

Sobre la intensidad de la emisión calorífica puede influir mucho la dependencia entre las propiedades físicas del líquido (en primer lugar, la viscosidad) y la temperatura. La variación de la temperatura por la sección del tubo determina un cambio de la viscosidad, además cuanto mayores son las diferencias de temperaturas, tanto más intenso es el cambio de la viscosidad y otros parámetros físicos (conductibilidad térmica, capacidad calorífica) por la sección del tubo. La variación de la viscosidad conduce al cambio del perfil del campo de velocidad, lo que, en su lugar, influye sobre la intensidad del intercambio térmico. En función del sentido del flujo calorífico la variación del perfil de velocidad resulta diferente (fig. 3-18). Durante el enfriamiento del líquido su temperatura cerca de la pared resulta más baja y la viscosidad más alta que en el núcleo del flujo. Por eso, si se compara con la corriente isotérmica (1), la velocidad de movimiento del líquido cerca de la pared, en estas condiciones, es más baja, pero en el núcleo del flujo más alta (2). Al calentar el líquido, sucede lo contrario, la velocidad de la corriente del líquido cerca de la pared es más alta y en el núcleo del flujo, más baja (3).

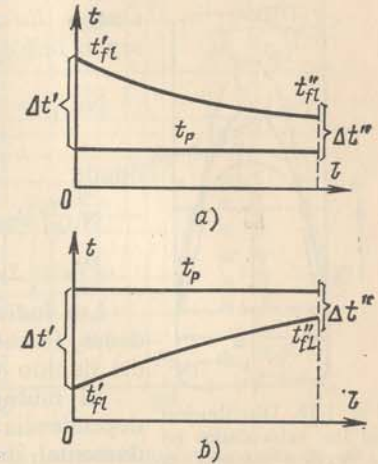


Fig. 3-17. Variación de la diferencia de temperaturas entre los dos medios a lo largo de un tubo, cuando  $t = \text{const}$ .

a — enfriamiento del líquido; b — calentamiento del líquido.



Comunmente en la práctica la velocidad y la temperatura en la entrada del tubo tienen los perfiles próximos a los uniformes. En estas condiciones, cuando el régimen de la corriente del líquido es laminar, el cálculo del coeficiente medio de traspaso del calor, en los tubos siendo  $l/d > 10$  y  $Re_{fl} > 10$ , puede llevarse a cabo según la fórmula

$$\overline{Nu}_{dfl} = 1,4 \left( Re_{dfl} \frac{d}{l} \right)^{0,4} Pr_{fl}^{0,33} (Pr_{fl}/Pr_p)^{0,25}, \quad (3-33)$$

donde

$$\overline{Nu}_{dfl} = \alpha d / \lambda_{fl}; \quad Re_{dfl} = wd / \nu_{fl}; \quad Pr_{fl} = \nu_{fl} / a_{fl};$$

$$Pr_p = \nu_p / a_p.$$

Los índices "fl" y "p" significan que las propiedades físicas se eligen según la temperatura media del líquido y de la pared, respectivamente.

El multiplicador  $(Pr_{fl}/Pr_p)^{0,25}$  tiene en cuenta la dependencia entre las propiedades físicas (en lo fundamental, de la viscosidad) y temperatura e influencia de la dirección del flujo calorífico. La correlación (3-33) es válida para los valores  $0,06 < Pr_{fl}/Pr_p < 10$ .

En la fig. 3-19 se muestra la comparación de los resultados del cálculo según la fórmula (3-33) con los datos experimentales. La correlación (3-33) puede aplicarse también para calcular la emisión calorífica

en los canales planos de anchura  $h$ . En este caso en vez del diámetro  $d$  en la ecuación (3-33) se debe introducir la anchura del canal  $h$ .

La correlación (3-33) es correcta para los valores de

$$Re_{dfl} \frac{d}{l} Pr_{fl}^{5/6} > 15.$$

Para los valores menores de esta magnitud, es decir, para los tubos de longitud muy grande:

$$l/d > 0,067 Re_{dfl} Pr_{fl}^{5/6}, \quad (3-34)$$

la magnitud  $\overline{Nu}_{dfl}$  comienza a ser constante, lo que corresponde a las condiciones de estabilización de la intensidad de emisión calorífica. Cumplidas estas condiciones para determinar el coeficiente medio de traspaso del calor en vez de la correlación (3-33) puede recomendarse la relación aproximada

$$\overline{Nu}_{dfl} \approx 4(Pr_{fl}/Pr_p)^{0,25}. \quad (3-35)$$

Las correlaciones citadas se refieren a las condiciones en que no se refleja la influencia de las fuerzas de sustentación.

Si la variación de la temperatura por la sección y por la longitud del tubo es considerable, las densidades del líquido o del gas resultan diferentes

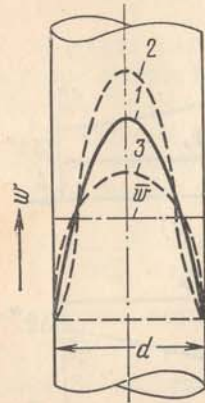


Fig. 3-18. Distribución de las velocidades en la sección cuando la corriente de un líquido en un tubo es laminar, no isotérmico.

1 — en caso de la corriente isotérmica; 2 — durante el enfriamiento; 3 — durante el calentamiento.

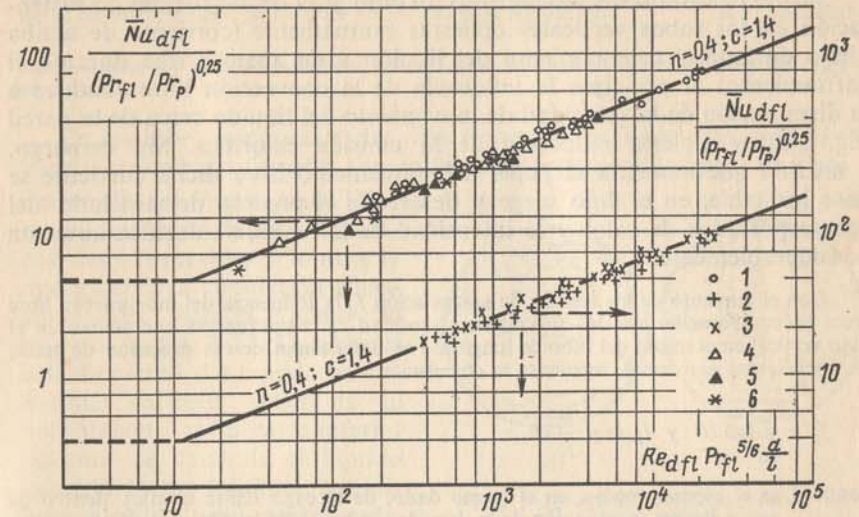


Fig. 3-19. Emisión calorífica media cuando la corriente de líquidos y gases en un tubo y en un canal plano es laminar.

1 — aceite MK; 2 — aceite MC, calentamiento; 3 — aceite MC, enfriamiento [74]; 4 — aceite para transformadores; 5 — agua; 6 — aire [26].

en los distintos puntos del flujo. A consecuencia de esto, en el líquido surgen las fuerzas de sustentación, bajo la acción de las cuales, sobre el movimiento forzado del agente portador de calor, se superpone el movimiento libre. Como resultado, varían el cuadro de movimiento del líquido y la intensidad de la emisión calorífica. Así, en los tubos verticales, al coincidir el sentido de la corriente del líquido con el de la fuerza de sustentación (corriente de abajo hacia arriba durante el calentamiento del líquido y de arriba hacia abajo en el enfriamiento), la velocidad de la corriente del líquido cerca de la pared aumenta, como se demuestra en la fig. 3-20. En resumen la intensidad de la emisión calorífica en este caso aumenta en comparación con el cuando no hay influencia de la convección libre, lo que tiene lugar, por ejemplo, en condiciones de imponderabilidad.

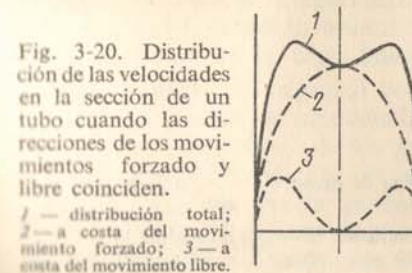


Fig. 3-20. Distribución de las velocidades en la sección de un tubo cuando las direcciones de los movimientos forzado y libre coinciden.

1 — distribución total; 2 — a costa del movimiento forzado; 3 — a costa del movimiento libre.

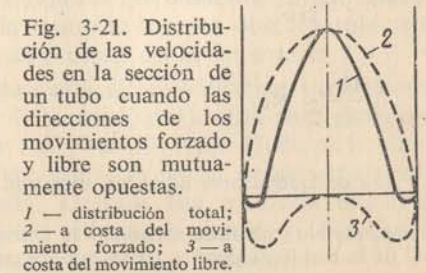


Fig. 3-21. Distribución de las velocidades en la sección de un tubo cuando las direcciones de los movimientos forzado y libre son mutuamente opuestas.

1 — distribución total; 2 — a costa del movimiento forzado; 3 — a costa del movimiento libre.



Siendo el sentido del movimiento forzado y el de las fuerzas de sustentación en los tubos verticales opuestas mutuamente (corriente de arriba abajo durante el calentamiento del líquido y de abajo arriba durante el enfriamiento) al principio la influencia de la convección libre conduce a la disminución de la velocidad de movimiento del líquido cerca de la pared (fig. 3-21) y a cierta reducción de la emisión calorífica. Sin embargo, a medida que aumenta el papel del movimiento libre dicha corriente se hace inestable, en el flujo surge y desarrolla el proceso de mezclado del agente portador de calor y la intensidad de la emisión calorífica aumenta considerablemente.

Con el aumento de las fuerzas de sustentación  $f_g$  la influencia del movimiento libre crece en comparación con las fuerzas de viscosidad  $f_\mu$ . Estas fuerzas que actúan en el flujo vertical en el tramo del tubo de longitud  $l$  se determinan, con la precisión de hasta los coeficientes numéricos, mediante la correlación:

$$f_g \approx g \Delta \rho \delta l R \text{ y } f_\mu \approx \mu \frac{w}{R} l R,$$

donde  $\delta$  es el espesor medio, en el tramo dado, de la capa límite térmica dentro de cuyos límites la variación de la densidad, a causa de la diferencia de temperaturas, es:

$$\Delta \rho = \rho \beta (\bar{t}_p - \bar{t}_{f1});$$

$lR$  es el producto que caracteriza la superficie del tubo, que después, al comparar las fuerzas  $f_g$  y  $f_\mu$ , puede omitirse.

Cuando  $f_\mu \gg f_g$ , las fuerzas de viscosidad suprimen el desarrollo del movimiento libre y la emisión calorífica se determina por las correlaciones aducidas anteriormente.

La influencia del movimiento libre en el intercambio de calor se comienza a percibir en el caso de la conmensurabilidad de estas fuerzas, es decir, a la condición

$$f_\mu \approx f_g \text{ o } \frac{g \beta (\bar{t}_p - \bar{t}_{f1}) \delta R}{\nu w} \approx 1. \quad (3-36)$$

El espesor medio de la capa límite térmica  $\delta$ , en la ecuación (3-36) puede hallarse a partir de la expresión  $\alpha \sim \lambda/\delta$ , o, lo que es lo mismo, como  $\delta \sim R/\text{Nu}$ . Aquí  $\text{Nu}$  es el valor medio del número de Nusselt para el tramo de tubo de la longitud  $l$ . Para determinar el comienzo de aparición de la convección libre se puede hallar la magnitud  $\text{Nu}$  con ayuda de las ecuaciones (3-33) y (3-35).

Al fin de cuentas la condición (3-36) puede escribirse de nuevo en la forma

$$g \beta \frac{(\bar{t}_p - \bar{t}_{f1}) d^2}{4 \nu w} \sim \text{Nu}, \quad (3-37)$$

ó

$$\frac{1}{4} \frac{\text{Gr}}{\text{Re}} \sim \text{Nu}.$$

Las consideraciones aducidas muestran que si la razón  $\frac{1}{4} \frac{\text{Gr}}{\text{Re}}$  supera considerablemente  $\text{Nu}$  (calculado sin contar la convección libre), entonces en realidad la intensidad de la emisión calorífica en los tubos verticales será mayor a causa de la influencia

de la convección libre. Si después de los cálculos resulta que  $\frac{1}{4} \frac{\text{Gr}}{\text{Re}}$  es considerablemente menor que  $\text{Nu}$ , la influencia del movimiento libre en el intercambio de calor no es esencial.

En los tubos horizontales las direcciones de las fuerzas de sustentación y del movimiento forzado son mutuamente perpendiculares, por eso el desarrollo del movimiento libre

se produce aquí en las condiciones más favorables y motiva la aparición de la circulación transversal del líquido, como lo muestra la fig. 3-22. Durante el calentamiento del líquido las capas más calientes suben, en su enfriamiento en la parte inferior del tubo se acumula el líquido más frío. Como resultado la emisión calorífica local cambia radicalmente según el perímetro del tubo con la particularidad de que en la generatriz superior durante

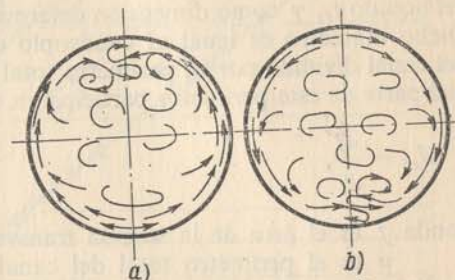


Fig. 3-22. Circulación transversal en un tubo horizontal a consecuencia del movimiento libre del líquido.

a — durante el calentamiento del líquido; b — durante el enfriamiento del líquido.

el calentamiento y en la inferior durante el enfriamiento la emisión calorífica es mínima. Sin embargo, al tomar valores medios por la sección, la intensidad del intercambio térmico en estas condiciones aumenta. Por consiguiente, también en este caso la emisión media de calor aumenta bajo la influencia del movimiento libre, lo que se explica con la circulación transversal del líquido.

Así pues, la influencia de la convección libre complica considerablemente el desarrollo del proceso. En la actualidad no existen recomendaciones comunes para calcular la emisión calorífica, al realizarse las acciones simultáneas de las convecciones forzada y libre. Los materiales de ensayos y las fórmulas empíricas particulares están sistematizados en el texto [74].

**3. Emisión calorífica en el régimen turbulento.** Si el régimen de movimiento es turbulento, la transferencia de calor en el interior del líquido se realiza en lo fundamental mediante el mezclado. En este caso el proceso de mezclado se desarrolla de modo tan intenso que por la sección del núcleo del flujo la temperatura del líquido permanece prácticamente constante. La variación brusca de la temperatura se observa solamente en el interior de la capa fina situada cerca de la superficie.

El primero que organizó correctamente la investigación experimental e hizo una descripción más detallada de la emisión calorífica para el régimen turbulento de corriente de los gases, fue Nusselt [115]. Durante la elaboración de los datos él por primera vez utilizó la teoría de la semejanza y obtuvo una dependencia generalizada. Después fue realizada una gran cantidad de nuevas investigaciones con diferentes canales y líquidos en una gama amplia de variación de los parámetros principales.



Una vez analizados y generalizados los resultados de estas investigaciones, fue establecida la dependencia [62] para calcular la emisión calorífica media;

$$\overline{Nu}_{dfl} = 0,021 Re_{dfl}^{0,80} Pr_{fl}^{0,43} (Pr_{fl}/Pr_p)^{0,25} \varepsilon_l \quad (3-38)$$

Como temperatura determinante se acepta aquí la temperatura media del líquido  $t_{fl}$  y como dimensión determinante, el diámetro equivalente  $d_{eq}$ . Dicho diámetro es igual al cuádruplo del área de la sección transversal del canal dividida por su perímetro total (mojado), independientemente de qué parte de este perímetro participa en el intercambio de calor:

$$d_{eq} = \frac{4f}{u},$$

donde  $f$  es el área de la sección transversal del canal y  $u$  es el perímetro total del canal.

Para los tubos de sección circular el diámetro equivalente es igual al geométrico.

El coeficiente  $\varepsilon_l$  considera el cambio del coeficiente medio de traspaso del calor a lo largo del tubo. Si  $l/d > 50$ , entonces  $\varepsilon_l = 1$ . Cuando  $l/d < 50$  es necesario tener en cuenta la influencia del tramo térmico inicial. Los valores de  $\varepsilon_l$  se dan en la tabla 3-1.

Tabla 3-1

Valores de la dependencia  $\varepsilon_l = f(l/d, Re_{dfl})$  durante el régimen turbulento

| $Re_{dfl}$     | $l/d$ |      |      |      |      |      |      |      |    |
|----------------|-------|------|------|------|------|------|------|------|----|
|                | 1     | 2    | 5    | 10   | 15   | 20   | 30   | 40   | 50 |
| $1 \cdot 10^4$ | 1,65  | 1,50 | 1,34 | 1,23 | 1,17 | 1,13 | 1,07 | 1,03 | 1  |
| $2 \cdot 10^4$ | 1,51  | 1,40 | 1,27 | 1,18 | 1,13 | 1,10 | 1,05 | 1,02 | 1  |
| $5 \cdot 10^4$ | 1,34  | 1,27 | 1,18 | 1,13 | 1,10 | 1,08 | 1,04 | 1,02 | 1  |
| $1 \cdot 10^5$ | 1,28  | 1,22 | 1,15 | 1,10 | 1,08 | 1,06 | 1,03 | 1,02 | 1  |
| $1 \cdot 10^6$ | 1,14  | 1,11 | 1,08 | 1,05 | 1,04 | 1,03 | 1,02 | 1,01 | 1  |

La correlación (3-38) es aplicable a tubos cuya sección transversal tiene cualquier forma: circular, cuadrada, rectangular ( $a/b = 1 \div 40$ ), anular ( $d_2/d_1 = 1 \div 5,6$ ) y a todos los líquidos elásticos y de goteo, cuando  $Re_{dfl} = 1 \cdot 10^4 \div 5 \cdot 10^6$  y  $Pr_{fl} = 0,6 \div 2500$  (fig. 3-23).

La correlación (3-38) es justa también para los canales de la sección transversal complicada, en particular, cuando en un tubo de gran diámetro se sitúan uno o varios tubos de menor diámetro (lavado longitudinal).

El multiplicador  $(Pr_{fl}/Pr_p)^{0,25}$  representa la corrección que considera la dependencia entre las propiedades físicas del agente portador de calor

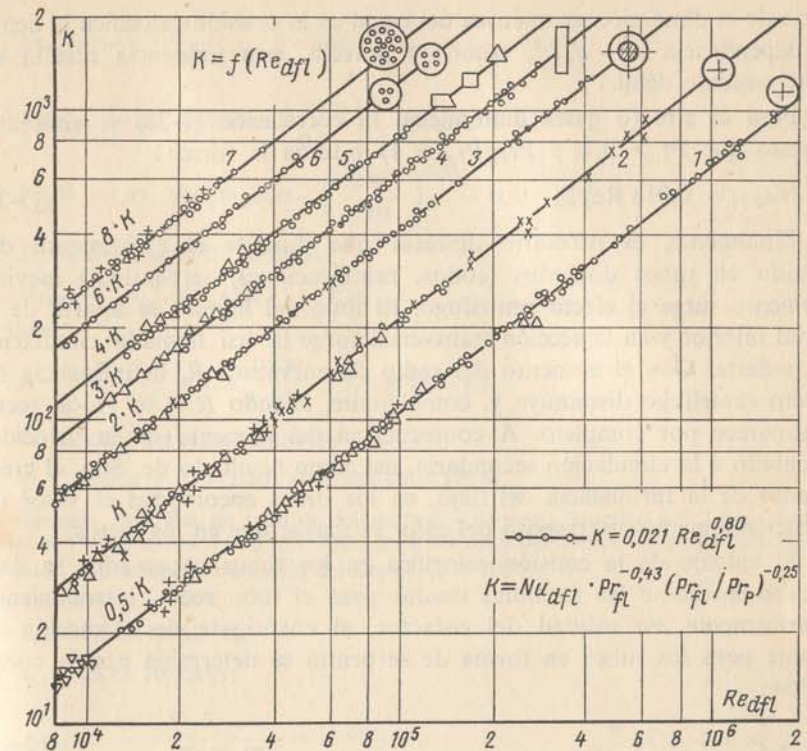


Fig. 3-23. Emisión calorífica media cuando el régimen de la corriente del líquido en los tubos es turbulento.

(fundamentalmente la viscosidad) y la temperatura <sup>1</sup>). De acuerdo con el sentido del flujo térmico esta corrección puede ser tanto mayor, como menor que la unidad.

Al analizar la fórmula (3-38), se deduce que en el régimen turbulento de corriente el coeficiente de traspaso del calor depende en sumo grado de la velocidad del movimiento del agente portador de calor  $\bar{w}$  y de su densidad  $\rho$  [de modo proporcional a  $(\bar{w}\rho)^{0,8}$ ]. Luego la emisión calorífica depende de las propiedades físicas del medio fluido y varía en forma proporcional a  $\lambda^{0,57}$ ,  $c_p^{0,43}$ ,  $\mu^{-0,37}$ , donde  $\lambda$  es el coeficiente de traspaso del calor del agente portador de calor;  $c_p$  es su calor específico cuando la presión es constante y  $\mu$  es el coeficiente dinámico de viscosidad. La influ-

<sup>1</sup> En la zona próxima al punto crítico del estado de la sustancia, como se conoce, todas las propiedades físicas del medio influenciado por la temperatura varían de un modo especialmente fuerte. En estas condiciones la emisión calorífica depende, en forma muy complicada, de la diferencia de temperaturas entre dos medios y del flujo térmico. Las recomendaciones generales útiles para calcular el intercambio de calor en estas condiciones todavía no han sido elaboradas.



encia de la dimensión geométrica del canal en la emisión calorífica la define la dependencia  $\bar{\alpha} \sim d_{eq}^{-0,2}$ , como se aprecia, esta influencia resulta ser relativamente débil.

Para el aire (o gases diatómicos) la correlación (3-38) se simplifica (puesto que  $Pr \approx 0,71$  y  $Pr_{f1}/Pr_p \approx 1$ ) y toma la forma:

$$\overline{Nu}_{df1} = 0,018 Re_{df1}^{0,8} \quad (3-39)$$

Finalmente, es necesario destacar que durante el movimiento del líquido en tubos doblados (codos, ramificaciones, serpentines) inevitablemente surge el efecto centrífugo. El flujo del líquido se aparta de la pared interior y en la sección transversal surge la así llamada circulación secundaria. Con el aumento del radio de curvatura  $R$ , la influencia del efecto centrífugo disminuye y, como límite, cuando  $R = \infty$  (tubo recto) desaparece por completo. A consecuencia del aumento de la velocidad y debido a la circulación secundaria, así como resultado de éste, el crecimiento de la turbulencia del flujo, en los tubos encorvados el valor del coeficiente medio de traspaso del calor es mayor que en los rectos.

El cálculo de la emisión calorífica en los tubos encorvados se lleva a cabo mediante las fórmulas usadas para el tubo recto, introduciendo ulteriormente, en calidad del cofactor, el coeficiente de corrección  $\varepsilon_R$ , el que para los tubos en forma de serpentín se determina por la correlación:

$$\varepsilon_R = 1 + 1,77 \frac{d}{R}, \quad (3-40)$$

donde  $R$  es el radio del serpentín y  $d$  es el diámetro del tubo.

En los serpentines la acción del efecto centrífugo, que intensifica la emisión calorífica, se propaga a toda la longitud del tubo. Aunque en los virajes y derivaciones la acción centrífuga tiene solamente carácter local, su influencia se propaga más lejos. En el tramo recto del tubo que le sigue al viraje, a costa del aumento de la turbulencia del flujo, la emisión calorífica siempre es algo superior que en el tramo recto anterior a la vuelta.

**Ejemplo 3-2.** Determinar el valor medio del coeficiente de traspaso del calor y la cantidad del calor transferido durante la corriente del agua en un tubo horizontal, cuyo diámetro es  $d = 3$  mm y la longitud  $l = 0,5$  m, si la velocidad del agua es  $w = 0,3$  m/s, su temperatura media a lo largo del tubo  $t_{f1} = 60^\circ\text{C}$  y la temperatura media de la pared  $t_p = 20^\circ\text{C}$ .

Cuando  $t_{f1} = 60^\circ\text{C}$  tenemos:  $\lambda_{f1} = 0,659$  W/(m $\cdot^\circ\text{C}$ );  $\nu_{f1} = 0,478 \cdot 10^{-6}$  m $^2$ /s;  $Pr_{f1} = 2,98$ ; cuando  $t_p = 20^\circ\text{C}$ ,  $Pr_p = 7,02$ .

El cálculo lo llevamos a cabo con la fórmula (3-33):

$$\overline{Nu}_{df1} = 1,4 \left( Re_{df1} \frac{d}{l} \right)^{0,4} Pr_{f1}^{0,33} (Pr_{f1}/Pr_p)^{0,25};$$

$$Re_{df1} = \frac{wd}{\nu} = \frac{0,3 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{0,478 \cdot 10^{-6}} = 1885;$$

$$\left( Re_{df1} \frac{d}{l} \right)^{0,4} = \left( 1885 \frac{3 \cdot 10^{-3}}{0,5} \right)^{0,4} = 2,64;$$

$$Pr_{f1}^{0,33} = 1,42; (Pr_{f1}/Pr_p)^{0,25} = \left( \frac{2,98}{7,02} \right)^{0,25} = 0,81.$$

Por la fórmula (3-33) hallamos:

$$\overline{Nu}_{df1} = 1,4 \cdot 2,64 \cdot 1,42 \cdot 0,81 = 4,24,$$

de donde

$$\alpha = \overline{Nu}_{df1} \frac{\lambda_{f1}}{d} = 4,24 \frac{0,659}{3 \cdot 10^{-3}} = 928 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}.$$

La cantidad del calor transferido

$$Q = \pi dl \bar{\alpha} \Delta t = 3,14 \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5 \cdot 928 \cdot 40 = 175 \text{ W}.$$

**Ejemplo 3-3.** Por un tubo de diámetro  $d = 60$  mm y longitud  $l = 2,1$  m, circula el aire con la velocidad  $w = 5$  m/s. Determinar el valor del coeficiente medio de traspaso del calor, si la temperatura media del aire es  $t_{f1} = 100^\circ\text{C}$ .

Cuando  $t_{f1} = 100^\circ\text{C}$

$$\lambda_{f1} = 0,0321 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)};$$

$$\nu_{f1} = 23,13 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s};$$

$$Re_{df1} = \frac{wd}{\nu} = \frac{5 \cdot 0,06}{23,13 \cdot 10^{-6}} = 12970;$$

$$Re_{df1}^{0,8} = 1955.$$

Al reemplazar estos valores en la fórmula (3-39), obtenemos:

$$\overline{Nu}_{df1} = 0,018 \cdot 1955 = 35,2,$$

de donde

$$\alpha = \overline{Nu}_{df1} \frac{\lambda_{f1}}{d} = 35,2 \frac{0,0321}{0,06} = 18,8 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}.$$

Puesto que  $l/d = 2,1/0,06 = 35 < 50$ , es necesario introducir la corrección  $\varepsilon_l$ ; de la tabla 3-1  $\varepsilon_l = 1,04$ .

Entonces en definitiva obtendremos  $\alpha' = \alpha \varepsilon_l = 18,8 \cdot 1,04 = 19,5 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}.$

**Ejemplo 3-4.** En un tubo de diámetro  $d = 50$  mm y longitud  $l = 3$  m, circula el agua con una velocidad  $w = 0,8$  m/s. Determinar el coeficiente medio de traspaso del calor, si la temperatura media del agua  $t_{f1} = 50^\circ\text{C}$  y la de la pared,  $t_p = 70^\circ\text{C}$ .

Cuando  $t_{f1} = 50^\circ\text{C}$ ,  $\lambda_{f1} = 0,648 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)};$   $\nu_{f1} = 5,56 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$  y  $Pr_{f1} = 3,54$ .

Si  $t_p = 70^\circ\text{C}$ ,  $Pr_p = 2,55$ ;

$$Re_{df1} = \frac{wd}{\nu_{f1}} = \frac{0,8 \cdot 0,05}{5,56 \cdot 10^{-7}} = 7,2 \cdot 10^4; Re_{df1}^{0,8} = 7,7 \cdot 10^3;$$

$$Pr_{f1}^{0,33} = 1,72; (Pr_{f1}/Pr_p)^{0,25} = (3,54/2,55)^{0,25} = 1,09.$$



Puesto que  $l/d = 60 > 50$ , la corrección correspondiente a la influencia de la longitud de tubo  $\varepsilon_l = 1$ . Al sustituir estos valores en la fórmula (3-38), obtenemos:

$$\overline{Nu}_{df1} = 0,021 \cdot 7,7 \cdot 10^3 \cdot 1,72 \cdot 1,09 \cdot 1 = 303,$$

de donde

$$\overline{\alpha} = \frac{303 \cdot 0,648}{0,05} = 3920 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}.$$

**Ejemplo 3-5.** Siendo las mismas condiciones del problema que en el ejemplo anterior, determinar el valor medio del coeficiente de traspaso del calor, si el tubo está doblado en forma del serpentín con diámetro  $D = 600 \text{ mm}$ .

Para el tubo recto tenemos  $\alpha_{rec} = 3,92 \cdot 10^3 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}$ .

Para el tubo doblado, según la fórmula (3-40), tenemos:

$$\overline{\alpha}_{enc} = 3,92 \cdot 10^3 \left( 1 + 1,77 \frac{50}{300} \right) = 3,92 \cdot 1,295 \cdot 10^3 = 5,08 \cdot 10^3 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}.$$

### 3-3. Emisión calorífica durante la convección libre

**1. Emisión calorífica en un espacio ilimitado.** El proceso del intercambio térmico durante la convección libre (movimiento libre) del líquido está ampliamente propagado tanto en la técnica, como en la vida cotidiana.

Llámanse libre al movimiento del líquido producido por la diferencia entre las densidades de las partículas calentadas y las frías. Por ejemplo, al entrar el aire en contacto con un cuerpo calentado, el aire que se calienta, se hace más ligero y sube. Pero si el cuerpo es más frío que el aire, entonces, al contrario, al entrar en contacto ambos, el aire se enfría, se hace más pesado y baja. En dichos casos el movimiento del aire surge sin excitación exterior, como resultado del mismo proceso de intercambio térmico. En la fig. 3-24 se expone un típico cuadro del movimiento del aire calentado a lo largo de un tubo vertical.

Durante el movimiento libre del líquido en la capa límite la temperatura de éste varía desde  $t_p$  hasta  $t_{fl}$  y la velocidad, desde cero, cerca de la pared, aumenta hasta el máximo para luego, a gran alejamiento de la pared, volver de nuevo a ser igual a cero (fig. 3-25). Al principio el espesor de la capa calentada es pequeño y la corriente del líquido tiene carácter laminar, en forma de chorros. Pero, según el sentido de movimiento, el espesor de la capa caliente aumenta y, al alcanzar un valor determinado, la corriente del líquido comienza a ser inestable, ondulatoria, rizoforme y después se transforma en vertiginosa, desordenada, turbulenta, en que los remolinos se separan de la pared. Al cambiar



Fig. 3-24. Movimiento libre del aire a lo largo del tubo vertical calentado.

el carácter del movimiento varía también la emisión calorífica. En el movimiento laminar, a consecuencia del aumento del espesor de la capa límite, el coeficiente de traspaso del calor decrece según el sentido de

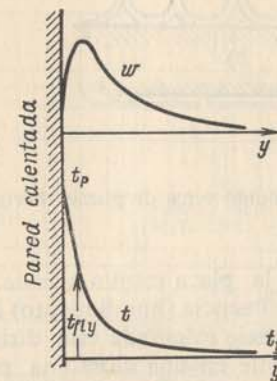


Fig. 3-25. Variación de la temperatura  $t_{fl}$  y la velocidad  $w$  en el movimiento libre del medio a lo largo de una pared vertical calentada.

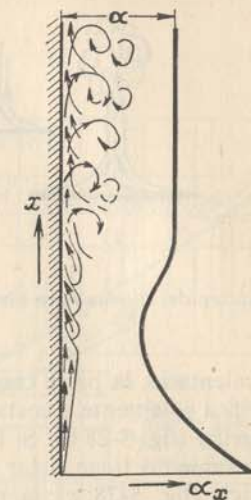


Fig. 3-26. Variación del coeficiente de traspaso del calor según la altura del tubo o de la placa en el movimiento libre del medio.

movimiento y en el movimiento turbulento, este coeficiente crece bruscamente y luego permanece constante por toda la altura (fig. 3-26).

En el desarrollo del movimiento libre la forma del cuerpo desempeña el papel secundario. Mientras tanto la extensión de la superficie, a lo largo de la cual se realiza el movimiento, y su posición tienen gran importancia. El cuadro del movimiento del líquido a lo largo de la pared vertical (o a lo largo del tubo vertical), descrito anteriormente, es típico también para los tubos horizontales y los cuerpos de forma ovalada. El carácter del movimiento de aire cerca de tubos horizontales calentados de diferente diámetro se muestra en la fig. 3-27.

Cerca de paredes o placas planas horizontales calentadas, el movimiento del líquido tiene otro carácter y en gran medida depende de la posición de la placa y sus dimensiones. Si la superficie calentada está dirigida

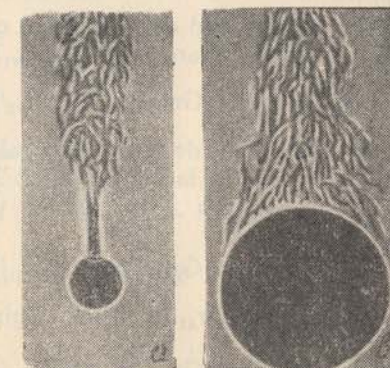


Fig. 3-27. Carácter del movimiento libre del aire alrededor de tubos horizontales. a —  $d=28 \text{ mm}$ ; b —  $d=250 \text{ mm}$ ; vista desde el tope.



hacia arriba, entonces el movimiento se realiza en correspondencia con el esquema de la fig. 3-28 a. En este caso, si la placa tiene grandes dimensiones, como consecuencia de la salida por los bordes del flujo continuo

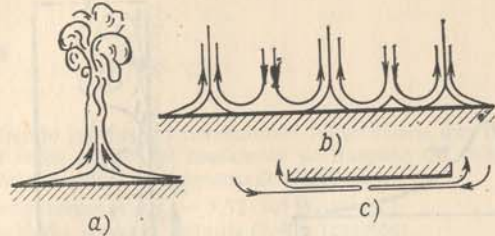


Fig. 3-28. Carácter del movimiento libre del líquido cerca de placas horizontales calentadas.

del líquido calentado, la parte central de la placa resulta aislada. Su ventilación se verifica solamente a costa de la afluencia (hundimiento) del líquido frío desde arriba (fig. 3-28 b). Si la superficie calentada está dirigida hacia abajo, el movimiento tiene lugar solamente en una capa fina por debajo de la superficie (fig. 3-28, c); la masa restante de líquido situado inferior a esta capa, permanece inmóvil.

Para estudiar la intensidad del intercambio de calor en las condiciones del movimiento libre se han realizado investigaciones con diversos cuerpos y distintos líquidos. Como resultado de la generalización de los datos experimentales se han obtenido las ecuaciones de semejanza para los valores medios del coeficiente de traspaso del calor. En estas fórmulas, en calidad de la temperatura determinante se toma la temperatura del medio ambiente  $t_{fl}$ . Como dimensión determinante para los tubos horizontales se acepta el diámetro  $d$ , y para las superficies verticales, la altura  $h$ .

La regularidad de la emisión calorífica media para tubos horizontales de diámetro  $d$ , cuando  $10^3 < Gr_{dfl} Pr_{fl} < 10^8$  (fig. 3-29), tiene la forma [65]:

$$\overline{Nu}_{dfl} = 0,50 (Gr_{dfl} Pr_{fl})^{0,25} (Pr_{fl}/Pr_p)^{0,25}, \quad (3-41)$$

y la regularidad de la emisión calorífica media para superficies verticales (tubos, placas) es la siguiente (fig. 3-29):

a) cuando  $10^3 < Gr_{hfl} Pr_{fl} < 10^9$  (régimen laminar)

$$\overline{Nu}_{hfl} = 0,76 (Gr_{hfl} Pr_{fl})^{0,25} (Pr_{fl}/Pr_p)^{0,25}, \quad (3-42)$$

b) cuando  $Gr_{hfl} Pr_{fl} > 10^9$  (régimen turbulento)

$$\overline{Nu}_{hfl} = 0,15 (Gr_{hfl} Pr_{fl})^{0,33} (Pr_{fl}/Pr_p)^{0,25}. \quad (3-43)$$

Para los gases  $Pr = \text{const}$  y  $Pr_{fl}/Pr_p = 1$ , por lo que todas las fórmulas de cálculo anteriormente aducidas se simplifican.

Para el aire  $Pr = 0,7$  y las correlaciones (3-41) — (3-43) toman la forma:

$$\overline{Nu}_{dfl} = 0,46 Gr_{dfl}^{0,25}, \quad (3-41 a)$$

$$\overline{Nu}_{hfl} = 0,695 Gr_{hfl}^{0,25}, \quad (3-42 a)$$

$$\overline{Nu}_{hfl} = 0,133 Gr_{hfl}^{0,33}. \quad (3-43 a)$$

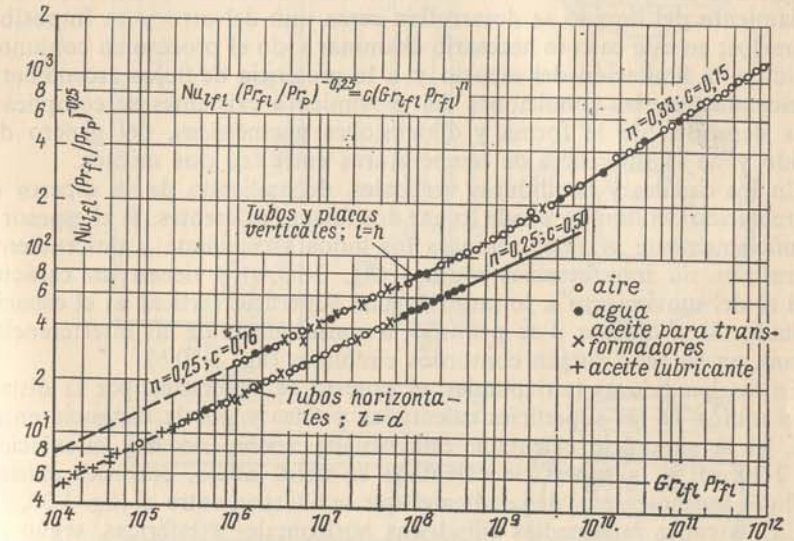


Fig. 3-29. Emisión de calor durante el movimiento libre de diferentes líquidos.

**Ejemplo 3-6.** Determinar la pérdida del calor por convección en una tubería de vapor vertical no aislada de diámetro  $d = 100$  mm y altura  $h = 4$  m, si la temperatura de la pared exterior  $t_p = 170^\circ\text{C}$  y la temperatura del medio ambiente (aire),  $t_{fl} = 30^\circ\text{C}$ .

Cuando  $t_{fl} = 30^\circ\text{C}$  tenemos  $\lambda_{fl} = 0,0267 \text{ W/(m}\cdot^\circ\text{C)}$ ;

$$\nu_{fl} = 16,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}; Pr_{fl} = 0,70; Pr_{fl}/Pr_p = 1;$$

$$\beta = \frac{1}{303} \text{ } 1/^\circ\text{C},$$

$$Gr_{hfl} = \frac{\beta h^3 g \Delta t}{\nu^2} = \frac{4^3 \cdot 9,81 (170 - 30) \cdot 10^{12}}{303 \cdot (16,0)^3} = 1,135 \cdot 10^{12};$$

$$Gr_{hfl} Pr_{fl} = 1,135 \cdot 10^{12} \cdot 0,70 = 8,0 \cdot 10^{11}.$$

Al reemplazar estos valores en la expresión (3-43) obtenemos:

$$\overline{Nu}_{hfl} = 0,15 (8,0 \cdot 10^{11})^{0,33} = 140,$$

de donde

$$q = \frac{\overline{Nu}_{hfl} \lambda_{fl}}{h} = \frac{140 \cdot 0,0267}{4} = 9,3 \text{ W/(m}^2\cdot^\circ\text{C)}.$$



La pérdida del calor buscada es:

$$Q = \bar{\alpha} F (t_p - t_{f1}) = 9,3 \cdot 3,14 \cdot 0,1 \cdot 4 \cdot 140 = 1620 \text{ W.}$$

**2. Emisión calorífica en un espacio limitado.** Antes se examinaron las condiciones del intercambio de calor en un espacio ilimitado, en el que se desarrollaba un solo fenómeno, por ejemplo, el calentamiento de un líquido. En un espacio limitado los fenómenos de calentamiento y enfriamiento del líquido se desarrollan cerca uno del otro y es imposible separarlos; en este caso es necesario examinar todo el proceso en conjunto. Debido a la limitación del espacio y a la presencia de flujos ascendientes y descendientes, las condiciones del movimiento existentes se complican. Estas dependen de la forma y dimensiones geométricas, del género del líquido y de la diferencia de temperaturas entre los dos medios.

En los canales y hendiduras verticales, dependiendo de su espesor  $\delta$ , la circulación del líquido puede tomar dos formas diferentes. Si el espesor  $\delta$  es suficientemente grande, entonces los flujos ascendente y descendente se realizan sin interferencias mutuas (fig. 3-30, a) y tienen un carácter igual al del movimiento a lo largo de una superficie vertical en el espacio ilimitado. Si el espesor  $\delta$  es pequeño, a consecuencia de las interferencias mutuas, en su seno surgen contornos circulares (fig. 3-30 b).

En las hendiduras horizontales, el proceso se determina por la disposición mutua de las superficies calentadas y frías y por la distancia entre ellas. Si la superficie calentada está situada arriba, no hay circulación (fig. 3-30, c). Si la superficie calentada se ubica abajo, entonces existen los flujos ascendientes y descendientes que se alternan entre sí (fig. 3-30, d).

En las capas intermedias cilíndricas horizontales y esféricas, según su espesor (o la correlación entre los diámetros), la circulación se desarrolla de acuerdo con los esquemas e y f de la fig. 3-30. Es necesario prestar atención al hecho de que aquí la circulación se desarrolla sólo en la zona que se encuentra por encima del borde inferior de la superficie calentada. Debajo de este borde el líquido permanece en reposo. Si está calentada la superficie exterior cilíndrica, entonces la circulación del líquido se produce conforme al esquema de la fig. 3-30, g y abarca todo el espacio situado bajo el borde superior de la superficie fría.

Para facilitar el cálculo, se admite considerar este proceso muy complicado de intercambio de calor por convección, como un fenómeno elemental de la conductibilidad térmica, introduciendo además el concepto del coeficiente equivalente de conductibilidad térmica  $\lambda_{eq} = Q\delta/F\Delta t$ . Si el valor de este último se divide por el coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda$  del medio, obtendremos una magnitud adimensional  $\varepsilon_c = \lambda_{eq}/\lambda$ , que caracteriza la influencia de la convección y se llama coeficiente de convección.

Puesto que la circulación del líquido está acondicionada por la diferencia entre las densidades de las partículas calentadas y frías y se determina por el producto  $GrPr$ , entonces también  $\varepsilon_c$  debe ser función del mismo argumento, es decir,

$$\varepsilon_c = f(Gr_{f1}Pr_{f1}).$$

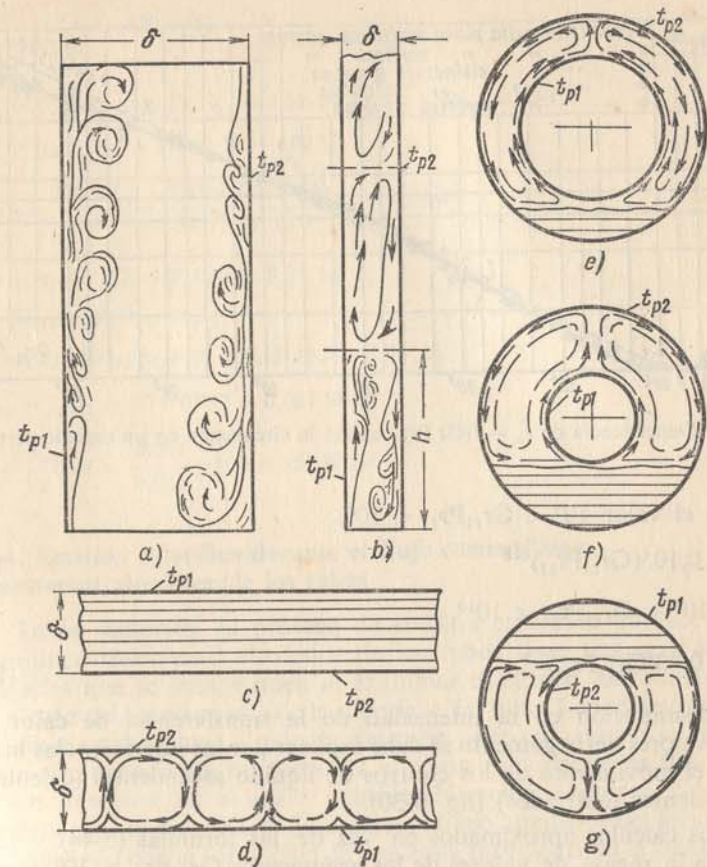


Fig. 3-30. Carácter de la circulación natural del líquido en un espacio cerrado limitado.

Esta dependencia se representa en la fig. 3-31. Al calcular los números de semejanza, (independientemente de la forma que tenga la capa intermedia) por dimensión determinante se toma su espesor  $\delta$  y por temperatura determinante, la temperatura media del líquido  $t_{f1} = 0,5(t_{med 1} + t_{med 2})$ . A pesar del carácter convencional de una elaboración semejante y de la evidente insuficiencia de parámetros determinantes, en el sistema de coordenadas elegido todos los puntos experimentales, correspondientes a las capas intermedias planas (verticales y horizontales), cilíndricas y esféricas quedan bastante bien situados en una curva común (fig. 3-31).

Cuando los valores del argumento son pequeños  $Gr_{f1}Pr_{f1} < 1000$  [o  $\lg Gr_{f1}Pr_{f1} < 3$ ], el valor de la función es  $\varepsilon_c = 1$  ( $\lg \varepsilon_c = 0$ ). Esto significa que para pequeños valores de  $Gr_{f1}Pr_{f1}$  la transferencia de calor de la pared caliente a la fría, a través de las capas intermedias, se debe solamente a la conductibilidad térmica del líquido.



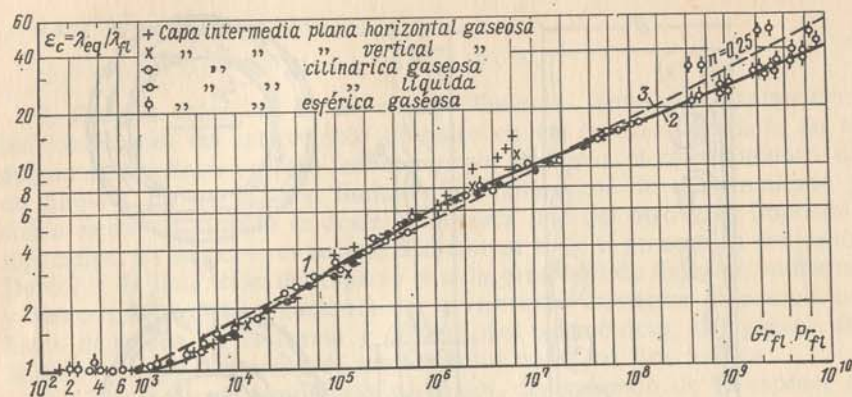


Fig. 3-31. Dependencia de  $\varepsilon_c = f(Gr Pr)$  cuando la circulación en un espacio cerrado es natural.

Para el valor  $10^3 < Gr_{f1} Pr_{f1} < 10^6$ ,

$$\varepsilon_c = 0,105(Gr_{f1} Pr_{f1})^{0,3} \quad (3-44)$$

y para  $10^6 < Gr_{f1} Pr_{f1} < 10^{10}$ ,

$$\varepsilon_c = 0,40(Gr_{f1} Pr_{f1})^{0,2}. \quad (3-45)$$

La disminución en la intensidad de la transferencia de calor para grandes valores del argumento se debe explicar por las interferencias mutuas durante el movimiento de los chorros de líquido ascendentes (calentados) y descendentes (enfriados) (fig. 3-30).

En los cálculos aproximados en vez de las fórmulas (3-44) y (3-45), para toda la región de valores de los argumentos  $Gr_{f1} Pr_{f1} > 10^3$  se puede utilizar la dependencia;

$$\varepsilon_c = 0,18(Gr_{f1} Pr_{f1})^{0,25}, \quad (3-46)$$

que se puede reducir a la forma:

$$\varepsilon_c = A \sqrt[4]{\delta^3 \Delta t}, \quad (3-47)$$

donde

$$A = 0,18 \frac{(\beta g Pr)^{0,25}}{\nu^{0,5}}.$$

Si durante el cálculo según la fórmula (3-47) resulta que  $\varepsilon_c < 1$ , esto significa que  $Gr_{f1} Pr_{f1} < 1 \cdot 10^3$  y, por consiguiente,  $\varepsilon_c = 1$ .

**Ejemplo 3-7.** Determinar el coeficiente equivalente de conductibilidad térmica que corresponde a una capa intermedia plana de aire con espesor  $\delta = 25$  mm. La temperatura de la superficie caliente es  $t_{p1} = 150^\circ\text{C}$ , y la de la fría,  $t_{p2} = 50^\circ\text{C}$ .

Cuando  $t_{f1} = \frac{150 + 50}{2} = 100^\circ\text{C}$ , tenemos:

$$\lambda_{f1} = 0,032 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}; \nu_{f1} = 2,31 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s y } Pr_{f1} = 0,69;$$

$$\Delta t = t_{p1} - t_{p2} = 150 - 50 = 100^\circ\text{C};$$

$$Gr_{f1} = \frac{\beta g \delta^3 \Delta t}{\nu^2} = \frac{9,81(0,025)^3 \cdot 100}{373 \cdot 5,33 \cdot 10^{-10}} = 7,73 \cdot 10^4;$$

$$Gr_{f1} Pr_{f1} = 7,73 \cdot 10^4 \cdot 0,69 = 5,33 \cdot 10^4$$

$$\text{y } (Gr_{f1} Pr_{f1})^{0,25} = 15,2;$$

$$\varepsilon_c = 0,18 (Gr_{f1} Pr_{f1})^{0,25} = 0,18 \cdot 15,2 = 2,74;$$

$$\lambda_{eq} = \varepsilon_c \lambda_{f1} = 2,74 \cdot 0,032 = 0,088 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)};$$

$$q = \frac{\lambda_{eq}}{\delta} \Delta t = \frac{0,088}{0,025} \cdot 100 = 352 \text{ W/m}^2.$$

### 3-4. Emisión calorífica durante el flujo currentilíneo transversal alrededor de los tubos

1. **Tubos solitarios.** El proceso de emisión calorífica durante el flujo currentilíneo transversal alrededor de los tubos tiene una serie de particularidades que se comprenden al examinar el cuadro hidrodinámico del movimiento del líquido cerca de la superficie del tubo. Los ensayos muestran que el flujo currentilíneo alrededor del tubo tiene un carácter suave e inseparable sólo cuando los números  $Re < 5$  son muy pequeños (fig. 3-32, a). Para los números  $Re = w_0 d / \nu$  considerablemente mayores, tales como se presentan en la práctica, el flujo currentilíneo alrededor del tubo siempre va acompañado con la formación de una zona turbulenta en la parte trasera; como lo muestra la fig. 3-32, b, c. En este caso el carácter y las condiciones del bañado de las mitades delantera (frontal) y trasera (posterior) del cilindro son completamente diferentes.

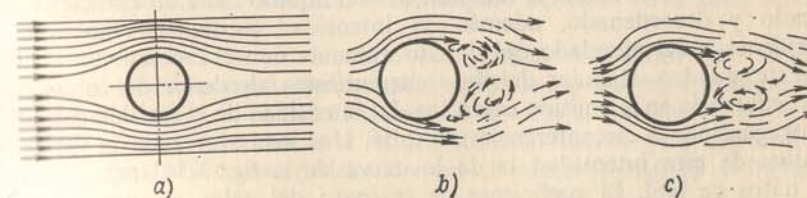


Fig. 3-32. Flujo currentilíneo alrededor de un solo cilindro.

a — inseparable; b — separación de la capa límite laminar; c — separación de la capa límite turbulenta.

En el punto frontal el flujo incidente, que corre al encuentro de tubo, se separa en dos partes y contornea suavemente la parte delantera del perímetro del tubo. Sobre la superficie del tubo se forma una capa límite



que tiene espesor mínimo en el punto frontal, y luego aumenta paulatinamente sus dimensiones. El desarrollo de la capa límite a lo largo del perímetro del tubo tiene lugar en las condiciones cuando la velocidad exterior y la presión del flujo son variables. La velocidad de las capas del líquido, que se adhieren a la frontera exterior de la capa límite, aumenta a lo largo del perímetro del tubo, y la presión disminuye de acuerdo con la ecuación de Bernoulli. Al alcanzar el punto del perímetro que corresponde al ángulo  $\varphi \approx 90^\circ$  (este ángulo se calcula a partir del punto frontal), la velocidad alcanza sus valores máximos y luego ésta empieza a disminuir, lo que va acompañado con el aumento (restablecimiento) de la presión.

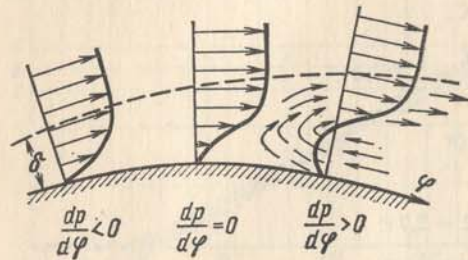


Fig. 3-33. Distribución de las velocidades cerca de la superficie del cilindro y formación de la corriente inversa.

En esta zona la capa límite comienza a ser inestable, en ella surge la corriente inversa (fig. 3-33), que aparta el flujo de la superficie. Como resultado tiene lugar la separación del flujo y la formación de la zona turbulenta que abarca la parte trasera del tubo. La ubicación del punto de separación en que se aparta la capa límite, depende del valor de  $Re$  y el grado de turbulencia del flujo incidente. Siendo pequeño el grado de turbulencia del flujo exterior y los números  $Re$  relativamente pequeños, tiene carácter laminar. En este caso la ubicación de la zona en donde comienza la separación que sufre la capa límite, se caracteriza mediante el ángulo  $\varphi = 80 \div 85^\circ$  (fig. 3-32, b). Cuando los números de Reynolds son considerables [ $Re = (1 \div 4) \cdot 10^5$ ], la corriente en la capa límite se hace turbulenta en la mayor parte del perímetro. La capa límite turbulenta es más estable, la zona en donde comienza la separación, se desplaza a la región de los ángulos grandes  $\varphi \approx 120 \div 140^\circ$  (fig. 3-32, c).

En la zona turbulenta el movimiento del líquido tiene un carácter complicado y desordenado, además, la intensidad media del movimiento turbulento y del mezclado del líquido aumenta con el crecimiento de  $Re$ .

Este cuadro singular del flujo currentilíneo alrededor del tubo ejerce gran influencia en la emisión calorífica. La intensidad de la emisión calorífica no es igual por la circunferencia del tubo. Una idea acerca de la variación relativa de esta intensidad la da la curva de la fig. 3-34 trazada según los datos de [46]. El coeficiente de traspaso del calor alcanza su valor máximo en la generatriz frontal del cilindro ( $\varphi = 0$ ), donde el espesor de la capa límite es mínimo. Por la superficie exterior del cilindro, en la dirección de movimiento del líquido, la intensidad del intercambio de calor descendiendo bruscamente y para  $\varphi = 90 \div 100^\circ$  alcanza su mínimo. Esta variación está ligada al crecimiento del espesor de la capa límite la que como si aísla la superficie del tubo del flujo principal. En la parte

trasera del tubo el coeficiente de traspaso del calor crece de nuevo como consecuencia del mejoramiento de la extracción del calor. Es resultado del movimiento vertiginoso y la mezcla del líquido. Para los valores

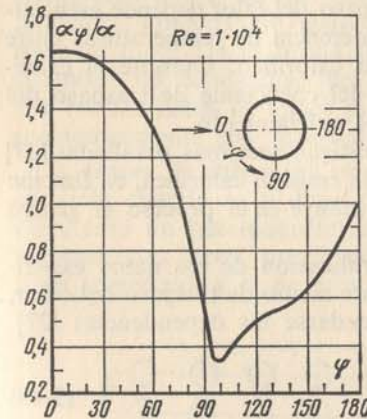


Fig. 3-34. Variación del coeficiente relativo de traspaso del calor a lo largo de la circunferencia del cilindro.

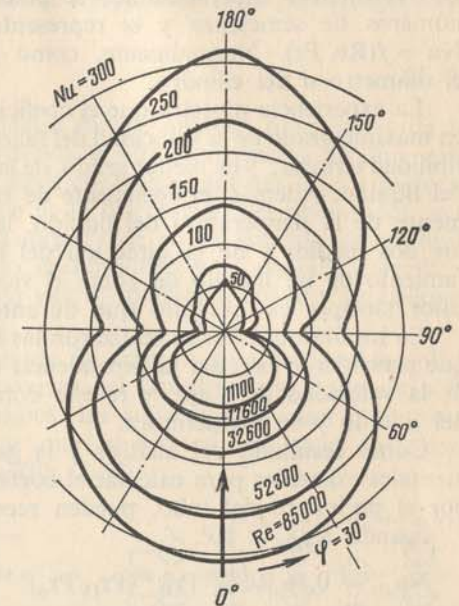


Fig. 3-35. Variación del coeficiente de traspaso de calor a lo largo de la circunferencia del cilindro para diferentes valores del número  $Re$  (en coordenadas polares).

pequeños de  $Re$  la intensidad del intercambio de calor en la zona turbulenta es inferior que en el punto frontal. Sin embargo, a medida que aumenta el número  $Re$ , debido a la intensificación del movimiento vertiginoso en la zona de separación, el coeficiente de traspaso del calor en la zona trasera se incrementa (fig. 3-35).

El complicado carácter del flujo currentilíneo alrededor del cilindro dificulta sustancialmente la investigación teórica de las regularidades del intercambio térmico. El carácter más estable lo tiene la corriente en derredor del punto frontal del tubo ( $\varphi \approx 0$ ). La solución teórica [43] aplicable al coeficiente local de traspaso del calor en el punto frontal ( $\varphi = 0$ ) tiene la forma:

$$\alpha_{\varphi=0} = 1,04 \lambda (w_0/vd)^{0.5} Pr^{1/3}. \quad (3-48)$$

Sin embargo, aún hoy día no existe un cálculo teórico completo para determinar el cambio de la emisión calorífica por toda la circunferencia del tubo, incluyendo la zona de separación. Por eso, se usa el experimento en calidad del método fundamental para estudiar la emisión calorífica



durante el flujo currentilíneo transversal alrededor de los tubos. Para estudiar la emisión calorífica de un cilindro, en el flujo transversal de diferentes líquidos, se han realizado gran cantidad de investigaciones. Los resultados experimentales se elaboran, como regla, utilizando los números de semejanza y se representan en forma de la dependencia  $Nu = f(Re, Pr)$ . Normalmente, como dimensión determinante se toma el diámetro  $d$  del cilindro.

La experiencia muestra que el coeficiente de traspaso del calor depende en máximo grado de la velocidad del flujo incidente, la densidad y la conductibilidad térmica; y en menor grado, de la capacidad calorífica y la viscosidad del líquido. Además, el coeficiente de traspaso del calor depende esencialmente de la temperatura del líquido, la diferencia de temperaturas entre los dos medios y de la dirección del flujo calorífico. Durante el calentamiento de un líquido de goteo el valor del coeficiente de traspaso del calor siempre es más alto que durante el enfriamiento.

En los últimos años se realizaron las investigaciones más detalladas [27] que permitieron precisar la dependencia de la emisión calorífica, en función de la velocidad del flujo, y revelar cómo influye en el proceso el género del líquido y su temperatura.

Como resultado del análisis y la generalización de los datos experimentales existentes para calcular el coeficiente medio de traspaso del calor, por el perímetro del tubo, pueden recomendarse las dependencias [27]:

cuando  $Re_{dfl} < 10^3$ ,

$$Nu_{dfl} = 0,56 Re_{dfl}^{0,50} Pr_{fl}^{0,36} (Pr_{fl}/Pr_p)^{0,25}; \quad (3-49)$$

cuando  $Re_{dfl} > 10^3$ ,

$$Nu_{dfl} = 0,28 Re_{dfl}^{0,60} Pr_{fl}^{0,36} (Pr_{fl}/Pr_p)^{0,25}. \quad (3-50)$$

Para el aire las dependencias (3-49) y (3-50) se simplifican y toman la forma:

cuando  $Re_{dfl} < 10^3$ ,

$$Nu_{dfl} = 0,49 Re_{dfl}^{0,50}; \quad (3-49 a)$$

cuando  $Re_{dfl} > 10^3$ ,

$$Nu_{dfl} = 0,245 Re_{dfl}^{0,60}. \quad (3-50 a)$$

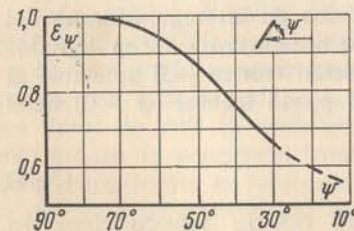


Fig. 3-36. Dependencia entre la emisión calorífica del cilindro y el ángulo de ataque  $\psi$ .

Las correlaciones (3-49) y (3-50) son válidas solamente cuando el ángulo de ataque  $\Psi$ , formado entre la dirección de movimiento del flujo y el eje del tubo, es igual a  $90^\circ$ . La dependencia entre la emisión calorífica y la magnitud del ángulo de ataque  $\Psi$  se representa en la fig. 3-36. Aquí sobre el eje de abscisas está trazado el valor de  $\Psi$  y sobre el eje de ordenadas, el valor de  $\varepsilon_\psi$ , que representa la relación entre la emisión calorífica para

el ángulo de ataque  $\Psi$  y la emisión calorífica para el ángulo de ataque  $\Psi = 90^\circ$ , es decir,  $\varepsilon_\psi = \alpha_\psi / \alpha_{\psi=90^\circ}$ . Como se ve en la fig. 3-36, al disminuir el ángulo de ataque, el valor de  $\varepsilon_\psi$  decrece. Entonces la fórmula de cálculo para el coeficiente de traspaso del calor puede expresarse así:

$$\alpha_\psi = \varepsilon_\psi \alpha_{\psi=90^\circ}. \quad (3-51)$$

El proceso de la emisión calorífica de los cuerpos prismáticos de la sección rectangular, cuadrada, ovalada u otra cualquiera, es aun más complicado que el de los tubos cilíndricos. Aquí, además de los factores conocidos, aparece uno nuevo, que es la orientación del prisma con respecto al flujo. De la forma del cuerpo y de su orientación en el flujo dependen las condiciones del flujo currentilíneo y la emisión calorífica. Por eso los datos de textos pueden usarse solamente cuando los cuerpos geoméricamente son semejantes.

**2. Haces de tubos.** El proceso de la emisión calorífica se complica aun más cuando en el flujo transversal del líquido no se halla un sólo tubo, sino un haz (paquete) de tubos. En la técnica se usan fundamentalmente dos tipos principales en que se forman los haces de tubos: el de corredores y el de escaques (fig. 3-37).

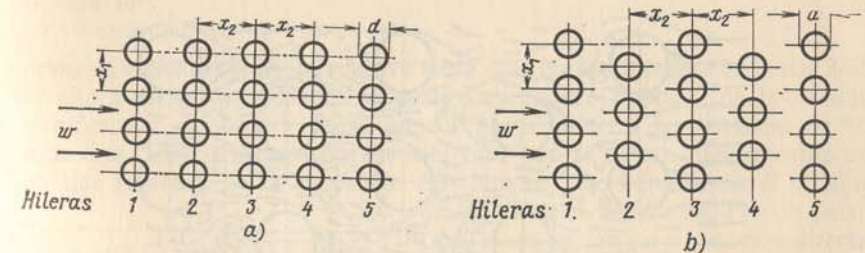


Fig. 3-37. Esquemas de disposición de los tubos dentro de los haces en forma de corredores (a) y al tresbolillo (b).

Un haz de tubos tiene en calidad de características: el diámetro de los tubos  $d$  y las distancias relativas entre sus ejes según la anchura del haz  $L_1 = x_1/d$  y de acuerdo a su profundidad  $L_2 = x_2/d$ .

Del esquema en que se combine el haz, dependen el carácter de movimiento del líquido y el bañado de los tubos (fig. 3-38). Las condiciones de bañado de la primera hilera de tubos en ambos haces son próximas a las condiciones del bañado de un solo tubo. Pero en lo que se refiere a las otras hileras, aquí el carácter del bañado cambia. En los haces de corredores (fig. 3-38 a) todos los demás tubos que no pertenecen a la primera se hallan en la zona turbulenta de las anteriores; entre los tubos, según la profundidad del haz, se forma una zona de rebalsa en donde el líquido circula con relativa debilidad. Por eso aquí, tanto la parte frontal, como la trasera de los tubos de otras hileras, se bañan con una



intensidad considerablemente inferior a la de las mismas partes de un tubo singular o a la de la parte frontal de primera hilera en el haz. En los haces de escaques (fig. 3-38, b) el carácter del bañado de los tubos situados en la profundidad se diferencia poco del de los tubos de primera hilera.

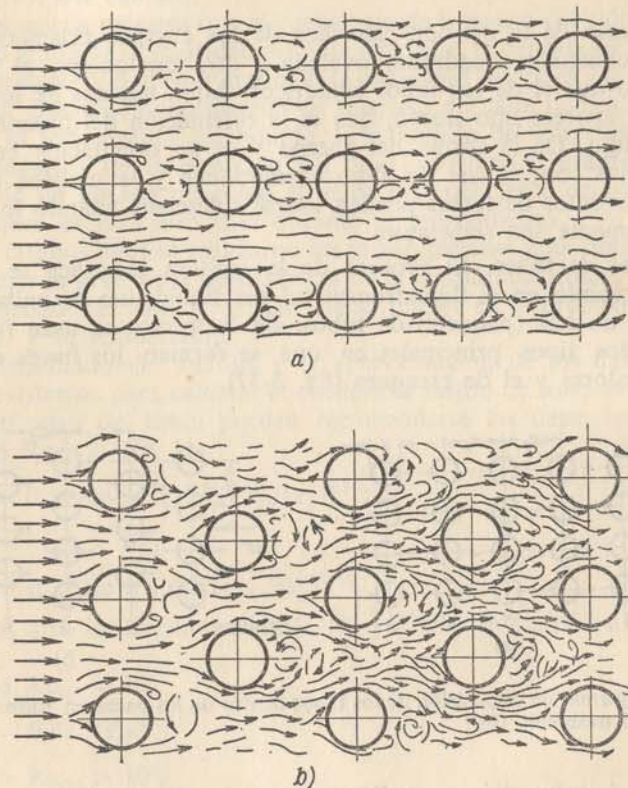


Fig. 3-38. Cuadro de movimiento del líquido entre los haces de tubos redondos situados en forma de corredores (a) y al tresbolillo (b).

En la fig. 3-39 se exponen los resultados de la investigación realizada para determinar el cambio de la emisión calorífica, según la circunferencia de los tubos en las diferentes hileras, para los haces de corredores y de escaques. El examen de las curvas muestra que para la primera hilera de los haces de corredores, el cambio de la emisión calorífica relativa, según la circunferencia corresponde casi por completo a la variación observada en un tubo singular (fig. 3-34). Para los haces de escaques la curva tiene el mismo carácter, pero los cambios aquí son más bruscos. En lo que se refiere a las segundas hileras, y a todas las ulteriores, el carácter de sus

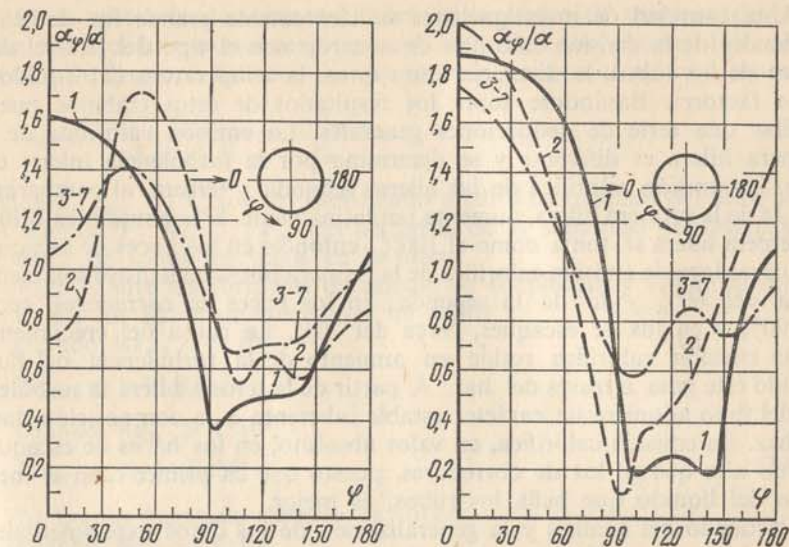


Fig. 3-39. Variación de la emisión calorífica a lo largo de la circunferencia de los tubos para las diferentes filas de los haces en forma de corredores (a) y al tresbolillo (b) ( $Re = 14 \cdot 10^3$ ).

De 1 a 7 son los números de las hileras de tubos.

curvas de emisión calorífica relativa varía. Las curvas trazadas en la fig. 3-40 son ahora curvas tipo. En los haces de corredores el máximo de la emisión calorífica no se observa en el punto frontal, sino a la distancia de  $50^\circ$  desde éste. Hay dos máximos de este tipo que se sitúan precisamente en aquellas regiones de la superficie del tubo en que tiene lugar el choque de los chorros incidentes. Pero la parte frontal no se somete a la acción directa del flujo que la baña, por eso en este caso la emisión calorífica no es alta. En los haces de escaques el máximo de la emisión calorífica para todas las hileras permanece en el punto frontal.

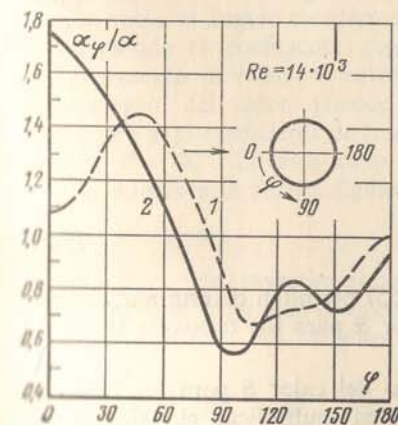


Fig. 3-40. Variación típica de la emisión calorífica a lo largo de la circunferencia de los tubos dentro de los haces en forma de corredores (1) y al tresbolillo (2).

El análisis aducido muestra que la emisión calorífica de los tubos en un haz, así como el cambio de la emisión calorífica por la circunferencia, en lo fundamental se determinan por el carácter del flujo currentilíneo. Si se varían las condiciones de bañado, cambia también la emisión calorífica. La última circunstancia puede usarse con éxito durante la composición de los haces.



Una cantidad de investigaciones suficientemente grande fue dedicada al estudio de la emisión calorífica de acuerdo con el tipo del haz, el diámetro de los tubos, la distancia entre éstos, la temperatura del líquido y otros factores. Basándose sobre los resultados de estos trabajos puede hacerse una serie de deducciones generales. La emisión calorífica de la primera hilera es diferente y se determina por la turbulencia inicial del flujo. La emisión calorífica de las hileras segunda y tercera, al compararla con la de la primera hilera, aumenta paulatinamente. Si la emisión calorífica de tercera hilera se toma como el 100%, entonces en los haces de escaques y de corredores la emisión calorífica de la primera hilera constituye solamente cerca del 60% y la de la segunda: en los haces de corredores, cerca del 90% y en los de escaques, cerca del 70%. La causa del crecimiento de la emisión calorífica reside en aumento de la turbulencia del flujo cuando éste pasa a través del haz. A partir de la tercera hilera la turbulencia del flujo adquiere un carácter estable inherente a la composición dada del haz. La emisión calorífica, en valor absoluto, en los haces de escaques es más alta que en los de corredores, puesto que en primer caso el mezclado del líquido que baña los tubos, es mejor.

Partiendo del análisis y la generalización de los datos experimentales, para calcular el coeficiente medio de traspaso del calor, se recomiendan las correlaciones [64]:

- a) En los haces de corredores de tubos:  
cuando  $Re_{df1} < 1 \cdot 10^3$ ,

$$\overline{Nu}_{df1} = 0,56 Re_{df1}^{0,5} Pr_{fl}^{0,36} (Pr_{fl}/Pr_p)^{0,25}; \quad (3-52)$$

- cuando  $Re_{df1} > 1 \cdot 10^3$ ,

$$\overline{Nu}_{df1} = 0,22 Re_{df1}^{0,65} Pr_{fl}^{0,36} (Pr_{fl}/Pr_p)^{0,25}. \quad (3-53)$$

- b) En los haces de escaque de tubos:  
cuando  $Re_{df1} < 1 \cdot 10^3$ ,

$$\overline{Nu}_{df1} = 0,56 Re_{df1}^{0,5} Pr_{fl}^{0,36} (Pr_{fl}/Pr_p)^{0,25}; \quad (3-54)$$

- cuando  $Re_{df1} > 1 \cdot 10^3$ ,

$$\overline{Nu}_{df1} = 0,40 Re_{df1}^{0,60} Pr_{fl}^{0,36} (Pr_{fl}/Pr_p)^{0,25}. \quad (3-55)$$

Las correlaciones de la (3-52) a la (3-55) permiten determinar el valor medio del coeficiente de traspaso del calor  $\bar{\alpha}$  para los tubos de la tercera y las ulteriores hileras en los haces.

Los valores del coeficiente de traspaso del calor  $\bar{\alpha}$  para los tubos de la primera hilera del haz se determinan, al multiplicar el valor medio hallado del coeficiente de traspaso del calor  $\bar{\alpha}$ , para los tubos de tercera hilera, por el coeficiente de corrección  $\varepsilon_x = 0,60$ . Para los tubos de segunda hilera en los haces de corredores  $\varepsilon_x = 0,90$  y en los haces de escaques  $\varepsilon_x = 0,70$ .

Si es necesario determinar el coeficiente medio de traspaso del calor para todo el haz en su conjunto, entonces hay que obtener los valores medios de los de  $\bar{\alpha}$  hallados, lo que se consigue con el método siguiente:

$$\bar{\alpha}_{haz} = \frac{\bar{\alpha}_1 F_1 + \bar{\alpha}_2 F_2 + \dots + \bar{\alpha}_m F_m}{F_1 + F_2 + \dots + F_m}, \quad (3-56)$$

donde  $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_m$  son los coeficientes medios de traspaso del calor según las hileras;  $F_1, F_2, \dots, F_m$  son las áreas de la superficie del intercambio de calor de todos los tubos en la hilera.

Para el aire las fórmulas de cálculo se simplifican y toman la forma:

- a) En los haces de corredores de tubos:

cuando  $Re_{df1} < 1 \cdot 10^3$ ,

$$\overline{Nu}_{df1} = 0,49 Re_{df1}^{0,5}; \quad (3-52 a)$$

cuando  $Re_{df1} > 1 \cdot 10^3$ ,

$$\overline{Nu}_{df1} = 0,194 Re_{df1}^{0,65}. \quad (3-53 a)$$

- b) En los haces de escaque de tubos:

cuando  $Re_{df1} < 1 \cdot 10^3$ ,

$$\overline{Nu}_{df1} = 0,49 Re_{df1}^{0,5}; \quad (3-54 a)$$

cuando  $Re_{df1} > 1 \cdot 10^3$ ,

$$\overline{Nu}_{df1} = 0,35 Re_{df1}^{0,60}. \quad (3-55 a)$$

Las correlaciones de la (3-52) a la (3-55) se aplican sólo para el caso en que el flujo del líquido es perpendicular al eje del haz, es decir, cuando el ángulo de ataque  $\Psi = 90^\circ$ . Sin embargo, en la práctica no son menos frecuentes los casos en que  $\Psi < 90^\circ$ . El cambio de la emisión calorífica, cuando varía el ángulo de ataque es posible medirlo de modo más simple, introduciendo el coeficiente de corrección  $\varepsilon_\Psi$ , que representa la relación entre el coeficiente de traspaso del calor (siendo el ángulo de ataque  $\Psi$ ) y el coeficiente de traspaso del calor, cuando  $\Psi = 90^\circ$ . En este caso la fórmula de cálculo adquiere la forma siguiente:

$$\bar{\alpha}_\Psi = \varepsilon_\Psi \bar{\alpha}_{\Psi=90^\circ}. \quad (3-57)$$

Una serie de investigaciones sirvieron de base para establecer que el valor del coeficiente  $\varepsilon_\Psi$  es la función del ángulo de ataque  $\Psi$  (fig. 3-41):

|                    |    |    |      |      |      |      |      |      |      |
|--------------------|----|----|------|------|------|------|------|------|------|
| $\Psi$             | 90 | 80 | 70   | 60   | 50   | 40   | 30   | 20   | 10   |
| $\varepsilon_\Psi$ | 1  | 1  | 0,98 | 0,94 | 0,88 | 0,78 | 0,67 | 0,52 | 0,42 |

**Ejemplo 3-8.** Determinar el coeficiente medio de traspaso del calor en un flujo transversal de aire para un tubo de diámetro  $d = 20$  mm, si la temperatura del aire  $t_{f1} = 30^\circ \text{C}$  y la velocidad  $w = 5$  m/s.

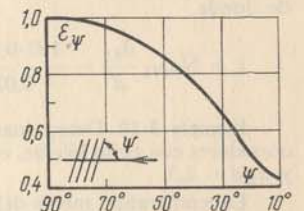


Fig. 3-41. Dependencia de la emisión calorífica dentro de los haces en función del ángulo de ataque.



Cuando  $t_{f1} = 30^\circ\text{C}$ ,  $\lambda_{f1} = 0,0267 \text{ W/(m}\cdot^\circ\text{C)}$ ;

$$v_{f1} = 16,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}; \text{Re}_{df1} = \frac{wd}{v_{f1}} = \frac{5 \cdot 0,02}{16,0 \cdot 10^{-6}} = 6,2 \cdot 10^3.$$

Siendo este el valor de  $\text{Re}_{df1}$ , el cálculo ulterior lo realizamos según la fórmula (3-50 a). Después de sustituir el valor de  $\text{Re}_{df1}$  obtenemos:

$$\overline{\text{Nu}}_{df1} = 0,245 \text{Re}_{df1}^{0,60} = 0,245(6,2 \cdot 10^3)^{0,60} = 45,6,$$

de donde

$$\bar{\alpha} = \overline{\text{Nu}}_{df1} \frac{\lambda_{f1}}{d} = 45,6 \frac{0,0267}{0,02} = 60,4 \text{ W/(m}^2\cdot^\circ\text{C)}.$$

Si adicionalmente está dado el ángulo de ataque  $\Psi = 60^\circ$ , entonces el valor obtenido de  $\bar{\alpha}$  es necesario multiplicarlo por  $\varepsilon_\Psi$ . De la fig. 3-36 se deduce que para  $\Psi = 60^\circ$ ,  $\varepsilon_\Psi = 0,94$ . Finalmente tenemos:

$$\bar{\alpha}' = \bar{\alpha} \varepsilon_\Psi = 60,4 \cdot 0,94 = 57,0 \text{ W/(m}^2\cdot^\circ\text{C)}.$$

**Ejemplo 3-9.** Determinar el coeficiente medio de traspaso del calor en un flujo transversal de agua para un tubo de  $d = 20 \text{ mm}$ , si la temperatura del agua  $t_{f1} = 20^\circ\text{C}$ , la temperatura de la pared  $t_p = 40^\circ\text{C}$  y la velocidad  $w = 0,5 \text{ m/s}$ .

Cuando  $t_{f1} = 20^\circ\text{C}$ ,  $\lambda_{f1} = 0,599 \text{ W/(m}\cdot^\circ\text{C)}$ ;

$$v_{f1} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s};$$

$$\text{y } \text{Pr}_{f1} = 7,02, \text{Re}_{df1} = \frac{wd}{v_{f1}} = \frac{0,5 \cdot 0,02}{1 \cdot 10^{-6}} = 1 \cdot 10^4.$$

Cuando  $t_p = 40^\circ\text{C}$  y  $\text{Pr}_p = 4,31$ ,  $\text{Pr}_{f1}/\text{Pr}_p = 1,63$ .

Al reemplazar estas magnitudes en la fórmula (3-50), obtenemos:

$$\begin{aligned} \overline{\text{Nu}}_{df1} &= 0,28 \text{Re}_{df1}^{0,60} \text{Pr}_{f1}^{0,36} (\text{Pr}_{f1}/\text{Pr}_p)^{0,25} = \\ &= 0,28(1 \cdot 10^4)^{0,60} \cdot 7,02^{0,36} (1,63)^{0,25} = 160, \end{aligned}$$

de donde

$$\bar{\alpha} = \overline{\text{Nu}}_{df1} \frac{\lambda_{f1}}{d} = \frac{160 \cdot 0,599}{0,02} = 4780 \text{ W/(m}^2\cdot^\circ\text{C)}.$$

**Ejemplo 3-10.** Determinar el coeficiente medio de traspaso del calor para el haz de corredores con ocho hileras, compuesto por tubos con diámetro  $d = 40 \text{ mm}$ ;  $x_1/d = 1,8$  y  $x_2/d = 2,3$ .

La temperatura media del aire  $\bar{t}_{f1} = 300^\circ\text{C}$ , la velocidad media en la sección estrecha  $w = 10 \text{ m/s}$  y el ángulo de ataque  $\Psi = 60^\circ$ .

Los valores de las propiedades físicas del aire para  $\bar{t}_{f1} = 300^\circ\text{C}$ :

$$\lambda_{f1} = 0,046 \text{ W/(m}\cdot^\circ\text{C)} \text{ y } v_{f1} = 48,33 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s};$$

$$\text{Re}_{df1} = \frac{wd}{v_{f1}} = \frac{10 \cdot 0,04}{48,33 \cdot 10^{-6}} = 8,29 \cdot 10^3; \text{Re}_{df1}^{0,65} = 353.$$

Al introducir estos valores en la expresión (3-53 a), obtenemos:

$$\overline{\text{Nu}}_{df1} = 0,194 \text{Re}_{df1}^{0,65} = 0,194 \cdot 353 = 68,5,$$

de donde el valor medio del coeficiente de traspaso del calor para los tubos de la tercera y de todas las hileras ulteriores es:

$$\bar{\alpha}' = \overline{\text{Nu}}_{df1} \frac{\lambda_{f1}}{d} = \frac{68,5 \cdot 0,046}{0,04} = 79 \text{ W/(m}^2\cdot^\circ\text{C)}.$$

El coeficiente medio de traspaso del calor del haz, cuando el ángulo de ataque  $\Psi = 90^\circ$ , será:

$$\bar{\alpha}_{\text{haz}} = \frac{(0,6 + 0,9 + 6) \bar{\alpha}'}{8} = 0,938 \bar{\alpha}' = 74 \text{ W/(m}^2\cdot^\circ\text{C)}.$$

Ahora es necesario introducir la corrección debida al ángulo de ataque. Cuando  $\Psi = 60^\circ$ ,  $\varepsilon_\Psi = 0,94$ , por consiguiente,

$$\bar{\alpha}'_{\text{haz}} = 0,94 \cdot 74,0 = 69,5 \text{ W/(m}^2\cdot^\circ\text{C)}.$$



## INTERCAMBIO DE CALOR EN LA EBULLICIÓN Y LA CONDENSACION

### 4.1. Intercambio de calor durante la ebullición

1. **Nociones generales del proceso de ebullición.** Llámase ebullición al proceso de formación de vapor dentro del volumen de un líquido. Las condiciones en que transcurre este proceso, son singulares y complicadas.

Para que surja la ebullición siempre se necesita cierto recalentamiento del líquido, es decir, que la temperatura  $t_{fl}$  del líquido supere la temperatura de saturación  $t_s$ , a una presión dada  $p$ . Este sobrecalentamiento, como lo demuestran los ensayos, depende de las propiedades físicas del líquido, su pureza y su presión, así como también de las propiedades que poseen las superficies sólidas que lo limitan. Cuanto más puro es el líquido, tanto más alto resulta el recalentamiento inicial necesario para que se produzca la ebullición. Se conocen experimentos en que los líquidos cuidadosamente purificados y privados de los gases disueltos se han logrado recalentar sin ebullición a presión normal en decenas de grados. Sin embargo, a fin de cuentas tal líquido recalentado empieza a hervir y entonces, la ebullición se realiza en forma extremadamente impetuosa, asemejando una explosión. El calor del sobrecalentamiento del líquido se gasta en la formación de vapor y luego el líquido se enfría rápidamente hasta la temperatura de saturación. Un alto recalentamiento inicial, necesario para que el líquido puro empiece a hervir, se explica por la dificultad para que se formen espontáneamente dentro del líquido, las burbujas pequeñas (germenes) de vapor, debido a la considerable energía de atracción mutua de las moléculas en el líquido.

El asunto toma otro aspecto cuando el líquido contiene un gas disuelto (por ejemplo, el aire), o diminutas partículas suspendidas. En estos líquidos durante su calentamiento el proceso de ebullición empieza casi inmediatamente después de que el líquido alcance la temperatura de saturación. Además la ebullición tiene un carácter tranquilo. En este caso las burbujas de gas formadas durante el calentamiento, así como las partículas

duras que se hallan en el líquido, sirven de los germenos iniciales ya listos para preparar la fase de vapor.

El sobrecalentamiento inicial disminuye también en el caso, en que las paredes del recipiente, donde se realiza el calentamiento del líquido, tienen en su superficie gas absorbido, rugosidades microscópicas, así como diferentes heterogeneidades e inclusiones que reducen la adherencia molecular del líquido a la superficie. Al suministrar el calor a través de tal superficie, la formación de las burbujas se observa en los puntos separados de la superficie, así llamados centros de la formación de vapor. De tal modo el proceso de ebullición empieza en las capas del líquido que entran en contacto con la superficie y tienen la temperatura igual a ésta. Para la práctica este tipo de ebullición presenta el mayor interés. Examinemos sus características fundamentales.

En la medida en que aumenta la temperatura de la superficie de calefacción  $t_p$  y, respectivamente, la diferencia de temperaturas entre los dos medios ( $\Delta t = t_p - t_s$ ) crece el número de los centros activos de formación de vapor y el proceso de ebullición se hace cada vez más intenso. Las burbujas de vapor se separan periódicamente de la superficie del recipiente y, emergiendo hacia la superficie libre, continúan aumentando en su volumen. La última circunstancia se explica por el hecho de que la temperatura en el volumen del líquido hirviente, según muestran los datos experimentales, no es igual a la de saturación, sino es algo superior. Por ejemplo, para el agua a la presión atmosférica, el sobrecalentamiento en volumen constituye de 0,2 a 0,4°C (fig. 4-1).

En la fig. 4-2, *a* se presenta en forma esquemática el cuadro del régimen de ebullición del líquido con formación de burbujas. Al aumentar la diferencia de temperaturas entre los dos medios ( $\Delta t$ ), crece considerablemente el flujo del calor que se evacúa desde la superficie de calefacción hacia el líquido hirviente. Todo este calor, finalmente, se gasta en la formación de vapor. Por eso la ecuación de balance térmico durante la ebullición tiene la forma:

$$Q = rG'', \quad (4-1)$$

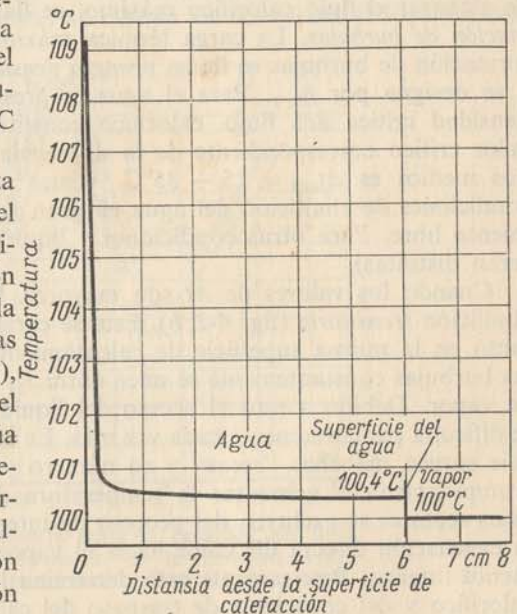


Fig. 4-1. Distribución de temperaturas en el volumen del líquido hirviente ( $t_p = 109,1^\circ\text{C}$ ;  $p_s = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ;  $q = 22\,500 \text{ W/m}^2$ ).



donde  $Q$  es el flujo calorífico, en  $W$ ;

$r$  es el calor del cambio de fase del líquido, en  $J/kg$ ;

$G''$  es la cantidad de vapor evacuado de la superficie libre del líquido como resultado de su ebullición por unidad de tiempo, en  $kg/s$ .

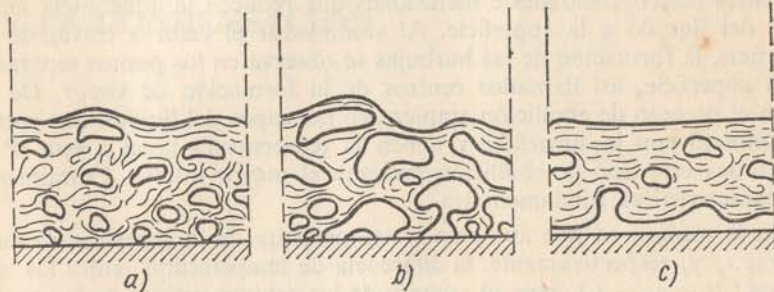


Fig. 4-2. Proceso de ebullición de un líquido.

Con el aumento de la diferencia de temperaturas entre los dos medios ( $\Delta t$ ) el flujo calorífico  $Q$  no crece ilimitadamente. Para cierto valor de  $\Delta t$  éste alcanza su valor máximo, pero cuando  $\Delta t$  continúe aumentando, empieza a disminuir. El régimen de ebullición, existente hasta el momento de alcanzar el flujo calorífico máximo, se llama el de ebullición con *formación de burbujas*. La carga térmica máxima durante la ebullición con formación de burbujas se llama *primera densidad crítica del flujo calorífico* y se designa por  $q_{cr1}$ . Para el agua, a presión atmosférica, la primera densidad crítica del flujo calorífico constituye  $q_{cr1} \approx 1,2 \cdot 10^6 W/m^2$ ; el valor crítico correspondiente de la diferencia de temperaturas (entre los dos medios es  $\Delta t_{cr1} = 25 \div 35^\circ C$ . (Estas magnitudes se refieren a las condiciones de ebullición del agua en gran volumen, cuando existe movimiento libre. Para otras condiciones y líquidos diferentes las magnitudes serán distintas).

Cuando los valores de  $\Delta t$  son mayores, llega el segundo régimen de ebullición *transitorio* (fig. 4-2, b). Este se caracteriza por el hecho de que, tanto en la misma superficie de calentamiento, como en su proximidad, las burbujas constantemente se unen entre sí, formando grandes cavidades de vapor. Debido a esto el acceso del líquido hacia la misma superficie se dificulta paulatinamente cada vez más. En lugares separados de la superficie surgen manchas "secas" y su número y dimensiones crecen ininterrumpidamente al aumentar la temperatura de la superficie. Parece que estos sectores se excluyen del proceso de intercambio térmico, puesto que la evacuación directa del calor hacia el vapor se realiza de modo mucho menos intenso. Precisamente esto determina la brusca reducción del flujo calorífico y del coeficiente de traspaso del calor en la región del régimen transitorio de ebullición.

Por fin, para cierta diferencia de temperaturas entre los dos medios, toda la superficie de calefacción se cubre por una capa continua de vapor

que aparta el líquido de la superficie. Así comienza el tercer régimen, el de ebullición *pelicular* (fig. 4-2, c). La transferencia de calor en el régimen de ebullición pelicular desde la superficie de calefacción hacia el líquido se realiza mediante el intercambio de calor por convección y la radiación a través de la película de vapor. A medida que aumenta la diferencia de temperaturas entre los dos medios, una cantidad cada vez mayor de calor se transmite mediante radiación. La intensidad del intercambio de calor en el régimen de ebullición pelicular es bastante baja. La película de vapor sufre pulsaciones; el vapor que se acumula periódicamente en ésta, luego se desprende en forma de grandes burbujas. Al comenzar la ebullición pelicular, la carga térmica evacuada desde la superficie y, respectivamente, la cantidad del vapor que se forma, tienen valores mínimos. El vapor mínimo de la carga térmica en presencia de la ebullición pelicular se llama *segunda densidad crítica del flujo calorífico*  $q_{cr2}$ . A la presión atmosférica para el agua que hierve sobre las superficies metálicas, el momento del comienzo de la ebullición pelicular se caracteriza por la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $\Delta t = t_p - t_s \approx 150^\circ C$ , es decir, la temperatura de la superficie  $t_p$  constituye aproximadamente  $250^\circ C$ .

De este modo durante la ebullición del líquido en la superficie de calefacción, dependiendo de la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $\Delta t = t_p - t_s$ , pueden observarse tres regímenes de ebullición diferentes. El cuadro general del cambio que sufre la densidad del flujo calorífico  $q$  evacuado hacia el líquido hirviendo, cuando la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $\Delta t$  aumenta, se expone en coordenadas logarítmicas

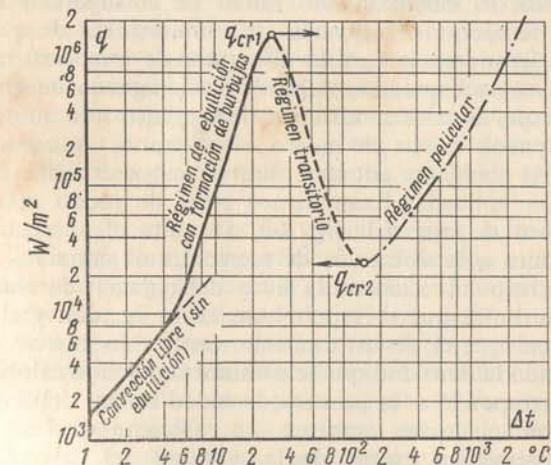


Fig. 4-3. Dependencia entre la densidad del flujo calorífico  $q$  y la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $\Delta t$  durante la ebullición del agua.

en la fig. 4-3. Este gráfico se refiere al proceso de ebullición del agua a presión atmosférica. La dependencia entre  $q$  y  $\Delta t$  tiene el mismo carácter también para otros líquidos que hierven en condiciones de movimiento



libre, en un gran volumen, sobre las superficies metálicas de calefacción: tubos, placas, etc.

Todos los tres regímenes de ebullición pueden observarse en orden inverso si, por ejemplo, al sumergir en el agua un artículo metálico macizo incandescente para templarlo. El agua comienza a hervir, el enfriamiento del cuerpo se procede al principio de modo relativamente lento (ebullición pelicular), luego la velocidad de enfriamiento aumenta rápidamente (régimen transitorio), el agua empieza entonces a mojar periódicamente la superficie, y la mayor velocidad de descenso de la temperatura de superficie se logra en la etapa final de enfriamiento (ebullición con formación de burbujas). En este ejemplo la ebullición transcurre con el tiempo en las condiciones no estacionarias.

En la práctica, la ebullición estacionaria en el régimen transitorio puede observarse cuando la temperatura de la superficie de caldeo se mantiene invariable debido al contacto de esta superficie, por el lado exterior, con otro agente portador de calor que tiene la temperatura más alta y una considerable intensidad de emisión calorífica<sup>1)</sup>. Tales condiciones de suministro del calor pueden caracterizarse en forma breve como las condiciones de calentamiento cuando  $t_p = \text{const.}$  En la práctica, sin embargo, se encuentran con frecuencia también las condiciones en que hacia la superficie se suministra un flujo calorífico fijo, es decir,  $q = \text{const.}$  Esto es característico, por ejemplo, para el calentamiento eléctrico de una superficie, para el que se realiza a costa del desprendimiento de calor como resultado de una reacción nuclear en un reactor atómico y, de modo aproximado, en el caso del calentamiento radial de la superficie a partir de fuentes con la temperatura muy alta. En condiciones de  $q = \text{const.}$ , la temperatura de la superficie  $t_p$  y la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $\Delta t$ , respectivamente, dependen del régimen de ebullición del líquido. Resulta que en tales condiciones de suministro de calor, el régimen transitorio no puede existir de modo estacionario. A consecuencia de esto el proceso de ebullición adquiere nuevos rasgos específicos que tienen gran importancia aplicada. Examinemos éstos de modo más detallado. Para esto veamos de nuevo la fig. 4-3. Durante el aumento paulatino de la carga térmica  $q$  la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $\Delta t$  crece, en correspondencia con la línea del régimen de ebullición, con formación de burbujas que se representan en la fig. 4-3, y el proceso se desarrolla al igual que el descrito anteriormente. Las nuevas condiciones surgen sólo cuando la densidad que se suministra del flujo calorífico alcanza el valor que corresponde a la primera densidad crítica del flujo calorífico  $q_{cr1}$ . Ahora, con cualquier aumento insignificante (incluso casual) de la magnitud  $q$  surge un exceso de la cantidad del calor suministrado hacia la superficie sobre la carga térmica máxima  $q_{cr1}$  que puede ser evacuada al líquido hirviente. Este exceso ( $q - q_{cr1}$ ) provoca el aumento de la temperatura de la superficie, es decir, empieza el calentamiento

<sup>1)</sup> En calidad de ejemplo puede servir el calentamiento de una superficie con vapor saturado a la temperatura y presión necesarias. Durante el proceso de su condensación se observa una intensidad de la emisión calorífica muy alta hacia la superficie (véase § 4-2).

no estacionario del material de la pared. La temperatura de la superficie  $t_p$  resulta más alta en comparación con  $t_{p,cr1}$  y en la superficie se establece el régimen transitorio de ebullición y la evacuación del calor empieza a descender. Como resultado la diferencia entre las cantidades de calor suministrada y evacuada crece rápidamente con el tiempo. De modo correspondiente aumenta la velocidad de calentamiento de la superficie. El desarrollo del proceso adquiere un carácter crítico. En fracciones de segundo la temperatura del material de la superficie de calefacción crece en centenas de grados y sólo a condición de que la pared sea suficientemente refractaria, la crisis se termina felizmente al establecerse un nuevo estado estacionario que corresponde a la región de ebullición pelicular, a una temperatura muy alta de la superficie. En la fig. 4-3 esta transición de crisis desde el régimen de ebullición con formación de burbujas hacia el pelicular se muestra convencionalmente con una flecha como "el salto" de la curva de ebullición con formación de burbujas a la línea de ebullición pelicular, permaneciendo invariable la carga térmica  $q_{cr1}$ . Sin embargo, por lo común, la crisis está acompañada por la fusión y destrucción de la superficie de calefacción (su requemado).

La segunda particularidad consiste en que si ha ocurrido la crisis y se ha establecido el régimen pelicular de ebullición (la superficie no se ha destruido), al bajar la carga térmica la ebullición pelicular perdurará, es decir, el proceso inverso procederá por la línea de la ebullición pelicular (fig. 4-3). Solamente después de alcanzar  $q_{cr2}$  el líquido empieza de nuevo lograr (mojar) de modo periódico la superficie de caldeo en los puntos separados. La evaluación del calor crece y supera el suministro de éste a consecuencia de lo que surge el enfriamiento rápido de la superficie el que también tiene carácter crítico. Se realiza un cambio rápido de los regímenes y se establece la ebullición estacionaria con formación de burbujas. Esta transición inversa (segunda crisis) también se muestra en la fig. 4-3 convencionalmente con una flecha, como "el salto" de la curva de ebullición pelicular a la línea de ebullición con formación de burbujas, cuando  $q = q_{cr2}$ .

Así, pues, en las condiciones de valor fijo para la densidad del flujo calorífico  $q$  suministrado a la superficie de calefacción ambas transiciones desde el régimen de burbujas hacia el pelicular y viceversa tienen el carácter de crisis. Ocurren con las densidades críticas del flujo calorífico  $q_{cr1}$  y  $q_{cr2}$ , respectivamente. En estas condiciones el régimen transitorio de ebullición no puede existir en forma estacionaria, es inestable.

La evacuación del calor en régimen de ebullición con formación de burbujas es uno de los métodos más perfectos del enfriamiento de la superficie de calefacción. Encuentra gran aplicación en los reactores atómicos, en el enfriamiento de los motores a reacción y también en una serie de otros dispositivos técnicos.

En la práctica tienen basta aplicación los métodos de evacuación del calor durante la ebullición del líquido que se mueve dentro de los tubos o canales de diferente forma. Así, por ejemplo, los procesos de generación del vapor en las centrales termoelectricas se realizan a costa de ebullición del agua que circula dentro de los tubos de una caldera a presión alta.



El calor se suministra a la superficie de los tubos a partir de productos incandescentes de quema del combustible debida a la radiación y el intercambio de calor por convección.

Para el proceso de ebullición del líquido que circula en un volumen limitado de un tubo (canal) las condiciones descritas anteriormente permanecen en vigor, pero al mismo tiempo aparece una serie de nuevas particularidades. Sobre el desarrollo del proceso puede influir la velocidad del movimiento forzado del líquido o de la mezcla de agua y vapor. Además la misma estructura del flujo bifásico (el carácter de distribución de las fases líquida y de vapor dentro del canal) también tiene gran importancia para el desarrollo del proceso de ebullición y para la generación de la crisis de ebullición. En la fig. 4-4 se muestran los regímenes característicos de la corriente de una mezcla de agua y vapor en los tubos. Según el contenido de vapor, la velocidad de movimiento de la mezcla, el diámetro del tubo y su ubicación en el espacio, el carácter de movimiento resulta diferente: en forma de la emulsión homogénea (fig. 4-4, a) o en forma de dos flujos independientes de agua y vapor (fig. 4-4, b, e). En unos casos el agua se mueve por la periferia, cerca de la pared, en forma de una película, y el vapor, en la parte central del tubo (fig. 4-4, b); en otros el movimiento resulta separado: el líquido, en una parte y el vapor, en otra parte del tubo (fig. 4-4, e). La corriente de la mezcla en el régimen con formación de burbujas (fig. 4-4, c, d) es diferente para las posiciones vertical y horizontal del tubo.

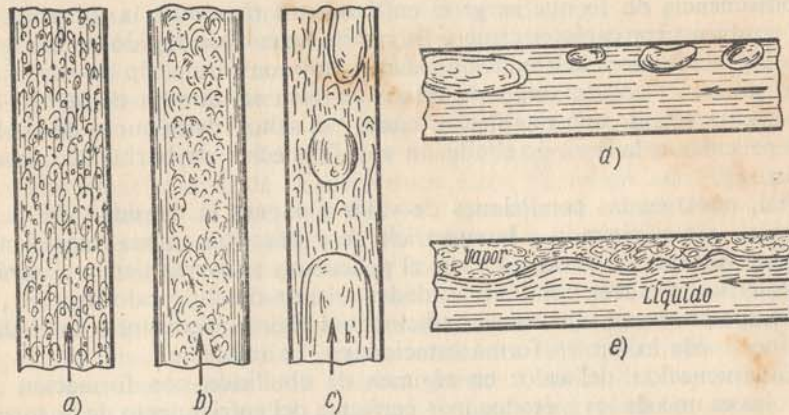


Fig. 4-4. Carácter de movimiento de la mezcla del vapor con el agua en los tubos.

Cuando un líquido no calentado hasta la temperatura de saturación corre por un tubo, también puede proceder el proceso de ebullición, si la intensidad de suministro del calor a las paredes del tubo es suficientemente alta. Un proceso de este tipo surge cuando la temperatura de la pared  $t_p$  supera la temperatura de saturación  $t_s$ ; éste abarca a la capa límite

del líquido cerca de la pared (fig. 4-5). Las burbujas de vapor, al caer en el núcleo frío del flujo se condensan rápidamente. Este tipo de ebullición se llama *ebullición con calentamiento incompleto*.

**2. Intercambio de calor durante la ebullición con formación de burbujas.** Las observaciones muestran que, al aumentar la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $\Delta t = t_p - t_s$ , así como la presión  $p$  en la superficie de calefacción, aumenta el número de los centros de formación de vapor  $z$ . Como resultado surge, crece y se separa ininterrumpidamente de la superficie de caldeo una cantidad de burbujas cada vez mayor. A consecuencia de esto aumenta la turbulencia y el mezclado de la capa límite del líquido adyacente a la pared. En el proceso de crecimiento de las burbujas en la superficie de calefacción éstas también adsorben intensamente el calor desde la capa límite. Todo esto contribuye a mejorar la emisión calorífica. Resumiendo, el proceso de la ebullición con formación de burbujas tiene un carácter bastante caótico.

Las investigaciones demuestran que en las superficies técnicas de calefacción el número de los centros de formación de vapor  $z$  depende del material, de la estructura y la rugosidad microscópica de la superficie, de la heterogeneidad en la estructura de la superficie y del gas (aire) adsorbido por la superficie. Una notable influencia la ejercen diferentes incrustaciones, películas de óxidos, así como cualesquiera otras inclusiones que conducen a la reducción del trabajo de adhesión. Como el **trabajo de adhesión** se entiende el que se requiere gastar para separar el líquido de una superficie dura, por unidad de área. Esta magnitud caracteriza la medida de la cohesión molecular del líquido con la superficie y está ligada con el fenómeno de humectación. Cuanto mejor el líquido moja el sector dado de la superficie, tanto mayor es el trabajo de adhesión. Experimentalmente se ha observado que en las condiciones reales como centros de formación de vapor sirven los elementos singulares de aspereza y de rugosidad microscópica de la superficie (con preferencia, diferentes hundimientos y cavidades) y en primer lugar, por lo visto, aquéllos de éstos, para los que el trabajo de adhesión tiene menor valor.

Por lo común en las superficies nuevas el número de los centros de formación de vapor es mayor que en las mismas superficies después de una ebullición prolongada. En lo fundamental esto se explica por la presencia del gas adsorbido por la superficie. Con el tiempo dicho gas se elimina paulatinamente, se mezcla con el vapor que se halla en las crecientes, y sale al espacio ocupado por el vapor. El proceso de ebullición y la emisión calorífica adquieren el carácter y la intensidad estables en el tiempo.

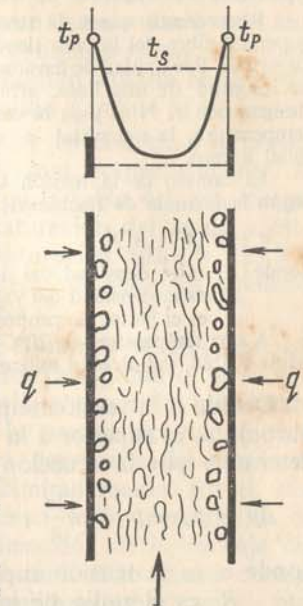


Fig. 4-5. Proceso de ebullición cuando el calentamiento es incompleto.



La tensión superficial en la superficie de separación entre el líquido y el vapor ejerce gran influencia sobre las condiciones de formación de las burbujas de vapor.

Recordemos que a la tensión superficial se llama la fuerza bajo cuyo acción la superficie libre del líquido tiende a reducirse; esta fuerza actúa según la tangente a la superficie. Por unidad de tensión superficial se toma la fuerza que corresponde a la unidad de longitud de una línea arbitraria en la superficie del líquido. Esta magnitud se designa con  $\sigma$ , N/m y es la característica física de la sustancia dada. Al aumentar la temperatura, la magnitud  $\sigma$  decrece y para la temperatura crítica comienza a ser igual a cero.

El cambio de la tensión superficial al variar la temperatura puede determinarse según la fórmula de Bachinski:

$$\sigma = c (\rho' - \rho'')^4, \quad (4-2)$$

donde  $\rho'$  es la densidad del líquido;

$\rho''$  es la densidad del vapor a la temperatura de saturación;

$c$  es el factor de proporcionalidad.

A una temperatura de 20°C la tensión superficial del agua es igual a 0,068, del benceno, 0,0288, del alcohol etílico, 0,0222 y del mercurio, 0,47 N/m.

Debido a la tensión superficial la presión de vapor en el interior de la burbuja  $p_v$  es superior a la del líquido  $p_{fl}$  en su alrededor. Su diferencia se determina por la ecuación de Laplace:

$$\Delta p = p_v - p_{fl} = \frac{2\sigma}{R}, \quad (4-3)$$

donde  $\sigma$  es la tensión superficial;

$R$  es el radio de la burbuja (en caso general, el radio medio de curvatura de la superficie de separación entre el líquido y el vapor).

La ecuación de Laplace expresa la condición del equilibrio mecánico. Esta muestra que la tensión superficial a semejanza de la envoltura elástica "comprime" el vapor en la burbuja y, además, con una fuerza tanto mayor, cuanto menor es su radio  $R$ .

La tabla 4-1 calculada con ayuda de la ecuación (4-3) da una impresión acerca del orden de las magnitudes de diferencia de presiones  $\Delta p$  y de la presión absoluta del vapor  $p_v$  dentro de la burbuja para el agua a la presión exterior invariable  $p_{fl} = 1,0 \cdot 10^5$  Pa.

Tabla 4-1

Valores de  $\Delta p$  y  $p_v \cdot 10^5$ , Pa para el agua

| $R$ , mm | $\Delta p$ | $p_v$  | $R$ , mm | $\Delta p$ | $p_v$ |
|----------|------------|--------|----------|------------|-------|
| 1,0      | 0,0012     | 1,0012 | 0,01     | 0,12       | 1,12  |
| 0,1      | 0,012      | 1,012  | 0,001    | 1,2        | 2,2   |

Las cifras aducidas muestran que para un radio menor de varias decenas de micras, la presión del vapor dentro de la burbuja ya supera notablemente la presión exterior.

La dependencia entre la presión del vapor en la burbuja y su dimensión determina unas particularidades de la condición del equilibrio térmico y

termodinámico de las burbujas pequeñas. El vapor en la burbuja y el líquido en su superficie se encuentran en equilibrio, si la superficie del líquido tiene la temperatura igual a la temperatura de saturación a la presión del vapor en la burbuja<sup>1)</sup>,  $t_s(p_v)$ . Esta temperatura es más alta que la temperatura de saturación a la presión exterior en el líquido  $t_s(p_{fl})$ . Por consiguiente, para realizar el equilibrio térmico, el líquido situado en derredor de la burbuja debe ser recalentado en la magnitud  $t_s(p_v) - t_s(p_{fl})$ .

A título de ejemplo examinemos dos burbujas en el agua, a la presión atmosférica, con radios iguales a 0,01 y 0,001 mm, respectivamente. La presión de vapor en estas burbujas está dada en la tabla 4-1, ésta constituye  $1,12 \cdot 10^5$  y  $2,2 \cdot 10^5$  Pa. En la línea de saturación del agua, a estas presiones corresponden las temperaturas de saturación 102,8 y 123,3°C. Precisamente estos valores debe tener la temperatura del agua alrededor de estas burbujas para que exista equilibrio.

La particularidad siguiente trata de que esté equilibrio resulta inestable. Si la temperatura del líquido supera algo el valor de equilibrio, se evaporará una parte del líquido hacia dentro de la burbuja y su radio aumentará. En este caso, según la ecuación de Laplace, la presión del vapor en la burbuja desciende. Esto conduce a una nueva desviación del estado de equilibrio. La burbuja comenzará a crecer ilimitadamente. En el caso contrario, cuando hay un insignificante descenso de la temperatura del líquido una parte de vapor se condensa, la dimensión de la burbuja disminuirá y la presión del vapor en ésta aumentará. Esto traerá consigo la ulterior desviación en las condiciones de equilibrio, ahora ya en otro sentido. Finalmente la burbuja se condensará por completo y desaparecerá.

Por consiguiente, en un líquido recalentado no todas las burbujas pequeñas que han surgido casualmente, poseen la capacidad para crecer ulteriormente, sino sólo aquellas cuyo radio supera el valor correspondiente a las condiciones del equilibrio mecánico y térmico inestables examinadas anteriormente. El valor mínimo del radio de la burbuja  $R_{\min}$  con frecuencia se denominan también radio crítico del germen de vapor. La magnitud del  $R_{\min}$  depende del grado de sobrecalentamiento del líquido, es decir, de la diferencia de temperaturas  $\Delta t = t_{fl} - t_s$ , donde  $t_s$  es la temperatura de saturación a una presión dada en el líquido. Para el radio mínimo de la burbuja de vapor dada puede obtenerse la siguiente expresión, partiendo de la ecuación de Laplace:

$$R_{\min} = \frac{2\sigma}{\Delta p},$$

si además se toma en consideración que la diferencia de presiones entre el vapor y el líquido para tal burbuja, según la condición del equilibrio

<sup>1)</sup> Para simplificar la exposición del material aquí no se toma en cuenta la dependencia entre la presión del vapor saturado y la curvatura de superficie del líquido, que se determina mediante la ecuación de Thomson. Para las condiciones examinadas el error cuantitativo relacionado con esto, es insignificante.



térmico, constituye:

$$\Delta p = p_s(t_s + \Delta t) - p_s(t_s) \approx p'_s \Delta t,$$

donde  $p'_s = (\partial p / \partial t)_s$  es la derivada de la presión con respecto a la temperatura en la línea de saturación.

De este modo tenemos:

$$R_{\min} = \frac{2\sigma}{p'_s \Delta t} \quad (4-4)$$

o, teniendo en cuenta la dependencia entre la presión del vapor saturado y la curvatura de la superficie de separación,

$$R_{\min} = \frac{2\sigma}{p'_s \Delta t} \frac{\rho'}{\rho' - \rho''}, \quad (4-4a)$$

donde la derivada  $p'_s$  representa la característica física de la sustancia dada. Esta característica por la ecuación de Clapeyron-Clausius

$$p'_s = \frac{r \rho' \rho''}{T_s(\rho' - \rho'')}, \quad (4-5)$$

es decir, se expresa a través de otras constantes físicas: el calor del cambio de fase  $r$ , las densidades del valor  $\rho''$  y del líquido  $\rho'$  y la temperatura absoluta de saturación  $T_s$ .

La ecuación (4-4) muestra que si en los puntos aislados de la superficie de calefacción aparecen los gérmenes de vapor, la capacidad para el crecimiento ulterior espontáneo la poseen solamente aquéllos cuyo radio de curvatura supera el valor de  $R_{\min}$ . Puesto que con el crecimiento de  $\Delta t$ , la magnitud  $R_{\min}$  se reduce, la ecuación (4-4) explica el fenómeno, observado experimentalmente del aumento del número de los centros de formación de vapor  $z$  con la elevación de la temperatura de superficie.

El aumento del número de los centros de formación de vapor  $z$  con el crecimiento de la presión también está ligado a la reducción del  $R_{\min}$ , puesto que, con el aumento de la presión,  $p'_s$  crece y  $\sigma$  disminuye. El cálculo aducido más abajo da una idea del orden de la magnitud  $R_{\min}$ . Para agua que hierve a presión atmosférica, la tensión superficial  $\sigma = 5,87 \cdot 10^{-2}$  N/m, la derivada  $p'_s = 3,500$  Pa/°C y la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $\Delta t$  varía en un intervalo de 5 a 25°C. Al sustituir estos valores en la ecuación (4-4) hallamos que para  $\Delta t = 5^\circ\text{C}$ ,  $R_{\min} = 6,7 \mu$ ; para  $\Delta t = 25^\circ\text{C}$ ,  $R_{\min} = 1,3 \mu$ .

Las observaciones realizadas usando filmación acelerada, muestran que en caso del régimen de ebullición fijo la frecuencia de la formación de burbujas de vapor resulta desigual tanto en diferentes puntos de la superficie, como también en el tiempo. Esto le atribuye al proceso de ebullición un complicado carácter estadístico. De modo correspondiente, las velocidades de crecimiento y las dimensiones de separación de diferentes burbujas también se caracterizan por las desviaciones aleatorias alrededor de ciertas magnitudes medias.

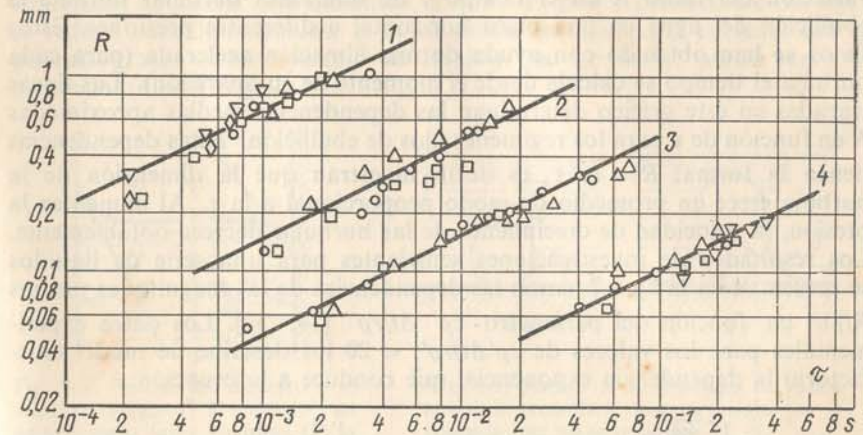


Fig. 4-6. Dependencia entre el radio de la burbuja  $R$  y el tiempo  $\tau$  durante la ebullición del agua sobre una placa horizontal de plata [32].

1 —  $p_s = 1 \cdot 10^5$  Pa,  $\Delta t = 12,7^\circ\text{C}$ ; 2 —  $p_s = 3,2 \cdot 10^5$  Pa,  $\Delta t = 10,2^\circ\text{C}$ ; 3 —  $p_s = 11,8 \cdot 10^5$  Pa,  $\Delta t = 6,65^\circ\text{C}$ ; 4 —  $p_s = 95,7 \cdot 10^5$  Pa,  $\Delta t = 1,53^\circ\text{C}$ .

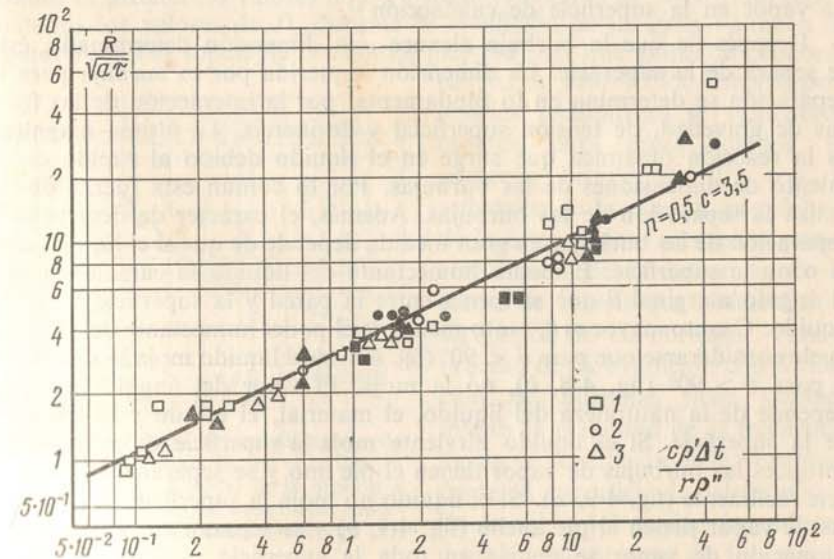


Fig. 4-7. Dependencia entre las magnitudes medias  $R/\sqrt{\alpha \tau}$  y el parámetro  $c p' \Delta t / r \rho''$  durante la ebullición del agua (1), benzol (2) y alcohol etílico (3) sobre las superficies de plata y niquelada (los puntos ennegrecidos se refieren a la superficie niquelada).



En la fig. 4-6 se exponen los datos experimentales que muestran la variación del radio  $R$  en el tiempo  $\tau$  de diferentes burbujas durante la ebullición del agua en una placa horizontal a diferentes presiones. Estos datos se han obtenido con ayuda de una filmación acelerada (para cada burbuja el tiempo se calcula desde el momento de su aparición). Las líneas trazadas en este gráfico determinan las dependencias medias aproximadas  $R$  en función de  $\tau$  para los regímenes fijos de ebullición. Estas dependencias tienen la forma:  $R = c_1 \sqrt{\tau}$ , es decir, muestran que la dimensión de la burbuja crece en promedio de modo proporcional a la  $\tau$ . Al aumentar la presión, la velocidad de crecimiento de las burbujas decrece notablemente. Los resultados de investigaciones semejantes para una serie de líquidos se presentan en la fig 4-7 como las dependencias de las magnitudes medias  $R/\sqrt{at}$  en función del parámetro  $cp' \Delta t / rp'' < 20$  los describe de modo satisfactorio la dependencia exponencial que conduce a la ecuación:

$$R = 3,5 \sqrt{\frac{\lambda \Delta t}{rp''}} \tau, \quad (4-6)$$

donde  $\lambda$  y  $a$  son los coeficientes de conductibilidad térmica y de termodifusividad del líquido.

Esta correlación determina la velocidad de crecimiento de las burbujas de vapor en la superficie de calefacción <sup>1)</sup>.

Después de que la burbuja alcance una dimensión determinada, ésta se separa de la superficie. La dimensión requerida por la burbuja para la separación se determina en lo fundamental por la interacción de las fuerzas de gravedad, de tensión superficial y de inercia. La última magnitud es la reacción dinámica que surge en el líquido debido al rápido crecimiento de dimensiones de las burbujas. Por lo común esta fuerza obstaculiza la separación de las burbujas. Además, el carácter de desarrollo y separación de las burbujas en gran medida depende de que si el líquido moja o no la superficie. El poder humectante del líquido se caracteriza por el ángulo marginal  $\theta$  que se forma entre la pared y la superficie libre del líquido. Cuanto mayor es  $\theta$ , tanto menor es el poder humectante del líquido. Suele considerarse que para  $\theta < 90^\circ$  (fig. 4-8, a) el líquido moja la superficie, y para  $\theta > 90^\circ$  (fig. 4-8, b), no la moja. El valor del ángulo marginal depende de la naturaleza del líquido, el material, el estado y la limpieza de la superficie. Si el líquido hirviente moja la superficie de calefacción, entonces las burbujas de vapor tienen el pie fino y se separan de la superficie fácilmente (fig. 4-9, a). Si el líquido no moja la superficie, las burbujas de vapor tienen el pie ancho (fig. 4-9, b) y se separan en el istmo o la formación de vapor se realiza en toda la superficie.

<sup>1)</sup> Para los valores del parámetro  $cp' \Delta t / rp'' > 20$  (lo que corresponde a las condiciones de ebullición de los líquidos a presiones próximas a la atmosférica o más bajas), la velocidad real de crecimiento comienza a ser más alta que la determinada según la ecuación (4-6).

Los líquidos corrientes: agua, alcoholes, acetona y otros mojan las superficies de calefacción metálicas limpias. El poder humectante del agua se reduce considerablemente si la superficie metálica está cubierta con la película grasa. Como ejemplo de líquido que no moja, puede servir el mercurio ( $\theta \approx 140^\circ$ ).

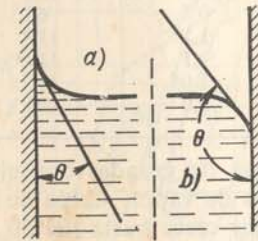


Fig. 4-8. Forma del menisco y el ángulo marginal  $\theta$  cuando un líquido moja (a) y no moja (b) la superficie.

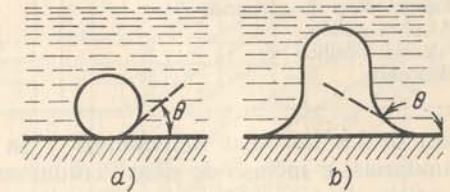


Fig. 4-9. Forma de las burbujas de vapor sobre la superficie que se moja (a) y sobre la que no se moja (b).

Durante la ebullición de los líquidos corrientes, en las superficies metálicas de calefacción, los diámetros medios de separación de las burbujas  $D_0$  a la presión atmosférica son aproximadamente de 1 a 2 mm. Al aumentar la presión los valores de  $D_0$  disminuyen. En la fig. 4-10 están representados los valores de  $D_0$  durante la ebullición de un gran volumen de líquido sobre la superficie horizontal [32, 119], en una gama de presiones (de 0,2 a 100)  $\cdot 10^5$  Pa. Estas dependencias cualitativas se obtuvieron también para otros líquidos. El aumento brusco de  $D_0$  con la reducción de la presión, por debajo de la atmosférica, se explica por el crecimiento de la influencia de la fuerza de inercia que obstaculiza la separación de las burbujas. Para el proceso de la ebullición con formación de burbujas tiene también interés la magnitud de la frecuencia media de separación de las burbujas desde la superficie de calefacción  $f$ . En la tabla 4-2 se dan los valores, medidos en proceso de los experimentos, de  $f$ ,  $D_0$  y de los productos

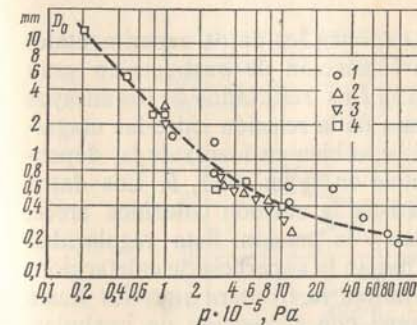


Fig. 4-10. Variación de los diámetros de las burbujas de vapor  $D_0$ , en el momento de separación, en función de la presión  $p$  durante la ebullición del agua en las superficies horizontales de plata (1), cobre (2), bronce (3) y permalloy (4).

$D_0 f$ , durante la ebullición de una serie de líquidos en la superficie horizontal a la presión atmosférica [119].

Al aumentar la diferencia de temperaturas entre los dos medios (o el flujo calorífico), empieza a desarrollarse paulatinamente el proceso de



Valores de  $f$ ,  $D_0$  y  $D_0f$  para los líquidos

Tabla 4-2

| Líquido                 | $f$ , 1/s | $D_0$ , mm | $D_0f$ , mm/s |
|-------------------------|-----------|------------|---------------|
| Agua                    | 62        | 2,5        | 155           |
| Freón-12                | 91        | 0,7        | 64            |
| Tetracloruro de carbono | 108       | 1,1        | 119           |
| Alcohol etílico         | 108       | 1,1        | 119           |
| Alcohol butílico        | 106       | 1,05       | 111           |
| Benceno                 | 99        | 1,0        | 99            |

unión de las burbujas individuales y la formación de grandes burbujas secundarias, e incluso de unas "columnas" enteras de vapor. Cerca de la superficie el contenido medio volumétrico del vapor crece hasta del 60 al 80%. Sin embargo, como muestran las investigaciones, en una muy fina capa superficial, cerca de la misma pared, predomina como antes la fase líquida. La resistencia térmica de esta capa determina precisamente, en lo fundamental, la intensidad de la emisión calorífica durante la ebullición desarrollada con formación de burbujas. El espesor eficaz de la capa, a medida que aumenta la carga térmica, se reduce, lo que conduce a un aumento de la intensidad de la emisión calorífica.

Se admite referir el coeficiente de traspaso del calor  $\alpha$ , durante la ebullición, a la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $\Delta t = t_p - t_s$ :

$$\alpha = \frac{q}{t_p - t_s} \quad (4-7)$$

En la fig. 4-11, a título de ejemplo, se exponen los datos experimentales para la ebullición que se desarrolla con formación de burbujas en gran volumen del agua a diferentes presiones [15]. Los resultados de los ensayos normalmente se representan o bien en forma de la relación entre las magnitudes  $q$  y  $\Delta t$ , como lo muestra la fig. 4-11, a, o bien en forma de la dependencia de  $\alpha$  en función de  $q$ , que se expone en la fig. 4-11, b. Los datos experimentales muestran que la intensidad de la emisión calorífica crece, al aumentar la densidad del flujo calorífico y la presión. Esta regularidad es característica en todos los líquidos que mojan la superficie de calefacción. Las líneas de trazos en la fig. 4-11 determinan la frontera superior hasta que existe el régimen de ebullición de agua con formación de burbujas. Los valores correspondientes a  $q_{cr1}$ ,  $\alpha_{cr1}$  y  $\Delta t_{cr1}$ , en función de la presión, se muestran en la fig. 4-12.

Las investigaciones indican que la regularidad de la emisión calorífica, cuando hay ebullición desarrollada con formación de burbujas, prácticamente no depende de las dimensiones y la forma de la superficie que entrega el calor<sup>1)</sup>. Al mismo tiempo los experimentos muestran que la intensidad del intercambio térmico puede variar, dependiendo del estado,

<sup>1)</sup> Esto es justo si las dimensiones de la superficie son considerablemente mayores o por lo menos conmensurables con las dimensiones del diámetro medio de separación de las burbujas.

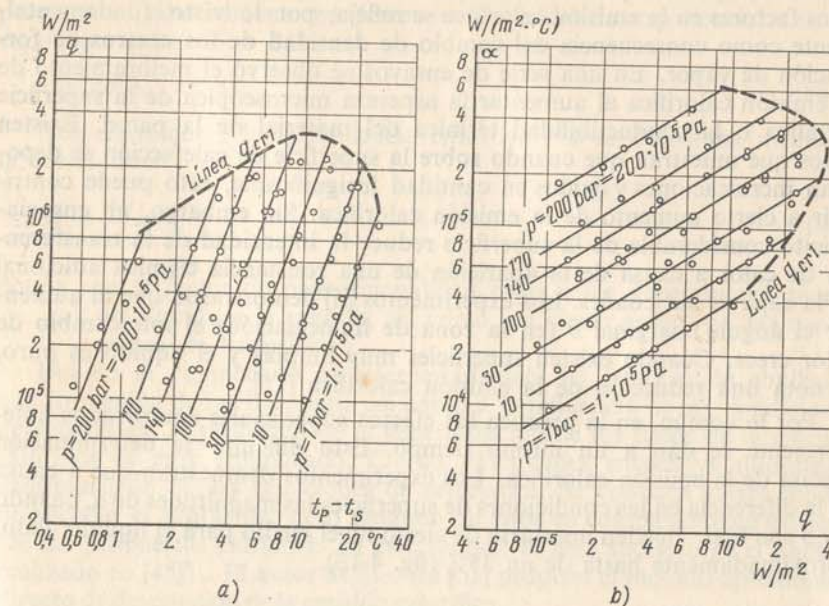


Fig. 4-11. Intercambio de calor durante la ebullición desarrollada del agua con formación de burbujas sobre la superficie de un tubo horizontal de plata  $D = 5 \text{ mm}$ . a — dependencia entre  $q$  y  $t_p - t_s$ ; b — dependencia entre  $\alpha$  y  $q$ .

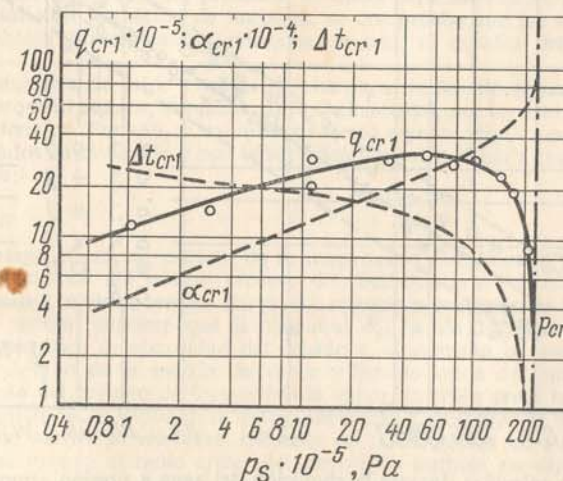


Fig. 4-12. Variación de  $q_{cr1}$ ,  $\Delta t_{cr1}$  en función de la presión durante la ebullición del agua y cuando existe  $\alpha_{cr1}$ .



el material y la limpieza de la superficie de calefacción. La influencia de estos factores en la emisión calorífica se refleja, por lo visto, fundamentalmente como consecuencia del cambio de densidad de los centros de formación de vapor. En una serie de ensayos se observó el mejoramiento de la emisión calorífica al aumentar la aspereza microscópica de la superficie metálica o la conductibilidad térmica del material de la pared. Existen datos que muestran que cuando sobre la superficie de calefacción se depositan incrustaciones y óxidos en cantidad insignificante, esto puede contribuir a cierto aumento de la emisión calorífica. Sin embargo, un ensuciamiento considerable de la superficie reduce la intensidad de la transferencia de calor a causa de la aparición de una resistencia térmica adicional de la capa de suciedades. Los experimentos [5] demostraron que al aumentar el ángulo marginal  $\theta$  (en la zona de humectación) el intercambio de calor crece. Cuando existen superficies muy limpias y el líquido es puro, se nota una reducción de la emisión calorífica [15].

Por lo común, en la práctica los efectos superficiales enumerados anteriormente se dan a un mismo tiempo. Esto dificulta la determinación precisa de la emisión calorífica. Los experimentos demuestran que a causa de la diferencia en las condiciones de superficies las magnitudes de  $\alpha$ , cuando  $q$  y  $p$  son fijas, pueden apartarse de cierto nivel medio para el líquido dado, aproximadamente hasta de un 35% (fig. 4-13).

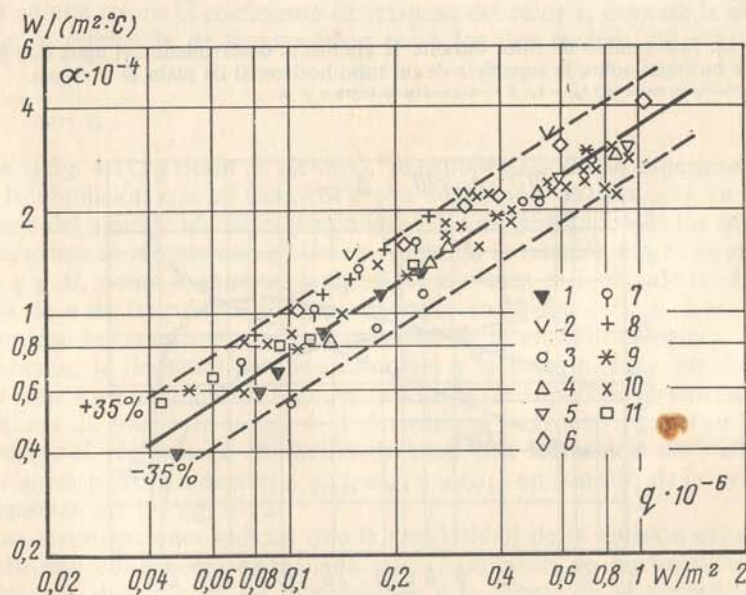


Fig. 4-13. Emisión calorífica durante la ebullición del agua a presión atmosférica según los datos de diferentes autores.  
1 — Jacob y Linke, placa cromada, limpia, ebullición duradera; 2 — Cichelli y Bonilla, placa cromada, incrustación insignificante; 3 — 6 — Kolchuguin y col., acero inoxidable, níquel, cromo, plata, respectivamente, tubos horizontales de  $D = 5$  mm, limpios; 7, 8 — Borishanski y otros, acero inoxidable y latón respectivamente, tubos horizontales de  $D = 4 + 5$  mm; 9 — Minchenko, tubo de latón de  $D = 9$  mm; 10 — Kutateladze, barra de grafito de  $D = 2$  mm; 11 — Mac Adams, tubo de cobre de  $D = 13$  mm.

En caso de ebullición desarrollada la relación entre  $\alpha$  y  $q$  puede representarse habitualmente en forma de dependencia exponencial con un exponente próximo a  $2/3$ :

$$\alpha = cq^{2/3}. \quad (4-8)$$

Respectivamente la dependencia entre  $\Delta t$  y  $q$  se determina mediante la correlación

$$\Delta t = \frac{1}{c} q^{1/3}, \quad (4-9)$$

donde  $c$  es el factor de proporcionalidad cuyo valor depende del género del líquido y la presión, así como, en cierto grado, de las condiciones de superficies<sup>1</sup>.

Debido al complicado carácter estadístico del proceso de ebullición con formación de las burbujas, así como a la influencia de las condiciones de superficies, el problema de la generalización de los datos de la emisión calorífica es muy complicado. Ciertas dificultades surgen ya durante la determinación de las ecuaciones de semejanza. Se conocen varios modos de abordar el problema, pero ninguno de éstos es completamente estricto. De las propuestas existentes en este sentido el más sucesivo es el análisis realizado en [45]<sup>2</sup>. El autor de la obra [51] propuso el método aproximado directo de descripción de la emisión calorífica.

En total durante la ebullición suficientemente desarrollada, cuando cerca de la superficie de calefacción el contenido volumétrico de vapor comienza a ser considerable, la alta intensidad de la emisión calorífica durante la ebullición se determina por la pequeña resistencia térmica de la fina capa intermedia de líquido que se queda en la misma superficie de caldeo. La presencia de dicha capa intermedia en toda la región de la ebullición con formación de burbujas, se comprueba con los resultados de una serie de trabajos experimentales relacionados con el estudio del mecanismo de ebullición.

La transferencia de calor a través de esta capa de líquido adyacente a la pared, debido a su pequeño espesor, se realiza en lo fundamental, por lo visto, mediante la conductibilidad térmica. Por eso, si expresamos cierto espesor eficaz mediante los valores medios, tomados en el tiempo y por la superficie, de tal película a través de  $\delta_{ef}$ , puede escribirse que:

$$\alpha \approx \lambda / \delta_{ef}. \quad (a)$$

Sin embargo el cálculo estricto de la magnitud  $\delta_{ef}$  se dificulta por la naturaleza complicada y caótica del mismo proceso de ebullición con formación de burbujas; durante el análisis ulterior resulta necesario recurrir a evaluaciones cualitativas aproximadas. Es natural suponer que la magnitud  $\delta_{ef}$  ha de disminuir: si se reduce el coeficiente cinemático de viscosidad del líquido  $\nu$ , si aumenta la intensidad del movimiento desordenado de la mezcla de vapor y líquido cerca del límite de esta capa, como resultado del proceso de formación de vapor, también crece la densidad de los centros de formación de vapor en la misma superficie. Como medida de los últimos dos efectos pueden servir: la velocidad reducida de la formación de vapor  $w'' = q/r\rho''$  y la magnitud inversa al radio crítico del germen de burbuja de vapor  $1/R_{min}$ . Luego

<sup>1</sup> En ciertos experimentos al variar las condiciones de superficies, se notó también el cambio del exponente en las ecuaciones (4-8) y (4-9).

<sup>2</sup> Otras propuestas de generalización pueden verse, por ejemplo, en los textos [1, 9, 39, 47, 52, 90, 99].



pueden considerarse los procesos de crecimiento de las burbujas aisladas de vapor y el aumento de toda la mezcla de vapor y líquido cerca de la superficie, como el conjunto de toda una serie de procesos periódicos; por eso todo este movimiento complicado y desordenado en conjunto puede interpretarse como cierto movimiento periódico con un período medio característico  $\tau$ . Entonces de las consideraciones de dimensión se deduce que la magnitud  $\delta_{ef} \sim \sqrt{v\tau}$  y el período  $\tau \sim R_{min}/w''$ , es decir,

$$\delta_{ef} = \text{const} \sqrt{v R_{min}/w''}. \quad (b)$$

Si ahora se introduce la expresión de (b) en la de (a), se toman en consideración las ecuaciones (4-4 a) y (4-5) y la determinación del coeficiente de traspaso del calor  $\alpha = q/\Delta t$ , entonces, después de unas simples transformaciones, se obtiene la dependencia:

$$\alpha = b \sqrt[3]{\frac{\lambda^2}{\lambda \sigma T_s}} q^{2/3}, \quad (c)$$

que es la que relaciona el coeficiente de traspaso del calor  $\alpha$  con la densidad del flujo calorífico  $q$  y las propiedades físicas del líquido. La magnitud  $b$  en la correlación (c) es un coeficiente numérico adimensional. Puesto que la evaluación de la velocidad del movimiento caótico de la mezcla de vapor y líquido y la de la densidad de los centros de formación que tiene un carácter aproximado, este coeficiente puede depender de la relación entre las densidades de las fases  $\rho''/\rho'$  y las condiciones de las superficies específicas, que influyen en la aparición de los centros de formación de vapor.

La correlación (c) al tener en cuenta las consideraciones aducidas anteriormente, puede tomarse como fundamento para el análisis y la generalización de los datos experimentales de la emisión calorífica, durante la ebullición que se desarrolla con formación de burbujas.

El examen de investigaciones realizadas y datos experimentales muestra que para calcular la emisión calorífica puede recomendarse la igualdad

$$\alpha = b \left( \frac{\lambda^2}{v \sigma T_s} \right)^{1/3} q^{2/3}, \quad (4-10)$$

donde  $b$  es el coeficiente que se expresa así:

$$b = 0,075 \left[ 1 + 10 \left( \frac{\rho''}{\rho' - \rho''} \right)^{2/3} \right].$$

Es conveniente elegir todas las propiedades físicas en esta fórmula según la temperatura de saturación.

En la fig. 4-14 se muestran los datos experimentales de diferentes investigadores en cuanto al intercambio térmico, durante la ebullición del agua en diferentes superficies de caldeo. Estos datos se dan en forma de dependencia entre las magnitudes medias  $\frac{\alpha}{(\lambda^2/v\sigma T_s)^{1/3} q^{2/3}}$  (a una presión dada) y la relación de las densidades de vapor y de líquido  $\rho''/\rho'$ . La línea en la gráfica refleja el nivel medio de la emisión calorífica. Esta línea corresponde a la fórmula (4-10). Las desviaciones de los datos obtenidos por diferentes investigadores partiendo de esta dependencia no se explican en lo fundamental por los errores de las mediciones, sino por la diferencia en las condiciones de las superficies. Estas desviaciones se hallan en conjunto dentro de los límites de  $\pm 35\%$ .

En la fig. 4-15 se exponen los datos experimentales de la emisión calorífica durante la ebullición en gran volumen de otros líquidos a los que se les han hecho la misma elaboración.

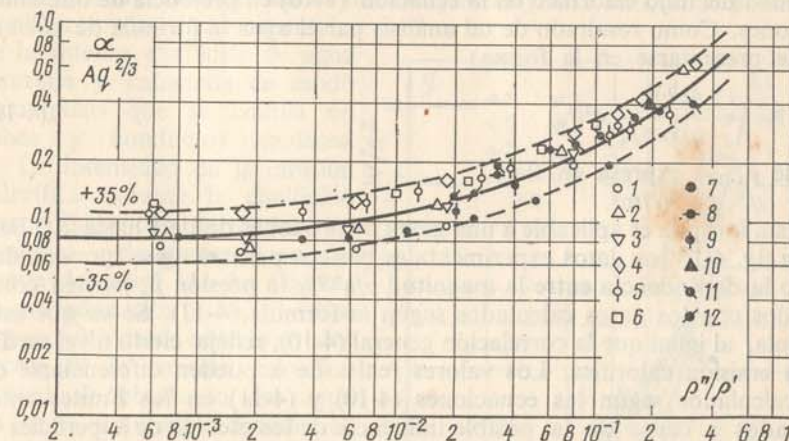


Fig. 4-14. Intercambio de calor durante la ebullición del agua en las condiciones de movimiento libre (1-6) y durante el movimiento forzado en los tubos y canales anulares (7-12).

1-4 — datos experimentales [15] sobre las superficies del acero inoxidable, níquel, cromo y plata, respectivamente; 5-6 — datos experimentales [8] sobre las superficies de acero inoxidable y bronce; 7 — datos experimentales [2], acero inoxidable; 8 — datos experimentales [81], acero inoxidable; 9 — datos experimentales [4], acero inoxidable; 10 — datos experimentales [84], cobre; 11 — datos experimentales [84], acero inoxidable; 12 — datos experimentales [69], acero inoxidable. La magnitud  $A = \sqrt[3]{\lambda^2/v\sigma T_s}$ , línea continua corresponde a la ecuación (4-10).

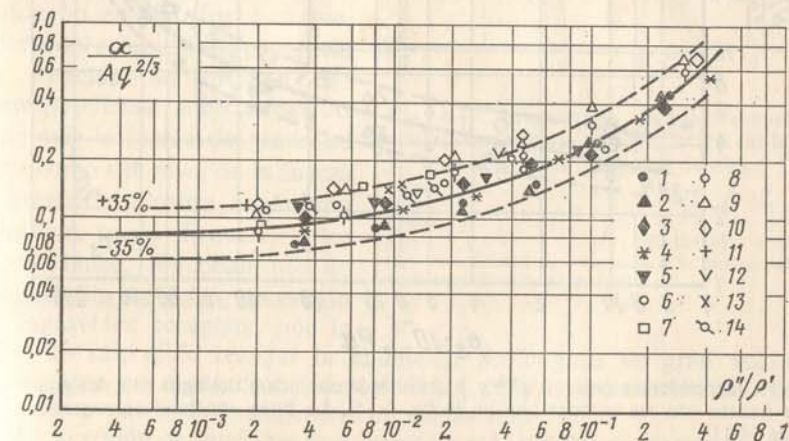


Fig. 4-15. Intercambio de calor durante la ebullición de diferentes líquidos en las condiciones de movimiento libre.

Benzol: 1-3 — datos [15], acero inoxidable; níquel, plata, respectivamente; 4 — datos [104], superficie cromada; 6 — datos [107], acero inoxidable; heptano: 6 — datos [104], alcohol etílico; 7 — datos [104], 8-10 — datos [8]; freón-12; 11 — datos [77], acero inoxidable; freón 22; 12 — datos [77], acero inoxidable; amoníaco: 13 — datos [23], acero inoxidable; difenilo: 14 — datos [107], acero inoxidable. La magnitud  $A = \sqrt[3]{\lambda^2/v\sigma T_s}$ , línea continua corresponde a la ecuación (4-10).



Basándose sobre la ecuación general (4-10) pueden obtenerse también para cada líquido correlaciones de cálculo más simples. Para esto es necesario calcular el valor del coeficiente que se encuentra delante de la densidad del flujo calorífico en la ecuación (4-10) en presencia de diferentes presiones. Como resultado de tal análisis par el agua la fórmula de cálculo puede presentarse en la forma:

$$\alpha = \frac{3,4 p_s^{0,18}}{1 - 0,0045 p_s} q^{2/3}, \quad (4-11)$$

donde  $p_s$  se expresa en Bar,  
 $q$ , en  $W/m^2$ .

Esta fórmula es aplicable a una gama de presiones desde 1 hasta 200 Bar. En la fig. 4-16 los datos experimentales básicos para el agua (presentados como la dependencia entre la magnitud  $\alpha/q^{2/3}$  y la presión  $p_s$ ) vienen comparados con los datos calculados según la fórmula (4-11). Se ve que esta fórmula, al igual que la correlación general (4-10), refleja cierto nivel medio de la emisión calorífica. Los valores reales de  $\alpha$  pueden diferenciarse de los calculados según las ecuaciones (4-10) y (4-11) en los límites antes indicados a causa de la posible influencia de los efectos de superficies <sup>1)</sup>.

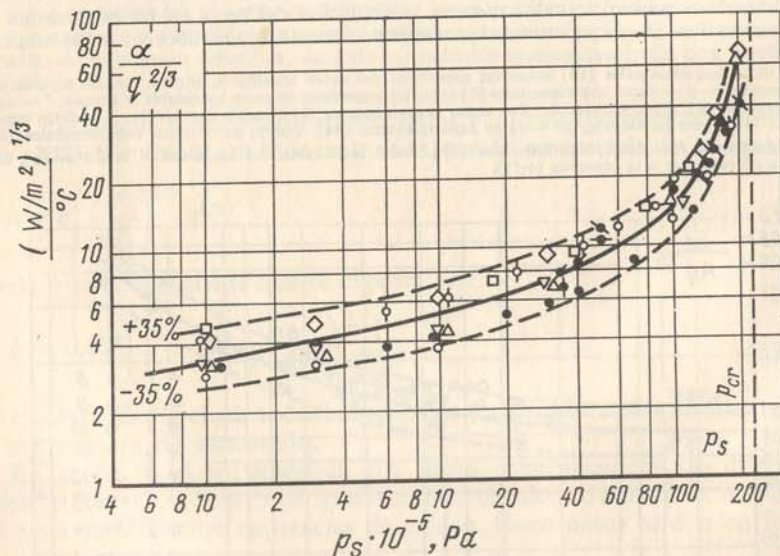


Fig. 4-16. Dependencia entre  $\alpha/q^{2/3}$  y  $p$  durante la ebullición del agua (las designaciones de los puntos son las mismas que en la fig. 4-14). La línea continua corresponde a la fórmula (4-11).

<sup>1)</sup> Esto se refiere también a cualesquier otras recomendaciones de cálculo descritas en la literatura. El registro uniforme de estas últimas hasta ahora está dificultado. Hoy día, por lo visto, es posible solamente la evaluación aproximada basada sobre las tendencias cualitativas aducidas anteriormente en que se habla de la influencia del estado del material y la limpieza de la superficie de calefacción sobre la intensidad del intercambio térmico.

Los ensayos muestran que en el caso del movimiento forzado del líquido, las regularidades de la emisión calorífica, cuando hay ebullición desarrollada con formación de burbujas, se subordinan a las correlaciones (4-10) y (4-11). Esto se deduce de las figs. 4-14 y 4-16 en que se presentan también los datos experimentales de la intensa ebullición de agua saturada y calentada de modo incompleto que se circula en tubos y conductos anulares.

La intensidad de la emisión calorífica durante la ebullición desarrollada con formación de burbujas, prácticamente no depende del nivel de las fuerzas de gravedad. En la fig. 4-17 se exponen los datos experimentales acerca de la emisión calorífica durante la ebullición del agua en gran volumen, cuando se cambia la aceleración en función de la aceleración de la caída libre ( $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$ ) hasta sobrecargas de 135 veces:  $g/g_0 = 135$ . Dichos datos muestran que la intensidad del intercambio térmico no cambia. Estos experimentos se realizaron en centrífugos en que, a costa del cambio de la frecuencia de rotación se crearon las correspondientes sobrecargas. Al disminuir la fuerza de gravedad por debajo del nivel de la fuerza de atracción terrestre, la emisión calorífica, según demuestran los experimentos, prácticamente no cambia. Sin embargo, en estado de ingravidez completa, por lo visto, es imposible realizar la ebullición prolongada en gran volumen, puesto que en el estado de imposibilidad cesa la evacuación del vapor formado a partir de la superficie de calefacción.

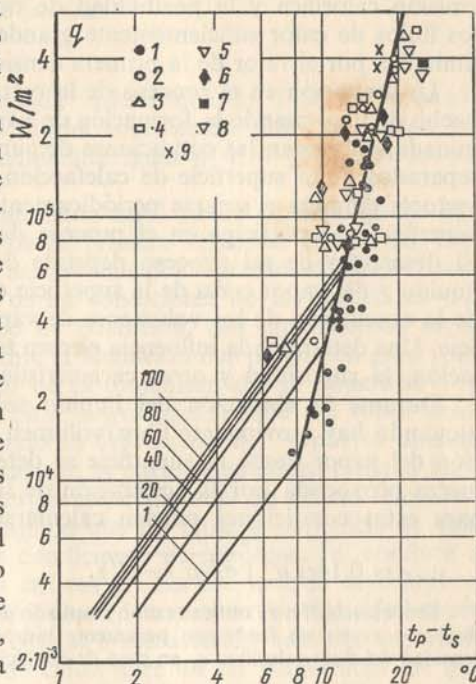


Fig. 4-17. Intercambio de calor durante la ebullición del agua con formación de burbujas para diferentes relaciones de  $g/g_0$ .

Puntos . . . . . 1 2 3 4 5  
 $g/g_0$  . . . . . 1 20 40 60 80  
Puntos . . . . . 6 7 8 9  
 $g/g_0$  . . . . . 100 124 135 1-40  
( $t_s$  — temperatura de saturación a la presión existente en la superficie de calefacción).

En la región de presiones muy bajas ( $p_s < 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ) el proceso de ebullición adquiere una serie de particularidades nuevas. Las fundamentales entre éstas consisten en la aparición de un proceso de ebullición irregular, pulsante en el tiempo, cuando surgen unos considerables recalentamientos y aparecen unos efectos acústicos (golpeteos). La intensidad de la emisión calorífica media en este caso se reduce notablemente.



Las regularidades singulares se revelan en la ebullición del líquido en películas finas (con espesor menor de 1mm) creadas en la superficie por medio de un chorro de gotas [106, 110].

En total los datos aducidos muestran que para el proceso de ebullición con formación de burbujas son características la intensidad alta de la emisión calorífica y la posibilidad de evacuar, por unidad de superficie, los flujos de calor suficientemente grandes. Las últimas magnitudes están limitadas por el valor de la primera densidad crítica del flujo calorífico  $q_{cr1}$ .

La limitación en el proceso de la extracción del calor se explica por el hecho de que, cuando la formación de vapor alcanza una intensidad determinada, empeoran las condiciones de suministro del líquido a los sectores separados de la superficie de calefacción. La película de líquido en estos sectores empieza a secarse periódicamente. En suma la parte eficaz de la superficie que participa en el proceso de extracción del calor, se reduce. El desarrollo de tal proceso depende del carácter de la circulación del líquido y del vapor cerca de la superficie de calefacción, y de la intensidad de la evacuación de los volúmenes de vapor a partir de esta misma superficie. Una determinada influencia ejercen también las condiciones de humectación, la rugosidad y otras características de la superficie.

Durante la ebullición del líquido sobre tubos y placas horizontales y cuando hay movimiento libre (volumen grande), la velocidad de evacuación del vapor desde la superficie se determina fundamentalmente por la fuerza provocada por la aceleración de la caída libre. Los valores de  $q_{cr1}$  para estas condiciones pueden calcularse según la fórmula [47]

$$q_{cr1} = 0,14r\sqrt{\rho''} \sqrt[4]{\sigma g(\rho' - \rho'')}. \quad (4-12)$$

Esta correlación se obtiene como resultado de consideraciones acerca de la crisis de ebullición como un fenómeno puramente hidrodinámico. A medida que aumenta la densidad del flujo calorífico  $q$ , en caso de ebullición con formación de burbujas, crecen la reducida velocidad de la formación de vapor  $w'' = \frac{q'}{r\rho''}$  y la altura de carga dinámica  $\rho''w''^2$  del flujo de vapor que se forma cerca de la superficie de calefacción. Al alcanzar una magnitud determinada  $(\rho''w''^2)_{cr}$  llega la reconstrucción hidrodinámica de la estructura de la capa bifásica adyacente a la pared, a consecuencia de lo cual el suministro de porciones suficientes de líquido, hacia la superficie de ebullición, se entorpece. Esto conduce a la crisis de la ebullición. El momento de la reconstrucción hidrodinámica de la capa bifásica debe caracterizarse por: la correlación determinada entre la altura de presión dinámica del flujo de vapor  $(\rho''w''^2)_{cr}$ , la fuerza de gravedad  $g(\rho' - \rho'')l$  y la fuerza de tensión superficial  $\sigma/l$ . La magnitud  $l$  es la dimensión lineal característica del sistema. De las consideraciones de la teoría de dimensiones entre estas tres magnitudes debe existir la relación mutua funcional adimensional:

$$\frac{(\rho''w''^2)_{cr}}{g(\rho' - \rho'')l} = f\left(\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')l^2}\right),$$

donde  $f$  es todavía una función arbitraria. Según las observaciones efectuadas en los ensayos, la densidad crítica del flujo calorífico no depende de las dimensiones lineales del calentador. Por eso la forma de la función ha de ser tal que en la correlación anterior la dimensión  $l$  se reduzca. A esta condición la satisface sólo una dependencia de la forma:

$$\frac{(\rho''w''^2)_{cr}}{g(\rho' - \rho'')l} = A^2 \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho' - \rho'')l^2}},$$

donde  $A^2$  es cierto número positivo adimensional. Al calcular esta correlación con respecto a la magnitud  $w''$  obtenemos:

$$w''_{cr} = A \sqrt[4]{\sigma g(\rho' - \rho'')/\rho''^2}$$

y luego, sustituyendo  $w''_{cr}$  por  $w''_{cr} = \frac{q_{cr1}}{r\rho''}$ , llegamos definitivamente a la ecuación para la primera densidad crítica del flujo calorífico:

$$q_{cr1} = Ar\sqrt{\rho''} \sqrt[4]{\sigma g(\rho' - \rho'')}.$$

El coeficiente numérico  $A$  queda indeterminado. Fue determinado mediante la comparación de la última correlación con los datos experimentales y resultó aproximadamente igual a 0,14 [47]. Así se obtiene la ecuación (4-12).

La correlación (4-12) determina cierto nivel medio de la magnitud  $q_{cr1}$ , mientras que los valores reales de la primera densidad crítica del flujo calorífico pueden diferenciarse, de los cálculos aproximadamente hasta de  $\pm 35\%$  debido a la influencia de las condiciones de las superficies y la naturaleza estadística del proceso de ebullición. Los experimentos muestran que las magnitudes  $q_{cr1}$  durante la ebullición del líquido en gran volumen, prácticamente no dependen de la dimensión de la superficie<sup>1)</sup>, si están aseguradas las condiciones para la evacuación libre del vapor desde la superficie de calefacción. Cuando la evacuación del vapor se dificulta (por ejemplo, una placa horizontal con la parte calentadora dirigida hacia abajo), los valores de  $q_{cr1}$  disminuyen esencialmente. Lo mismo se observa en el caso de ebullición de un líquido que no moja la superficie de calefacción. El mejoramiento de las condiciones de humectación conduce al aumento de los flujos caloríficos críticos [3]. En una serie de experimentos se notó el aumento de los flujos críticos al incrementar la rugosidad superficial, así como al precipitar las costras e incrustación sobre la superficie. La influencia de la aceleración de caída libre en las magnitudes de  $q_{cr1}$ , que predice la fórmula (4-12) en términos medios, se comprueba con los datos experimentales [56, 68].

Durante la ebullición de un líquido dentro de tubos y canales, en condiciones de movimiento forzado, la intensidad de la evacuación del vapor desde la superficie y respectivamente la magnitud  $q_{cr1}$ , dependen de la velocidad de movimiento y el carácter de la mezcla turbulenta del flujo. En estas condiciones también el contenido de vapor en el mismo flujo ejerce gran influencia en  $q_{cr1}$ . Los ensayos muestran que al aumentar el contenido de vapor, los valores de  $q_{cr1}$  disminuyen. Durante la ebullición con calentamiento incompleto a consecuencia de la condensación de las burbujas de vapor cerca de la superficie que desprende calor, las condiciones favorables para suministrar el líquido hacia la superficie de calefacción se conservan incluso hasta flujos caloríficos muy altos. Por eso los valores de  $q_{cr1}$  durante la ebullición con calentamiento incompleto por lo común resultan suficientemente grandes, de modo que con el aumento del grado de calentamiento incompleto (que se determina por la magnitud  $\Delta t_{inc} =$

<sup>1)</sup> Esto es justo, si las dimensiones de la superficie son mayores o conmensurables con la dimensión de los diámetros medios de separación de las burbujas de vapor.



$= t_s - t_{f1}$ , donde  $t_{f1}$  es la temperatura media del líquido en la sección dada)  $q_{cr1}$  crece.

Un gran número de trabajos se han dedicado a las investigaciones de la crisis de ebullición del líquido que circula en los tubos y canales. Sin embargo a causa de la complicada influencia mutua de diferentes factores hasta hoy día no se han logrado obtener para  $q_{cr1}$  unas dependencias simples y universales. Por eso el cálculo de las cargas térmicas críticas es necesario realizarlo con ayuda de los datos inmediatos (particulares), obtenidos como resultado de los experimentos con líquidos semejantes y en condiciones similares.

**3. Intercambio de calor durante la ebullición en capas.** En el régimen pelicular el líquido hirviendo está separado de la superficie de calefacción por una capa (película) de vapor, con la particularidad de que la temperatura de la superficie  $t_p$  supera considerablemente la de saturación  $t_s$ . Por eso, a la par con el intercambio de calor por convección, entre la superficie y la película de vapor a temperaturas altas una parte notable en el proceso de transferencia de calor pertenece a la radiación calorífica (véase cap.5).

La intensidad del intercambio de calor por convección durante la ebullición en capas se determina por la resistencia térmica de la película de vapor. El carácter del movimiento de vapor en la película y el espesor de ésta dependen de las dimensiones y la forma de la superficie de calefacción y de su posición en el campo de gravedad, así como de las condiciones de movimiento del líquido. De este modo, la ebullición en capas sobre la superficie de los tubos horizontales en las condiciones de movimiento libre (en gran volumen) el vapor se mueve a lo largo del perímetro del tubo hacia la generatriz superior, y a medida que se acumula, se evacúa periódicamente en forma de burbujas que se separan. La película de vapor tiene un espesor que se mide en fracciones de un milímetro y el movimiento de vapor en ésta tiene carácter laminar. Los coeficientes medios de la emisión calorífica constituyen aproximadamente de 100 a 300 W/(m<sup>2</sup>·°C). El cálculo de la emisión calorífica durante la ebullición en capas sobre los tubos horizontales en gran volumen es necesario realizarlo según la fórmula:

$$\bar{\alpha} = 0,62 \sqrt[4]{\frac{\lambda'^3(\rho' - \rho'')gr_*}{v''D(t_p - t_{f1})}}, \quad (4-13)$$

donde  $r_* = r + 0,5c_p''(t_p - t_s)$  es el calor efectivo del cambio de fase que considera el recalentamiento del vapor en la película y  $D$  es el diámetro del tubo.

Las propiedades físicas en esta fórmula (a excepción de la densidad del líquido  $\rho'$ ) se refieren a la fase de vapor. Es conveniente elegir las según la temperatura media del vapor:  $t_{med} = 0,5(t_p + t_s)$ .

En la fig. 4-18 se da la comparación de la fórmula (4-13) con los datos experimentales.

Durante la ebullición en capas sobre la superficie de los tubos y de las placas verticales, la corriente del vapor en la película tiene, por lo común, un carácter turbulento (vertiginoso). La superficie de la película sufre

oscilaciones ondulatorias, el espesor de ésta crece en la dirección y sentido del movimiento de vapor. Los experimentos muestran que la emisión calorífica prácticamente no depende de la altura de la superficie de calefacción y, por consiguiente, del gasto de vapor en la película. En total el

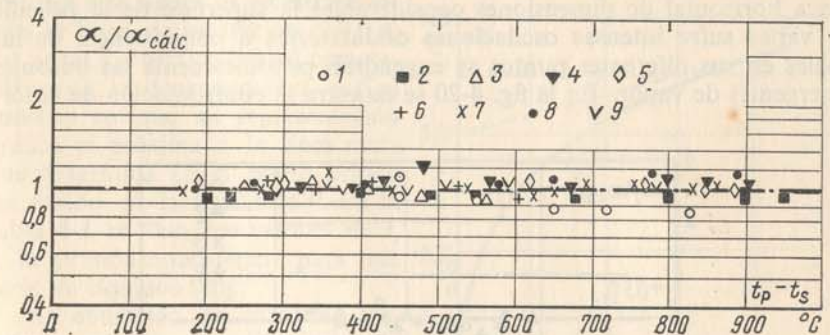


Fig. 4-18. Emisión calorífica durante la ebullición en capas sobre la superficie de tubos horizontales. La magnitud  $\alpha_{cálculo}$  se determina de acuerdo con la fórmula (4-13). Datos experimentales [103]. 1 — agua; 2 — alcohol etílico; 3 — benceno; 4 — tetracloruro de carbono; 6 — nitrógeno (1—5 —  $D = 8,95$  mm); 6—9 — pentano,  $D = 4,8; 6,05; 8,95; \text{ y } 11,9$  mm, respectivamente.

proceso resulta, en gran parte, análogo a la convección libre de un líquido de una fase que se realiza cerca de las superficies verticales. En el caso dado la fuerza de sustentación que determina el movimiento del vapor en la película, se determina mediante la diferencia entre las densidades del líquido y del vapor  $g(\rho' - \rho'')$ . El cálculo de la emisión calorífica en este caso puede realizarse según la fórmula [53]

$$\bar{\alpha} = 0,25 \sqrt[3]{\frac{\lambda'^3 c_p'' g(\rho' - \rho'')}{v''}} \quad (4-14)$$

Las propiedades físicas del vapor en esta fórmula es conveniente elegir las según la temperatura media del vapor. En la fig. 4-19 se muestra la

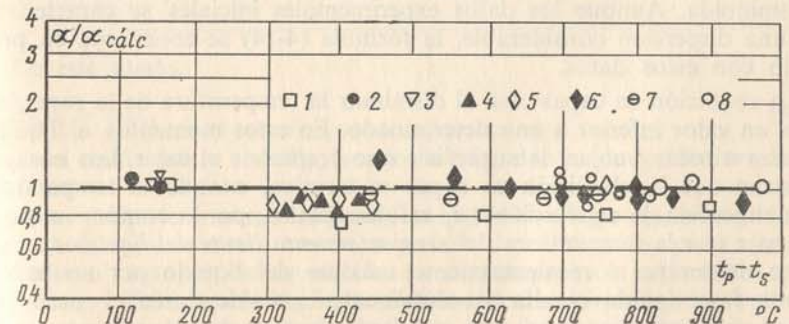


Fig. 4-19. Emisión calorífica durante la ebullición en capas sobre superficies verticales. La magnitud  $\alpha_{cálculo}$  se determina mediante la fórmula (4-14). 1 — benceno; 2 — tetracloruro de carbono; 3 — alcohol metílico; 4 — argón; 5 — nitrógeno; 6 — éter etílico; 7 — alcohol etílico (1—7 — presión atmosférica); 8 — alcohol etílico presión,  $10 \cdot 10^5$  Pa.



comparación de esta fórmula con los datos experimentales de la emisión calorífica, durante la ebullición de diferentes líquidos en capas sobre la superficie de los tubos verticales [7, 109].

Durante la ebullición del líquido en capas sobre la superficie de una placa horizontal de dimensiones considerables la superficie de la película de vapor sufre intensas oscilaciones ondulatorias a consecuencia de las cuales en sus diferentes puntos se engendran periódicamente las burbujas emergentes de vapor. En la fig. 4-20 se muestra la confrontación de la fór-

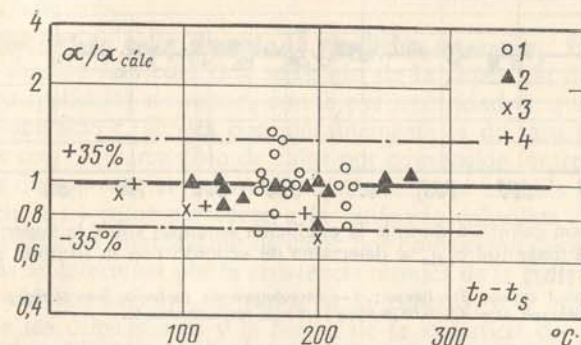


Fig. 4-20. Comparación de la dependencia (4-14) con los datos experimentales obtenidos durante la ebullición en capas del agua (1) y del freón (2) sobre una placa horizontal de  $280 \times 280$  mm, y del nitrógeno sobre la superficie de una esfera con  $D=25,4$  mm, para la aceleración normal de la caída libre (3) y para la aceleración reducida de la caída libre  $g/g_0 = 0,2$  (4).

mula (4-14) con los datos experimentales obtenidos en la ebullición del agua y del freón en capas, sobre una placa horizontal de  $280 \times 280$  mm [108], así como en la ebullición del nitrógeno en capas sobre la superficie de una esfera de diámetro  $D = 25,4$  mm, con la fuerza de gravedad normal y disminuida. Aunque los datos experimentales iniciales se caracterizan por una dispersión considerable, la fórmula (4-14) se concuerda en promedio con estos datos.

La ebullición en capas cesa al disminuir la temperatura de la superficie hasta un valor inferior a uno determinado. En estos momentos el líquido empieza a tocar (mojar) la superficie que desprende el calor. Los ensayos muestran que la ebullición en capas se termina, cuando la temperatura de la superficie de calefacción <sup>1)</sup>  $t_p$  resulta igual o, por lo común, un poco más baja que la temperatura del *recalentamiento límite del líquido*  $t_r$ . Esta última determina el recalentamiento máximo del líquido por arriba del cual la fase líquida resulta absolutamente inestable desde el punto de vista termodinámico; esta fase se descompone espontáneamente y se

<sup>1)</sup> La temperatura de la superficie  $t_p$  a que se termina la ebullición en capas, a veces, en los libros técnicos se llama temperatura del estado esferoidal o punto de Leidenfrost.

evapora. En los trabajos [80, 73] se estudiaron detalladamente los valores de las temperaturas del recalentamiento límite de los líquidos aplicando diferentes métodos para realizar experimentos. En la fig. 4-21 se da la dependencia de  $t_r = f(p)$  para el agua [73]. En esta figura se muestra también la línea de saturación  $t_s = f(p)$  del agua. La particularidad característica de la dependencia  $t_r = f(p)$  consiste en que su representación gráfica es próxima a la línea recta que se termina en el punto crítico de estado de la sustancia <sup>1)</sup>. En la tabla 4-3 se dan los valores de  $t_r$  a la presión atmosférica para una serie de líquidos [80].

La ebullición en capas se termina, cuando la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $\Delta t_{cr2} = t_p - t_s$  es igual o, normalmente, algo menos que la diferencia de temperaturas entre los dos medios, correspondiente al recalentamiento límite  $\Delta t_r = t_r - t_s$ .

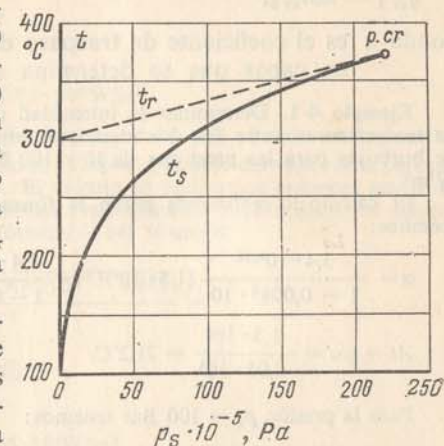


Fig. 4-21. Dependencia entre la temperatura de recalentamiento límite  $t_r$  del agua y la presión  $p$ .

Tabla 4-3

Valores de las temperaturas límites  $t_r$  de algunos líquidos

| Líquido          | $t_s$ , °C | $t_r$ , °C | Líquido | $t_s$ , °C | $t_r$ , °C |
|------------------|------------|------------|---------|------------|------------|
| Alcohol etílico  | 78,3       | 195        | Benceno | 80,1       | 226        |
| Alcohol metílico | 64,5       | 190        | Pentano | 36,1       | 147        |
| Acetona          | 56,1       | 181        | Hexano  | 68,7       | 182        |
| Eter dietílico   | 34,5       | 144        | Heptano | 98,4       | 215        |

De este modo,

$$\Delta t_{cr2} = c \Delta t_r, \quad (4-15)$$

donde el coeficiente  $c$  se halla, por lo común, dentro de los límites de 0,8 a 1,0.

A las temperaturas más altas de las superficies ( $t_p > t_r$ ), el líquido no puede entrar en contacto con la superficie de calefacción, puesto que al acercarse a la superficie se efectúa su descomposición espontánea y su evaporación. Esto determina la posibilidad de la existencia de ebullición en capas, a pesar de la película de vapor con frecuencia resulta inestable

<sup>1)</sup> Con mayor exactitud esta dependencia tiene una convexidad insignificante dirigida al eje de presiones. Tal carácter de  $t_r = f(p)$  se conserva también para otros líquidos.



desde el punto de vista hidrodinámico. La densidad crítica del flujo calorífico, al terminar el régimen pelicular de ebullición  $q_{cr2}$ , puede hallarse de la correlación

$$q_{cr2} = \alpha \Delta t_{cr2}, \quad (4-16)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de traspaso del calor en el régimen de ebullición en capas que se determina según las fórmulas (4-13) y (4-14).

**Ejemplo 4-1.** Determinar la intensidad de la emisión calorífica y las diferencias de temperaturas entre los dos medios durante la ebullición del agua con formación de burbujas para las presiones de 10 y 100 Bar, bajo una carga térmica  $q = 1,5 \cdot 10^6$  W/m<sup>2</sup>.

El cálculo lo realizamos según la fórmula (4-11). A la presión de  $p_s = 10$  Bar tenemos:

$$\alpha = \frac{3,4 \cdot 10^{0,18}}{1 - 0,0045 \cdot 10} (1,5 \cdot 10^6)^{2/3} = \frac{3,4 \cdot 1,51}{1 - 0,045} \cdot 1,31 \cdot 10^4 = 7,05 \cdot 10^4 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)};$$

$$\Delta t = q/\alpha = \frac{1,5 \cdot 10^6}{7,05 \cdot 10^4} = 21,2^\circ\text{C}.$$

Para la presión  $p_s = 100$  Bar tenemos:

$$\alpha = \frac{3,4 \cdot 10^{0,18}}{1 - 0,0045 \cdot 100} (1,5 \cdot 10^6)^{2/3} = 1,86 \cdot 10^5 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)};$$

$$\Delta t = \frac{1,5 \cdot 10^6}{1,86 \cdot 10^5} = 8^\circ\text{C}.$$

**Ejemplo 4-2.** Determinar las densidades máximas posibles de obtener en los flujos caloríficos de una superficie de calefacción, siendo el régimen de ebullición del agua con formación de burbujas en gran volumen para las presiones de  $10 \cdot 10^5$  y de  $100 \cdot 10^5$  Pa.

Las densidades máximas de los flujos caloríficos durante el régimen de ebullición con formación de burbujas constituyen los valores de  $q_{cr1}$ . El cálculo de los valores de  $q_{cr1}$  lo realizamos con la fórmula (4-12). A la presión de  $10 \cdot 10^5$  Pa las propiedades físicas del agua son:  $r = 2,02 \cdot 10^6$  J/kg;  $\sigma = 4,2 \cdot 10^{-2}$  N/m;  $\rho' = 887$  kg/m<sup>3</sup>;  $\rho'' = 5,15$  kg/m<sup>3</sup> (tabla A-4). Al sustituir estas magnitudes en la fórmula (4-12) tenemos:

$$q_{cr1} = 0,14 \cdot 2,02 \cdot 10^6 \sqrt{5,15} \cdot \sqrt[4]{4,2 \cdot 10^{-2} \cdot 9,81(887 - 5,15)} = 2,8 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2.$$

A la presión de  $100 \cdot 10^5$  Pa las propiedades físicas del agua son:  $r = 1,32 \cdot 10^6$  J/kg;  $\sigma = 1,2 \cdot 10^{-2}$  N/m;  $\rho = 691$  kg/m<sup>3</sup>;  $\rho'' = 54,6$  kg/m<sup>3</sup>. De donde tenemos:

$$q_{cr1} = 0,14 \cdot 1,32 \cdot 10^6 \sqrt{54,6} \cdot \sqrt[4]{1,2 \cdot 10^{-2} \cdot 9,81(691 - 54,6)} = 4,05 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2.$$

**Ejemplo 4-3.** Hallar el coeficiente de traspaso del calor y la densidad de flujo calorífico evacuado mediante la convección desde la superficie de un tubo horizontal de  $D = 12$  mm en el régimen pelicular de ebullición del agua a la presión atmosférica, si la temperatura de la superficie de tubo  $t_p = 500^\circ\text{C}$ .

El coeficiente de traspaso del calor lo calculamos según la fórmula (4-13). La temperatura determinante  $t_{med} = 0,5(500 + 100) = 300^\circ\text{C}$ . Las propiedades físicas del vapor de agua a esta temperatura y la presión atmosférica (véase la tabla A-5) son:  $\lambda'' = 4,43 \cdot 10^{-2}$  W/(m $\cdot^\circ\text{C}$ );  $\rho'' = 0,384$  kg/m<sup>3</sup>;  $v'' = 4,43 \cdot 10^{-6}$  m<sup>3</sup>/s;  $c_p'' = 2,01 \cdot 10^3$  J/(kg $\cdot^\circ\text{C}$ ),  $\rho' = 958$  kg/m<sup>3</sup> y  $r = 2,26 \cdot 10^6$  J/kg (véase la tabla A-4). El calor efectivo del cambio de fase (teniendo en cuenta el recalentamiento del vapor en la película)  $r_* = 2,26 \cdot 10^6 + 0,5 \cdot 2,01 \cdot 10^3(500 - 100) = 2,66 \cdot 10^6$  J/kg.

Al sustituir estas magnitudes en la fórmula (4-13) tenemos:

$$\bar{\alpha} = 0,62 \sqrt[4]{\frac{(4,43 \cdot 10^{-2})^3 (958 - 0,384) \cdot 9,81 \cdot 2,66 \cdot 10^6}{4,43 \cdot 10^{-5} \cdot 12 \cdot 10^{-3} \cdot (500 - 100)}} = 0,62 \sqrt[4]{102 \cdot 10^8} = 196 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}.$$

La densidad del flujo calorífico es:

$$q = \bar{\alpha} \Delta t = \bar{\alpha}(t_p - t_s) = 196 \cdot 400 = 7,85 \cdot 10^4 \text{ W/m}^2.$$

**Ejemplo 4-4.** Resolver el ejemplo 4-3 cuando el tubo esté situado verticalmente.

En el caso de ubicación vertical del tubo en el espacio, el flujo del vapor en la película tiene, generalmente, carácter turbulento. El cálculo lo realizamos entonces según la fórmula (4-14). Aquí la temperatura determinante es la misma. Al introducir los valores de las magnitudes correspondientes en la fórmula (4-14) tenemos:

$$\bar{\alpha} = 0,25 \sqrt[3]{\frac{(4,43 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 2,01 \cdot 10^3 \cdot 9,81(958 - 0,384)}{4,43 \cdot 10^{-5}}} = 0,25 \sqrt[3]{0,845 \cdot 10^9} = 236 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}.$$

La densidad del flujo calorífico será:

$$q = \bar{\alpha} (t_p - t_s) = 236(500 - 100) = 9,45 \cdot 10^4 \text{ W/m}^2.$$

## 4-2. Intercambio de calor durante la condensación del vapor

**1. Nociones generales acerca del proceso de condensación.** Si el vapor entra en contacto con una pared cuya temperatura es más baja que la temperatura de saturación, entonces el vapor se condensa y el condensado se precipita sobre la pared. Simultáneamente se distinguen dos tipos de condensación: la condensación *en gotículas*, cuando el condensado se precipita en forma de gotas separadas (fig. 4-22), y la condensación *en película*, cuando sobre la superficie se forma una película continua del líquido.

La condensación en gotículas es posible solamente en aquel caso en que el condensado no moja la superficie de enfriamiento. La condensación en gotículas puede obtenerse por vía artificial, si sobre la superficie se aplica una fina capa de aceite, keroseno o ácidos grasos o se agregan estas sustancias

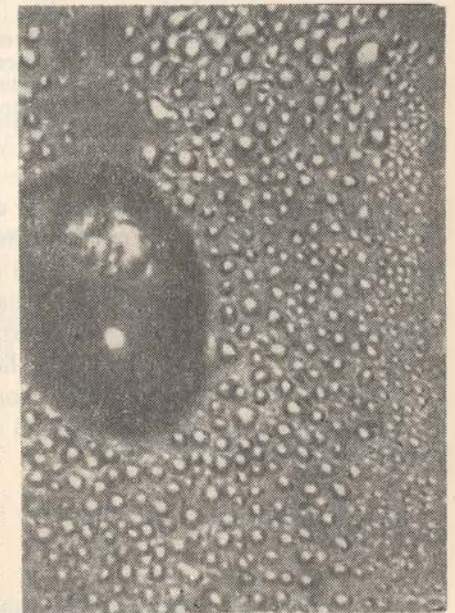


Fig. 4-22. Condensación en gotículas del vapor de agua sobre una superficie mojada con keroseno.



al vapor. Además la superficie debe estar bien pulida. Pero, cuando se condensa el vapor puro del líquido humectador sobre una superficie limpia, siempre se obtiene una película continua. En los aparatos industriales — condensadores — a veces son posibles también los casos de la condensación mixta, cuando en una parte del aparato tiene lugar la condensación en gotículas y en la otra, la condensación en película.

Para organizar el proceso estacionario de condensación del vapor es necesario evacuar el calor ininterrumpidamente desde la superficie de enfriamiento. En total, la intensidad de la emisión calorífica durante la condensación del vapor resulta suficientemente alta. Sin embargo, si el vapor contiene también algunos gases (por ejemplo, el aire), la velocidad de condensación disminuye notablemente. El gas se acumula poco a poco cerca de la superficie y esto dificulta el acceso de nuevas porciones del vapor hacia la superficie.

En determinadas condiciones la condensación puede ocurrir también dentro del volumen de vapor o dentro de la mezcla de vapor y gas. Así, por ejemplo, la lluvia es la consecuencia del proceso de la condensación volumétrica del vapor de agua a partir del aire húmedo en condiciones naturales. Durante la expansión del vapor en las últimas etapas de las turbinas de vapor, también puede observarse el proceso de la condensación volumétrica del vapor de agua. Para que surja la condensación volumétrica el vapor debe estar sobresaturado (su densidad tiene que superar la densidad del vapor saturado). Como medida de saturación del vapor sirve la relación entre la presión del vapor  $p$  y la del vapor saturado  $p_s$  en equilibrio con el líquido cuya superficie es plana. Cuando  $p/p_s > 1$  el vapor está sobresaturado y cuando  $p/p_s = 1$ , el vapor está saturado. El grado de la sobresaturación  $p/p_s$ , necesario para que comience la condensación volumétrica, depende de la presencia en el vapor de unas diminutas partículas de polvo (aerosoles), que sirven de centros ya existentes para la condensación. Cuanto más puro es el vapor, tanto más alto debe ser el grado inicial de la sobresaturación. La experiencia muestra que como centros de condensación pueden servir también partículas con carga eléctrica, en particular, los átomos ionizados que están presentes en el vapor.

## 2. Emisión calorífica durante la condensación del vapor en película.

Durante el proceso de la condensación en la película todo el calor que se desprende en el límite exterior de la película, se evacúa hacia la superficie de enfriamiento. En el caso del movimiento laminar de la película de líquido, la transferencia de calor a través de ésta se realiza sólo mediante la conductibilidad térmica. Si se acepta que la temperatura de las partículas del condensado, que entra en contacto con el vapor, es igual a la temperatura de saturación<sup>1)</sup>, entonces la densidad del flujo calorífico se determina con ayuda de la expresión:

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (t_s - t_p), \quad (a)$$

<sup>1)</sup> En realidad la temperatura de la superficie de la película es algo inferior a la de saturación. Sin embargo, para los líquidos corrientes (a presión no muy baja) esta diferencia, en comparación con la diferencia de temperaturas entre los dos medios en la película, es despreciablemente pequeña.

donde  $\delta$  es el espesor de la película;

$\lambda$  es el coeficiente de conductibilidad térmica del condensado y

$t_p$  es la temperatura de la superficie.

De otra parte según la ley de Newton—Richman,

$$q = \alpha(t_s - t_p). \quad (b)$$

Después de comparar las expresiones (a) y (b) tenemos:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta}. \quad (c)$$

Por consiguiente, la determinación del coeficiente de traspaso del calor se reduce a la determinación del espesor de la película del condensado  $\delta$  que puede obtenerse a partir del análisis de las condiciones de su flujo.

Dicho análisis de los casos de condensación del vapor en una superficie vertical y en un tubo horizontal, lo realizó por primera vez W. Nusselt [114]. Más adelante se muestra la deducción de Nusselt para una pared vertical plana (fig. 4-23). El eje  $x$  está situado en el plano de la pared y orientado hacia abajo, el eje  $y$  está dirigido en dirección perpendicular a la pared. La temperatura de la pared  $t_p$  se considera constante según la altura. La ecuación diferencial de movimiento para un volumen unitario del condensado en la película tiene la forma:

$$g(\rho' - \rho'') + \mu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} = 0. \quad (d)$$

En esta ecuación la fuerza de gravedad del volumen unitario del condensado  $g(\rho' - \rho'')$  se equilibra con la fuerza de viscosidad que actúa desde las capas vecinas del líquido. La fuerza de inercia ligada a la aceleración de movimiento del condensado, como es una magnitud pequeña, en la solución de Nusselt no se considera. Al integrar la expresión (d) se obtiene la correlación

$$w_x = -\frac{g(\rho' - \rho'')}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2. \quad (e)$$

Las constantes de integración se determinan, partiendo de las condiciones de frontera:

cuando  $y = 0$ ,  $w_x = 0$ ;

cuando  $y = \delta$ ,  $\partial w_x / \partial y = 0$ , de donde se deduce que

$$C_2 = 0 \quad \text{y} \quad C_1 = \frac{g(\rho' - \rho'')}{\mu} \delta.$$

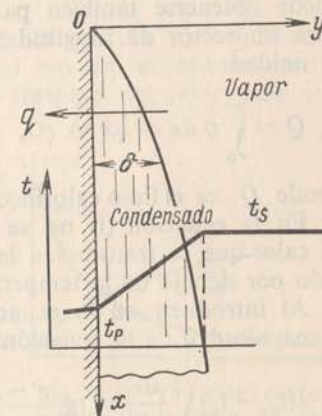


Fig. 4-23. Condensación en película sobre una pared vertical.



Al sustituir los valores de  $C_1$  y  $C_2$  en la expresión (e) obtenemos la ley de distribución de las velocidades en la capa del condensado

$$w_x = g \frac{\rho' - \rho''}{\mu} \left( y\delta - \frac{1}{2} y^2 \right). \quad (f)$$

La cantidad del líquido que pasa por unidad de tiempo a través de la sección  $x$ , si la anchura de la pared es igual a la unidad, se determina con ayuda de la fórmula

$$G = \rho' \int_0^\delta w_x dy = \rho' \bar{w}_x \delta = g \frac{\rho' - \rho''}{3\nu} \delta^3; \quad (g)$$

de aquí,

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3G\nu}{g(\rho' - \rho'')}}; \quad (h)$$

es decir, el espesor de la película aumenta con el crecimiento del gasto del líquido en la película  $G$  según la correlación  $\delta \sim G^{1/3}$ .

La cantidad del condensado  $G$  determinada, con la correlación (g) se formó debido a la condensación del vapor a lo largo de toda la parte de la pared situada por arriba de la sección  $x$ . Por eso la magnitud  $G$  puede obtenerse también partiendo de la ecuación de balance térmico para un sector de longitud  $x$ , cuando el ancho de la pared es igual a la unidad:

$$Q = \int_0^x q dx = \bar{q}x = rG, \quad (i)$$

donde  $Q$  es el flujo calorífico transmitido a la pared en el tramo de 0 a  $x$ .

En la ecuación (i) no se considera una pequeña cantidad adicional de calor que se transmite a la pared a costa del enfriamiento del condensado por debajo de la temperatura  $t_s$ .

Al introducir en la ecuación (i) el valor de  $G$  de la ecuación (g) y la magnitud  $q$  de la ecuación (a) obtenemos:

$$\lambda(t_s - t_p) \int_0^x \frac{dx}{\delta} = rg \frac{\rho' - \rho''}{3\nu} \delta^3. \quad (k)$$

Esta ecuación contiene una incógnita que es el espesor de la película  $\delta$ . Ya que, cuando  $x = 0$ , el espesor de la película ha de ser igual a cero; se puede buscar la solución de (k) en forma de

$$\delta = Bx^n. \quad (l)$$

Al sustituir esta expresión en (k) tenemos:

$$\frac{\lambda(t_s - t_p)}{B} \frac{x^{1-n}}{1-n} = rg \frac{\rho' - \rho''}{3\nu} B^3 x^{3n}. \quad (m)$$

La correlación (m) debe cumplirse para cualquier  $x$ , por consiguiente, los exponentes a la izquierda y a la derecha de  $x$  en la expresión (m) tienen que ser iguales. Por esto tenemos:

$$1 - n = 3n \text{ ó } n = 1/4.$$

Luego, la expresión (m) hallamos también la magnitud  $B$ :

$$B = \sqrt[4]{\frac{4\lambda(t_s - t_p)\nu}{rg(\rho' - \rho'')}}.$$

De este modo definitivamente tenemos:

$$\delta = \sqrt[4]{\frac{4\lambda(t_s - t_p)\nu x}{rg(\rho' - \rho'')}}. \quad (n)$$

Conociendo la expresión para el espesor de la película, conforme a la expresión (c) determinamos el coeficiente local de traspaso del calor

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta} = \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 rg(\rho' - \rho'')}{4(t_s - t_p)\nu x}}. \quad (4-17)$$

El carácter de la variación del espesor de la película y el coeficiente de traspaso del calor a lo largo de la pared vertical se exponen en la fig. 4-24. El valor medio del coeficiente de traspaso del calor para una pared vertical o para un tubo vertical de altura  $h$  se determina con arreglo a la fórmula

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \frac{1}{h} \int_0^h \alpha dx = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 rg(\rho' - \rho'')}{4(t_s - t_p)\nu h}} = \\ &= 0,943 \frac{A}{\sqrt[4]{h\Delta t}}, \end{aligned} \quad (4-18)$$

donde

$$\Delta t = t_s - t_p; \quad A = \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 rg(\rho' - \rho'')}{\nu}}.$$

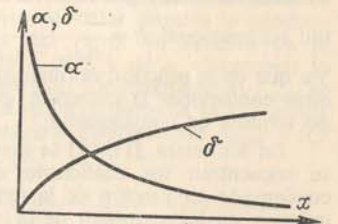


Fig. 4-24. Variación del coeficiente de traspaso del calor  $\alpha$  y del espesor de la película  $\delta$  a lo largo de una pared vertical.

De la ecuación (4-18) se deduce que el coeficiente medio de traspaso del calor disminuye al aumentar la altura  $h$  y la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $\Delta t$ .

La deducción antes citada para una pared vertical es aplicable también a una inclinada. En este caso la única diferencia será la de que en la ecuación de movimiento (d) entre la componente de la fuerza de gravedad en la dirección del movimiento de la película. Si  $\psi$  es el ángulo de



inclinación de la pared con respecto al horizonte, entonces en vez de la aceleración de caída libre  $g$  para la pared vertical, en todas las correlaciones entrará la magnitud  $g \sin \Psi$ . Ahora la fórmula de cálculo para el coeficiente de traspaso del calor adquiere la forma:

$$\bar{\alpha}_\Psi = \bar{\alpha}_{\text{vert}} \sqrt[4]{\sin \Psi}. \quad (\text{o})$$

Una deducción análoga a la expuesta anteriormente, para la pared vertical, la hizo Nusselt también para un tubo horizontal. La fórmula obtenida por él para el coeficiente medio de traspaso del calor se expresa así:

$$\bar{\alpha} = 0,728 \frac{A}{\sqrt[4]{D \Delta t}}, \quad (4-19)$$

donde  $D$  es el diámetro del tubo.

Debido a las premisas simplificadoras<sup>1)</sup> las soluciones citadas (4,18) y (4-19) son aproximadas. Sin embargo, como demostraron las investigaciones ulteriores, más detalladas, realizadas por los autores de los trabajos [13, 44, 49, 54], la teoría de Nusselt refleja correctamente las principales regularidades del proceso.

El análisis de la influencia que ejerce el sobreenfriamiento del condensado, las fuerzas de inercia en la película y las fuerzas de fricción entre la superficie de la película y el vapor inmóvil, realizado en los trabajos [44, 49], muestra que todos estos efectos en las condiciones normales introducen un error que constituye sólo unos cuantos por cientos. En la fig. 4-25 se muestran los resultados del análisis [49]. Aquí en el eje de las ordenadas está trazada la relación entre el coeficiente ya calculado de traspaso del calor  $\alpha$ , teniendo en cuenta los efectos enumerados anteriormente, y el coeficiente de traspaso del calor según la teoría de Nusselt  $\alpha_N$ . Por el eje de abscisas se traza la magnitud adimensional  $k = \frac{r}{c_p(t_s - t_p)}$ . El número  $Pr$  del condensado es el parámetro.

Ya que en la práctica, normalmente,  $k > 5$  y  $Pr > 1$ , de la fig. 4-25 se deduce que en estas condiciones la corrección es insignificante y, al realizar los cálculos es posible no tomarla en consideración.

En los textos [13, 49] se investigó la influencia que ejerce la dependencia en que se encuentran los coeficientes de viscosidad  $\mu$  y de conductibilidad térmica  $\lambda$  del condensado en función de la temperatura. En caso general estos factores, sin duda, influyen en la intensidad de la emisión calorífica [13]. El carácter de esta influencia se muestra en las figs. 4-26 y 4-27 [49], en las que se ve cómo las magnitudes  $\lambda$  y  $\mu$  en la fórmula de Nusselt (4-17) se refieren a la temperatura media de la película  $t_{\text{med}} = 0,5(t_s + t_p)$  y a la temperatura de saturación  $t_s$ , respectivamente. Ya que la temperatura de saturación  $t_s$ , por lo general, se conoce, su elección como la determinante resulta más cómoda en los cálculos prácticos. En este caso la corrección  $\varepsilon_t$  que considera la

<sup>1)</sup> Estas premisas son siguientes: la corriente de la película tiene el carácter laminar; las fuerzas de inercia que surgen en la película, son despreciablemente pequeñas en comparación con las fuerzas de viscosidad y las de gravedad; la transferencia de calor por convección en la película, así como la conductibilidad térmica a lo largo de ésta son pequeñas en comparación con la conductibilidad térmica en la dirección transversal de la película; entre el condensado y el vapor no hay rozamiento; la temperatura de la superficie exterior de la película es igual a la temperatura del vapor saturado; la densidad y los coeficientes de conductibilidad térmica y de viscosidad del condensado no depende de la temperatura.

variabilidad de los parámetros físicos con la temperatura, como se ve en la fig. 4-27, se puede representar en forma del multiplicador simple.

$$\varepsilon_t = \frac{\alpha}{\alpha_{N,s}} = \left[ \left( \frac{\lambda_p}{\lambda_s} \right)^3 \frac{\mu_s}{\mu_p} \right]^{1/8}, \quad (4-20)$$

donde los índices  $p$  y  $s$  significan que los valores de  $\lambda$  y  $\mu$  se eligen según las temperaturas de la pared  $t_p$  y la temperatura de saturación  $t_s$ , respectivamente.

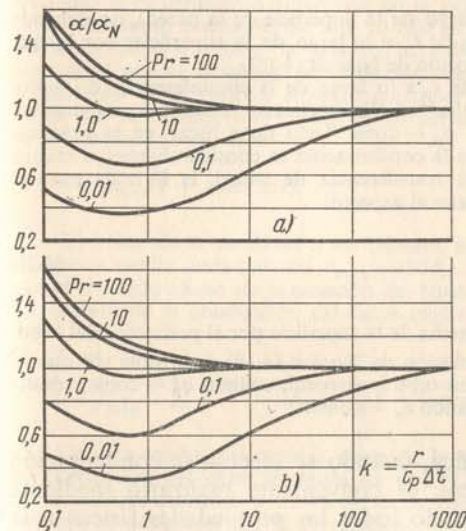


Fig. 4-25. Influencia de la transferencia por convección de las fuerzas de inercia en la película y del rozamiento entre la película y el vapor, sobre la intensidad de la emisión calorífica en una superficie vertical (a) y en un tubo horizontal (b).

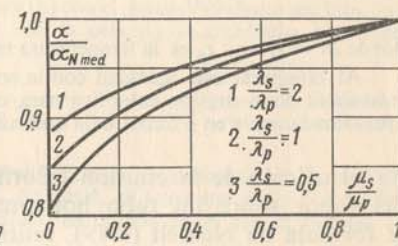


Fig. 4-26. Variación del coeficiente de traspaso del calor durante la condensación del vapor en función de la variación de  $\lambda$  y de  $\mu$  al cambiar la temperatura. La magnitud  $\alpha_{N,med}$  se calcula según la fórmula (4-17) a una temperatura determinante  $t_{\text{med}} = 0,5(t_s + t_p)$ .

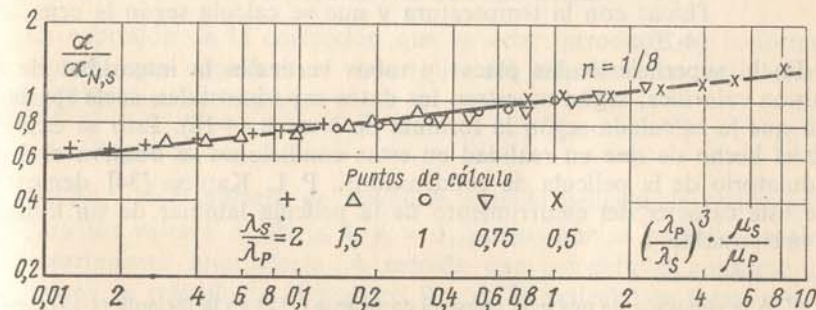


Fig. 4-27. Variación del coeficiente de traspaso del calor durante la condensación del vapor en función del cambio de  $\lambda$  y  $\mu$  con la temperatura. La magnitud  $\alpha_{N,s}$  se calcula con ayuda de la fórmula (4-17) a una temperatura determinante  $t_s$ .



En su teoría Nusselt hizo también la suposición de que la temperatura de la superficie permanece invariable:  $t_p = \text{const}$ . En el texto [54] se realizó la investigación de la influencia de la variabilidad de  $t_p$  a lo largo de la superficie de condensación. Los resultados demostraron que para las superficies planas verticales e inclinadas el coeficiente medio de traspaso del calor determinado como

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{q}}{t_s - t_p},$$

(donde  $\bar{t}_p$  es la temperatura media a lo largo de la superficie de la pared), no depende por completo del carácter de la variación de  $t_p$  a lo largo de la superficie; por lo que el coeficiente es el mismo que el de la solución de Nusselt (4-18).

En el tubo horizontal la variación de  $t_p$  a lo largo de la circunferencia del tubo, ejerce cierta influencia en la emisión calorífica. En particular, cuando  $t_p$  es una variable que corresponde a la condición  $q_p = \text{const}$  (esto tiene lugar en la práctica, cuando la resistencia térmica por parte de la condensación es considerablemente menor que la resistencia térmica general de la transferencia de calor), la fórmula para el coeficiente medio de traspaso del calor tiene el aspecto:

$$\bar{\alpha}_q = 0,693 \frac{A}{\sqrt[4]{D \Delta t}}, \quad (4-21)$$

donde  $\Delta t = t_s - \bar{t}_p$ ;  $\bar{t}_p$  es la temperatura media de la superficie por el perímetro del tubo.

Al comparar esta igualdad con la solución de Nusselt (4-19) es posible ver que la intensidad de la emisión calorífica para un tubo horizontal, cuando  $q_p = \text{const}$ , resulta aproximadamente en 5% más baja que cuando  $t_p = \text{const}$ .

El cálculo de la emisión calorífica, cuando se efectúa la condensación del vapor sobre un tubo horizontal, es conveniente realizarlo mediante la fórmula de Nusselt (4-19), refiriendo todas las propiedades físicas a la temperatura de saturación e introduciendo la corrección (multiplicador)  $\varepsilon_t$ :

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{N,s} \varepsilon_t, \quad (4-22)$$

donde  $\bar{\alpha}_{N,s}$  es el coeficiente de traspaso del calor calculado conforme a la fórmula (4-19)<sup>1)</sup>, en presencia de una temperatura determinante  $t_s$ ;

$\varepsilon_t$  es la corrección que considera la dependencia de las propiedades físicas con la temperatura y que se calcula según la ecuación (4-20).

En la superficie de las placas y tubos verticales la intensidad de la emisión calorífica, según muestran los datos experimentales, suele ser más alta que la calculada según la fórmula de Nusselt (4-18). Esto se explica por el hecho de que en realidad en estas condiciones se observa el flujo ondulatorio de la película de condensado<sup>2)</sup>. P. L. Kapitza [34] demostró que este carácter del escurrimiento de la película laminar de un líquido es más estable.

<sup>1)</sup> A la condición de que  $q_p = \text{const}$ , el coeficiente 0,728 en la fórmula (4-19), según la fórmula (4-21), es necesario sustituirlo por 0,693.

<sup>2)</sup> En los tubos horizontales no se observa, por lo común, el escurrimiento ondulatorio lo que se explica por el hecho de que la película del condensado tiene pequeña longitud.

Cuando la corriente es ondulatoria, el espesor medio en razón del tiempo, de la película  $\delta_{\text{med}}$  resulta algo menor que el obtenido con ayuda de la ecuación de Nusselt (h), siendo el mismo consumo del líquido  $G$ . Sin embargo, el aumento de la emisión calorífica se determina aquí no tanto por la disminución del espesor medio de la película, cuanto por el crecimiento de la conductibilidad térmica media  $(\lambda/\delta)_{\text{med}}$  de la película ondulada. Esto está ligado al hecho de que en los momentos, cuando el espesor real de la película  $\delta$  es menor que el espesor medio  $\delta_{\text{med}}$ , la conducción del calor  $\lambda/\delta$  crece de modo mucho mayor que cuando ésta disminuye en los momentos en que  $\delta > \delta_{\text{med}}$ . Por eso, en promedio la magnitud  $(\lambda/\delta)_{\text{med}}$  aumenta. En la investigación teórica [34] se examinó el escurrimiento isotérmico de la película del líquido por la superficie vertical con el consumo constante. Se mostró que en la primera aproximación la configuración de la superficie que tiene la película, al haber régimen ondulatorio es de una forma sinusoidal que se desplaza en dirección del escurrimiento del líquido. El espesor instantáneo de la película  $\delta$  sobre cualquier punto fijo de la superficie de la pared varía en el tiempo  $\tau = t/t_0$  ( $t_0$  es el período de paso de la onda), conforme a la ley periódica:

$$\delta = \delta_{\text{med}}(1 + a \sin 2\pi\tau).$$

El valor de la amplitud  $a$  en primera aproximación es constante e igual a 0,46, el espesor medio de la película  $\delta_{\text{med}} = 0,93\delta_N$ , [o sea, aproximadamente es el 7% menor que el obtenido a base de la ecuación de Nusselt (h) con el mismo consumo de líquido]. El cálculo de la conducción del calor media de la película da resultado siguiente:

$$\left(\frac{\lambda}{\delta}\right)_{\text{med}} = \int_0^1 \frac{\lambda}{\delta} d\tau = \frac{\lambda}{\delta_{\text{med}}} \int_0^1 \frac{d\tau}{1 + a \sin 2\pi\tau} = \frac{\lambda}{\delta_{\text{med}}} \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} = 1,13 \frac{\lambda}{\delta_{\text{med}}}.$$

De esto modo solamente a costa de la ondulación de la superficie de la película su conducción del calor aumenta en el 13%. En total, el aumento de la intensidad de la emisión calorífica a través de dicha película, en comparación con el cálculo de Nusselt, se determina por la correlación

$$\alpha = \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)_{\text{med}} = 1,13 \frac{\lambda}{\delta_{\text{med}}} = \frac{1,13}{0,93} \frac{\lambda}{\delta_N} = 1,21\alpha_N,$$

es decir, constituye el 21%.

Como muestran los experimentos [35, 102], en realidad el escurrimiento ondulatorio tiene, por lo común, un carácter más caótico y desordenado, de modo que a medida que aumenta el consumo, las amplitudes de las ondas crecen.

La expresión de la corrección que se debe introducir en la fórmula de Nusselt que considera el desarrollo del escurrimiento ondulatorio, según [49], tiene la forma:

$$\varepsilon_v = (\text{Re}_s/4)^{0,04}, \quad (4-23)$$

donde  $\text{Re}_s$  es el número de Reynolds para la película de condensado.

Para los valores de  $\text{Re} \leq 4$ ,  $\varepsilon_v = 1$ , puesto que la película no tiene el escurrimiento ondulatorio. A medida que aumenta el consumo del líquido en la película (o el número  $\text{Re}_s$  de la película) la formación de las ondas crece paulatinamente y el valor de  $\varepsilon_v$  aumenta. Por ejemplo, cuando  $\text{Re}_s = 100$ ,  $\varepsilon_v = 1,14$ ; cuando  $\text{Re}_s = 400$ ,  $\varepsilon_v = 1,20$ ; cuando  $\text{Re}_s = 1600$ ,  $\varepsilon_v = 1,27$ .



donde  $Q$  es el flujo calorífico, en  $W$ ;

$r$  es el calor del cambio de fase del líquido, en  $J/kg$ ;

$G''$  es la cantidad de vapor evacuado de la superficie libre del líquido como resultado de su ebullición por unidad de tiempo, en  $kg/s$ .

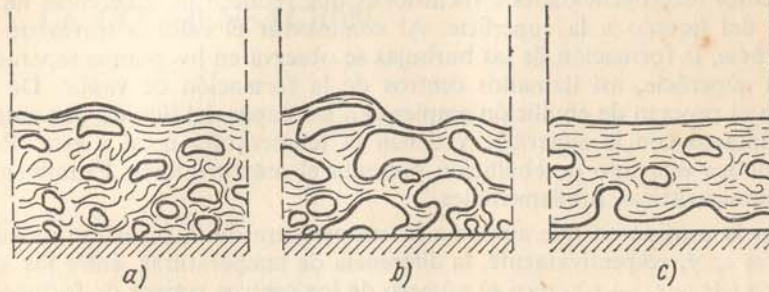


Fig. 4-2. Proceso de ebullición de un líquido.

Con el aumento de la diferencia de temperaturas entre los dos medios ( $\Delta t$ ) el flujo calorífico  $Q$  no crece ilimitadamente. Para cierto valor de  $\Delta t$  éste alcanza su valor máximo, pero cuando  $\Delta t$  continúe aumentando, empieza a disminuir. El régimen de ebullición, existente hasta el momento de alcanzar el flujo calorífico máximo, se llama el de ebullición con *formación de burbujas*. La carga térmica máxima durante la ebullición con formación de burbujas se llama *primera densidad crítica del flujo calorífico* y se designa por  $q_{cr1}$ . Para el agua, a presión atmosférica, la primera densidad crítica del flujo calorífico constituye  $q_{cr1} \approx 1,2 \cdot 10^6 W/m^2$ ; el valor crítico correspondiente de la diferencia de temperaturas (entre los dos medios) es  $\Delta t_{cr1} = 25 \div 35^\circ C$ . (Estas magnitudes se refieren a las condiciones de ebullición del agua en gran volumen, cuando existe movimiento libre. Para otras condiciones y líquidos diferentes las magnitudes serán distintas).

Cuando los valores de  $\Delta t$  son mayores, llega el segundo régimen de ebullición *transitorio* (fig. 4-2, b). Este se caracteriza por el hecho de que, tanto en la misma superficie de calentamiento, como en su proximidad, las burbujas constantemente se unen entre sí, formando grandes cavidades de vapor. Debido a esto el acceso del líquido hacia la misma superficie se dificulta paulatinamente cada vez más. En lugares separados de la superficie surgen manchas "secas" y su número y dimensiones crecen ininterrumpidamente al aumentar la temperatura de la superficie. Parece que estos sectores se excluyen del proceso de intercambio térmico, puesto que la evacuación directa del calor hacia el vapor se realiza de modo mucho menos intenso. Precisamente esto determina la brusca reducción del flujo calorífico y del coeficiente de traspaso del calor en la región del régimen transitorio de ebullición.

Por fin, para cierta diferencia de temperaturas entre los dos medios, toda la superficie de calefacción se cubre por una capa continua de vapor

que aparta el líquido de la superficie. Así comienza el tercer régimen, el de ebullición *pelicular* (fig. 4-2, c). La transferencia de calor en el régimen de ebullición pelicular desde la superficie de calefacción hacia el líquido se realiza mediante el intercambio de calor por convección y la radiación a través de la película de vapor. A medida que aumenta la diferencia de temperaturas entre los dos medios, una cantidad cada vez mayor de calor se transmite mediante radiación. La intensidad del intercambio de calor en el régimen de ebullición pelicular es bastante baja. La película de vapor sufre pulsaciones; el vapor que se acumula periódicamente en ésta, luego se desprende en forma de grandes burbujas. Al comenzar la ebullición pelicular, la carga térmica evacuada desde la superficie y, respectivamente, la cantidad del vapor que se forma, tienen valores mínimos. El vapor mínimo de la carga térmica en presencia de la ebullición pelicular se llama *segunda densidad crítica del flujo calorífico*  $q_{cr2}$ . A la presión atmosférica para el agua que hierve sobre las superficies metálicas, el momento del comienzo de la ebullición pelicular se caracteriza por la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $\Delta t = t_p - t_s \approx 150^\circ C$ , es decir, la temperatura de la superficie  $t_p$  constituye aproximadamente  $250^\circ C$ .

De este modo durante la ebullición del líquido en la superficie de calefacción, dependiendo de la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $\Delta t = t_p - t_s$ , pueden observarse tres regímenes de ebullición diferentes. El cuadro general del cambio que sufre la densidad del flujo calorífico  $q$  evacuado hacia el líquido hirviendo, cuando la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $\Delta t$  aumenta, se expone en coordenadas logarítmicas

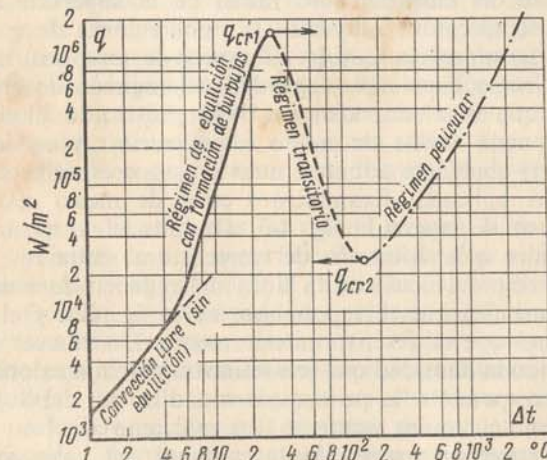


Fig. 4-3. Dependencia entre la densidad del flujo calorífico  $q$  y la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $\Delta t$  durante la ebullición del agua.

en la fig. 4-3. Este gráfico se refiere al proceso de ebullición del agua a presión atmosférica. La dependencia entre  $q$  y  $\Delta t$  tiene el mismo carácter también para otros líquidos que hierven en condiciones de movimiento



El número  $Re$  para la película, en caso general, se determina con arreglo a la correlación<sup>1)</sup>

$$Re = 4 \frac{\mu}{G}, \quad (4-24)$$

donde  $G$  es el gasto en masa del líquido en la película correspondiente a una unidad de longitud de la superficie según la normal a la dirección de la corriente del líquido, en  $\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ .

Cuando el vapor se condensa, el gasto en masa del condensado  $G$  en la sección  $x - h$  está ligado unívocamente con el flujo calorífico  $\bar{Q} = \bar{q}h$  transferido a la pared en el tramo  $Oh$ , mediante la ecuación de balance térmico (i). Por eso durante la condensación el número  $Re$  puede expresarse a través de las características de intercambio térmico del proceso

$$Re_s = 4 \frac{\bar{q}h}{\alpha} = 4 \frac{r\mu}{\alpha \Delta t}. \quad (4-25)$$

Teniendo en cuenta la corrección  $\epsilon_p$  para el escurrimiento ondulatorio, la correlación del cálculo para la emisión calorífica durante la condensación del vapor sobre la superficie de los tubos y placas verticales tiene la forma:

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{N,s} = \epsilon_p \epsilon_r, \quad (4-26)$$

donde  $\bar{\alpha}_{N,s}$  es el coeficiente de traspaso del calor determinado por la fórmula (4-18), al referir todas las propiedades físicas a la temperatura de saturación  $t_s$ ;

$\epsilon_p$  es la corrección debida al escurrimiento ondulatorio determinada según la fórmula (4-23);  $\epsilon_r$  es la corrección que considera la dependencia de las propiedades físicas del condensado en función de la temperatura y

La ecuación (4-26) la comprueban bien los numerosos datos experimentales de la condensación de los vapores de líquidos diferentes sobre placas y tubos verticales de distinta altura [49].

En la práctica por lo común no se conoce de antemano el número  $Re$ . Por eso se recomienda al siguiente orden de cálculo: al principio, según la fórmula (4-26), se calcula  $\bar{\alpha}$ , cuando  $\epsilon_p = 1$ ; esta magnitud sirve para determinar el número  $Re_s$  con ayuda de la fórmula (4-25); y luego, mediante la fórmula (4-23), se obtiene la magnitud de la corrección  $\epsilon_p$ . El coeficiente buscado de traspaso del calor es igual a:

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{\epsilon_p}.$$

La influencia ejercida por la dependencia de las propiedades físicas del condensado en función de la temperatura sobre la intensidad de la emisión calorífica en las condiciones corrientes, no es grande desde el punto de vista cuantitativo. Por ejemplo, para el agua los valores de la corrección  $\epsilon_p$  para diferencias de temperaturas entre

<sup>1)</sup> Esta correlación se deduce de la determinación general del número  $Re$  expresado mediante el diámetro equivalente  $d_{eq}$ :  $Re = \rho w_x d_{eq} \mu$ . Para la película  $d_{eq} = 4\delta$ . Según la ecuación (g) la magnitud  $\rho w_x \cdot 4\delta = 4G$ .

los dos medios  $\Delta t$  y presiones de saturación del vapor  $p_s$  distintas, citadas en la tabla 4-4, muestran que incluso cuando  $\Delta t = 50^\circ\text{C}$ , la magnitud  $\epsilon_r$  se diferencia de la unidad en menos del 10%.

Sólo para líquidos muy viscosos (que tienen corrientemente una dependencia abrupta entre  $\mu$  y  $t$ ) la corrección  $\epsilon_r$ , cuando las diferencias de temperaturas entre los dos medios  $\Delta t$  son grandes, puede pasar a ser considerable. En la fig. 4-28 se exponen los datos experimentales [28] para la condensación de los vapores de glicerina.

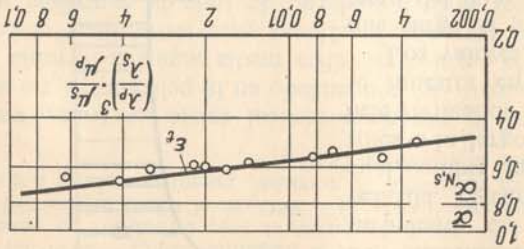


Fig. 4-28. Influencia de la dependencia existente entre la viscosidad y la conductibilidad térmica, en función de la temperatura, sobre la emisión calorífica durante la condensación en película de los vapores de glicerina sobre un tubo vertical de  $h = 0,97$  m. La línea se calcula según la fórmula (4-20). Los puntos son los datos experimentales [28].

Tabla 4-4

Valores de la corrección  $\epsilon_r$  para el agua

| $\Delta t$ | $p \cdot 10^{-5}$ , en Pa |       |       |      |      |
|------------|---------------------------|-------|-------|------|------|
|            | 1                         | 5     | 10    | 100  | 150  |
| 10         | 0.985                     | 0.990 | 0.990 | 1.01 | 1.02 |
| 20         | 0.967                     | 0.982 | 0.985 | 1.01 | 1.03 |
| 50         | 0.900                     | 0.950 | 0.960 | 1.02 | 1.04 |

En estos experimentos las diferencias de temperaturas entre los dos medios  $\Delta t$  alcanzaban el valor de  $100^\circ\text{C}$  y a consecuencia de esto la viscosidad de la glicerina cambiaba 250 veces. La línea en el gráfico corresponde al cálculo realizado conforme a la fórmula (4-20); dicha línea coincide bien con los datos experimentales.

Cuando la altura de la superficie vertical es grande y las diferencias de temperaturas entre los dos medios son considerables, el consumo del condensado puede crecer hasta un grado tal que surge un régimen *turbulento* de escurrimiento de la película. Las investigaciones especiales [102] mostraron que el flujo turbulento de las películas de líquidos que escurren libremente, empieza corrientemente cuando los valores del número  $Re$  son mayores de cierto valor crítico:  $Re_{cr} \approx 1600$ .

En la fig. 4-29,  $a$  se muestra el cuadro del flujo de la película de condensado a lo largo de una pared vertical de gran altura. A cierto valor de  $h_{cr}$  el número de Reynolds alcanza su valor crítico  $Re_{cr}$ . Después el flujo del condensado en la película adquiere un carácter turbulento. Cuando tiene lugar el flujo turbulento, la intensidad local de la emisión calorífica crece a medida que aumenta el consumo  $G$  y el número  $Re$



de acuerdo con la correlación [49, 50]:

$$\frac{\alpha}{\lambda} \left( \frac{v_s^2}{g} \frac{\rho'}{\rho' - \rho''} \right)^{1/3} = 0,023 \text{Re}^{0,25} \text{Pr}^{0,5}, \quad (4-27)$$

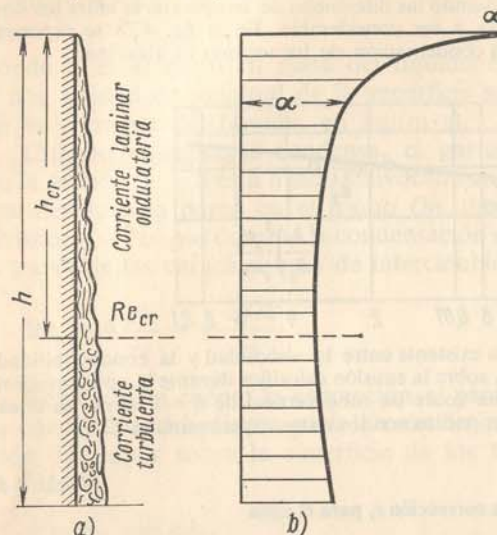


Fig. 4-29. Caracter del escurrimiento de una película de condensado (a) y variación del coeficiente de traspaso del calor (b) a lo largo de una placa vertical de gran altura. Siendo  $h_{cr}$ , la corriente en la película adquiere el carácter turbulento.

En la tabla 4-5 se presentan los valores de  $(h\Delta t)_{cr}$  para el agua, calculados empleando la ecuación (4-28), si existe una aceleración normal de la caída libre ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ).

Valores de las magnitudes  $(h\Delta t)_{cr}$  y  $A_s = \sqrt[4]{\frac{\lambda_s^3 g (\rho' - \rho'')}{v_s}} \frac{r\mu_s}{\lambda_s}$  para el agua

| $t_s, ^\circ\text{C}$ | $p_s \cdot 10^{-3}, \text{Pa}$ | $(h\Delta t)_{cr}, \text{m} \cdot ^\circ\text{C}$ | $A_s \cdot 10^{-3}, \text{W}/(\text{m}^{7/4} \cdot ^\circ\text{C}^{3/4})$ |
|-----------------------|--------------------------------|---|---|
| 100                   | 1,01                           | 44,6  | 12,2  |
| 120                   | 1,99                           | 32,7  | 12,7  |
| 150                   | 4,76                           | 21,5  | 13,0  |
| 180                   | 10,0                           | 15,3  | 13,2  |
| 210                   | 19,1                           | 11,7  | 13,0  |
| 250                   | 39,8                           | 8,8   | 12,3  |
| 280                   | 64,2                           | 7,4   | 11,0  |
| 310                   | 98,7                           | 6,3   | 9,8   |
| 340                   | 146,1                          | 5,0   | 7,9   |

<sup>1)</sup> La correlación (4-28) se deduce de la expresión (4-20) y corresponde al valor de  $\text{Re}_{cr} = 1600$ .

lo que se explica con el crecimiento de la intensidad del mezclado, en proceso turbulento, del líquido en la película. El carácter según el cual cambia la emisión calorífica a lo largo de una superficie vertical de gran longitud, se muestra en la fig. 4-29, b.

Los valores de  $(h\Delta t)_{cr}$  con que surge el régimen turbulento del flujo en la película, se determinan con la correlación

$$(h\Delta t)_{cr} = 2300 \frac{r\mu_s}{\lambda_s} \times \left( \frac{v_s^2}{g} \frac{\rho'}{\rho' - \rho''} \right)^{1/3}, \quad (4-28)$$

la cual muestra que la magnitud  $(h\Delta t)_{cr}$  depende solamente de las propiedades físicas del condensado y la aceleración de la caída libre <sup>1)</sup>.

De igual modo es posible calcular también, con ayuda de la ecuación 4-28), las magnitudes de  $(h\Delta t)_{cr}$  para cualquier otro líquido.

Cuando se conoce la magnitud  $(h\Delta t)_{cr}$ , siempre es posible decir, si surge o no en las condiciones dadas el carácter turbulento del flujo en la película. Por ejemplo, durante la condensación del vapor de agua, a la presión atmosférica, sobre la superficie de un tubo vertical con altura  $h = 2 \text{ m}$ , siendo la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $\Delta t = 10^\circ\text{C}$ , la magnitud  $(h\Delta t)_{cr} = 20 \text{ m} \cdot ^\circ\text{C}$ ; esta es menor que  $(h\Delta t)_{cr} = 44,6 \text{ m} \cdot ^\circ\text{C}$ . Por consiguiente, el flujo turbulento no tiene que surgir en la película. Sin embargo, cuando  $\Delta t = 30^\circ\text{C}$ , en el tramo inferior del mismo tubo debe surgir un régimen turbulento de corriente, puesto que ahora  $h\Delta t = 60 \text{ m} \cdot ^\circ\text{C}$  que es un valor superior al crítico de  $(h\Delta t)_{cr}$ .

Cuando en la superficie vertical existe un tramo con corriente del régimen turbulento del condensado en la película, ya no podemos realizar el cálculo de la emisión calorífica media según la fórmula (4-26). En estas condiciones la fórmula de cálculo para determinar el coeficiente medio de traspaso del calor a lo largo de toda la superficie tiene el aspecto:

$$\bar{\alpha} = 400 \frac{r\mu_s}{h\Delta t} \left\{ 1 + 0,625 \text{Pr}^{0,5} \left[ \frac{h\Delta t}{(h\Delta t)_{cr}} - 1 \right] \right\}^{4/3}. \quad (4-29)$$

Esta correlación <sup>1)</sup> es aplicable cuando  $h\Delta t > (h\Delta t)_{cr}$ . Todos los parámetros físicos en la ecuación (4-29) se eligen de acuerdo con la temperatura de saturación  $t_s$ . En la fig. 4-30 se muestra la comparación de esta fórmula con los datos experimentales.

Las ecuaciones (4-18), (4-46) y (4-29) para la superficie vertical pueden representarse en forma adimensional. Además, dependiendo de cual de las magnitudes:  $\Delta t$  o  $\bar{q}$  hay que considerar como dada, la expresión para el número determinante de la semejanza será diferente.

a) Cuando está dada la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $\Delta t$ , como número determinante de semejanza interviene el parámetro  $Z$ , que caracteriza la altura reducida de la superficie:

$$Z = \frac{\lambda \Delta t \bar{h}}{r\mu l_g}, \quad (4-30)$$

donde

$$l_g = \left( \frac{v^2}{g} \frac{\rho'}{\rho' - \rho''} \right)^{1/3}.$$

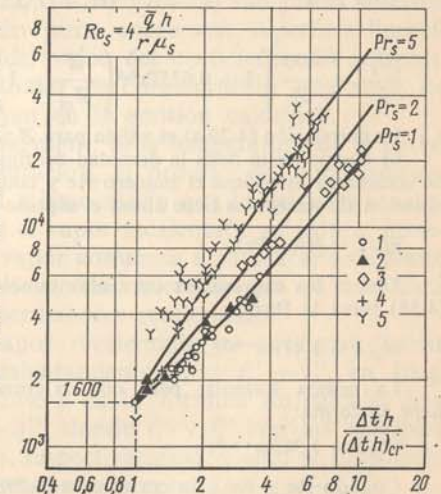


Fig. 4-30. Comparación de la dependencia existente entre (4-29) (línea) y los datos experimentales referentes a la condensación de los vapores de los líquidos. 1—agua,  $h = 6,1 \text{ m}$ ; 2—agua,  $h = 3,66 \text{ m}$ ; 3—agua,  $h = 2,9 \text{ m}$  ( $1-3$ — $\text{Pr}_s = 1,15 \div 1,19$ ); 4—aire líquido,  $h = 0,94 \text{ m}$ ,  $\text{Pr}_s = 1,3$ ; 5—difénilo,  $h = 3,66 \text{ m}$ ,  $\text{Pr}_s = 5$ .

<sup>1)</sup> La ecuación (4-29) se deduce de la correlación para la emisión calorífica local (4-27). Esta deducción la contienen, por ejemplo, los textos [30, 49, 50].



En calidad del número determinante de semejanza en este caso se puede aceptar cualquier número de Reynolds  $Re = 4\bar{q}h/r\mu$  o el parámetro adimensional  $\bar{\alpha}l_g/\lambda$  que es igual a  $\frac{1}{4} Re/Z$ .

Así pues, para la diferencia de temperaturas entre los dos medios dada, la ecuación de semejanza tiene la forma:

$$Re = f_1(Z, Pr) \quad \text{o} \quad \bar{\alpha}l_g/\lambda = f_2(Z, Pr). \quad (4-31a)$$

Enunciamos las ecuaciones concretas. La fórmula de Nusselt (4-18) se escribirá así:

$$Re = 3,77 Z^{0,75} \quad \text{o} \quad \bar{\alpha}l_g/\lambda = 0,943 Z^{-0,25}. \quad (4-18a)$$

La misma fórmula, pero teniendo en cuenta la corrección para el escurrimiento ondulatorio de la película, se escribirá:

$$Re = 3,8 Z^{0,78} \quad \text{o} \quad \bar{\alpha}l_g/\lambda = 0,95 Z^{-0,22}. \quad (4-26a)$$

Cuando  $Re_{cr} = 1600$ , de la ecuación (4-26 a) tenemos:

$$Z_{cr} = 2300 \quad \text{o} \quad (\bar{\alpha}l_g/\lambda)_{cr} = 0,173.$$

Para un régimen mixto de corriente de la película (por arriba laminar, por abajo turbulenta) la correlación de cálculo (4-29) en forma adimensional se escribirá de este modo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Re}{Re_{cr}} &= \left[ 1 + 0,625 Pr^{0,5} \left( \frac{Z}{Z_{cr}} - 1 \right) \right]^{4/3} \\ \frac{\bar{\alpha}l_g}{\lambda} &= \frac{400}{Z} \left[ 1 + 0,625 Pr^{0,5} \left( \frac{Z}{Z_{cr}} - 1 \right) \right]^{4/3} \end{aligned} \right\} \quad (4-29a)$$

La correlación (4-29 a) es válida para  $Z > Z_{cr}$ .

b) Cuando está dada la densidad del flujo calorífico  $q$ , como número determinante de semejanza interviene el número  $Re$  y como el determinado, el parámetro  $\bar{\alpha}l_g/\lambda$ . La ecuación de semejanza tiene ahora el aspecto siguiente:

$$\bar{\alpha}l_g/\lambda = f(Re, Pr). \quad (4-31b)$$

Demostremos las expresiones concretas también para este caso: la fórmula de Nusselt (4-18) toma la forma:

$$\bar{\alpha}l_g/\lambda = 1,47 Re^{-0,33}. \quad (4-18b)$$

La misma fórmula, pero con la corrección para el escurrimiento ondulatorio, tiene la forma:

$$\bar{\alpha}l_g/\lambda = 1,38 Re^{-0,28}. \quad (4-26b)$$

Cuando  $Re > Re_{cr}$ , la correlación (4-29) se puede representar en la forma

$$\bar{\alpha}l_g/\lambda = \frac{0,173 Pr^{0,5} (Re/Re_{cr})}{Pr^{0,5} + 1,6 [(Re/Re_{cr})^{3/4} - 1]}. \quad (4-29b)$$

Si  $Re \gg Re_{cr}$  (cuando la zona de la corriente turbulenta de la película ocupa la mayor parte de la superficie), partiendo de la ecuación (4-29b) tenemos:

$$\bar{\alpha}l_g/\lambda = 0,017 Re^{0,25} Pr^{0,5}.$$

El carácter en correspondencia con el cual varía las magnitudes  $\bar{\alpha}l_g/\lambda$ , en dependencia de los números  $Re$  y  $Pr$  que corresponden a estas ecuaciones, se muestra en la fig. 4-31.

La línea de trazos expresa la ecuación de Nusselt (4-18b). Las líneas continuas, siendo  $Re < 1600$  y  $Re > 1600$ , corresponden a las fórmulas (4-26b) y (4-29b). En esta figura están trazados también los datos experimentales de diferentes investigaciones. Los parámetros físicos en los números de semejanza están referidos a la temperatura de saturación. En los experimentos la corrección que considera la variabilidad de las propiedades físicas, no supera el 10%. Esta corrección se omite aquí.

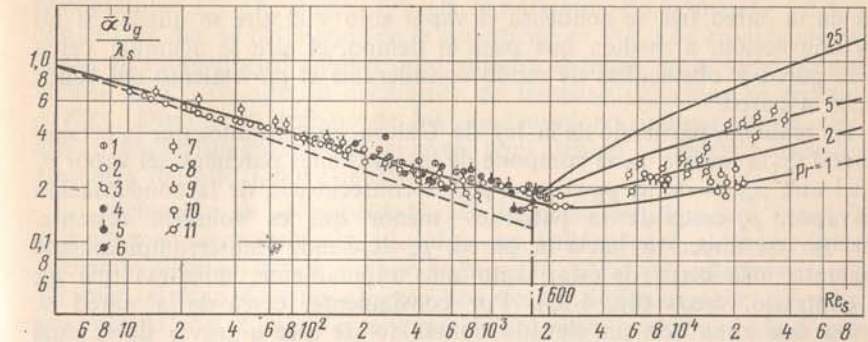


Fig. 4-31. Dependencia de  $\bar{\alpha}l_g/\lambda$  en función de  $Re$  y  $Pr$  durante la condensación del vapor sobre una superficie vertical según datos de diferentes autores. 1, 2, 3, 9, 10 — agua; 4 — acetona; 5 — benzol; 6 — etanol; 7 — amoníaco; 8 — aire líquido; 11 — dowl-therm.

Las correlaciones de cálculo (4-22), (4-26) y (4-29) son justas durante la condensación del vapor saturado puro sobre una superficie limpia. Por eso durante la determinación del valor del coeficiente de traspaso del calor, si es posible, hay que tomar en consideración una serie de circunstancias adicionales que influyen en la emisión calorífica.

a. *Influencia de recalentamiento del vapor.* Si la temperatura de la pared es inferior a la temperatura de saturación, el proceso de condensación del vapor recalentado transcurre del mismo modo que la del vapor saturado. Sin duda esto no significa que el vapor recalentado se satura inmediatamente en todo el volumen; el vapor comienza a saturarse solamente cerca de la pared y a medida que se enfría, mientras que cuando está lejos de la pared, el vapor puede permanecer recalentado.

Durante la condensación del vapor recalentado es necesario tomar en consideración el calor de sobrecalentamiento  $q_r' = i_r' - i_s'$ , en J/kg, y en vez del calor del cambio de fase  $r$  en la fórmula de cálculo, hay que introducir el valor de  $r' = r + q_r'$ , donde  $i_r'$  y  $i_s'$  son las entalpías del vapor recalentado y del saturado, respectivamente. Como se hizo antes en calidad de diferencia de temperaturas se acepta  $\Delta t = t_s - t_p$ .

Puesto que  $r' > r$ , entonces, durante la condensación del vapor recalentado la emisión calorífica es algo superior que durante la condensación del vapor saturado. Sin embargo la diferencia usualmente es insignificante y en los cálculos prácticos se le puede con frecuencia despreciar.

b. *Influencia del estado de la superficie.* La emisión calorífica durante la condensación del vapor depende del estado de la superficie. Si la superficie es áspera o está cubierta con una capa de óxido, ocurre que, a consecuencia de la resistencia adicional al flujo, el espesor de la película aumenta



y el coeficiente de traspaso del calor en este caso se reduce. Aquí ejerce gran influencia también la resistencia térmica de la película de óxido existente sobre la superficie.

c. *Influencia de los gases no condensables presentes en el vapor.* Cuando el vapor contiene aire u otros gases no condensables la emisión calorífica durante la condensación se reduce en gran medida. Esto ocurre por que en la pared fría se condensa el vapor solo y el aire se queda. Si no hay convección, a medida que pasa el tiempo, el aire se acumula cerca de la pared y obstaculiza de modo considerable el movimiento del vapor hacia la pared.

En realidad, partiendo de la ley de Dalton, encontramos que la presión general de la mezcla  $p_0$  se compone de las presiones parciales del vapor  $p_v$  y del aire  $p_a$ , es decir,  $p_0 = p_v + p_a$ . A consecuencia de la condensación del vapor,  $p_v$  cerca de la pared es menor que es volumen restante. Por eso en dirección hacia la pared,  $p_v$  desciende ininterrumpidamente y cuanto más cerca de ésta, tanto más rápidamente, mientras que  $p_a$ , al contrario, crece (fig. 4-32). Por consiguiente, cerca de la pared se forma una zona con un elevado contenido de aire a través de la cual las moléculas de vapor penetran sólo mediante la difusión. Como consecuencia de lo dicho anteriormente ocurre la reducción de la diferencia de temperaturas entre los dos medios,  $t_s - t_p$ , puesto que, debido a la disminución de la presión parcial del vapor, cerca de la superficie de película, la temperatura de saturación  $t_s$  siempre es más baja que la de saturación a una presión  $p_0$ .

La curva experimental de variación del coeficiente relativo de traspaso del calor en relación con la concentración del aire en el vapor, según los datos del trabajo [20], se expone en la fig. 4-33. Allí a lo largo del

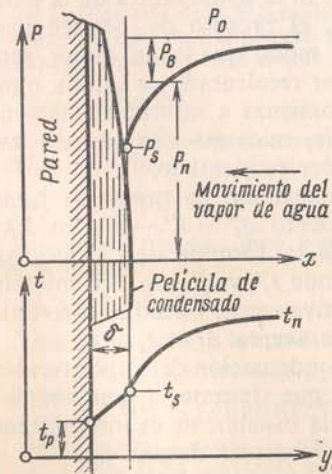


Fig. 4-32. Carácter de las variaciones de las presiones parciales del vapor y del aire, así como de las temperaturas del vapor.

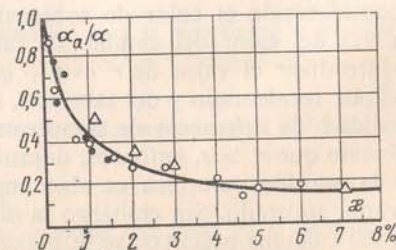


Fig. 4-33. Dependencia entre el coeficiente relativo de traspaso del calor y la concentración del aire en el vapor.

eje de abscisas está trazado el valor de la concentración en masa del aire en el vapor  $x = m_a/m_v$  %, y a lo largo del eje de ordenadas, la relación de  $\alpha_a/\alpha$ , donde  $m_a$  es la masa del aire, en kg;  $m_v$  es la masa del vapor, en kg, que se contienen en unidad de volumen de la mezcla. El coeficiente de traspaso del calor  $\alpha_a$  está referido a la diferencia de temperaturas  $t_v - t_p$ , donde  $t_v$  es la temperatura de la mezcla del vapor con el aire que se halla lejos de la superficie, en °C. Los ensayos se realizaron en tubos horizontales. Como muestra la figura, si el vapor contiene incluso el 1% de aire su coeficiente de traspaso del calor se reduce en el 60%. Durante el trabajo de los condensadores industriales el aire se aspira ininterrumpidamente, aunque aquí debido al buen mezclado la presencia del aire influye menos.

d. *Influencia de la velocidad y la dirección del flujo del vapor.* Las dependencias anteriormente aducidas son válidas para el vapor inmóvil o cuando la velocidad de su flujo es pequeña. Si las velocidades son considerables, el flujo del vapor ejerce una acción dinámica sobre la película de condensación. Cuando el movimiento del vapor coincide con la dirección del escurrimiento de la película, el flujo del vapor acelera el movimiento del condensado en la película, su espesor disminuye y el coeficiente de traspaso del calor aumenta. Durante el movimiento del vapor de abajo hacia arriba, es decir, en la dirección opuesta, el escurrimiento de la película se frena, su espesor aumenta y el coeficiente de traspaso del calor disminuye. Sin embargo este fenómeno tiene lugar hasta que la presión dinámica del vapor no supera la fuerza de gravedad. Después de superar la fuerza de gravedad la película de vapor es arrastrada hacia arriba y en parte se aparta de la superficie. En este caso con el aumento de la velocidad del vapor el coeficiente de traspaso del calor crece de nuevo.

e. *Influencia de la composición que tiene la superficie de calefacción.* Al diseñar los dispositivos de condensación es necesario prestar gran atención a la composición correcta de la superficie de calefacción. La emisión calorífica en los tubos horizontales tiene mayor intensidad que en los verticales, puesto que en primer caso el espesor de la película del condensado es menor. No obstante, esto es válido solamente para un tubo o para la hilera superior en un haz. En los haces de hileras múltiples el condensado de las hileras superiores cae sobre las inferiores, precisamente por eso en estas últimas la película resulta más gruesa. Sin embargo en las condiciones reales el condensado escurre en forma de gotas aisladas o de chorros, lo que provoca simultáneamente considerables perturbaciones e incluso la turbulencia de la película. Además, durante la condensación del vapor sobre un haz de hileras múltiples es necesario tomar en consideración la influencia de la velocidad de movimiento del vapor que llega, pues en los espacios entre los tubos ésta puede cambiar el carácter del escurrimiento del condensado.

Para los tubos verticales el coeficiente de traspaso del calor disminuye en su parte de abajo a consecuencia del engrosamiento de la película. En este caso es posible aumentar el valor medio de la emisión calorífica, colocando, según la altura del tubo, casquetes para derivar el condensado



(fig. 4-34). La ubicación de dichos casquetes a cada 10 cm en el tubo, que tiene altura  $h = 3$  m, aumenta el valor medio del coeficiente de traspaso del calor de 2 a 3 veces.

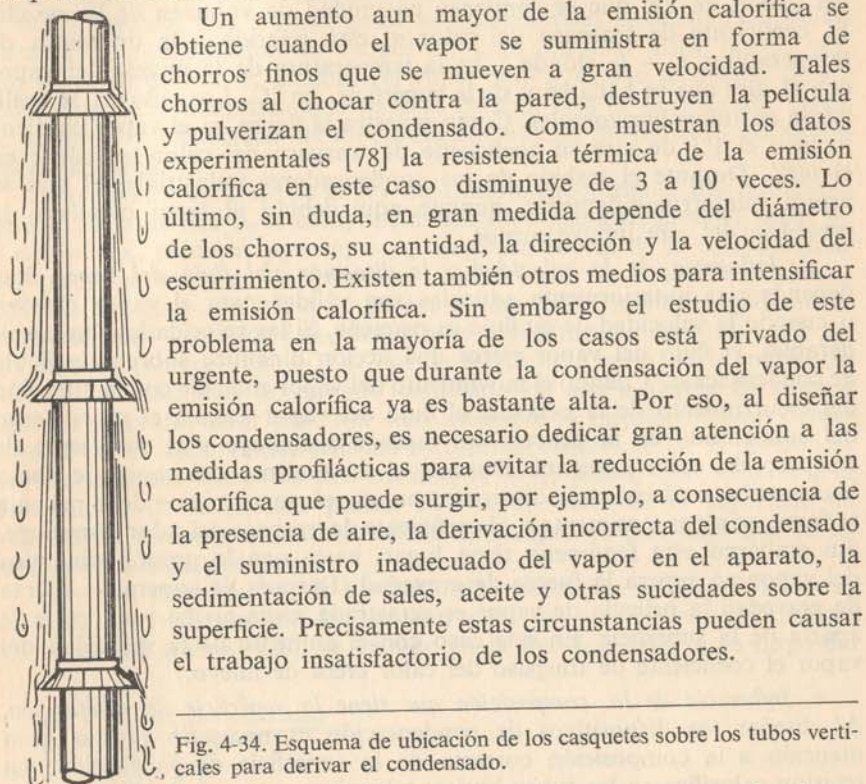


Fig. 4-34. Esquema de ubicación de los casquetes sobre los tubos verticales para derivar el condensado.

### 3. Emisión calorífica durante la condensación del vapor en los tubos.

Si a un tubo con superficie enfriada se le suministra vapor, entonces, a medida que este pasa por el tubo, se condensa paulatinamente y en las paredes se forma una película del condensado. En este caso el gasto del vapor  $G''$  y su velocidad  $w''$  decrecen a lo largo del tubo y el consumo del condensado  $G'$  aumenta. La particularidad principal del proceso de condensación en los tubos consiste en la interacción dinámica entre el flujo de vapor y la película. Sobre la película del condensado actúa también la fuerza de gravedad. En resumen, dependiendo de la orientación del tubo en el espacio y de la velocidad del vapor, el carácter de movimiento del condensado puede ser diferente.

En los tubos verticales durante el movimiento del vapor de arriba abajo, las fuerzas de gravedad y de acción dinámica del flujo de vapor coinciden en dirección y la película del condensado escurre hacia abajo. En los tubos cortos, cuando la velocidad del flujo del vapor es pequeña, el escurrimiento de la película se determina en lo fundamental por la fuerza de gravedad de modo análogo al caso de condensación del vapor

inmóvil sobre la pared vertical. La intensidad de la emisión calorífica también resulta la misma [31]. Cuando la velocidad del vapor aumenta, la emisión calorífica crece. Esto se explica por la disminución del espesor de la película de condensado la que, bajo la acción del flujo de vapor, escurre más rápidamente. En los tubos largos, al haber grandes velocidades en el movimiento del vapor, el cuadro del proceso se complica. En estas condiciones se observa una separación parcial del líquido desde la superficie de la película y la formación de la mezcla de vapor y líquido en el núcleo del flujo. Al ocurrir esto la influencia de la fuerza de gravedad se pierde paulatinamente y las regularidades del proceso dejan de depender de la orientación del tubo en el espacio.

En los tubos horizontales, cuando las velocidades del flujo de vapor no son muy grandes, la acción mutua entre las fuerzas de gravedad y las de fricción del vapor contra la película genera otro cuadro de escurrimiento. Bajo la acción de la fuerza de gravedad la película del condensado escurre por la superficie interior del tubo hacia abajo. Aquí el condensado se acumula y forma un arroyo. A este movimiento se le superpone el del condensado en dirección longitudinal debido a la acción del flujo del vapor. En resumen, la intensidad de la emisión calorífica resulta variable por la circunferencia del tubo, pues en la parte superior es más alta que en la inferior. A causa de la inundación de la parte inferior de la sección del tubo horizontal con el condensado, la intensidad media de la emisión calorífica, cuando hay pequeñas velocidades del vapor, ésta puede ser incluso más baja que la existente durante la condensación del vapor inmóvil en el exterior de un tubo horizontal del mismo diámetro [48].

Durante la condensación en los tubos se diferencian los regímenes de condensación *total* y *parcial* del vapor. En el primer caso todo el vapor, que llega al tubo, se condensa por completo y del tubo sale un flujo continuo del condensado. Cuando la condensación es parcial, del tubo se obtiene una mezcla de vapor y líquido.

Puesto que el consumo total del vapor y del condensado  $G$  a lo largo del tubo no varía, la ecuación del balance material para cualquier sección transversal del tubo tiene la forma:

$$G'' + G' = G = \text{const.}$$

La relación entre el consumo del vapor  $G''$  que pasa a través de una sección dada del tubo, y el consumo total  $G$  se llama *contenido de vapor del gasto en masa* del flujo bifásico en la sección dada y se admite designarlo con el símbolo " $x$ ":

$$x = G''/G.$$

De este modo, si a la entrada del tubo llega el vapor saturado, entonces en la sección de entrada el contenido de vapor del gasto en masa es igual a la unidad ( $x_1 = 1$ ). Cuando en el tubo se suministra vapor húmedo, el contenido de vapor del gasto en masa a la entrada es menor que la unidad ( $x_1 < 1$ ). A medida que se mueve el flujo en el tubo, a consecuencia de la condensación el contenido de vapor disminuye. Cuando tiene lugar



una condensación total del vapor en la sección de salida  $x_2 = 0$  y cuando ésta es parcial,  $x_2 > 0$ .

La ecuación de balance térmico para un elemento del tubo de longitud  $dl$  tiene la forma siguiente:

$$q \pi D dl = r dG',$$

donde  $q$  es la densidad del flujo calorífico en la sección dada del tubo;  
 $D$  es el diámetro interior del tubo.

Si esta ecuación se integra por la longitud desde 0 hasta  $l$ , obtenemos la ecuación de balance térmico de todo el tubo:

$$\bar{q} \pi D l = r G(x_1 - x_2),$$

donde  $\bar{q}$  es la densidad media del flujo calorífico de acuerdo con la longitud del tubo;

$x_1$  y  $x_2$  son los contenidos de vapor del gasto en masa del flujo a la entrada y la salida.

De la última ecuación se ve que el gasto sumario en masa del vapor y del condensado  $G$ , que pasa a través del tubo, está unívocamente ligado con la carga térmica, las dimensiones del tubo y los valores del contenido de vapor del gasto en masa del flujo a la entrada y la salida del canal. Además, cuanto más alta es la carga térmica  $\bar{q}$  y cuanto más largo es el tubo, tanto mayores serán el gasto y la velocidad del flujo en el tubo.

En estas condiciones el escurrimiento de la película de condensado se determina en lo fundamental por la acción dinámica realizada por el flujo de vapor, de modo que en la mayor parte de la longitud (a excepción del tramo inicial) el régimen de movimiento del condensado en la película tiene un carácter turbulento. La intensa separación del líquido desde la película hacia el flujo que tiene lugar en este caso, y la transferencia inversa de las gotas de líquido desde el núcleo del flujo hacia la película, contribuyen al proceso del mezclado turbulento del condensado en el interior de la película. El cálculo de la emisión calorífica en estas condiciones es necesario llevarlo a cabo según la fórmula obtenida por los autores [6] como resultado del análisis teórico basado sobre la analogía de Reynolds:

$$\alpha = \alpha_0 \sqrt{\rho' / \rho_m}, \quad (4-32)$$

donde  $\alpha_0$  es el coeficiente de traspaso del calor calculado según la fórmula (3-38) cuando hay movimiento turbulento del líquido (condensado) en el tubo con gasto  $G$ ;

$\rho_m$  es la densidad media de la mezcla del vapor con el líquido en la sección dada del tubo.

La correlación (4-32) determina la intensidad local de la emisión calorífica para la sección dada del canal. Al final del tramo de condensación la densidad media de la mezcla del vapor con el líquido  $\rho_m = \rho'$  y  $\alpha \rightarrow \alpha_0$ . Cuando está dado el contenido de vapor del gasto en masa  $x$ , la relación

entre las densidades del líquido y la mezcla de vapor y agua que entra en la ecuación (4-32), se puede expresar mediante la fórmula:

$$\frac{\rho'}{\rho_m} = 1 + \frac{\rho' - \rho''}{\rho''} x. \quad (4-33)$$

El coeficiente medio de traspaso del calor por toda la longitud del tubo se determina mediante la correlación:

$$\frac{\bar{\alpha}}{\alpha_0} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\left( \frac{\rho'}{\rho_m} \right)_1} + \sqrt{\left( \frac{\rho'}{\rho_m} \right)_2} \right], \quad (4-34)$$

donde las magnitudes  $\rho' / \rho_m$  calculadas según la ecuación (4-33) se refieren respectivamente a las secciones de entrada y de salida del tubo.

La comparación de (4-34) con los datos experimentales se expone en la fig. 4-35. Los ensayos se realizaron [6] con tubos de 2,5 m de longitud a una presión de  $12 \cdot 10^5$  hasta  $90 \cdot 10^5$  Pa, tanto cuando hay la condensación total del vapor ( $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$ ), como cuando tienen lugar los regímenes de condensación parcial ( $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0,2 \div 0,5$  y  $x_1 = 0,3 \div 0,6$ ,  $x_2 = 0$ ). Además, se realizaron experimentos con un tubo de 12 m

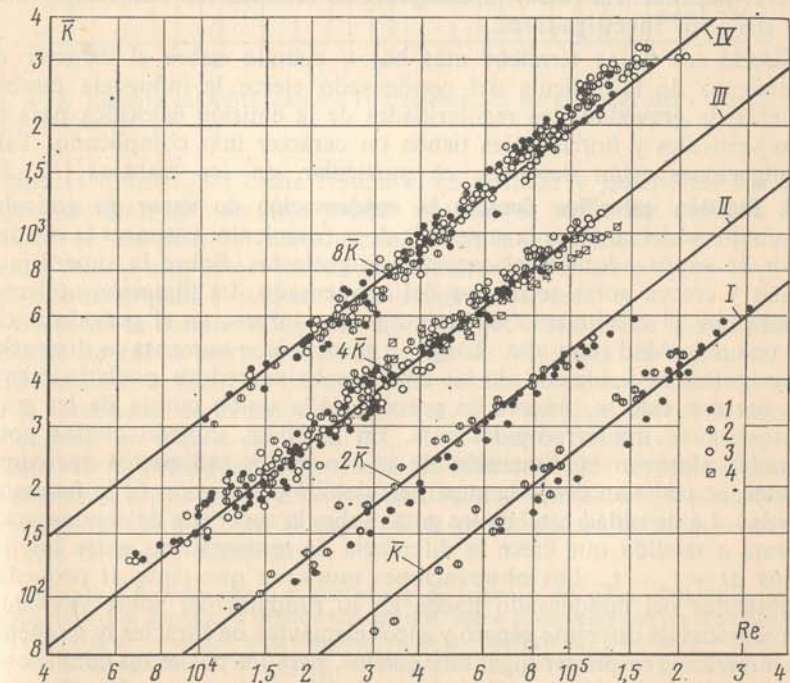


Fig. 4-35. Dependencia  $\bar{K} = f(Re)$  durante la condensación del vapor de agua dentro de los tubos.  
1 —  $d = 16 \times 1,5$  mm; 2 —  $d = 20 \times 1,5$  mm; 3 —  $d = 13 \times 5,5$  mm; 1 — 3 —  $l = 2,5$  mm; 4 —  $d = 16 \times 1,5$  mm,  $l = 12$  m



de longitud a presiones de  $60 \cdot 10^5$  y  $90 \cdot 10^5$  Pa en un régimen de condensación total. Las cargas térmicas medias  $\bar{q}$  cambiaban desde  $1,6 \cdot 10^5$  hasta  $1,6 \cdot 10^6$  W/m<sup>2</sup>.

Los datos experimentales de la fig. 4-35 están presentados en forma de siguiente dependencia:

$$\bar{K} = \frac{\text{Nu} \text{Pr}^{-0,43}}{0,5 [\sqrt{(\rho'/\rho_m)_1} + \sqrt{(\rho'/\rho_m)_2}]} = f(\text{Re}),$$

donde  $\text{Nu} = \bar{\alpha}D/\lambda$  es el número de Nusselt y

Re es el número de Reynolds calculado según el flujo del condensado, cuando el consumo total es G.

Todos los parámetros físicos que entran en los números de semejanza, están referidos a la temperatura de saturación. Para una mayor claridad en la representación de los puntos experimentales, en el gráfico I a lo largo del eje de ordenadas está trazada la magnitud  $\bar{K}$  y en el gráfico II, la magnitud  $2\bar{K}$ , etc. La tangente del ángulo de inclinación de los gráficos I—IV es igual a 0,8. De aquí se deduce que el coeficiente de traspaso del calor es proporcional a la magnitud  $\text{Re}^{0,8}$ .

A la dependencia (4-34) la comprueban también los datos experimentales de otros investigadores.

Siendo los flujos térmicos más bajos, cuando sobre el carácter del movimiento de la película del condensado ejerce la influencia también la fuerza de gravedad; las regularidades de la emisión calorífica para los tubos verticales y horizontales tienen un carácter más complicado. Tales investigaciones están descritas, en particular, en los trabajos [12, 31].

#### 4. Emisión calorífica durante la condensación de vapor en gotículas.

Si el condensado no moja la superficie de enfriamiento, entonces la condensación de vapor adquiere el carácter de gotículas. Sobre la superficie se forman y crecen gotas separadas del condensado. La filmación acelerada muestra que el crecimiento de las gotas que surgen, en el período inicial va a una velocidad muy alta. Luego, a medida que aumenta la dimensión de las gotas, la velocidad de su crecimiento se reduce paulatinamente. A la par con esto se observa un proceso de la unión mutua de las gotas que transcurre ininterrumpidamente. En resumen, cuando ciertas gotas separadas alcanzan la dimensión de uno o varios milímetros aproximadamente, se resbalan desde la superficie debido a la acción de la fuerza de gravedad. La densidad total de las gotas sobre la superficie de condensación aumenta a medida que crece la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $\Delta t = t_s - t_p$ . Las observaciones muestran que para  $\Delta t$  pequeñas, las gotículas del condensado nacen en lo fundamental sobre cavidades microscópicas de diferente género y otros elementos de carácter heterogéneo de la superficie (en primer lugar en aquellos, para los cuales las condiciones locales de humectación y trabajo de adhesión tienen un valor elevado). Al aumentar  $\Delta t$ , sobre la superficie de condensación puede surgir, además, una inestable película de líquido muy fina (cerca de  $1 \mu$  y menos). Esta película se rompe ininterrumpidamente, concentrándose en nuevas goti-

culas para luego otra vez, restablecerse de nuevo. A la par con esto el número de gotas sobre la superficie aumenta bruscamente.

La dependencia existente entre el coeficiente de traspaso del calor  $\alpha$ , durante la condensación del vapor de agua en gotículas, y la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $\Delta t$  se expone en la fig. 4-36. Esta

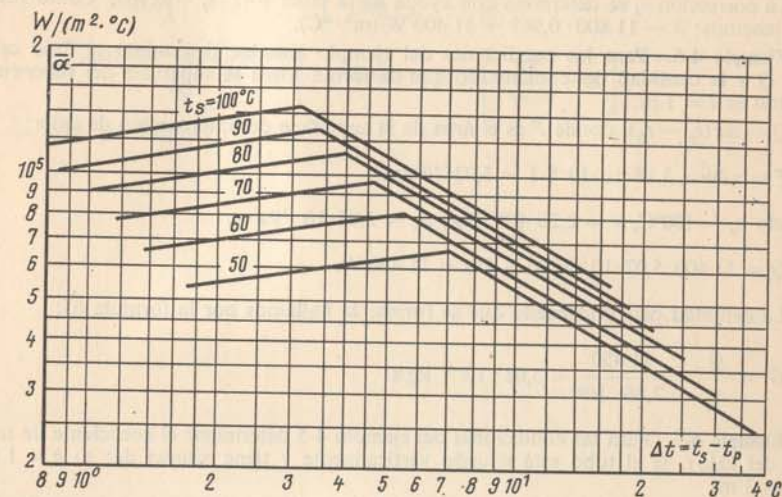


Fig. 4-36. Emisión calorífica durante la condensación en gotículas del vapor de agua, dependiendo de  $t_s$  y  $\Delta t$ .

gráfica se obtuvo [30] como resultado de analizar y generalizar los datos experimentales. Es necesario prestar atención al hecho de que los coeficientes de traspaso del calor, cuando hay la condensación en gotículas, tienen valores muy altos. Las dependencias aducidas en la fig. 4-36 pueden recomendarse para el uso en los cálculos prácticos.

Durante la condensación del vapor en gotículas, sobre la superficie de un haz de tubos horizontales, la caída de las gotas de un tubo sobre otro, según muestran los datos experimentales, conduce a cierto descenso de la intensidad de la emisión calorífica. Sin embargo, este descenso, por lo común, no supera del 10 al 15%. Los ensayos muestran también que a causa de la intensidad muy alta la emisión calorífica durante dicha condensación es muy sensible a las mezclas, incluso ínfimas, de gases no condensables (como el aire), en el vapor. Este problema no ha sido investigado todavía de modo suficiente.

**Ejemplo 4-5.** Determinar el coeficiente de traspaso del calor durante la condensación del vapor de agua, a presión atmosférica, sobre la superficie de un tubo horizontal con diámetro  $D = 16$  mm, si la temperatura de la superficie del tubo es  $t_p = 80^\circ\text{C}$ .

De la ecuación (4-22)  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{N,s} \epsilon_t$ . La magnitud  $\bar{\alpha}_{N,s}$  la determinamos según la ecuación (4-19):

$$\bar{\alpha}_{N,s} = 0,728 \frac{A_s}{\sqrt[4]{D \Delta t}}.$$



Para la temperatura de saturación  $t_s = 100^\circ\text{C}$  de la tabla 4-5 tenemos  $A_s = 12,2 \cdot 10^3 \text{ W/(m}^{7/4} \cdot ^\circ\text{C}^{3/4})$ , entonces

$$\bar{\alpha}_{N,s} = 0,728 \frac{12,2 \cdot 10^3}{\sqrt[4]{16 \cdot 10^{-3}(100 - 80)}} = 11\,800 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C}).$$

La corrección  $\varepsilon_t$  se determina con ayuda de la tabla 4-4:  $\varepsilon_t = 0,967$ . Como resultado tenemos:  $\bar{\alpha} = 11\,800 \cdot 0,967 = 11\,400 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ .

**Ejemplo 4-6.** Para las condiciones del ejemplo anterior determinar el flujo calorífico  $Q$  y la cantidad del condensado que se forma sobre la superficie del tubo cuya longitud es  $l = 1 \text{ m}$ :

$Q = \alpha F(t_s - t_p)$ , donde  $F$  es el área de la superficie del intercambio de calor:

$$F = \pi D l = 3,14 \cdot 16 \cdot 10^{-3} \cdot 1 = 5,02 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2.$$

Cuando  $t_s = 100^\circ\text{C}$ ,  $r = 2,26 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ ;  $\mu_s = 2,82 \cdot 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .

$$Q = 11\,400 \cdot 5,02 \cdot 10^{-2} (100 - 80) = 11\,450 \text{ W}.$$

La cantidad del condensado que se forma, la hallamos por la fórmula (i):

$$G = \frac{Q}{r} = \frac{11\,450}{2,26 \cdot 10^6} = 5,08 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s}.$$

**Ejemplo 4-7.** Para las condiciones del ejemplo 4-5 determinar el coeficiente de traspaso del calor, si el tubo está situado verticalmente y tiene alturas de: a)  $h = 1 \text{ m}$ ; b)  $h = 3 \text{ m}$ .

De la tabla 4-5 obtenemos la magnitud  $(h\Delta t)_{cr}$  a la presión atmosférica,  $(h\Delta t)_{cr} = 44,6 \text{ m} \cdot ^\circ\text{C}$ .

a)  $h = 1 \text{ m}$ . La magnitud  $h\Delta t = 1(100 - 80) = 20 \text{ m} \cdot ^\circ\text{C}$ ;  $h\Delta t < (h\Delta t)_{cr}$ . Por consiguiente la corriente de la película tiene carácter laminar y ondulatorio, por eso el cálculo lo realizamos según la fórmula (4-26). El coeficiente de traspaso del calor  $\bar{\alpha}_{N,s}$  se determina en razón de la fórmula (4-18)

$$\bar{\alpha}_{N,s} = 0,943 \frac{A_{N,s}}{\sqrt[4]{h\Delta t}} = 0,943 \frac{12,2 \cdot 10^3}{\sqrt[4]{1 \cdot 20}} = 5,6 \cdot 10^3 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C}).$$

La corrección  $\varepsilon_t$  se toma de la tabla 4-4,  $\varepsilon_t = 0,967$ .

Primero calculamos el coeficiente de traspaso del calor  $\alpha'$ , tomando en consideración  $\varepsilon_v = 1$ ;

$$\bar{\alpha}' = \bar{\alpha}_{N,s} \varepsilon_t = 5,6 \cdot 10^3 \cdot 0,967 = 5,42 \cdot 10^3 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C}).$$

Luego determinamos la corrección debida a la corriente ondulatoria  $\varepsilon_v$ . Para esto con ayuda de la fórmula (4-25) calculamos el valor del número Re:

$$\text{Re} = 4 \frac{\bar{\alpha}' h \Delta t}{r \mu_s} = 4 \frac{5,42 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 1}{2,26 \cdot 10^6 \cdot 2,82 \cdot 10^{-4}} = 682.$$

Según la fórmula (4-23) encontramos  $\varepsilon_v$ :

$$\varepsilon_v = (\text{Re}/4)^{0,04} = (682/4)^{0,04} = 1,23.$$

El coeficiente buscado de traspaso del calor es:

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}' \varepsilon_v = 5,42 \cdot 10^3 \cdot 1,23 = 6,68 \cdot 10^3 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C}).$$

b) Si  $h = 3 \text{ m}$ , la magnitud  $h\Delta t = 3 \cdot 20 = 60 \text{ m} \cdot ^\circ\text{C}$ ;  $h\Delta t > (h\Delta t)_{cr}$ . Por consiguiente, la corriente de la película tiene carácter mixto: es laminar y ondulatorio en la parte superior y turbulento, en la parte inferior. El cálculo lo realizamos conforme a la fórmula (4-29). Cuando  $t_s = 100^\circ\text{C}$ ,  $\text{Pr}_s = 1,75$  (véase la tabla A-4);

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= 400 \frac{r \mu_s}{h \Delta t} \left\{ 1 + 0,625 \text{Pr}_s^{0,5} \left[ \frac{h \Delta t}{(h \Delta t)_{cr}} - 1 \right] \right\}^{4/3} = \\ &= 400 \frac{2,26 \cdot 10^6 \cdot 2,82 \cdot 10^{-4}}{60} \left\{ 1 + 0,625 \cdot 1,75^{0,5} \left[ \frac{60}{44,6} - 1 \right] \right\}^{4/3} = \\ &= 5,92 \cdot 10^3 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C}). \end{aligned}$$



## RADIACIÓN TÉRMICA

## 5-1. Leyes de la radiación calorífica

Como ya es conocido, los portadores de la energía de radiación son las oscilaciones electromagnéticas, cuyas longitudes de ondas pueden variar desde pequeñas fracciones de micra hasta muchos kilómetros. Dependiendo de la gama de longitudes de ondas, tales radiaciones se conocen con diferentes nombres: rayos X (de Roentgen), ultravioletas, luminosas, infrarrojas y ondas radioeléctricas. Su clasificación aproximada es la siguiente [18]:

| Longitud de onda                             | Tipo de radiación            |
|--|------------------------------|
| $0,05 \cdot 10^{-6} \mu$ . . . . .           | Rayos cósmicos               |
| $(0,5 \div 1,0) \cdot 10^{-6} \mu$ . . . . . | Radiación $\gamma$           |
| $10^{-6} - 20 \cdot 10^{-3} \mu$ . . . . .   | Rayos X                      |
| $20 \cdot 10^{-3} - 0,4 \mu$ . . . . .       | Rayos ultravioletas          |
| $0,4 - 0,8 \mu$ . . . . .                    | Rayos visuales               |
| $0,8 \mu - 0,8 \text{ mm}$ . . . . .         | Rayos térmicos (infrarrojos) |
| $0,2 \text{ mm} - \text{X km}$ . . . . .     | Ondas radioeléctricas        |

Esta subdivisión se formó históricamente, pues en realidad no existe un límite definido en la separación de las longitudes de ondas.

Desde el punto de vista de la teoría cuántica el flujo de la energía radiante es el flujo de ciertas partículas — fotones — cuya energía es igual a  $h\nu$ , donde  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  es la constante de Planck y  $\nu$ , la frecuencia de oscilaciones del campo electromagnético equivalente. Recordemos que la longitud de onda  $\lambda$  está ligada a la frecuencia de la oscilación  $\nu$  mediante la correlación  $\lambda\nu = c$ , donde  $c$  es la velocidad de propagación de las oscilaciones (en el vacío  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ).

A nosotros nos interesan en sumo grado aquellos rayos, cuyo surgimiento es determinado solamente por la temperatura y las propiedades ópticas del cuerpo radiante. Tales propiedades las poseen los rayos luminosos e infrarrojos, es decir, aquellos cuya longitud de onda es aproximadamente de  $0,5$  a  $800 \mu$ . Precisamente estos rayos se llaman térmicos y el proceso de su propagación, *la radiación térmica*.

La naturaleza de las radiaciones térmicas y luminosas es la misma. La diferencia entre ellas reside solamente en la longitud de la onda; los rayos luminosos tienen una longitud de onda de  $0,4$  a  $0,8$ , mientras que los rayos térmicos, de  $0,8$  a  $800 \mu$ . Pero las leyes de propagación, reflexión y refracción establecidas para los luminosos son válidas también para los térmicos. Por lo tanto, para tener una mejor idea de cualesquier fenómenos complicados de la radiación calorífica, siempre es correcto establecer una analogía con la radiación luminosa que es más conocida y accesible a la observación directa.

La radiación térmica es propia de todos los cuerpos y cada uno de ellos irradia energía al espacio circundante. Al caer sobre otros cuerpos una parte de esta energía se absorbe, la otra se refleja y la tercera pasa a través del cuerpo. Aquella parte de la energía radiante que es absorbida por el cuerpo, se transforma de nuevo en energía térmica. La parte de la energía que se refleja, incide sobre otros cuerpos (circundantes) y es absorbida por éstos. Lo mismo ocurre con aquella parte de la energía que pasa a través del cuerpo. De este modo, después de una serie de absorciones, la energía de emisión (radiante) se distribuye por completo entre los cuerpos circundantes. Por consiguiente, cada cuerpo no sólo irradia ininterrumpidamente, sino absorbe también sin cesar la energía radiante.

Como resultado de estos fenómenos, ligados a la doble transformación mutua (térmica — radiante — térmica), se realiza el proceso de intercambio de calor por radiación. La cantidad de calor entregado o recibido se determina por la diferencia entre las cantidades de energía radiante emitida y absorbida por el cuerpo. Dicha diferencia es distinta de cero, si la temperatura de los cuerpos, que participan en el intercambio de energía radiante, es diferente.

Cuando la temperatura de estos cuerpos es igual, todo el sistema se encuentra en el así llamado equilibrio térmico móvil o termodinámico. En este caso todos los cuerpos del sistema también emiten y absorben, solamente para cada uno de éstos la llegada de la energía radiante es igual a su gasto.

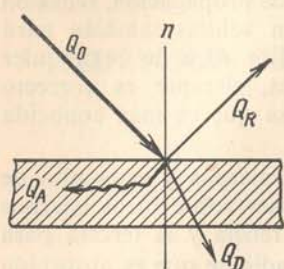
*Tipos de flujos de energía radiante.* La irradiación total que pasa a través de una superficie arbitraria  $F$  por unidad de tiempo se llama *flujo de radiación* (radiante)  $Q$ , W. El flujo radiante emitido por la unidad de superficie en todas las direcciones del espacio semiesférico se llama *densidad de flujo radiante*  $E$ , W/m<sup>2</sup>:

$$E = dQ/dF.$$

El flujo de radiación y su densidad contienen rayos con diferentes longitudes de ondas, por lo que estas características de la irradiación se llaman también *integrales*. La irradiación que corresponde a un estrecho intervalo de variación de las longitudes de ondas desde  $\lambda$  hasta  $\lambda + d\lambda$ , se llama radiación *monocromática*.



Supongamos que de toda la cantidad de energía  $Q_0$  que cae sobre un cuerpo, una parte  $Q_A$  se absorbe, otra parte  $Q_R$  se refleja y otra más  $Q_D$  pasa a través del cuerpo (fig. 5-1), de modo que:



$$Q_A + Q_R + Q_D = Q_0.$$

Al dividir ambos miembros de esta igualdad por  $Q_0$  obtenemos:

$$Q_A/Q_0 + Q_R/Q_0 + Q_D/Q_0 = 1 \quad (a)$$

$$A + R + D = 0.$$

El primer término de la igualdad (a) caracteriza la *capacidad de absorción A*; el segundo, el *poder reflector R* y el tercero, la *capacidad de transmisión del cuerpo D*. Todas estas magnitudes tienen la dimensión cero y varían solamente en el intervalo de 0 hasta 1.

Fig. 5-1. Esquema de distribución de la energía radiante incidente.

Si  $A = 1$ , entonces  $R = 0$  y  $D = 0$ ; esto significa que la energía de radiación incidente la absorbe íntegramente el cuerpo. Tales cuerpos se llaman negros (radiadores integrales).

Si  $R = 1$ , entonces  $A = 0$  y  $D = 0$ ; esto significa que la energía de radiación incidente se refleja completamente. En este caso, si la reflexión es regular<sup>1)</sup>, los cuerpos se llaman especulares; pero si la reflexión es difusa, se llaman blancos.

Si  $D = 1$ , entonces  $A = 0$  y  $R = 0$ ; esto significa que toda la energía de radiación incidente pasa por completo a través del cuerpo. Tales cuerpos se llaman transparentes o diatérmanos (diatérmicos).

En la naturaleza no hay cuerpos que sean absolutamente negros, blancos o transparentes; estos conceptos son convencionales al aplicarlos a los cuerpos reales. Los valores de  $A$ ,  $R$  y  $D$  dependen de la naturaleza del cuerpo, de su temperatura y del espectro de la radiación incidente. Por ejemplo, el aire para los rayos térmicos es transparente, pero cuando contiene vapor de agua o anhídrido carbónico, se convierte en semitransparente.

Los cuerpos sólidos y algunos líquidos (por ejemplo, el agua, los alcoholes) son prácticamente opacos (atérmanos) para los rayos térmicos, es decir,  $D = 0$ , en este caso

$$A + R = 1. \quad (b)$$

De la igualdad (b) se deduce que si el cuerpo refleja bien la energía de radiación, entonces la absorbe mal y, viceversa.

Al mismo tiempo existen los cuerpos que son transparentes solamente para determinadas longitudes de ondas. Así, por ejemplo, el cuarzo es opaco para los rayos térmicos ( $\lambda > 4\mu$ ) y es transparente para los rayos luminosos y ultravioleta. La sal gama, al contrario, es transparente para los

<sup>1)</sup> Se llama regular a la reflexión que cumple las leyes de la óptica geométrica.

rayos térmicos y opaca para los rayos ultravioleta. El vidrio de la ventana es transparente sólo para los rayos luminosos y para los ultravioleta es casi opaco.

Lo mismo se aplica a los conceptos de absorción y reflexión. Una superficie de color blanco sólo refleja bien los rayos luminosos. En la vida cotidiana se aprovecha mucho esta propiedad: trajes blancos en el verano, pintura blanca en los vagones frigoríficos, cisternas y otras construcciones para los que es indeseable la insolación. Pero, tanto el tejido, como la pintura blancos absorben igualmente bien los rayos térmicos invisibles, igual que lo hacen los materiales de color negro. Para la absorción y reflexión de los rayos térmicos tiene mayor importancia no el color, sino el estado de la superficie. Independientemente del color, el poder reflector de las superficies lisas y pulidas es muchas veces superior que el de las rugosas. Para aumentar la capacidad de absorción de los cuerpos su superficie se cubre con pintura oscura rugosa. Para dicha pintura se usa, por lo común, el negro de petróleo. Pero incluso esta pintura sólo absorbe del 90 al 96% de la energía de radiación incidente, es decir, todavía no es un cuerpo negro. Un cuerpo semejante no existe en la naturaleza, pero se le puede crear artificialmente. La propiedad del cuerpo negro la posee el orificio en una pared de un cuerpo de cavidad. Para este orificio  $A = 1$ , ya que se puede considerar que la energía del rayo que entra en él, se absorbe en su totalidad dentro del espacio interior del cuerpo de cavidad (fig. 5-2). En adelante todas las magnitudes que se refieran al cuerpo negro, las marcaremos con el índice 0.

Si en un cuerpo no incide desde el exterior ningún rayo, en este caso de unidad de superficie del cuerpo se extrae el flujo de energía radiante  $E_1$ , W/m<sup>2</sup>. Este flujo se determina totalmente por la temperatura y las propiedades físicas del cuerpo. Es la *autorradiación del cuerpo*. Sin embargo, normalmente los otros cuerpos proyectan sobre el cuerpo examinado la energía de radiación en cantidad  $E_2$ , esta es la *radiación incidente*. Una

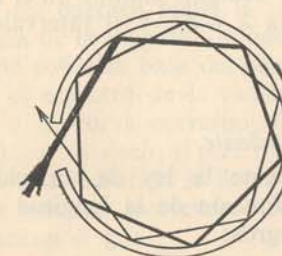


Fig. 5-2. Dirección de propagación de un rayo dentro de un cuerpo de cavidad.

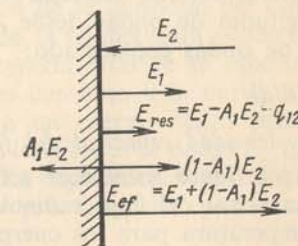


Fig. 5-3. Gráfico para determinar los tipos de radiación calórica.

parte de la radiación incidente, en cantidad  $A_1 E_2$ , la que absorbe el cuerpo, es la *radiación absorbida*; la cantidad restante  $(1 - A_1) E_2$  se refleja; es la *radiación reflejada* (fig. 5-3). La autorradiación del cuerpo sumada



a la radiación reflejada se le llama *radiación efectiva* del cuerpo,  $E_{ef} = E_1 + (1 - A_1) E_2$ . Esta es la radiación real del cuerpo que sentimos o medimos con aparatos. Su cantidad es mayor que la autorradiación del cuerpo en la magnitud  $(1 - A_1) E_2$ .

La radiación efectiva  $E_{ef}$  depende de las propiedades físicas y de la temperatura, no sólo del cuerpo radiante dado, sino también de los otros cuerpos situados en su derredor, y de la forma, dimensiones y disposición relativa de los cuerpos en el espacio. Puesto que la radiación incidente  $E_2$  se determina de acuerdo con la temperatura y las propiedades de los cuerpos circundantes, resulta que las cualidades físicas de la autorradiación y las de la radiación reflejada no son iguales, sus espectros son diferentes. Sin embargo para los cálculos térmicos, si se examina sólo la parte energética del proceso, esta diferencia frecuentemente carece de importancia.

La radiación resultante  $E_{res}$  representa la diferencia entre la autorradiación del cuerpo y aquella parte de la radiación incidente exterior  $E_2$  que absorbe el cuerpo dado, siendo esta parte igual a  $A_1 E_2$ . De este modo:

$$E_{res} = E_1 - A_1 E_2.$$

La magnitud  $E_{res}$  determina el flujo de energía que el cuerpo dado transmite a los cuerpos situados en su derredor durante el proceso del intercambio de calor por radiación. Si la magnitud  $E_{res}$  resulta negativa ( $E_{res} < 0$ ), significa que el cuerpo, a consecuencia del intercambio de calor por radiación, recibe energía.

Ahora examinemos las principales leyes de la radiación calorífica.

**Ley de Planck.** La autorradiación  $E_1$  es la cantidad de energía emitida por la unidad de superficie de un cuerpo en una unidad de tiempo para todas las longitudes de ondas desde  $\lambda = 0$  hasta  $\lambda = \infty$ . Sin embargo, para un detallado estudio del fenómeno tiene importancia conocer también la ley de distribución de la energía de emisión según las longitudes de ondas para temperaturas diferentes  $E_\lambda = f(\lambda, T)$ . La magnitud  $E_\lambda$  representa la relación entre la densidad del flujo radiante emitido en el intervalo de las longitudes de ondas desde  $\lambda$  hasta  $\lambda + d\lambda$ , y el intervalo de las longitudes de ondas considerado:

$$E_\lambda = dE/d\lambda \quad (c)$$

y se llama *densidad espectral del flujo radiante*.

M. Planck logró establecer teóricamente la ley de variación de la densidad espectral del flujo radiante en función de la longitud de onda y de la temperatura para los cuerpos negros:

$$E_{0\lambda} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{c_2/\lambda T} - 1}, \quad (5-1)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda, en m;

$T$  es la temperatura absoluta del cuerpo, en K;

$c_1$  y  $c_2$  son las constantes de radiación que son respectivamente iguales a  $3,74 \cdot 10^{-16} \text{ W} \cdot \text{m}^2$  y  $1,44 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{K}$ .

En la fig. 5-4 se representa en forma gráfica la ley de Planck. En la figura se ve que cuando  $\lambda \rightarrow 0$ , la densidad del flujo radiante tiende a cero. Al aumentar  $\lambda$ , crece  $E_{0\lambda}$  y para cierto valor de  $\lambda_{m\lambda x}$  alcanza su máximo; luego decrece y para  $\lambda \rightarrow \infty$  de nuevo tiende a cero. Al aumentar la temperatura, el máximo de la densidad del flujo radiante se desplaza en dirección de las ondas más cortas. La relación entre la temperatura  $T$  y  $\lambda_{m\lambda x}$  la establece la ley de Wien:

$$\lambda_{m\lambda x} T = 2,9 \cdot 10^{-3}. \quad (d)$$

La unidad de medición del producto  $\lambda_{m\lambda x} \cdot T$  es  $\text{m} \cdot \text{K}$ .

En la fig. 5-4 el área limitada por la curva  $T = \text{const}$ , el eje de abscisas y las ordenadas  $\lambda$  y  $\lambda + d\lambda$  (en la figura esta área está sombreada), da la cantidad de energía  $dE_0$  emitida por la zona de longitudes de ondas  $d\lambda$ ; por consiguiente,  $dE_0 = E_{0\lambda} d\lambda$ . Es evidente que la cantidad total de energía radiante emitida por todas las longitudes de ondas es igual a:

$$E_0 = \int_0^\infty E_{0\lambda} d\lambda. \quad (e)$$

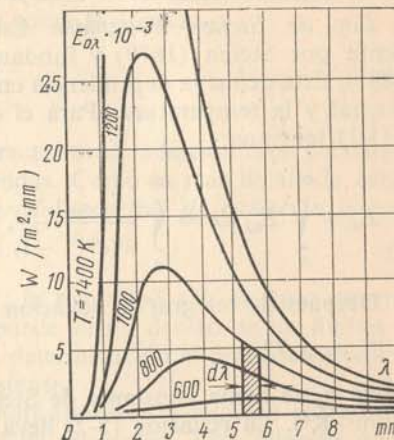


Fig. 5-4. Dependencia  $E_{0\lambda} = f(\lambda, T)$  según la ley de Planck.

La figura muestra también con evidencia, que a las temperaturas con que se operan en la técnica, la energía de la radiación visible ( $\lambda = 0,4 \div 0,8 \mu$ ) es despreciablemente pequeña en comparación con la energía de la radiación infrarroja ( $\lambda = 0,8 \div 800 \mu$ ).

Para los cuerpos reales la variación de la densidad del flujo radiante en función de la longitud de onda y de la temperatura puede establecerse solamente sobre la base del estudio experimental de su espectro. En este caso, si el espectro de la radiación es continuo y la curva  $E_\lambda = f(\lambda)$  es análoga a la curva correspondiente a un cuerpo negro para la misma temperatura, es decir, si para todas las longitudes de ondas  $E_\lambda/E_{0\lambda} = \text{const}$ , entonces esta radiación se llama *gris*. La experiencia muestra que la radiación de muchos materiales técnicos prácticamente puede considerarse como radiación gris.

La fórmula (5-1) determina la distribución de la densidad del flujo radiante del cuerpo negro según las longitudes de ondas y las temperaturas. A veces, durante la descripción, es cómodo utilizar no las longitudes de ondas  $\lambda$ , sino las frecuencias que les corresponden  $\nu = c/\lambda$ . En este caso la densidad espectral del flujo radiante  $E_\nu$  se refiere a un intervalo unitario de frecuencias

$$E_\nu = dE/d\nu,$$



y la ley de Planck toma el aspecto:

$$E_{0\nu} = \frac{2\pi h\nu^3/c^2}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (5-1 a)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz, en m/s;

$h$  y  $k$  son las constantes de Planck y Boltzmann que son iguales a  $6,62 \cdot 10^{-34}$  J·s y  $1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K, respectivamente.

**Ley de Stefan—Boltzmann.** Esta ley fue establecida experimentalmente por Stefan (1879) y fundamentada teóricamente por Boltzmann (1881). Esta define la dependencia entre la densidad del flujo de la radiación integral y la temperatura. Para el cuerpo negro desde las ecuaciones (e) y (5-1) tenemos:

$$E_0 = \int_0^\infty E_{0\lambda} d\lambda = \int_0^\infty \frac{c_1 d\lambda}{\lambda^5 (e^{c_2/\lambda T} - 1)}. \quad (f)$$

Después de integrar la ecuación (f) se puede obtener:

$$E_0 = \sigma_0 T^4, \quad (5-2)$$

donde  $\sigma_0$  se llama constante de Stefan-Boltzmann y es igual a  $5,67 \cdot 10^{-8}$  W/(m<sup>2</sup>·K<sup>4</sup>). La ecuación (5-2) lleva el nombre de la ley de Stefan-Boltzmann. Para los cálculos técnicos esta ley se aplica en la forma más cómoda:

$$E_0 = c_0 \left( \frac{T}{100} \right)^4, \quad (5-2a)$$

donde  $c_0$  es el coeficiente de radiación del cuerpo negro:

$$c_0 = \sigma_0 \cdot 10^8 = 5,67 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K}^4 \text{)}.$$

Por consiguiente, la energía de emisión es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta. En forma rigurosa, la ley de Stefan-Boltzmann es válida sólo para un cuerpo negro. Sin embargo los experimentos realizados por Stefan y otros investigadores, mostraron que esta ley se puede aplicar también a los cuerpos reales. En este caso, toma la forma siguiente:

$$E = c \left( \frac{T}{100} \right)^4. \quad (5-3)$$

Para diferentes cuerpos el coeficiente de radiación  $c$  es distinto. Su valor se determina por la naturaleza del cuerpo, el estado de la superficie y la temperatura; la magnitud  $c$  siempre es menor que  $c_0$  y puede variar dentro de los límites desde 0 hasta 5,67.

Al comparar la densidad del flujo de la autorradiación del cuerpo con la densidad del flujo radiante del cuerpo negro a la misma temperatura,

obtenemos otra característica del cuerpo que se llama *grado de radiación integral*  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{E}{E_0} = \frac{c}{c_0}. \quad (g)$$

El valor de  $\varepsilon$  varía dentro de los límites desde 0 hasta 1. Para los materiales de importancia técnica los valores de  $\varepsilon$  se dan en la tabla A-11. Cuando se conoce  $\varepsilon$  es fácil calcular también el flujo de la autorradiación  $E$ . En este caso la ecuación de cálculo (5-3) toma la forma:

$$E = \varepsilon E_0 = \varepsilon c_0 \left( \frac{T}{100} \right)^4. \quad (5-4)$$

El grado de radiación integral  $\varepsilon$  caracteriza la radiación total del cuerpo que a barca todas las longitudes de ondas. Como la más detallada característica del cuerpo se presenta el *grado espectral de radiación integral*

$$\varepsilon_\lambda = E_\lambda / E_{0\lambda}. \quad (h)$$

Cuando hay una temperatura fija, la magnitud  $\varepsilon/\lambda$ , en caso general, depende de la longitud de onda  $\lambda$  y puede variar dentro de los límites de 0 a 1. Para la radiación gris según la determinación el grado espectral de radiación integral es un número constante.

**Ley de Kirchhoff.** La ley de Kirchhoff establece la relación entre autorradiación del cuerpo y su capacidad de absorción. Esta relación puede obtenerse, al examinar el intercambio por radiación entre dos superficies. Supongamos que hay dos superficies, una de las cuales es negra. Coloquemoslas en forma paralela y a una distancia tan pequeña que la radiación de cada una obligatoriamente caiga sobre la otra. Las temperaturas, las autorradiaciones y las capacidades de absorción de estas superficies son respectivamente iguales a  $T, E, A, T_0, E_0$  y  $A_0 = 1$ , además  $T > T_0$  (fig. 5-5). Compongamos el balance energético. Desde una unidad de la superficie izquierda por unidad de tiempo se emite una cantidad de energía  $E$ . Al caer sobre la superficie negra, la energía es absorbida completamente por ésta. En su lugar la superficie negra irradia energía en cantidad  $E_0$ . Al incidir sobre la superficie gris, esta energía es absorbida en parte, en la cantidad  $AE_0$ , por dicha superficie. La parte restante, en la cantidad  $(1-A)E_0$ , se refleja y de nuevo cae sobre la superficie negra y es

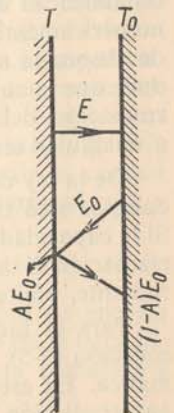


Fig. 5-5. Gráfico para deducir la ley de Kirchhoff.

absorbida por esta última. De este modo para la superficie izquierda el ingreso de energía es igual a  $AE_0$  y el gasto, a  $E$ . Por consiguiente, el balance del intercambio por radiación es:

$$E_{res} = q = E - AE_0. \quad (i)$$



La radiación térmica mutua entre las superficies tiene lugar también cuando  $T = T_0$ . En este caso el sistema se encuentra en equilibrio termodinámico y  $q = 0$ . Entonces de la ecuación (i) tenemos:

$$E/A = E_0.$$

La correlación obtenida puede aplicarse a cualesquier cuerpos, por lo que es posible escribirla en la forma

$$E_1/A_1 = E_2/A_2 = E_3/A_3 = \dots = E_0/A_0 = E_0 = f(T). \quad (5-5)$$

En tal forma la ley de Kirchhoff se formula de modo siguiente: cuando existe equilibrio termodinámico, la relación entre la autorradiación y la capacidad de absorción es la misma para todos los cuerpos e igual a la autorradiación de un cuerpo negro a la misma temperatura.

También es posible escribir la correlación (5-5) de otra manera. Según la ecuación (5-3)  $E = c(T/100)^4$ ; al introducir este valor en la ecuación (5-5) y eliminar los factores de temperatura, obtenemos:

$$c_1/A_1 = c_2/A_2 = c_3/A_3 = \dots = c_0. \quad (I)$$

De aquí se deduce que

$$c_1 = A_1 c_0; \quad c_2 = A_2 c_0, \text{ etc.} \quad (5-5a)$$

Luego, después de comparar las ecuaciones (k) y (I) con la ecuación (5-4) tenemos:

$$A_1 = \varepsilon_1; \quad A_2 = \varepsilon_2, \text{ etc.} \quad (5-5b)$$

En esta forma la ley de Kirchhoff muestra que si hay equilibrio termodinámico, la capacidad de absorción y el grado de radiación integral son numéricamente iguales. Puesto que para los cuerpos reales la capacidad de absorción siempre es menor que la unidad, de la correlación (I) se deduce que la autorradiación de estos cuerpos siempre es menor que la autorradiación del cuerpo negro a la misma temperatura. Por consiguiente, a cualquier temperatura la radiación del cuerpo negro es máxima.

De la ley de Kirchhoff también se deduce que la autorradiación de los cuerpos será tanto mayor, cuanto mayor sea su capacidad de absorción. Si la capacidad de absorción  $A$  de un cuerpo es pequeña, entonces su autorradiación  $E$  también lo es. Por eso los cuerpos que reflejan bien la energía radiante, emiten muy poco.

Para la radiación integral la ley de Kirchhoff se da en forma de la ecuación (5-5). Pero es posible aplicarla también a la radiación monocromática. En este caso se formula del modo siguiente: la relación entre la autorradiación de una determinada longitud de onda y la capacidad de absorción, siendo la misma longitud de onda, es la misma para todos los cuerpos y es función solamente de la longitud de onda y de la temperatura, es decir,

$$E_{1\lambda}/A_{1\lambda} = E_{2\lambda}/A_{2\lambda} = \dots = E_{0\lambda}/A_{0\lambda} = E_{0\lambda} = f(\lambda, T). \quad (5-6)$$

Si se tiene el espectro de emisión (fig. 5-6, a), basándose sobre la expresión (5-6), es posible trazar el espectro de absorción (fig. 5-6, b), y viceversa. La correlación

$$A_{\lambda}/A_{0\lambda} = A_{\lambda}/1 = E_{\lambda}/E_{0\lambda} = \varepsilon_{\lambda}/1 \quad (m)$$

sirve como base para trazar los espectros.

Para cualquier longitud de onda la relación  $E_{\lambda}/E_{0\lambda}$  se conoce de la fig. 5-6, a. En la fig. 5-6, b la línea paralela al eje  $\lambda$  y situada a una distancia igual a una unidad de éste, corresponde a la curva de absorción del cuerpo negro. Al disminuir en este diagrama las ordenadas para cada longitud de onda en la proporción que se determina a partir del espectro de emisión, obtenemos el espectro de absorción del cuerpo dado.

De la correlación (m), así como de la fig. 5-6, se ve que si a cualquier longitud de onda el cuerpo no absorbe la energía, entonces éste tampoco la emite. Por eso el cuerpo que para una longitud de onda dada es blanco

o transparente, no emite energía de dicha longitud de onda.

**Ley de Lambert.** La ley de Stefan-Boltzmann define la cantidad de energía emitida por un cuerpo en todas las direcciones. Cada dirección se determina por el ángulo  $\varphi$  que ésta forma con la normal a la superficie. La variación de la emisión según las direcciones aisladas se determina por la ley de Lambert. De acuerdo con esta ley la cantidad de energía irradiada por un elemento de superficie  $dF_1$  hacia el elemento  $dF_2$  (fig. 5-7) es proporcional a la cantidad de energía emitida a lo largo de la normal  $E_n dF_1$  multiplicada por la magnitud del ángulo sólido elemental  $d\Omega$  y  $\cos \varphi$ , es decir,

$$d^2 Q_{\varphi} = E_n d\Omega \cos \varphi dE_1. \quad (5-7)$$

Por consiguiente, la superficie irradia la máxima cantidad de energía en la dirección de la normal, cuando  $\varphi = 0$ ; con el aumento de  $\varphi$  la cantidad de la energía emitida disminuye y cuando  $\varphi = 90^\circ$  ésta comienza a ser igual a cero.

La ecuación (5-7) es la enunciación matemática más completa de la ley de Lambert. Sin embargo en esta ecuación todavía el valor de  $E_n$  es desconocido. Para determinarlo es necesario integrar la ecuación según la superficie de semiesfera situada por arriba del plano  $dF_1$  y comparar la expresión obtenida con la ecuación (5-3).

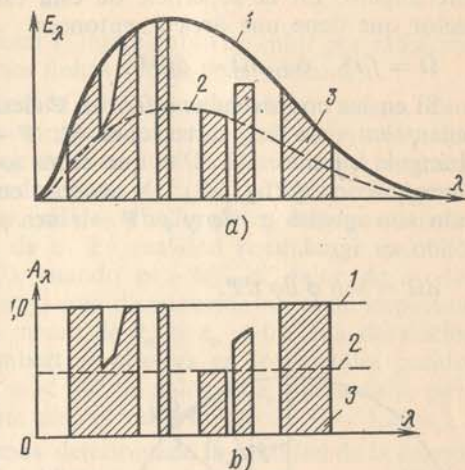


Fig. 5-6. Espectros de radiación (a) y de absorción (b) de los cuerpos.

1 — cuerpo negro; 2 — cuerpo gris; 3 — gas.



El ángulo plano  $\varphi$  en unidades absolutas se mide por la relación  $s/r$ , donde  $r$  es el radio de círculo cuyo centro se halla en el vértice del ángulo, y  $s$  es el arco que subtiende este ángulo. El ángulo plano infinitesimal se mide por la correlación  $ds/r$ . Un método análogo se aplica también para medir el ángulo sólido  $\Omega$ , cuya unidad de medición es el esterradián (sr). Para esto tomemos una esfera de radio  $r$  con el centro  $O$  en el vértice de este ángulo. En la superficie de esta esfera el ángulo sólido  $\Omega$  corta el sector que tiene una área  $f$ ; entonces

$$\Omega = f/r^2 \quad \text{ó} \quad d\Omega = df/r^2.$$

Si en las coordenadas esféricas  $\Psi$  designa la longitud y  $\varphi$ , la distancia polar, entonces las direcciones  $\Psi$ ,  $\Psi + d\Psi$  y  $\varphi$ ,  $\varphi + d\varphi$  determinan el ángulo infinitesimal  $d\Omega$  el que corta sobre la esfera de radio  $r$  el cuadrilátero esférico  $df$  (fig. 5-8). De acuerdo con esto, los lados de este cuadrángulo son iguales a  $rd\varphi$  y  $\rho d\Psi = r \sin \varphi d\Psi$ . Por consiguiente, el ángulo sólido es igual a:

$$d\Omega = \sin \varphi d\varphi d\Psi.$$

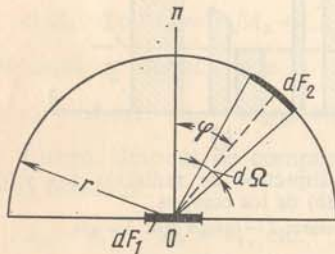


Fig. 5-7. Gráfico para deducir la ley de Lambert. Radiación del elemento  $dF_1$  en dirección del elemento  $dF_2$ .

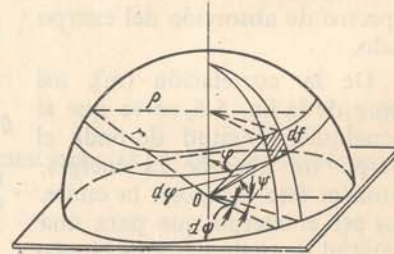


Fig. 5-8. Gráfico para determinar el ángulo sólido poliedro en las coordenadas esféricas.

Sustituyendo la expresión obtenida en la expresión (5-7) e integrando según los ángulos  $\varphi$  y  $\Psi$  tenemos:

$$dQ = E_n dF_1 \int_{\Psi=0}^{2\pi} d\Psi \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi;$$

$$dQ = E_n dF_1 2\pi [(\sin^2 \varphi)/2]_0^{\pi/2} = \pi E_n dF_1 = \pi dQ_n. \quad (n)$$

De acuerdo con la ecuación (5-3) la energía, emitida por el elemento de superficie  $dF_1$  hacia el semiespacio, es igual a:

$$dQ = E dF_1 = c \left( \frac{T}{100} \right)^4 dF_1 = \varepsilon c_0 \left( \frac{T}{100} \right)^4 dF_1. \quad (o)$$

Puesto que los primeros miembros de las ecuaciones (i) y (o) son iguales, entonces al igualar entre sí sus segundos miembros determinamos la incógnita  $E_n$ , o sea, que precisamente es

$$E_n = \frac{E}{\pi} = \frac{1}{\pi} c \left( \frac{T}{100} \right)^4 = \frac{\varepsilon}{\pi} c_0 \left( \frac{T}{100} \right)^4. \quad (5-8)$$

De la ecuación (5-8) se deduce que la densidad del flujo radiante en dirección de la normal es  $\pi$  veces menor que la densidad total del flujo radiante del cuerpo. Después de sustituir el valor de  $E_n$ , tomado de la ecuación (5-8), en la ecuación (5-7), esta última obtendrá el aspecto:

$$d^2 Q_\varphi = \frac{\varepsilon}{\pi} c_0 \left( \frac{T}{100} \right)^4 d\Omega dF_1 \cos \varphi. \quad (5-9)$$

Esta ecuación se usa para calcular el intercambio de calor por radiación entre las superficies de dimensiones finitas (véase más adelante).

La ley de Lambert es estrictamente válida para un cuerpo negro. Para los cuerpos rugosos esta ley se comprueba con la experiencia solamente para  $\varphi = 0 \div 60^\circ$ . A título de ejemplo en la fig. 5-9 está representada, en coordenadas polares, la dependencia  $\varepsilon_\varphi = E_\varphi E_{0\varphi} = f(\varphi)$  para algunos materiales. Si la ley de Lambert es válida, el valor de  $\varepsilon_\varphi$  debe permanecer constante para todos los valores de  $\varphi$ . En realidad resulta que para los cuerpos rugosos (curvas 1, 2 y 3), cuando  $\varphi > 60^\circ$ , el valor de  $\varepsilon_\varphi$  disminuye y tiende a cero. Sin embargo esta disminución no tiene importancia práctica, puesto que el valor medio de  $\bar{\varepsilon}_\varphi \approx \varepsilon_\varphi = 0$ . Una desviación más acentuada de la ley de Lambert se observa en los metales pulidos (curvas 4, 5, y 6). Cuando  $40^\circ < \varphi < 80^\circ$ , el valor de  $\varepsilon_\varphi$  aumenta y, para  $\varphi > 80^\circ$ , éste tiende a cero; en este caso el valor medio de  $\bar{\varepsilon}_\varphi = 1,20 \cdot \varepsilon_{\varphi=0}$ .

Hasta el momento presente hemos determinado la cantidad de la energía emitida, partiendo de la magnitud del flujo de la energía de autorradiación del cuerpo  $E$ . Pero a la par con esto acerca de la intensidad de la radiación de cualquier fuente, es posible juzgar por la cantidad de energía que le corresponde a una unidad de la superficie irradiada por éste, o sea, por el así llamado poder irradiante de la fuente, lo que en luminotécnica corresponde al concepto de iluminación. El poder irradiante se determina por las dimensiones de la fuente de radiación y por su distancia hasta la superficie irradiada, más precisamente, por la correlación de estas magnitudes.

Ya Kepler estableció que el poder irradiante  $e$  de una fuente puntual es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. En realidad, si una fuente puntiforme irradia energía en todas las direcciones uniformemente, en una cantidad  $W$ , en vatios, entonces para la esfera de radio  $r$

$$e = W/4\pi r^2. \quad (5-10)$$

Si en este caso la superficie elemental irradiada  $dF$  está situada de tal modo que la perpendicular a ésta forma con el radio el ángulo  $\varphi$  (fig. 5-10), entonces la cantidad de energía que cae sobre esta superficie a partir de la fuente puntiforme  $A$ , es igual a:

$$dQ = e \cos \varphi dF = \frac{W}{4\pi r^2} \cos \varphi dF. \quad (5-11)$$

La ley de proporcionalidad inversa al cuadrado de la distancia es tanto menos aplicable, cuanto mayores son las dimensiones de la fuente de radiación en relación a la distancia  $r$ . No es difícil comprobar esta relación



mutua mediante el cálculo. Como límite, para una fuente infinitamente grande el poder irradiante no depende de la distancia. Precisamente sobre este fenómeno está basada la medición de la temperatura con ayuda del pirómetro de radiación; las indicaciones del pirómetro no dependen

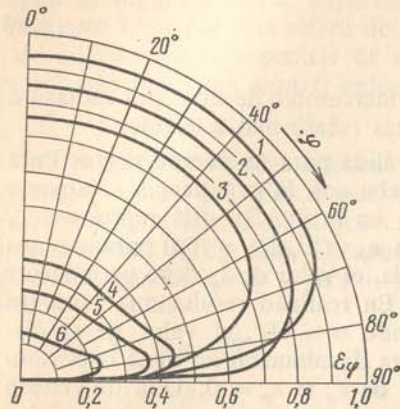


Fig. 5-9. Dependencia  $\varepsilon_\phi = f(\phi)$  para los cuerpos rugosos y pulidos.  
1 — madera; 2 — corindón; 3 — cobre oxidado; 4 — bismuto; 5 — bronce de aluminio; 6 — latón.

de la distancia del foco mientras que la superficie, cuya temperatura se mide, cubra todo el campo visual del pirómetro.

El poder irradiante de los cuerpos que no pueden considerarse como puntiformes, ni como infinitamente grandes, dependiendo de la correlación entre las dimensiones del cuerpo y la distancia  $r$ , varía dentro de los límites que determinan los valores del exponente de la distancia  $r$  (entre 0 y 2).

## 5-2. Intercambio de calor por radiación entre los cuerpos

Cuando se conocen las leyes de radiación, absorción y reflexión, así como la dependencia entre la radiación y la dirección, pueden deducirse las fórmulas de cálculo para el intercambio de calor por radiación entre cuerpos opacos. Existen diferentes modos para tratar de resolver el problema planteado. Si el cuerpo se considera separado de otros, en este caso la tarea se reduce a determinar la cantidad de energía que el cuerpo pierde en el medio ambiente. Al componer el balance energético obtenemos (fig. 5-3):

$$q = E_{1ef} - E_{2ef} = E_1 - A_1 E_{2ef}, \quad (5-12)$$

donde  $E_1$  es la autorradiación del cuerpo;  $E_{1ef} = E_1 + (1 - A_1)E_{2ef}$  es la radiación efectiva del cuerpo y  $E_{2ef}$  es la radiación efectiva de los cuerpos circundantes que incide sobre el cuerpo desde exterior.

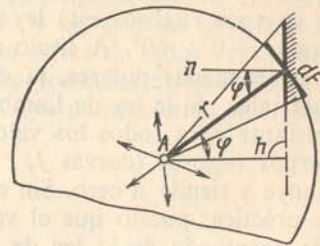


Fig. 5-10. Gráfico para deducir el concepto de poder irradiante de una fuente puntual.

La energía de la radiación incidente puede determinarse en este caso sólo mediante la medición efectuada con ayuda de aparatos especiales: radiómetros o actinómetros.

El método de cálculo aducido se aplica en aquellos casos en que la temperatura y la densidad del flujo radiante de los cuerpos circundantes son desconocidas. Pero en los cálculos termodinámicos por lo común se necesita calcular el intercambio de calor por radiación entre los cuerpos cuyas calidad de la superficie, dimensiones y temperatura se conocen. Según estos datos, conforme a la ley de Stefan-Boltzmann, siempre es posible determinar la energía de emisión de ambos cuerpos. En este caso la tarea se reduce al cálculo de la influencia ejercida por la forma y las dimensiones de los cuerpos, su situación mutua, la distancia entre ellos y su grado de radiación integral.

El fenómeno del intercambio de calor por radiación es un proceso complicado de las absorciones y reflexiones múltiples amortiguadas. Una parte de la energía, que ha sido emitida, regresa de nuevo a la fuente originaria, frenando el proceso del intercambio de calor. En calidad de ejemplo examinemos la transferencia de energía radiante en el caso más elemental del intercambio de calor entre dos superficies paralelas, cuyo espectro de radiación es gris. Se dan la temperatura, las densidades de los flujos radiantes y las capacidades de absorción de estas superficies:  $T_1$ ,  $E_1$ ,  $A_1$ ,  $T_2$ ,  $E_2$  y  $A_2$ .

La primera superficie emite

$$E_1. \quad (a)$$

De esta cantidad la segunda superficie absorbe

$$E_1 A_2$$

y refleja de nuevo

$$E_1(1 - A_2).$$

De esta cantidad la primera superficie absorbe

$$E_1(1 - A_2) A_1 \quad (b)$$

y refleja

$$E_1(1 - A_2)(1 - A_1). \quad (c)$$

La segunda superficie de nuevo absorbe

$$E_1(1 - A_2)(1 - A_1) A_2$$

y refleja

$$E_1(1 - A_2)^2(1 - A_1).$$

De esta cantidad la primera nuevamente absorbe

$$E_1(1 - A_2)^2(1 - A_1) A_1 \quad (d)$$

y así hasta el infinito.



Es posible llevar a cabo las mismas consideraciones también respecto a la radiación de la segunda superficie, es decir: segunda superficie emite  $E_2$ ; de esta cantidad la primera absorbe  $E_2 A_1$  y refleja  $E_2(1 - A_1)$ , etc. El esquema del proceso examinado está representado gráficamente en la fig. 5-11.

Para hallar la densidad del flujo de radiación resultante  $q$  que la primera superficie transmite a la segunda, es necesario, en primer lugar, restar de la energía emitida inicialmente  $E_1$  la que regresa y se absorbe de nuevo y, en segundo lugar, aquella energía de las radiaciones de la segunda superficie que se absorbe. El primer sustraendo puede obtenerse al sumar (b), (d), etc.:

$$E_1(1 + p + p^2 + \dots)(1 - A_2)A_1, \quad (e)$$

donde para reducir la anotación está aceptado que  $(1 - A_1) \times (1 - A_2) = p$ .

Puesto que  $p < 1$ , la suma de la progresión geométrica descendente infinita puede representarse en la forma

$$1 + p + p^2 + \dots = 1/(1 - p).$$

Al sustituir este valor en (e) obtenemos:

$$\frac{E_1(1 - A_2)A_1}{1 - p}. \quad (f)$$

El segundo sustraendo tiene el valor de

$$E_2 A_1(1 + p + p^2 + \dots) = E_2 A_1/(1 - p). \quad (g)$$

Al poseer estos datos encontramos:

$$q = E_1 - \frac{E_1(1 - A_2)A_1}{1 - p} - \frac{E_2 A_1}{1 - p}. \quad (h)$$

Reduciendo a un denominador común y considerando que

$$1 - p = 1 - (1 - A_1 - A_2 + A_1 A_2) = A_1 + A_2 - A_1 A_2,$$

obtenemos definitivamente:

$$q = \frac{E_1 A_2 - E_2 A_1}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}. \quad (5-13)$$

La deducción de la ecuación (5-13) está basada en el análisis del fenómeno de las absorciones y reflexiones múltiples de flujos de autorradiación de las superficies. El mismo resultado se puede obtener de modo más rápido, si usamos el concepto de radiación efectiva de la superficie. El intercambio de calor por radiación entre superficies se determina según

la ecuación (5-12) mediante la diferencia entre los flujos de la radiación efectiva:

$$q = E_{1ef} - E_{2ef}, \quad (i)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} E_{1ef} &= E_1 + (1 - A_1) E_{2ef} \\ E_{2ef} &= E_2 + (1 - A_2) E_{1ef} \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

Resolviendo el sistema (k) respecto a  $E_{1ef}$  y  $E_{2ef}$ , obtenemos:

$$E_{1ef} = \frac{E_1 + E_2 - A_1 E_2}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}, \quad (l)$$

$$E_{2ef} = \frac{E_1 + E_2 - A_2 E_1}{A_1 + A_2 - A_1 A_2}. \quad (m)$$

Al introducir las ecuaciones (l) y (m) en la ecuación (i) tenemos:

$$q = \frac{E_1 A_2 - E_2 A_1}{A_1 + A_2 - A_1 A_2},$$

lo que coincide con la ecuación (5-13).

Para los cuerpos grises la igualdad de la capacidad de absorción y del grado de radiación integral

$$A_1 = \varepsilon_1, \quad A_2 = \varepsilon_2 \quad (n)$$

tiene lugar no solamente si hay equilibrio termodinámico (ley de Kirchhoff), sino también en las condiciones del intercambio de calor por radiación, cuando  $T_1 \neq T_2$ . Por lo tanto, si en la ecuación (5-13) se sustituyen las expresiones

$$E_1 = \varepsilon_1 c_0 \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 \quad \text{y} \quad E_2 = \varepsilon_2 c_0 \left( \frac{T_2}{100} \right)^4$$

y se toma en consideración la condición (n), puede obtenerse, después de las transformaciones, la correlación

$$q = \varepsilon_r c_0 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (5-14)$$

donde

$$\varepsilon_r = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}. \quad (o)$$

Precisamente esta es la fórmula de cálculo para el intercambio de calor por radiación entre superficies grises paralelas. El coeficiente  $\varepsilon_r$  se llama *grado reducido de radiación integral* del sistema de los cuerpos entre

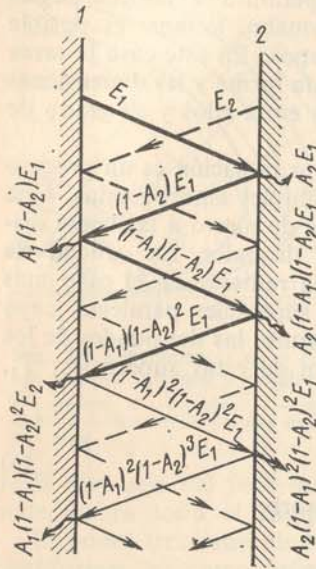


Fig. 5-11. Esquema del intercambio de calor por radiación entre las superficies planas paralelas.



los cuales se realiza el proceso del intercambio de calor por radiación. Su magnitud puede variar desde 0 hasta 1. El grado reducido de radiación integral del sistema se determina bien según la ecuación (o), bien según las curvas trazadas en la fig. 5-12.

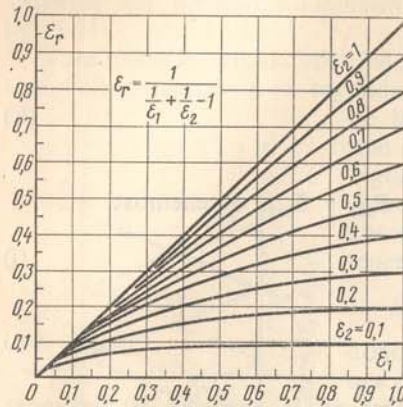


Fig. 5-12. Dependencia  $\varepsilon_r = f(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ .

$$q = \int_0^\infty \frac{E_{\lambda,1} A_{\lambda,2} - E_{\lambda,2} A_{\lambda,1}}{A_{\lambda,1} + A_{\lambda,2} - A_{\lambda,1} A_{\lambda,2}} d\lambda. \quad (p)$$

Al usar el método descrito, también es posible resolver el problema del intercambio de calor por radiación entre dos superficies grises en un espacio cerrado, cuando una de las superficies envuelve a la otra (fig. 5-13, a). En este caso sobre la primera superficie cae sólo una parte de la energía irradiada por la segunda superficie, mientras que la restante cantidad pasa cerca y de nuevo cae sobre la segunda superficie. La fórmula de cálculo definitiva tiene la forma:

$$Q_{12} = \varepsilon_r c_0 F_1 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (5-15)$$

donde

$$\varepsilon_r = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{F_1}{F_2} \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \quad (r)$$

Las fórmulas (5-15) y (r) son aplicables a cuerpos de cualquier forma con la condición de que el menor de éstos sea convexo. En particular, son aplicables para calcular el intercambio de calor por radiación entre cilindros largos, así como también en el caso en que los cuerpos convexo y cóncavo formen un espacio cerrado (fig. 5-13, b, c). En todos los casos como superficie de cálculo se acepta la menor de éstas.

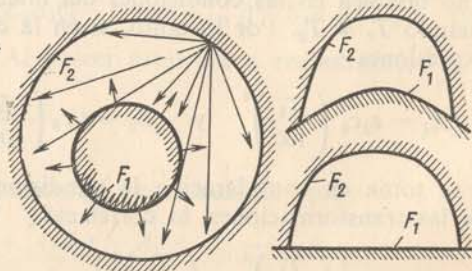


Fig. 5-13. Esquema del intercambio de calor por radiación entre los cuerpos en un espacio cerrado.

Sin embargo incluso estos complicados y minuciosos métodos de cálculo pueden utilizarse sólo para resolver los casos descritos más simples del intercambio de calor por radiación; para sistemas más complicados de los cuerpos no se les puede aplicar. Por eso, en la mayoría de los problemas técnicos son posibles exclusivamente las resoluciones aproximadas. Una de estas resoluciones la examinaremos a continuación más detalladamente.

Sean dados dos elementos  $dF_1$  y  $dF_2$  de los cuerpos grises (fig. 5-14), cuyas temperaturas, densidades de los flujos de radiación y capacidades de absorción son iguales respectivamente a  $T_1, T_2, E_1, E_2, A_1, A_2$ . Los elementos están situados de modo arbitrario, la distancia entre ellos es igual a  $r$  y los ángulos entre la línea que une sus puntos centrales con las normales  $n_1$  y  $n_2$ , son iguales a  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  ( $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  pueden encontrarse en planos diferentes).

Según la ley de Lambert [ecuación (5-9)] la cantidad de energía irradiada por el elemento  $dF_1$  en dirección del elemento  $dF_2$  es igual a:

$$d^2Q_1 = \frac{1}{\pi} E_1 \cos \varphi_1 d\Omega_1 dF_1,$$

donde  $d\Omega$  es el ángulo sólido elemental bajo el cual, desde el punto A se ve el elemento  $dF_2$ , es decir,

$$d\Omega_1 = dF_2 \cos \varphi_2 / r^2.$$

Por consiguiente,

$$d^2Q_1 = \frac{1}{\pi} E_1 \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r^2} dF_1 dF_2.$$

De esta cantidad de energía el elemento  $dF_2$  absorbe:

$$d^2Q_{1 \rightarrow 2} = A_2 d^2Q_1 = \frac{1}{\pi} A_2 E_1 \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r^2} dF_1 dF_2. \quad (s)$$

Puesto que para la mayoría de los materiales técnicos la capacidad de absorción es suficientemente alta (aproximadamente 0,8—0,9), entonces puede limitarse, tomando en consideración solamente la primera absorción.

De modo análogo obtendremos la expresión para la cantidad de energía irradiada por  $dF_2$  y absorbida por  $dF_1$ , precisamente:

$$d^2Q_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{\pi} A_1 E_2 \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r^2} dF_1 dF_2. \quad (t)$$

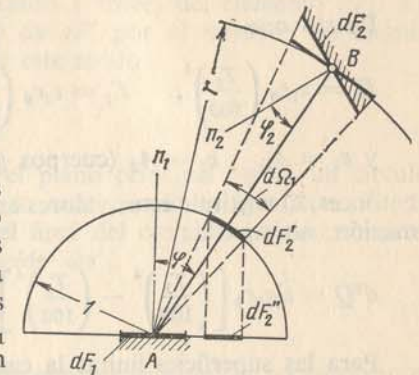


Fig. 5-14. Gráfico para deducir la fórmula con que se calcula el intercambio de calor por radiación entre los elementos  $dF_1$  y  $dF_2$  e ilustración del método gráfico para determinar el coeficiente angular elemental de radiación.



Si de la ecuación (s) se resta la ecuación (t), entonces obtendremos la energía transmitida mediante el intercambio de calor por radiación desde el primer elemento hacia el segundo:

$$d^2Q = \frac{1}{\pi} (A_2 E_1 - A_1 E_2) \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r^2} dF_1 dF_2. \quad (u)$$

Puesto que

$$E_1 = \varepsilon_1 c_0 \left( \frac{T_1}{100} \right)^4, \quad E_2 = \varepsilon_2 c_0 \left( \frac{T_2}{100} \right)^4$$

y  $\varepsilon_1 = A_1$ ,  $\varepsilon_2 = A_2$  (cuerpos grises),

entonces, al sustituir estos valores en la ecuación (u) y realizar la transformación, nos queda:

$$d^2Q = \varepsilon_1 \varepsilon_2 c_0 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2. \quad (5-16)$$

Para las superficies finitas la cantidad del calor transmitido se determina mediante la integración de la ecuación (5-16) según  $F_1$  y  $F_2$ :

$$Q = \varepsilon_r c_0 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \iint_{F_1 F_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2, \quad (5-17)$$

donde  $\varepsilon_r = \varepsilon_1 \varepsilon_2$  es el grado reducido de radiación integral del sistema <sup>1)</sup>.

En libros técnicos y manuales de consulta la fórmula (5-17) suele escribirse así:

$$Q = \varepsilon_r c_0 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F_{12}. \quad (5-17a)$$

La magnitud  $F_{12}$ , m<sup>2</sup> se llama *superficie radiadora mutua*. Es un parámetro exclusivamente geométrico que se determina mediante las dimensiones y la forma de las superficies de los cuerpos, su posición mutua y la distancia entre éstos;

$$F_{12} = \int_{F_1} dF_1 \int_{F_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_2 = \int_{F_1} \varphi' dF_1 = \bar{\varphi}_{12} F_1. \quad (5-18)$$

Las magnitudes  $\varphi'$  y  $\bar{\varphi}_{12}$  son los *coeficientes angulares local y medio*, respectivamente.

El valor numérico de  $\varphi'$  muestra qué parte de energía irradiada por el elemento  $dF_1$  en el medioespacio cae sobre la superficie  $F_2$ . Mientras tanto el valor de  $\bar{\varphi}_{12}$  es el de  $\varphi'$  tomado como valor medio para toda la superficie  $F_1$ .

<sup>1)</sup> Puesto que, al deducir la fórmula se consideró solamente la primera absorción el valor obtenido para  $\varepsilon_r$  resultó ser mínimo; es algo menor que el valor real.

En algunos casos el valor de  $\varphi'$  puede determinarse en forma gráfica (véase la fig. 5-14). Tracemos un plano tangente a través del elemento  $dF_1$  y construyamos desde el punto central  $A$  la semiesfera de radio igual a la unidad. Luego desde el centro de la esfera proyectemos sobre su superficie el elemento  $dF_2$ . Es evidente que esta proyección será igual a  $dF'_2 = (dF_2/r^2) \cos \varphi_2$ . Después de esto el elemento  $dF'_2$  se proyecta sobre el plano tangente principal trazado a través del elemento  $dF_1$ . La magnitud  $dF''_2$  es igual al producto de  $dF'_2$  por el coseno del ángulo formado entre ellos e igual a  $\varphi_1$ . De este modo

$$dF''_2 = dF_2 \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r^2}.$$

La intersección de la esfera con el plano principal forma un círculo de radio igual a la unidad; el área de este círculo es igual a  $\pi$ . De la relación entre la proyección  $dF''_2$  y el área del círculo  $\pi$  se determina el *coeficiente angular elemental de radiación*  $d\varphi'$ :

$$d\varphi' = \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_2. \quad (v)$$

Para obtener el valor del coeficiente angular local  $\varphi'$  es necesario integrar la expresión (v) por  $F_2$ . En forma gráfica esto se expresará en el hecho de que, por el procedimiento descrito, se encuentra la proyección  $F''_2$  y se toma la relación entre ésta y el área del círculo con el radio igual a unidad (fig. 5-15). Las construcciones de este tipo se realizan para cada

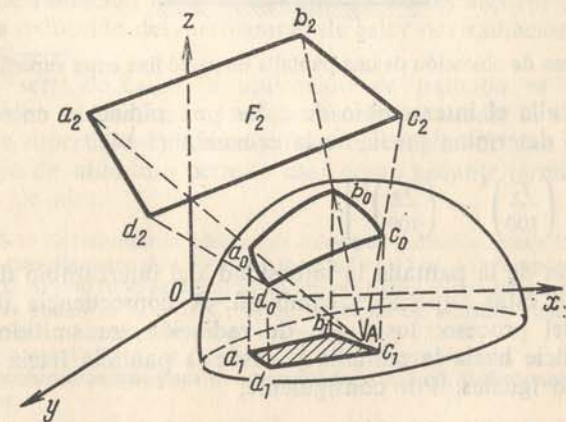


Fig. 5-15. Determinación gráfica del coeficiente angular.

uno de los elementos en que se divide la superficie  $F_1$ , y se encuentran los valores correspondientes de  $\varphi'$ . La integración por  $F_1$  es posible sustituir por adición; en forma gráfica esto se reduce al encuentro del volumen de cierto cuerpo cuya base es la superficie desarrollada  $F_1^d$  y cuya altura es igual a  $\varphi'$ . Finalmente, al dividir este volumen por la superficie  $F_1$ , obtenemos el valor medio  $\bar{\varphi}_{12}$ .



En los sistemas complicados es muy difícil calcular el valor del coeficiente angular según este método. Para sortear estas dificultades se crearon los métodos analíticos que sustituyen la integración doble por operaciones puramente algebraicas, tales como el método de G. L. Poliakov [76]. En éste pueden usarse con gran éxito métodos experimentales. Para los sistemas geoméricamente similares los coeficientes angulares son iguales. Por eso sus valores pueden determinarse a base de experimentos con modelos. Para algunos casos del intercambio de calor por radiación importantes desde el punto de vista técnico, los valores de los coeficientes angulares se exponen en las figs. A-1—A-4.

Para intensificar el intercambio de calor por radiación es necesario, por lo visto, elevar la temperatura del cuerpo radiante y aumentar el grado de radiación integral del sistema. Por el contrario, para disminuir el intercambio de calor es preciso disminuir la temperatura del cuerpo radiante y reducir el grado de radiación integral. Pero en aquellos casos en que no es posible variar la temperatura para reducir el intercambio de calor por radiación, se usan por lo común pantallas. El papel de las pantallas lo examinaremos en un ejemplo más simple.

Sean dadas dos superficies paralelas planas entre las cuales se sitúa una pantalla de pared delgada (fig. 5-16) y, además el grado de radiación integral de la pantalla y de las superficies es igual.

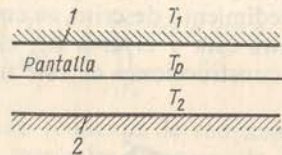


Fig. 5-16. Esquema de ubicación de una pantalla de pared fina entre superficies paralelas.

Sin la pantalla el intercambio de calor por radiación entre las superficies 1 y 2 se determina mediante la ecuación (5-14)

$$q_{12} = \varepsilon_r c_0 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right].$$

En presencia de la pantalla la intensidad del intercambio de calor por radiación entre estas superficies cambiará. A consecuencia del carácter estacionario del proceso, los flujos de radiación transmitidos desde la primera superficie hacia la pantalla y desde la pantalla hacia la segunda superficie serán iguales. Por consiguiente,

$$q_p = \varepsilon_r c_0 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_p}{100} \right)^4 \right] = \varepsilon_r c_0 \left[ \left( \frac{T_p}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right].$$

A partir de esta correlación se determina la temperatura desconocida de la pantalla

$$\left( \frac{T_p}{100} \right)^4 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 + \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$$

y luego la densidad buscada del flujo de la radiación resultante en presencia de la pantalla

$$q_p = \frac{1}{2} \varepsilon_r c_0 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right].$$

De este modo,

$$q_p = \frac{q_{12}}{2}.$$

Lo último significa que en presencia de una pantalla la cantidad de la energía transmitida disminuye 2 veces. Se puede mostrar también que en presencia de dos pantallas la cantidad del calor transmitido disminuye tres veces y en presencia de  $n$  pantallas,  $(n + 1)$  veces.

Un efecto considerablemente mayor se obtiene en caso de que se utilicen pantallas con bajo grado de radiación integral. De este modo, si entre dos superficies planas con grado de radiación integral  $\varepsilon$  se encuentran  $n$  pantallas con grado de radiación integral  $\varepsilon_p$ , entonces:

$$\frac{q_p}{q_{12}} = \frac{1}{1 + n \frac{2 - \varepsilon_p}{2 - \varepsilon} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}}.$$

Por consiguiente, por ejemplo, la instalación de una sola pantalla con grado de radiación integral  $\varepsilon_p = 0,1$  entre las superficies con  $\varepsilon = 0,8$  produce una reducción del intercambio de calor por radiación de aproximadamente 14 veces.

En una serie de casos la aplicación de pantalla es absolutamente imprescindible; en particular, son necesarias al medir la temperatura de gas cerca de superficies calientes y frías. El empleo de una pantalla hecha con una hoja de aluminio permite usar como aislante térmico a las capas intermedias de aire.

**Ejemplo 5-1.** Determinar la pérdida de calor por radiación desde la superficie de un tubo de acero con diámetro  $d = 70$  mm y longitud  $l = 3$  m, a la temperatura de la superficie  $t_1 = 227^\circ\text{C}$ , si este tubo se halla: a) en un local grande con paredes de ladrillo, temperatura de las cuales es  $t_2 = 27^\circ\text{C}$ ; b) en un canal de ladrillos cuya área es igual a  $0,3 \times 0,3$  m, siendo la temperatura de sus paredes  $t_2 = 27^\circ\text{C}$ .

a) Según la condición  $F_1 \ll F_2$ , por eso  $\varepsilon_r = \varepsilon_1$  [ecuación (r)].

Luego encontramos que para el acero oxidado  $\varepsilon_1 = 0,79$ . Entonces, de la ecuación (5-15) tenemos:

$$Q_{12} = \varepsilon_1 c_0 F_1 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] = 0,79 \cdot 5,7 \cdot 3,14 \cdot 0,07 \cdot 3 (5,0^4 - 3,0^4) = 0,79 \cdot 5,7 \cdot 0,66 \cdot 544 = 1620 \text{ W}.$$

b)  $F_1 = 0,66 \text{ m}^2$ ,  $F_2 = 3,6 \text{ m}^2$  y  $F_1/F_2 = 0,182$ ; para el ladrillo  $\varepsilon_2 = 0,93$ . De acuerdo con la ecuación (r) tenemos:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + (F_1/F_2)(1/\varepsilon_2 - 1)} = \frac{1}{1,27 + 0,182 \cdot 0,075} = \frac{1}{1,284} = 0,78.$$



Al introducir estos valores en la ecuación (5-15) obtenemos:

$$Q_{12} = 0,78 \cdot 5,7 \cdot 0,66 \cdot 544 = 1595 \text{ W}$$

o por una unidad de longitud del tubo:

$$q_1 = \frac{Q_{12}}{l} = \frac{1595}{3} = 532 \text{ W/m.}$$

### 5-3. Radiación térmica de los gases

Los gases también tienen la propiedad de irradiar y absorber energía radiante, pero esta capacidad es diferente para cada gas. En los gases monoatómicos y diatómicos, en particular, en nitrógeno ( $N_2$ ), oxígeno ( $O_2$ ) e hidrógeno ( $H_2$ ) esta propiedad es ínfima; prácticamente estos gases son transparentes (diatérmanos) a los rayos térmicos. Una considerable capacidad de irradiar y absorber energía radiante la poseen sólo los gases poli-atómicos, en particular, el anhídrido carbónico ( $CO_2$ ), el vapor de agua ( $H_2O$ ), el anhídrido sulfuroso ( $SO_2$ ), el amoníaco ( $NH_3$ ) y otros. Para los cálculos termotécnicos el gas carbónico y el vapor de agua representan mayor interés; estos gases se forman durante la combustión de cualquier carburante corriente.

Los procesos de radiación y absorción térmica de los gases tienen una serie de particularidades en comparación con la radiación térmica de los cuerpos sólidos. Por lo común los cuerpos sólidos tienen espectros de radiación continuos: emiten (y absorben) la energía radiante de todas las longitudes de ondas desde 0 hasta  $\infty$ . Mientras tanto los gases siempre irradian y absorben la energía solamente dentro de determinados intervalos de longitudes de onda  $\Delta\lambda$ , que se llaman *bandas* y se sitúan en diferentes sectores del espectro; para los rayos de otras longitudes de onda, que se hallan fuera de estas bandas, los gases son transparentes y su energía de emisión es igual a cero. De tal modo la emisión y absorción de los gases tiene carácter *selectivo*. Desde el punto de vista energético para el anhídrido carbónico y el vapor de agua la importancia principal la tienen las bandas cuyos límites aproximados se dan en la tabla 5-1.

Tabla 5-1

| Principales bandas de absorción del $CO_2$ y del $H_2O$ |                      |                |                      |
|---|----------------------|----------------|----------------------|
| $CO_2$  |                      | $H_2O$         |                      |
| $\lambda, \mu$  | $\Delta\lambda, \mu$ | $\lambda, \mu$ | $\Delta\lambda, \mu$ |
| 2,4—3,0   | 0,6                  | 2,2—3,0        | 0,8                  |
| 4,0—4,8   | 0,8                  | 4,8—8,5        | 3,7                  |
| 12,5—16,5   | 4,0                  | 12—30          | 18                   |

Luego los procesos de emisión y absorción de la energía radiante en los cuerpos sólidos (opacos) se realizan en la superficie. Mientras tanto la emisión y la absorción en los gases *siempre transcurren en su volumen*.

El espectro selectivo y el carácter volumétrico de la irradiación determinan las particularidades del proceso del intercambio de calor por radiación en los gases. Para representar en forma evidente el mecanismo de este proceso es cómodo considerar la radiación como el flujo de partículas: fotones o cuantos, que se mueven en diferentes direcciones dentro del espacio a una misma velocidad de la luz  $c$ , pero que poseen una energía distinta  $h\nu$ .

A pasar los fotones a través del volumen del gas las moléculas del gas absorben una parte determinada de éstos. La energía de los fotones se transmite a las moléculas, a consecuencia de lo cual el gas se calienta, y se produce la *absorción de la energía radiante* dentro del volumen del gas. En este caso se absorben solamente aquellos fotones cuya energía  $h\nu$  responde a las frecuencias  $\nu$  (o, lo que es lo mismo, a las longitudes de onda  $\lambda = c/\nu$ ) que corresponden a las bandas de absorción del gas. Los fotones de otras energías pasan a través del volumen del gas sin ser absorbidos.

Simultáneamente en el volumen del gas se desarrolla también otro proceso. Las moléculas del gas pierden periódicamente una pequeña parte de su energía térmica, la cual es irradiada al medio ambiente en forma de fotones. En otras palabras, dentro del volumen del gas siempre transcurre un proceso de "nacimiento" de los fotones; este último tiene intensidad tanto mayor, cuanto más alta es la temperatura del gas. Este proceso determina la *radiación característica* del volumen de gas. Los fotones que nacen en el volumen, tienen la energía correspondiente a las bandas de emisión del gas. A consecuencia del carácter caótico del movimiento térmico de las partículas del gas la radiación característica del volumen de gas tiene, normalmente, un carácter próximo al isótropo; cada volumen elemental del gas emite fotones en todas las direcciones con intensidad igual.

El flujo resultante de radiación se determina por la influencia común de los efectos de absorción y de radiación característica de fotones por el volumen del gas.

El cuadro presentado muestra que para la descripción cuantitativa del fenómeno es necesario examinar sucesivamente los procesos de transferencia de fotones en las diferentes direcciones del espacio y, a la vez, tomar en cuenta el carácter selectivo del espectro de su absorción y emisión. Para esto se introducen los siguientes conceptos.

*Intensidad de radiación.* A través de un elemento superficial unitario (fig. 5-17) pasan bajo diferentes ángulos los fotones de energía  $h\nu$ . De

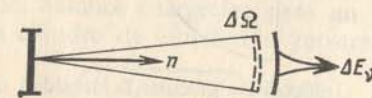


Fig. 5-17. Gráfico para determinar la intensidad de radiación.

todos los fotones se puede separar un número de aquellos que se mueven en el interior del cono formado por el ángulo sólido elemental  $\Delta\Omega$ , cuyo eje es la normal a la superficie. Este flujo de fotones o rayos transfiere la energía de emisión  $\Delta E_v$ ,  $W/(m^2 \cdot c^{-1})$ . El límite de la razón  $\Delta E_v / \Delta\Omega$ , al



disminuir la dimensión del ángulo sólido elemental  $\Delta\Omega$ , determina la intensidad espectral de la radiación

$$J_\nu = \lim_{\Delta\Omega} \frac{\Delta E_\nu}{\Delta\Omega}. \quad (a)$$

Para tomar en consideración los fotones de diferentes energías (o rayos con diferentes longitudes de onda) es necesario integrar la magnitud  $J_\nu$  por todas las frecuencias  $\nu$ :

$$J = \int_0^\infty J_\nu d\nu.$$

La magnitud  $J$  se llama *intensidad de radiación* y determina el flujo de energía de radiación que atraviesa el elemento superficial unitario y se propaga en la dirección de la normal a su superficie dentro del ángulo sólido elemental. El concepto de intensidad de radiación es la característica más detallada del campo de radiación en un punto dado del espacio. Cuando se conoce la distribución de la intensidad según las direcciones, pueden hallarse los flujos totales de las radiaciones resultante y semiesférica en este punto. Por ejemplo, la densidad del flujo de la radiación semiesférica  $E$ ,  $W/m^2$  que pasa a través de un elemento superficial unitario en la dirección positiva del eje  $x$  (fig. 5-18) se determina por la expresión

$$E = \int_{(2\pi)} J \cos \nu d\Omega,$$

donde  $J$  es la intensidad de radiación en cierta dirección  $n$ ;

$\nu$  es el ángulo entre la dirección  $n$  y el eje  $x$ .

La integración en la ecuación (c) abarca la semiesfera  $\Omega = 2\pi$ .

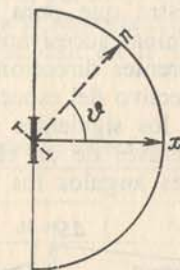


Fig. 5-18. Gráfico para calcular la densidad del flujo de la radiación semiesférica.

Para la radiación integral la intensidad  $J_0$  es invariable en cualquier dirección; de la correlación (c) se deduce que en este caso

$$E_0 = \pi J_0 \quad \text{ó} \quad J_0 = \frac{\sigma_0}{\pi} T^4.$$

La radiación resultante que pasa a través de un elemento superficial unitario a lo largo del eje  $x$ , representa la diferencia entre flujos  $E$  unos de los cuales se transfieren en sentido positivo y otros, en sentido negativo del eje  $x$ :

$$q = E^{(+)} - E^{(-)} = \int_{(4\pi)} J \cos \nu d\Omega; \quad (e)$$

la integración en la ecuación (e) abarca toda la esfera  $\Omega = 4\pi$ .

Siendo invariable en cualesquiera direcciones la intensidad de la radiación, los flujos  $E^{(+)}$  y  $E^{(-)}$  son numéricamente iguales y la densidad del flujo de la radiación resultante es  $q = 0$ . Por eso para la radiación integral  $q_0 = 0$ .

Las correlaciones (c) y (e) son válidas también para las características espectrales de radiación.

**Coefficiente de absorción.** Para definir el carácter volumétrico de absorción de los gases se usa el coeficiente espectral de absorción, el cual muestra la disminución relativa de la intensidad espectral de la radiación en una unidad de longitud del camino de rayo

$$a_\nu = -\frac{1}{J_\nu} \frac{dJ_\nu}{dl}. \quad (f)$$

La magnitud  $a_\nu$ ,  $1/m$ , cuando está dada la frecuencia  $\nu$ , depende de la naturaleza del gas, su temperatura y su presión. Para diferentes bandas de absorción los valores de  $a_\nu$  son distintos; fuera de estas bandas el gas es transparente a los rayos térmicos y el coeficiente de absorción es igual a cero. La magnitud inversa  $1/a_\nu$  determina la longitud media del recorrido libre de los fotones en el gas, hasta el momento de su absorción. Con el aumento de la densidad del gas, a consecuencia del crecimiento de la concentración de las moléculas, disminuye la longitud del recorrido libre de los fotones y el coeficiente de absorción crece.

Basándose sobre la ley de Kirchhoff es posible demostrar que la intensidad espectral de la radiación característica del volumen gaseoso unitario, en cualquier dirección del espacio, es igual a  $a_\nu J_{0\nu}$ , es decir, se determina solamente por el coeficiente de absorción del gas y la intensidad espectral de la radiación integral  $J_{0\nu}$ , a una temperatura dada del gas.

La ley principal de transferencia de la energía radiante en el medio absorbente tiene la forma:

$$dJ_\nu = a_\nu (J_{0\nu} - J_\nu) dl. \quad (5-19)$$

Es la ecuación del balance energético para un volumen elemental del gas en forma de un cilindro de longitud  $dl$  mostrado en la fig. 5-19. La

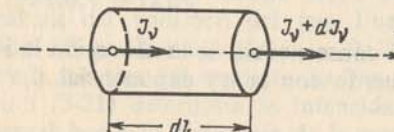


Fig. 5-19. Variación de la intensidad de radiación en la longitud  $dl$  a consecuencia de la absorción y la radiación característica del gas.



magnitud  $dJ_v$ , primer miembro de la ecuación (5-19), representa la variación de la intensidad de radiación  $J_v$  que llega a este volumen de gas desde fuera (o bien desde las capas vecinas del gas o bien desde los límites de un sólido). Esta variación está ligada con los procesos de absorción y de radiación característica que transcurren simultáneamente en el volumen del gas. La radiación característica del volumen elemental gaseoso  $a_v J_{0v} dl$  en la dirección del eje  $l$  se determina solamente por la temperatura del gas y sus propiedades físicas. La radiación absorbida —  $a_v J_v dl$  depende sólo de la intensidad de radiación que penetra en este volumen desde fuera. La ecuación (5-19) está escrita para las magnitudes espectrales <sup>1)</sup>.

La correlación entre la absorbencia y la radiación característica de la energía dentro del volumen del gas puede ser diferente. Dependiendo de esto la intensidad de radiación, a medida que pasa a través de la capa de gas, puede o bien crecer, o bien disminuir, o bien permanecer invariable. Examinemos los rasgos característicos de tales procesos, tomando como ejemplo una capa plana del gas absorbente.

Si sobre la superficie de la capa de gas incide la radiación exterior cuya intensidad  $J_v(0)$  supera considerablemente la de la radiación característica que nace en el volumen del gas, entonces se puede prescindir de esta última. La variación de la intensidad de la radiación se determinará,

en lo fundamental, por el proceso de absorción de energía. En la práctica dicho fenómeno tiene lugar si la radiación exterior llega desde la superficie de un sólido la que está calentada hasta una temperatura alta, mientras que la capa de gas se mantiene a la temperatura baja. En estas condiciones la ecuación fundamental de transferencia de la energía radiante (5-19) se simplifica como resultado de eliminar el sumando que determina la radiación característica. Para la capa de gas de espesor  $dx$  (fig. 5-20) tenemos:

$$dJ_v = -a_v J_v dx. \quad (5-20)$$

Esta correlación se llama *ley de Bouguer*. Su solución tiene la forma siguiente:

$$J_v(x) = J_v(0) e^{-a_v x}. \quad (g)$$

Fig. 5-20. Variación de la intensidad de la radiación exterior a consecuencia de la absorción de energía en una capa plana del gas.

Esta muestra que a consecuencia de la absorción la intensidad de radiación disminuye de acuerdo con la ley exponencial. La radiación que sale

<sup>1)</sup> En la ecuación (5-19) no se considera el proceso de dispersión de la radiación que puede realizarse a causa de la presencia en el gas de las partículas de polvo, hollín, etc.

de la capa es menor que la incidente  $e^{-a_v l}$  veces:

$$J_v(l)/J_v(0) = e^{-a_v l}.$$

La magnitud adimensional  $a_v l$  se denomina *espesor óptico* espectral de la capa de gas; éste representa la relación entre el espesor de la capa de gas  $l$  y la longitud media del recorrido libre de los fotones  $1/a_v$ .

Si no existe radiación exterior, la capa de gas caliente se porta como un emisor; de sus superficies límites al medio ambiente se irradia energía. La última se suma con las energías de la radiación característica de cada capa elemental del volumen de gas. Sin embargo, el aporte de radiación de las diferentes capas a la irradiación total que la superficie emite, no es igual. Cuanto más lejos del límite esté situada la capa, tanto mayor será la parte de su emisión que absorben los sectores vecinos y, por lo tanto, que no alcance la superficie. Hallemos la intensidad de la radiación, en la dirección positiva del eje  $x$ , que desprende la superficie de una capa de gas uniformemente calentada (fig. 5-21). En este caso la intensidad de la radiación característica  $a_v J_{0v}$  en la ecuación fundamental de transferencia de la energía radiante (5-19) es una magnitud constante; la solución de esta ecuación tiene la forma:

$$J_v(x) = J_{0v}(1 - e^{-a_v x}). \quad (h)$$

Cuando  $x = l$ , la correlación (h) determina la intensidad total de la radiación en el límite de la capa de gas;

$$J_v(l) = J_{0v}(1 - e^{-a_v l}). \quad (5-21)$$

De la ecuación (5-21) se ve que con el crecimiento del espesor óptico espectral de la capa  $a_v l$ , la intensidad espectral total de la emisión desde la superficie  $J_v(l)$  crece y cuando  $a_v l > 3$ , alcanza prácticamente la intensidad espectral de radiación de un cuerpo negro  $J_{0v}$  a una temperatura igual a la temperatura del volumen del gas. Fuera de las bandas del espectro de absorción del gas la magnitud  $a_v = 0$ ; de la correlación (5-21) se deduce que en estos sectores del espectro no hay radiación del volumen de gas. La expresión (5-21) determina la intensidad de la radiación en dirección de la normal hacia la superficie de la capa plana. La densidad del flujo de radiación semiesférica desde la superficie  $E_v$  se puede hallar, si se examinan también las otras direcciones en las que la radiación atra-

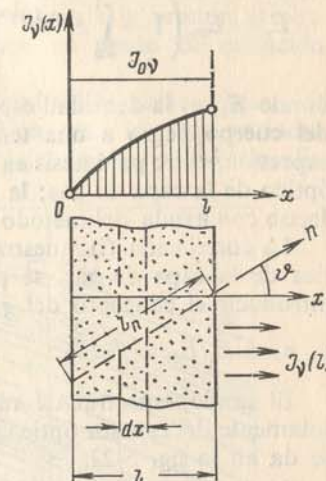


Fig. 5-21. Radiación característica de una capa plana del gas.



viesa la superficie límite. La expresión para la intensidad de la radiación en una dirección arbitraria  $n$  (fig. 5-21) se determina mediante la misma ecuación (5-21); sustituyendo en ésta el espesor de la capa de gas  $l$  por la longitud del recorrido de rayo en esta dirección  $l_n = l/\cos v$ . Si esta igualdad se reemplaza en la ecuación (c), después de los cálculos obtendremos:

$$E_v = E_{0v} \left( 1 - \int_0^1 e^{-a_v l / z^{1/2}} dz \right), \quad (i)$$

donde  $E_{0v}$  es la densidad espectral del flujo de radiación desde la superficie del cuerpo negro a una temperatura igual a la del gas en la capa. La expresión, entre paréntesis en la ecuación (i), depende solamente del espesor óptico de la capa de gas; la integral en esta correlación fue calculada por Jacob con ayuda del método gráfico ( $z$  es la variable de integración).

La correlación (i) muestra que para caracterizar la radiación característica de la capa de gas, se puede, igual como en el caso de los sólidos, introducir el concepto del *grado espectral de radiación integral*

$$\varepsilon_v = E_v / E_{0v} = f(a_v l). \quad (5-22)$$

El grado espectral de radiación integral de la capa de gas depende solamente del espesor óptico de la capa  $a_v l$ , el gráfico de esta dependencia se da en la fig. 5-22.

Basándose en la ecuación (i) se puede calcular también la radiación total desde la superficie unitaria de la capa de gas  $E$ . Para esto es necesario conocer, para el gas dado a una temperatura y a una presión prefijadas, la dependencia entre el coeficiente de absorción  $a_v$  y la frecuencia  $v$  en las bandas de absorción y radiación. El cálculo se reduce a la integración de ambos miembros de la ecuación (i) para todo el espectro, en la práctica, se realiza para las bandas de absorción, puesto que fuera de éstas la radiación no existe. En resumidas cuentas, la densidad del flujo de radiación desde la superficie de la capa de gas puede representarse como:

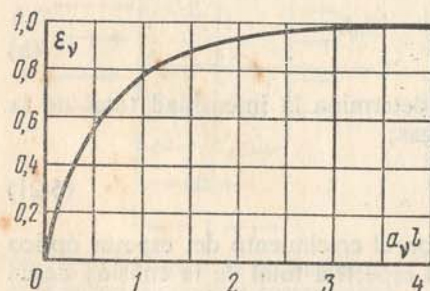


Fig. 5-22. Dependencia entre el grado espectral de radiación integral  $\varepsilon_v$  de la capa plana del gas y su espesor óptico  $a_v l$ .

ción de ambos miembros de la ecuación (i) para todo el espectro, en la práctica, se realiza para las bandas de absorción, puesto que fuera de éstas la radiación no existe. En resumidas cuentas, la densidad del flujo de radiación desde la superficie de la capa de gas puede representarse como:

$$E = \varepsilon c_0 \left( \frac{T}{100} \right)^4, \quad (5-23)$$

donde  $\varepsilon$  es el grado de radiación integral de la capa de gas que está determinada por la expresión

$$\varepsilon = \frac{1}{E_0} \int_0^\infty \varepsilon_v E_{0v} dv; \quad E_0 = \sigma_0 T^4 = c_0 \left( \frac{T}{100} \right)^4$$

y a la vez depende de la temperatura, la presión y el espesor de la capa de gas  $l$ . Puesto que los gases sólo irradian en las bandas separadas del espectro, la magnitud media, de acuerdo con el espectro, del grado de radiación integral del gas  $\varepsilon$  (a diferencia del grado espectral de radiación integral  $\varepsilon_v$ ), incluso para las capas muy gruesas de gas, es sensiblemente menor que la unidad. Por ejemplo, siendo el ancho de la capa 1 m, el vapor de agua y el gas carbónico que se encuentran a la presión atmosférica y a una temperatura de 1000°C, tienen un grado de radiación integral  $\varepsilon$  igual a 0,6 y 0,2, respectivamente.

La secuencia expuesta para calcular la radiación característica de una capa plana de gas puede aplicarse también para las más variadas formas de volúmenes de gas; ésta es la ventaja de dicho método. Su

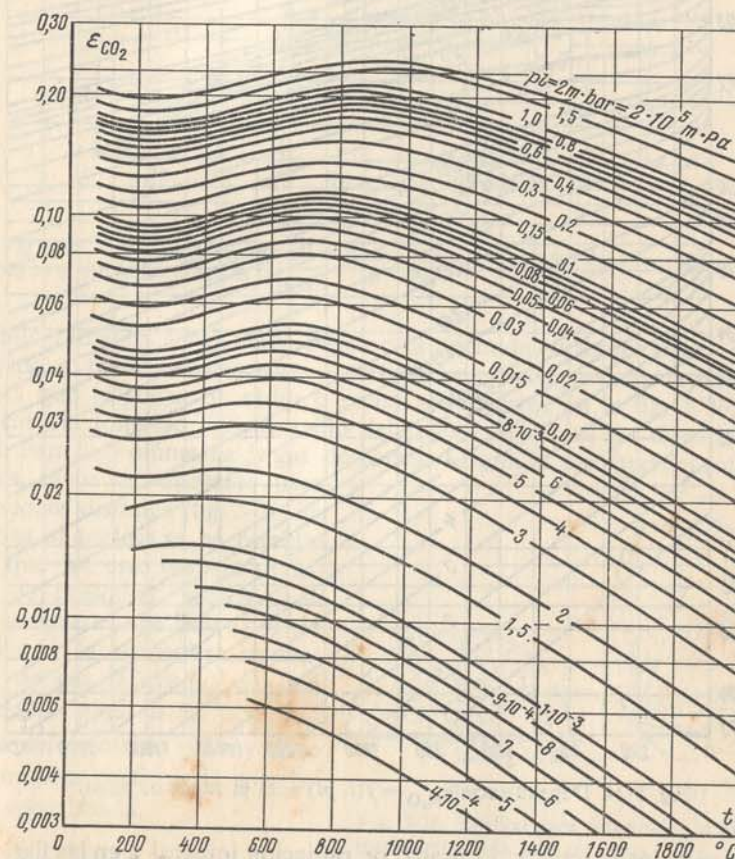


Fig. 5-23. Dependencia  $\varepsilon_{CO_2} = f(t, pl)$  para el anhídrido carbónico.

deficiencia consiste en el hecho de que los datos del coeficiente espectral de absorción, necesarios para el cálculo, no se conocen en casi todos los casos.



Para los cálculos técnicos aproximados el interés principal presenta el grado de radiación integral del volumen de gas  $\varepsilon$ . Esta magnitud puede determinarse también mediante la medición directa de la energía total de emisión. Se conocen métodos seguros para medir esta magnitud para el vapor de agua y el gas carbónico. Los resultados de las investigaciones vienen dadas en las figs. 5-23—5-25 en forma de nomogramas cómodos

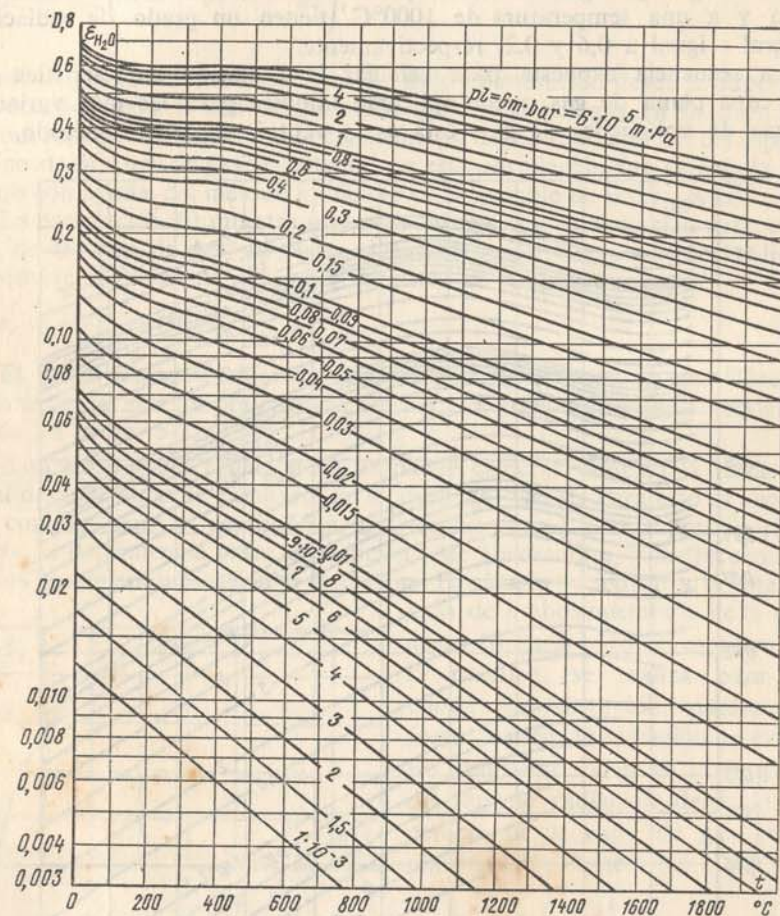


Fig. 5-24. Dependencia  $\varepsilon_{H_2O} = f(t, pl)$  para el vapor de agua.

para los cálculos prácticos. El grado de radiación integral  $\varepsilon$  en las figs. 5-23 y 5-24 para el gas carbónico y el vapor de agua está representado en función de la temperatura del gas  $t$  y en los gráficos como parámetro sirve la magnitud  $pl$ , donde  $p$  es la presión parcial del gas y  $l$ , la longitud de recorrido del rayo. Para el vapor de agua la influencia de  $p$  es algo mayor que  $l$ , por eso el vapor de  $\varepsilon_{H_2O}$ , hallado de la fig. 5-23, es necesario

multiplicarlo por el coeficiente de corrección  $\beta$  (fig. 5-25), que depende de la presión parcial  $p_{H_2O}$ .

Después de determinar el grado de radiación integral  $\varepsilon$  según estos gráficos, la radiación característica del gas se calcula mediante la fórmula (5-23). Los nomogramas están contruidos de tal modo que la densidad

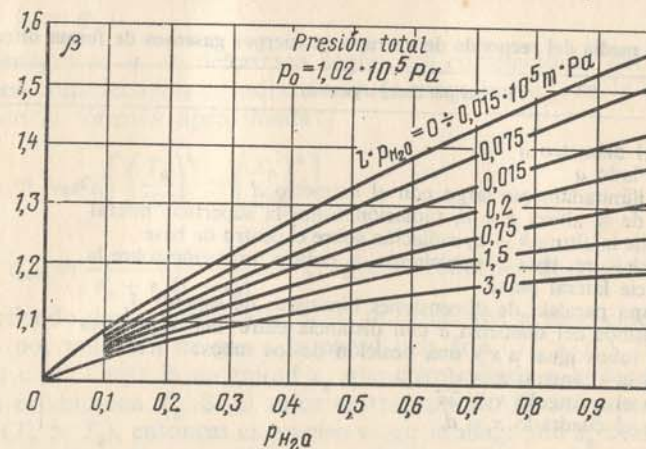


Fig. 5-25. Coeficiente de corrección  $\beta$  para la presión parcial del vapor de agua. Según el eje de las abscisas  $[p_{H_2O}] = 10^{-5} \text{ Pa}$ .

del flujo radiante  $E$  calculada según esta fórmula, determina la radiación que pasa a través del elemento superficial unitario a partir de la semiesfera de gas que lo rodea de radio  $l$ , como se muestra en la fig. 5-26, *a*. En este caso la longitud del recorrido del rayo  $l$  en todas las direcciones es igual. Para los volúmenes de gas de forma distinta la longitud del recorrido de los rayos es diferente para direcciones distintas (fig. 5-26, *b*). Gracias al análisis se ha establecido que en este caso la radiación de cualquier volumen de gas se puede sustituir por la emisión de la semiesfera equivalente de gas. El radio de una semiesfera igual a la longitud media del recorrido del rayo  $\bar{l}$  se determina a partir de la correlación aproximada

$$\bar{l} = 0,9 \frac{4V}{F}, \quad (k)$$

donde  $V$  es el volumen de gas;

$F$  es el área de la superficie que tiene envoltura de dicho gas.

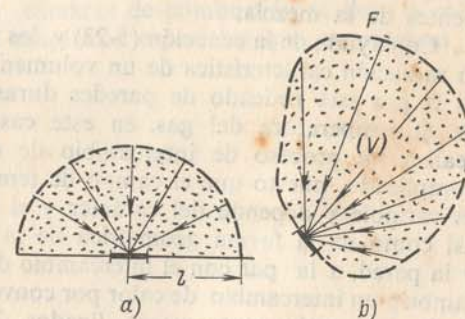


Fig. 5-26. Gráfico para determinar la distancia media recorrida por un rayo.

*a* — radiación de la semiesfera gaseosa que pasa a través de la superficie elemental unitaria en el centro de su base; *b* — volumen gaseoso de forma complicada.



Para algunos cuerpos gaseosos los valores medios de  $\bar{l}$  se dan en la tabla 5-2. Si la mezcla de gases contiene simultáneamente vapor de agua y anhídrido carbónico, entonces el grado de radiación integral es igual a  $\varepsilon = \varepsilon_{H_2O} + \varepsilon_{CO_2}$ . Hablando rigurosamente, la radiación total de la

Tabla 5-2

Longitud media del recorrido de un rayo en cuerpos gaseosos de forma diferente <sup>1)</sup>

| Forma del cuerpo gaseoso  | $\bar{l}$    |
|---|--------------|
| Esfera del diámetro $d$   | 0,60 $d$     |
| Cubo de lado $a$  | 0,60 $d$     |
| Cilindro ilimitadamente largo con el diámetro $d$   | 0,90 $d$     |
| Cilindro de la altura $h = d$ , radiación sobre la superficie lateral   | 0,60 $d$     |
| Cilindro de la altura $h = d$ , radiación sobre el centro de base   | 0,77 $d$     |
| Cilindro, $h = \infty$ , base es semicírculo de radio $r$ , radiación sobre la superficie lateral plana                 | 1,26 $r$     |
| Capa plana paralela de dimensiones ilimitadas de espesor $\delta$   | 1,8 $\delta$ |
| Haz de tubos del diámetro $d$ con distancia entre las superficies de los tubos igual a $x$ y una posición de los tubos: |              |
| en el triángulo $x = d$   | 2,8 $x$      |
| en el triángulo $x = 2d$  | 3,8 $x$      |
| en el cuadrado $x = d$  | 3,5 $x$      |

<sup>1)</sup> Para los valores medios del parámetro  $pl$

mezcla es algo menor que la suma de las radiaciones del anhídrido carbónico y de las del vapor de agua que se encuentran en la mezcla. Sin embargo, para las correlaciones corrientes de los componentes que se observan en la práctica la corrección cuantitativa no será grande y en los cálculos pueden simplemente sumarse las radiaciones de los componentes de la mezcla.

Con ayuda de la ecuación (5-23) y los nomogramas se puede determinar la radiación característica de un volumen de gas a temperatura constante. Si el gas está rodeado de paredes duras cuya temperatura se diferencia de la temperatura del gas, en este caso entre el gas y las paredes se realiza un proceso de intercambio de calor. Este proceso resulta muy complicado, puesto que el campo de temperaturas en el gas generalmente es variable y depende del carácter y el régimen de movimiento del gas, así como de la forma geométrica de la envoltura. Además entre el gas y la pared, a la par con el intercambio de calor por radiación, transcurre también un intercambio de calor por convección y, más estrictamente, estos fenómenos están mutuamente ligados. La citada transferencia de calor conjunta, por radiación y convección, se llama con frecuencia *intercambio térmico compuesto*. Hasta hoy día no se ha creado un método simple y universal para realizar el cálculo preciso del intercambio térmico compuesto.

En la práctica se encuentra, con frecuencia, el régimen turbulento de movimiento del gas radiante; en este caso el cambio fundamental de la

temperatura se observa en una capa relativamente fina adyacente a la pared. Para efectuar el cálculo aproximado del intercambio de calor en estas condiciones se usa un método de cálculo separado (independiente) en el cual se determina la transferencia de calor por la convección  $q_c$  y la radiación  $q_{rad}$ :

$$q = q_c + q_{rad}.$$

La magnitud  $q_c$  se determina según las correlaciones del cap. 3, sin tomar en consideración la radiación. A la magnitud  $q_{rad}$  se le puede hallar mediante la fórmula aproximada:

$$q_{rad} = \varepsilon_{red} c_0 \left[ \left( \frac{T_g}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_p}{100} \right)^4 \right], \quad (5-24)$$

donde  $\varepsilon_{red} = \frac{\varepsilon_g \varepsilon_p}{\varepsilon_p + \varepsilon_g (1 - \varepsilon_p)}$  es el grado reducido de radiación integral.

Partiendo de la correlación (5-24) se determina el flujo calorífico transmitido por volumen de gas a la pared más fría ( $T_g > T_p$ ). Es necesario, en este caso, elegir la magnitud  $\varepsilon_g$  que corresponda a la temperatura del gas en el volumen  $T_g$ . Si el calor es transmitido de las paredes calientes al gas ( $T_p > T_g$ ), entonces es preciso elegir la magnitud  $\varepsilon_g$  correspondiente a la temperatura  $T_p$ ; este método permite considerar de modo aproximado la circunstancia siguiente: la capacidad de absorción del gas, respecto a la radiación a partir de la pared, no es igual a su grado de radiación integral. La magnitud  $\varepsilon_p$  es el grado de radiación integral de la pared.

Si el gas tiene las partículas de hollín, ceniza y otras impurezas mecánicas pequeñas en suspensión, entonces el grado de radiación integral de dicho flujo pulverulento aumenta considerablemente. En los hogares de las calderas y otras cámaras de combustión sobre el intercambio de calor influye mucho también la radiación de la llama. El cálculo del intercambio de calor en hogares y cámaras de combustión se lleva a cabo a base de métodos normativos empíricos especiales que se precisan y se perfeccionan periódicamente.



## PROCESOS DE TERMOTRANSFERENCIA

### 6-1. Intercambio térmico compuesto y termotransferencia

1. **Intercambio térmico compuesto.** La división del proceso general de transferencia calorífica en sus fenómenos elementales: conductibilidad térmica, convección y radiación térmica, se realiza en lo fundamental partiendo de consideraciones metodológicas. Pero en realidad estos fenómenos transcurren simultáneamente y, sin duda, influyen en cierta forma unos en otros. Por ejemplo, frecuentemente la convección va acompañada con la radiación térmica; la conductibilidad térmica en los cuerpos porosos, con la convección y la radiación en los poros; y la radiación térmica se acompaña de la conductibilidad térmica y la convección.

En los cálculos prácticos la división de estos complicados procesos en los fenómenos elementales no siempre es posible y conveniente. Por lo común, el resultado de la acción conjunta de los fenómenos elementales separados se le atribuye a uno de éstos que se considera principal. Al mismo tiempo la influencia de los demás fenómenos (secundarios) se manifiesta sólo en la característica cuantitativa del fenómeno principal. Así, por ejemplo, durante la propagación del calor en un cuerpo poroso como el fenómeno principal suele considerarse la conductibilidad térmica y la influencia de la convección y la radiación térmica en los poros se toma en consideración al aumentar el valor correspondiente del coeficiente de conductibilidad térmica.

El proceso de transferencia calorífica entre el flujo del gas radiante y la pared también es el resultado de la acción común del intercambio de calor por convección y radiación térmica; es así llamado intercambio térmico compuesto. Aquí, como fenómeno principal se acepta, por lo común, la convección. En este caso el coeficiente de traspaso del calor  $\alpha_0 = \alpha_c + \alpha_{rad}$  interviene como la característica cuantitativa del proceso, donde  $\alpha_c$  toma en consideración la acción de la convección y la conductibilidad térmica y  $\alpha_{rad}$ , la acción de la radiación térmica.

Si  $t_{f1}$  es la temperatura del gas y  $t_p$ , la temperatura de la pared que recibe el calor, entonces a cada unidad de la superficie de esta pared se

transmite el calor mediante el contacto

$$q_c = \alpha_c(t_{f1} - t_p) \quad (a)$$

y mediante la radiación térmica

$$q_{rad} = \varepsilon c_0 \left[ \left( \frac{T_{f1}}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_p}{100} \right)^4 \right]. \quad (b)$$

Al sumar las expresiones (a) y (b) tenemos:

$$q_0 = q_c + q_{rad} = \alpha_c(t_{f1} - t_p) + \varepsilon c_0 \left[ \left( \frac{T_{f1}}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_p}{100} \right)^4 \right]. \quad (c)$$

Puesto que  $t_{f1} - t_p = T_{f1} - T_p$ , entonces sacando esta diferencia en la expresión (c) fuera de los paréntesis, obtenemos:

$$q_0 = \left\{ \alpha_c + \varepsilon c_0 \left[ \frac{\left( \frac{T_{f1}}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_p}{100} \right)^4}{T_{f1} - T_p} \right] \right\} (t_{f1} - t_p) \quad (d)$$

ó

$$q_0 = (\alpha_c + \alpha_{rad})(t_{f1} - t_p) = \alpha_0(t_{f1} - t_p), \quad (6-1)$$

donde  $\alpha_c$  es el coeficiente de traspaso del calor por contacto;

$\alpha_{rad}$  es el coeficiente de traspaso del calor por radiación;

$\alpha_0$  es el coeficiente total (sumario) de traspaso del calor.

De las ecuaciones (6-1) y (d) tenemos:

$$\begin{aligned} \alpha_{rad} &= \varepsilon c_0 \cdot 10^{-8} (T_{f1}^4 - T_p^4) / (T_{f1} - T_p) = \\ &= \varepsilon c_0 [10^{-8} (T_{f1}^3 + T_{f1}^2 T_p + T_{f1} T_p^2 + T_p^3)] = \varepsilon c_0 \theta, \end{aligned} \quad (6-2)$$

donde  $\varepsilon$  es el grado reducido de radiación integral;

$c_0$  es el coeficiente de radiación del cuerpo negro igual a  $5,67 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K}^4)$ ;

$\theta$  es el coeficiente térmico.

El valor de  $\theta$  depende sólo de las temperaturas  $t_{f1}$  y  $t_p$  (fig. 6-1). Pero el valor de  $\varepsilon$  se elige a base de los datos expuestos en el cap. 5. Designemos  $(T_{f1} + T_p)/2 = T_m$ . Entonces, si  $0,9 \leq T_{f1}/T_p \leq 1,1$ , se puede considerar

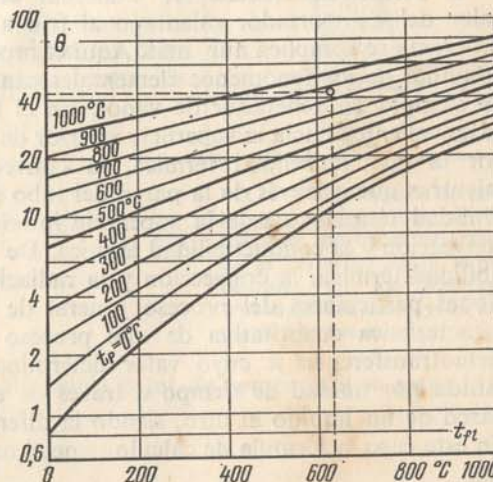


Fig. 6-1. Dependencia  $\theta = f(t_{f1}, t_p)$ .



que:

$$\theta \approx 0,04 \left( \frac{T_m}{100} \right)^3$$

y

$$\alpha_{\text{rad}} = 0,04 \epsilon c_0 \left( \frac{T_m}{100} \right)^3.$$

Al hacer esta suposición el error resulta menor del 1%. Finalmente, cuando la pared es bañada por un líquido de goteo, por ejemplo, con el agua, entonces  $\alpha_{\text{rad}} = 0$  y  $\alpha_0 = \alpha_c$ . En lo sucesivo, si no se da una restricción especial, designaremos con la letra  $\alpha$  el coeficiente total o sumario de traspaso de calor que considera tanto la convección, como la radiación térmica.

Pero cuando se acepta como principal el proceso de radiación térmica, la fórmula para calcular la emisión calorífica total tendrá la forma:

$$q_0 = (\epsilon_c + \epsilon) c_0 \left[ \left( \frac{T_{f1}}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_p}{100} \right)^4 \right]. \quad (6-3)$$

Aquí se toma en consideración la participación en el proceso del intercambio de calor por convección mediante el aumento del grado reducido de radiación integral del sistema a costa de  $\epsilon_c$  que se determina con ayuda de la fórmula:

$$\epsilon_c = \frac{\alpha_c (t_{f1} - t_p)}{c_0 \left[ \left( \frac{T_{f1}}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_p}{100} \right)^4 \right]} = \frac{\alpha_c}{c_0 \theta}. \quad (e)$$

**2. Termotransferencia.** Al examinar el proceso de transferencia de calor del caloportador calentado al frío a través de una pared dura, el problema se complica aún más. Aquí el proceso se determina por la acción conjunta de los fenómenos elementales examinados. Tomemos en calidad de ejemplo un generador de vapor. En él la transferencia de calor de los gases calientes hacia la superficie exterior de los tubos hervidores, se realiza por la conductibilidad térmica, la convección y la radiación térmica; mientras que a través de la pared del tubo solamente mediante la conductibilidad térmica; desde la superficie interior hacia el agua, mediante la convección y la conductibilidad térmica. De aquí se deduce que la conductibilidad térmica, la convección y la radiación térmica son sólo las condiciones particulares del proceso general de transferencia de calor. Como característica cuantitativa de este proceso se presenta el coeficiente de termotransferencia  $k$  cuyo valor determina la cantidad de calor transmitida por unidad de tiempo a través de una unidad de superficie de la pared de un líquido al otro, siendo la diferencia entre éstos de un grado. En este caso la fórmula de cálculo tiene el aspecto siguiente:

$$Q = k(t_{f1} - t_{f2}) F. \quad (f)$$

La parte física del complicado proceso de termotransferencia la determinan por completo los fenómenos de conductibilidad térmica, convección y radiación térmica, mientras que el coeficiente de termotransferencia es únicamente la característica cuantitativa, destinada exclusivamente para calcular el proceso. La relación mutua entre los coeficientes de termotransferencia, por una parte, y los coeficientes de conductibilidad térmica y de traspaso del calor, por otra, depende de la forma de pared que separa los líquidos caliente y frío, esta relación se examina más adelante.

## 6-2. Termotransferencia a través de las paredes

**1. Pared plana de una capa.** Sea un muro plano homogéneo cuyo coeficiente de termotransferencia es  $\lambda$  y el espesor,  $\delta$ . Por un lado de la pared se halla el medio caliente a una temperatura  $t_{f1}$  y por otro, el medio frío a la temperatura  $t_{f2}$ . Las temperaturas de las superficies de la pared no se conocen; las designaremos con las letras  $t_{p1}$  y  $t_{p2}$  (fig. 6-2). Se conoce el valor del coeficiente total de traspaso del calor en la parte caliente  $\alpha_1$  y en la parte fría  $\alpha_2$ .

Para el estado térmico estacionario la cantidad de calor transmitida desde el líquido caliente hacia la pared es igual a la cantidad de calor transmitida a través de la pared y a la cantidad de calor transferida por la pared al líquido frío. Por consiguiente, para expresar la densidad del flujo calorífico  $q$  pueden escribirse tres expresiones:

$$\left. \begin{aligned} q &= \alpha_1(t_{f1} - t_{p1}); \\ q &= \frac{\lambda}{\delta}(t_{p1} - t_{p2}); \\ q &= \alpha_2(t_{p2} - t_{f2}). \end{aligned} \right\}$$

De estas ecuaciones se determinan las diferencias particulares de temperaturas entre los dos medios, y precisamente:

$$\left. \begin{aligned} t_{f1} - t_{p1} &= q \frac{1}{\alpha_1}; \\ t_{p1} - t_{p2} &= q \frac{\delta}{\lambda}; \\ t_{p2} - t_{f2} &= q \frac{1}{\alpha_2}. \end{aligned} \right\}$$

Al sumarlas obtenemos la diferencia total de temperaturas entre los dos medios:

$$t_{f1} - t_{f2} = q \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right), \quad (c)$$

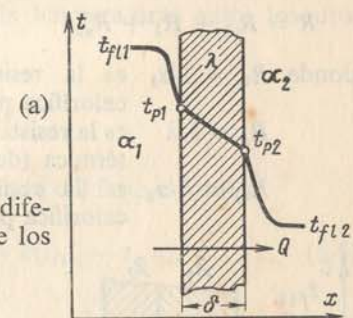


Fig. 6-2. Transmisión de calor a través de una pared plana de una capa; carácter de la variación de la temperatura en los agentes portadores de calor y en la pared que los separa.



de donde se determina el valor de densidad del flujo calorífico

$$q = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} (t_{f11} - t_{f12}) = k(t_{f11} - t_{f12}) \quad (6-4)$$

y el valor del coeficiente de termotransferencia

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (6-5)$$

De este modo, para calcular el valor del coeficiente de termotransferencia  $k$  para un muro plano es necesario conocer el espesor de la pared  $\delta$ , el coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda$  y los valores de los coeficientes de traspaso del calor  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ .

La magnitud inversa al coeficiente de traspaso del calor se llama *resistencia térmica total de termotransferencia*. De la ecuación (6-5) se deduce que esta magnitud es igual a:

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \quad (d)$$

Esta correlación nos muestra que la resistencia térmica total es igual a la suma de las resistencias particulares:

$$R = R_{\alpha_1} + R_{\lambda} + R_{\alpha_2},$$

donde  $R_{\alpha_1} = 1/\alpha_1$  es la resistencia térmica particular de la emisión calorífica por parte del caloportador caliente;

$R_{\lambda} = \delta/\lambda$  es la resistencia térmica particular de la conductibilidad térmica (del muro);

$R_{\alpha_2} = 1/\alpha_2$  es la resistencia térmica particular de la emisión calorífica por parte del caloportador frío.

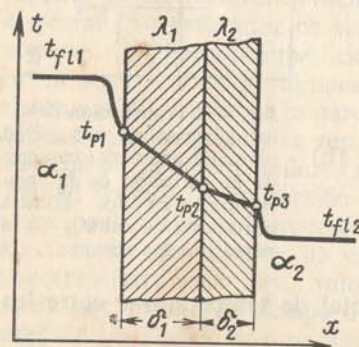


Fig. 6-3. Transmisión de calor a través de una pared plana de capas múltiples.

## 2. Pared plana de capas múltiples.

Examinemos una pared formada por varias (por ejemplo, dos) capas (fig. 6-3). Los espesores de las capas son  $\delta_1$  y  $\delta_2$ ; los coeficientes de conductibilidad térmica,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . Por un lado se halla el medio caliente que tiene la temperatura  $t_{f11}$ , y por otro, el medio frío cuya temperatura es  $t_{f12}$ . El valor del coeficiente total de traspaso de calor en la parte caliente es  $\alpha_1$  y en la parte fría,  $\alpha_2$ .

Cuando se establece un estado térmico del sistema, la densidad del flujo calorífico se hace constante y por eso puede

escribirse:

$$\left. \begin{aligned} q &= \alpha_1(t_{f11} - t_{p1}); \\ q &= \frac{\lambda_1}{\delta_1}(t_{p1} - t_{p2}); \\ q &= \frac{\lambda_2}{\delta_2}(t_{p2} - t_{p3}); \\ q &= \alpha_2(t_{p3} - t_{f12}). \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

De estas ecuaciones se determinan las diferencias particulares de las temperaturas entre los dos medios:

$$\left. \begin{aligned} t_{f11} - t_{p1} &= q \frac{1}{\alpha_1}; \\ t_{p1} - t_{p2} &= q \frac{\delta_1}{\lambda_1}; \\ t_{p2} - t_{p3} &= q \frac{\delta_2}{\lambda_2}; \\ t_{p3} - t_{f12} &= q \frac{1}{\alpha_2}. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Al sumar por separado los primeros y los segundos miembros de las ecuaciones obtenemos la diferencia total de temperaturas entre los dos medios;

$$t_{f11} - t_{f12} = q \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_2} \right),$$

de la cual determinamos el valor de la densidad del flujo calorífico

$$q = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_2}} (t_{f11} - t_{f12}) = k(t_{f11} - t_{f12}), \quad (6-6)$$

y el valor del coeficiente de termotransferencia para una pared plana de dos capas

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (6-7)$$

La distribución de las temperaturas durante la termotransferencia a través de las paredes, siendo una de ellas plana, de una capa, y la otra, de capas múltiples, se representa en las figs. 6-2 y 6-3, resp ectivamente



Las temperaturas desconocidas  $t_{p1}$ ,  $t_{p2}$  y  $t_{p3}$  se les puede determinar de las ecuaciones (f):

$$t_{p1} = t_{f11} - q \frac{1}{\alpha_1};$$

$$t_{p2} = t_{p1} - q \frac{\delta_1}{\lambda_1};$$

$$t_{p3} = t_{f12} + q \frac{1}{\alpha_2}.$$

Si la pared está formada por varias capas cuyos espesores son  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ , ...,  $\delta_n$ , y sus coeficientes de conductibilidad térmica respectivamente son  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , ...,  $\lambda_n$ , ocurre que la resistencia térmica total de la termotransferencia será igual a:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\alpha_2}$$

ó

$$R = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2} \quad (g)$$

En este caso la ecuación (6-5) toma la forma:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

ó

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (6-7a)$$

Las temperaturas de la pared pueden determinarse también por métodos gráficos. Uno de ellos fue descrito en el cap. 1. Por eso aquí examinaremos el segundo método que tiene como base la sustitución de la resistencia térmica de los medios caliente y frío por la resistencia térmica del muro duro, que tiene el mismo coeficiente de conductibilidad térmica que la pared real.

Supongamos que las temperaturas de las superficies exteriores de una pared convencional son iguales respectivamente a las temperaturas de los medios caliente y frío  $t_{f11}$  y  $t_{f12}$  (fig. 6-4). La cantidad del calor transmitido permanece sin cambio. Entonces el espesor  $\Delta$  de esta pared convencional se determina de la correlación

$$q = k(t_{f11} - t_{f12}) = \frac{\lambda}{\Delta} (t_{f11} - t_{f12}), \quad (h)$$

de donde

$$\Delta = \lambda \frac{1}{k} = \lambda \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = \frac{\lambda}{\alpha_1} + \delta + \frac{\lambda}{\alpha_2}.$$

Aquí las magnitudes  $\lambda/\alpha_1$  y  $\lambda/\alpha_2$  tienen la dimensión de longitud en m, y representan espesores equivalentes. Durante la construcción gráfica,

al principio se construye una pared real de espesor  $\delta$  (en cualquier escala), luego por un lado de éste se traza en la misma escala el valor de  $\lambda/\alpha_1$  y por otro, el valor de  $\lambda/\alpha_2$ . Desde los puntos extremos  $a$  y  $b$  en sentido vertical y a determinada escala se trazan los valores de las temperaturas  $t_{f11}$  y  $t_{f12}$ . Los puntos obtenidos  $A$  y  $C$  se unen mediante una recta. Los puntos de intersección de la recta obtenida con las superficies de la pared real dan los valores de las temperaturas buscadas  $t_{p1}$  y  $t_{p2}$ .

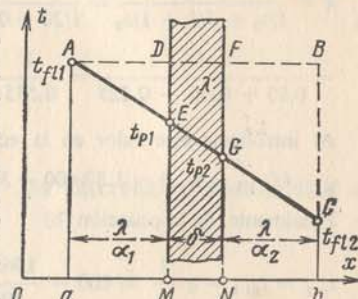


Fig. 6-4. Método gráfico usado para determinar las temperaturas sobre la superficie de una pared.

En efecto, de la semejanza entre los triángulos  $ABC$  y  $ADE$  tenemos que  $DE/BC = AD/AB$ , de donde:

$$DE = BC \frac{AD}{AB} = (t_{f11} - t_{f12}) \frac{\frac{\lambda}{\alpha_1}}{\frac{\lambda}{\alpha_1} + \delta + \frac{\lambda}{\alpha_2}} = k \frac{t_{f11} - t_{f12}}{\alpha_1} = q \frac{1}{\alpha_1}.$$

De acuerdo con la ecuación (b)  $q \frac{1}{\alpha_1} = t_{f11} - t_{p1}$ ; por consiguiente, el segmento  $ME = MD - ED = t_{f11} - (t_{f11} - t_{p1}) = t_{p1}$ . Al usar el mismo procedimiento se puede mostrar que el segmento  $NG$  en la escala elegida de temperatura es igual a  $t_{p2}$ .

Si la pared es de capas múltiples y se necesita solamente determinar la temperatura de las superficies exteriores, la construcción se realiza de manera igual a la que se efectúa para la pared de una capa, usando sólo el coeficiente medio de la conductibilidad térmica

$$\lambda_m = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}}$$

del muro de capas múltiples (fig. 6-5). Mientras tanto la temperatura entre las capas en el punto  $A$  se determina por la intersección de dos radios (el método de construcción se ve en la fig. 6-5).



**Ejemplo 6-1.** Determinar la pérdida de calor a través de  $1 \text{ m}^2$  de albañilería de una caldera cuyo espesor es  $\delta = 250 \text{ mm}$  y las temperaturas de la pared  $t_{p1}$  y  $t_{p2}$ , si la temperatura de los gases es  $t_{f11} = 600^\circ\text{C}$ ; la temperatura del aire,  $t_{f12} = 30^\circ\text{C}$ ; el coeficiente de traspaso del calor por parte de los gases,  $\alpha_1 = 20 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ ; el coeficiente de traspaso del calor por parte del aire  $\alpha_2 = 8 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$  y el coeficiente de conductibilidad térmica de la albañilería de la caldera  $\lambda = 0,7 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ .

De acuerdo con la ecuación (6-5)

$$k = \frac{1}{1/\alpha_1 + \delta/\lambda + 1/\alpha_2} = \frac{1}{1/20 + 0,25/0,7 + 1/8} = \frac{1}{0,05 + 0,36 + 0,125} = \frac{1}{0,535} = 1,87 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}).$$

Al introducir este valor en la ecuación (6-4) tenemos:

$$q = k(t_{f11} - t_{f12}) = 1,87(600 - 30) = 1065 \text{ W}/\text{m}^2.$$

Finalmente, de la ecuación (b)

$$t_{p1} = t_{f11} - q \frac{1}{\alpha_1} = 600 - \frac{1065}{20} = 546^\circ\text{C};$$

$$t_{p2} = t_{f12} + q \frac{1}{\alpha_2} = 30 + \frac{1065}{8} = 163^\circ\text{C}.$$

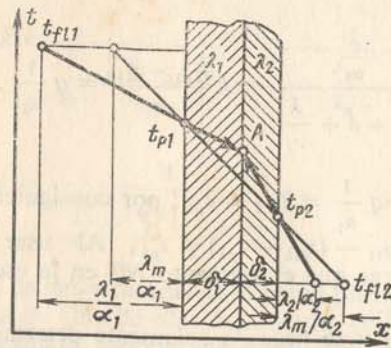


Fig. 6-5. Determinación gráfica de la temperatura en la superficie y en el plano de contacto de las capas en un muro de dos capas.

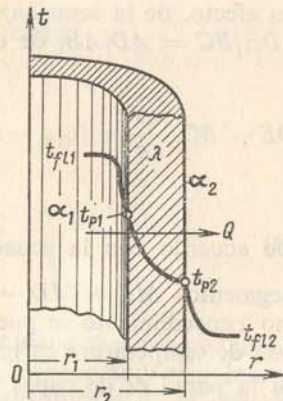


Fig. 6-6. Transmisión de calor a través de una pared cilíndrica de una capa.

**3. Pared cilíndrica homogénea.** Sea una pared cilíndrica (tubo) con diámetros interior  $d_1$ , exterior  $d_2$  y longitud  $l$ . La pared del tubo es homogénea y su coeficiente de conductibilidad térmica es  $\lambda$ . En el interior del tubo se halla una sustancia (medio) caliente a la temperatura  $t_{f11}$ , mientras que el medio de afuera es frío y está a una temperatura  $t_{f12}$ . Las temperaturas de las superficies del muro no se conocen, designémoslas por  $t_{p1}$  y  $t_{p2}$  (fig. 6-6). El coeficiente total de traspaso de calor correspondiente a la parte del medio caliente es  $\alpha_1$  y correspondiente a la parte fría  $\alpha_2$ .

Cuando el estado térmico del sistema es estacionario, la cantidad del calor desprendida por el medio caliente y recibida por el frío, es la misma. Por consiguiente, se puede escribir:

$$\left. \begin{aligned} q_l &= \frac{Q}{l} = \alpha_1 \pi d_1 (t_{f11} - t_{p1}); \\ q_l &= \frac{2\pi \lambda (t_{p1} - t_{p2})}{\ln \frac{d_2}{d_1}}; \\ q_l &= \alpha_2 \pi d_2 (t_{p2} - t_{f12}). \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

De estas correlaciones determinamos las diferencias particulares de temperaturas entre los dos medios:

$$\left. \begin{aligned} t_{f11} - t_{p1} &= \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_1 d_1}; \\ t_{p1} - t_{p2} &= \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}; \\ t_{p2} - t_{f12} &= \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_2 d_2}. \end{aligned} \right\} \quad (k)$$

Al sumar las ecuaciones del sistema (k) obtenemos la diferencia total de temperaturas existente entre los dos medios

$$t_{f11} - t_{f12} = \frac{q_l}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2} \right). \quad (l)$$

De la ecuación (l) determinamos el valor de la densidad lineal del flujo calorífico  $q_l$ :

$$q_l = \frac{\pi (t_{f11} - t_{f12})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}} = k_l \pi (t_{f11} - t_{f12}), \quad (6-8)$$

de donde el coeficiente lineal de termotransferencia (en  $1 \text{ m}$  para longitud del tubo) es:

$$k_l = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}}. \quad (6-9)$$



La magnitud inversa al coeficiente lineal de termotransferencia  $1/k_l$  se llama resistencia térmica lineal de termotransferencia.

De la ecuación (6-9) tenemos:

$$R_l = \frac{1}{k_l} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}.$$

Lo último significa que la resistencia térmica total es igual a la suma de las resistencias particulares que son: la resistencia térmica de conducti-

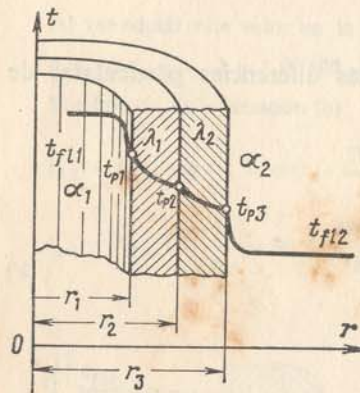


Fig. 6-7. Transmisión de calor a través de una pared cilíndrica de capas múltiples.

bilidad térmica de la pared  $\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}$  y las resistencias térmicas de la emisión calorífica  $1/\alpha_1 d_1$  y  $1/\alpha_2 d_2$ . Los valores  $t_{p1}$  y  $t_{p2}$  se determinan de las ecuaciones (k).

#### 4. Pared cilíndrica de capas múltiples.

En este caso se analiza la transmisión de calor a través de una pared cilíndrica de capas múltiples, por ejemplo, de dos capas. Los diámetros y los coeficientes de conductibilidad térmica de las capas aisladas son conocidos (fig. 6-7). La temperatura del medio caliente es  $t_{f11}$  y la del frío,  $t_{f12}$ . El coeficiente de traspaso del calor por parte del medio caliente es  $\alpha_1$  y por parte del frío,  $\alpha_2$ . Las temperaturas de las superficies ( $t_{p1}$  y  $t_{p3}$ ), así

como la temperatura en lugar de contacto de las capas cilíndricas heterogéneas ( $t_{p2}$ ) son desconocidas.

En el caso de que el estado térmico del sistema sea estacionario se puede escribir:

$$\left. \begin{aligned} q_l &= \alpha_1 \pi d_1 (t_{f11} - t_{p1}); \\ q_l &= \frac{\pi(t_{p1} - t_{p2})}{\frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1}}; \\ q_l &= \frac{\pi(t_{p2} - t_{p3})}{\frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2}}; \\ q_l &= \alpha_2 \pi d_3 (t_{p3} - t_{f12}). \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

Determinemos las diferencias particulares de temperatura entre los dos medios:

$$\left. \begin{aligned} t_{f11} - t_{p1} &= \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_1 d_1}; \\ t_{p1} - t_{p2} &= \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1}; \\ t_{p2} - t_{p3} &= \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2}; \\ t_{p3} - t_{f12} &= \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_2 d_3}. \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

Al sumar primeros y segundos miembros de las ecuaciones (n) obtenemos la diferencia total de temperaturas entre los dos medios

$$t_{f11} - t_{f12} = \frac{q_l}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_3} \right)$$

y el valor de la densidad lineal del flujo calorífico será:

$$q_l = \frac{\pi(t_{f11} - t_{f12})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_3}}. \quad (6-10)$$

La distribución de las temperaturas durante la transmisión de calor a través de las paredes cilíndricas de una capa y de capas múltiples se muestra en las figs. 6-6 y 6-7, respectivamente.

El coeficiente lineal de termotransferencia para el muro de dos capas es

$$k_l = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_3}} \quad (o)$$

y la resistencia térmica total es  $R_l = 1/k_l$ .

Para el muro de capas múltiples del tubo

$$R_l = \frac{1}{k_l} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}} \quad (p)$$

y

$$k_l = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{d_{i+1}}{d_i} + \frac{1}{\alpha_2 d_{n+1}}}. \quad (6-11)$$



Para determinar las temperaturas desconocidas del muro  $t_{p1}$ ,  $t_{p2}$  y  $t_{p3}$  es necesario sustituir el valor  $q_l$  de la ecuación (6-10) en las ecuaciones (n). Al resolverlas estas últimas obtenemos:

$$\begin{aligned} t_{p1} &= t_{f11} - \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_1 d_1}; \\ t_{p2} &= t_{f11} - \frac{q_l}{\pi} \left( \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} \right); \\ t_{p3} &= t_{f12} + \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_2 d_3}. \end{aligned} \quad (r)$$

El método que sirve para determinar la temperatura entre las capas está descrito en el cap. 1.

Las fórmulas de cálculo de la transmisión de calor que se usan para los tubos, son bastante voluminosas, por lo que en los cálculos prácticos se emplean varias simplificaciones. Si el espesor de la pared no es muy grande, entonces en vez de la fórmula (6-8) se utiliza la fórmula para la pared plana (6-4) que en este caso (si se aplica a un tubo de 1 m de longitud) toma la forma siguiente:

$$q_l = k\pi d_x (t_{f11} - t_{f12}) = \frac{\pi d_x (t_{f11} - t_{f12})}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}, \quad (6-12)$$

donde  $k$  es el coeficiente de termotransferencia para una pared plana calculado según la fórmula (6-5);

$d_x$  es el diámetro medio de la pared;

$\delta$  es su espesor igual a la mitad de la diferencia entre los diámetros.

En este caso, si  $d_1/d_2 > 0,5$ , entonces el error del cálculo no supera el 4%. Este error disminuye, si durante la elección de  $d_x$  se cumple la regla siguiente:

- 1) si  $\alpha_1 \gg \alpha_2$ ,  $d_x = d_2$ ;
- 2) si  $\alpha_1 \approx \alpha_2$ ,  $d_x = 0,5(d_1 + d_2)$ ;
- 3) si  $\alpha_1 \ll \alpha_2$ ,  $d_x = d_1$ ,

es decir, durante el cálculo de la transmisión de calor según la fórmula (6-12) en vez de  $d_x$ , se toma aquel diámetro por cuyo lado el coeficiente de traspaso del calor tenga menor valor. Pero si los valores de los coeficientes de traspaso del calor  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son del mismo orden, entonces  $d_x$  es igual a la media aritmética entre los diámetros interior ( $d_1$ ) y exterior ( $d_2$ ) del tubo. Al llevar a cabo los cálculos tanto según la fórmula (6-8), como según la fórmula (6-12), es necesario siempre tener en cuenta que a fin de simplificar el proceso es posible e imprescindible despreciar las resistencias relativamente pequeñas.

**Ejemplo 6-2.** Una conducción de vapor cuyo diámetro es 200/216 mm está cubierto con una capa de aislamiento de sovelita de 120 mm de espesor cuyo coeficiente de conductibilidad térmica es  $\lambda_2 = 0,1 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$ . La temperatura del vapor es  $t_{f11} = 300^\circ\text{C}$  y la del aire circundante  $t_{f12} = 25^\circ\text{C}$ . Además están dados el coeficiente de conductibilidad térmica de la pared  $\lambda_1 = 40 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$ ,  $\alpha_1 = 100$  y  $\alpha_3 = 8,5 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}$ . Es necesario determinar el coeficiente lineal de termotransferencia, la densidad lineal del flujo calorífico y la temperatura en el lugar de contacto de la conducción de vapor con el aislamiento.

De acuerdo con la condición del problema  $d_1 = 0,2 \text{ m}$ ,  $d_2 = 0,216 \text{ m}$  y  $d_3 = (0,216 + 2 \cdot 0,120) = 0,456 \text{ m}$ . Luego a base de la fórmula (6-9) tenemos:

$$\begin{aligned} k_l &= \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_3}} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{100 \cdot 0,2} + \frac{2,3}{2 \cdot 40} \log \frac{0,216}{0,200} + \frac{2,3}{2 \cdot 0,1} \log \frac{0,456}{0,216} + \frac{1}{8,5 \cdot 0,456}} = \\ &= \frac{1}{0,05 + 0,0009 + 3,73 + 0,258} = 0,248 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}. \end{aligned}$$

Los dos primeros términos de la resistencia térmica común son pequeños en comparación con los otros, durante los cálculos se puede prescindir de ellos. Basándose en la fórmula (5-8) tenemos:

$$q_l = k_l \pi (t_{f11} - t_{f12}) = 0,248 \cdot 3,14 (300 - 25) = 214 \text{ W/m}.$$

Y, finalmente, de acuerdo con la fórmula (n):

$$t_{p3} = t_{f12} + \frac{q_l}{\pi} \frac{1}{\alpha_2 d_3} = 25 + \frac{214}{3,14} \cdot 0,258 = 25 + 17,5 = 42,5^\circ\text{C}.$$

**5. Esfera.** Supongamos que el diámetro interior de una esfera es igual a  $d_1$ , el exterior, a  $d_2$  y el coeficiente de conductibilidad térmica de su pared es  $\lambda$ . En el interior de la esfera se halla un líquido caliente cuya temperatura es  $t_{f11}$ , fuera de la esfera hay líquido frío, cuya temperatura es  $t_{f12}$ . Los valores de los coeficientes de traspaso del calor respectivamente son iguales a  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . Las temperaturas de las superficies de la pared no se conocen; designémoslas con  $t_{p1}$  y  $t_{p2}$  (fig. 6-8).

Si el estado térmico del sistema es estacionario la cantidad de calor transmitida del líquido caliente al frío se puede expresar

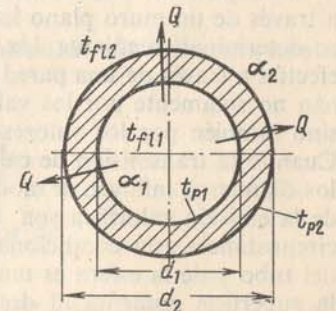


Fig. 6-8. Transmisión de calor a través de una pared esférica.



mediante tres ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} Q &= \alpha_1 \pi d_1^2 (t_{f11} - t_{p1}); \\ Q &= \frac{2\pi\lambda}{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}} (t_{p1} - t_{p2}); \\ Q &= \alpha_2 \pi d_2^2 (t_{p2} - t_{f12}). \end{aligned} \right\} \quad (s)$$

De estas ecuaciones se determina el valor de  $Q$ :

$$Q = \frac{\pi(t_{f11} - t_{f12})}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}} = k_{esf} \pi (t_{f11} - t_{f12}). \quad (6-13)$$

Por consiguiente, el coeficiente de termotransferencia para la pared de la esfera se determina de la correlación:

$$k_{esf} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}}. \quad (6-14)$$

La magnitud inversa  $1/k_{esf}$  se llama resistencia térmica común de termotransferencia de la pared de esfera:

$$R_{esf} = \frac{1}{k_{esf}} = \frac{1}{\alpha_1 d_1^2} + \frac{1}{2\lambda} \left( \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) + \frac{1}{\alpha_2 d_2^2}.$$

En los cálculos prácticos es necesario controlar la correlación de las resistencias térmicas, puesto que siempre se puede prescindir de resistencias relativamente pequeñas.

### 6-3. Transmisión de calor a través de paredes complejas

1. **Superficies con nervios.** Cuando la transmisión de calor se realiza a través de un muro plano las resistencias térmicas de la emisión calorífica se determinan mediante  $1/\alpha_1$  y  $1/\alpha_2$ . Cuando la transmisión de calor se efectúa a través de una pared cilíndrica las resistencias térmicas se determinan no solamente por los valores de los coeficientes de traspaso del calor, sino también por los valores de los diámetros, es decir,  $1/\alpha_1 d_1$  y  $1/\alpha_2 d_2$ . Cuando la transmisión de calor se hace a través de la pared de una esfera los diámetros influyen de modo aun más fuerte; así las resistencias térmicas de la emisión calorífica son  $1/\alpha_1 d_1^2$  y  $1/\alpha_2 d_2^2$ , respectivamente. Esta última circunstancia está condicionada por el hecho de que la superficie exterior del tubo y de la esfera es mayor que la interior. De esto se deduce que si la superficie aumenta al dotarle los nervios, es posible disminuir considerablemente su resistencia térmica común e intensificar de este modo el proceso de transmisión de calor.

Examinemos una pared plana con espesor  $\delta$  cuyo coeficiente de conductibilidad térmica es  $\lambda$ . Un lado de este muro lleva nervios del mismo material (fig. 6-9). En su parte lisa la superficie es igual a  $F_1$  y en la nervada, a  $F_2$ . La última se compone de la superficie de los nervios y de la superficie de la misma pared entre los nervios. La temperatura del líquido caliente que baña la parte lisa, es  $t_{f11}$  y la temperatura de esta superficie  $t_{p1}$ . Mientras tanto la temperatura del líquido frío que baña la parte nervada, es  $t_{f12}$  y la temperatura de esta superficie,  $t_{p2}$ . Los valores de los coeficientes de traspaso del calor son  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , siendo  $\alpha_2 \ll \alpha_1$ .

Cuando el estado térmico del sistema es estacionario la cantidad del calor transmitido  $Q$  puede expresarse mediante tres ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} Q &= \alpha_1 F_1 (t_{f11} - t_{p1}); \\ Q &= \frac{\lambda}{\delta} F_1 (t_{p1} - t_{p2}); \\ Q &= \alpha_2 F_2 (t_{p2} - t_{f12}). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Si determinamos de aquí las diferencias particulares de temperaturas entre los dos medios, obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} t_{f11} - t_{p1} &= Q \frac{1}{\alpha_1 F_1}; \\ t_{p1} - t_{p2} &= Q \frac{\delta}{\lambda} \frac{1}{F_1}; \\ t_{p2} - t_{f12} &= Q \frac{1}{\alpha_2 F_2}. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Al sumar las ecuaciones del sistema (b) obtenemos la diferencia total de temperaturas entre los dos medios

$$t_{f11} - t_{f12} = Q \left( \frac{1}{\alpha_1 F_1} + \frac{\delta}{\lambda} \frac{1}{F_1} + \frac{1}{\alpha_2 F_2} \right). \quad (c)$$

De la ecuación (c) se determina el valor de  $Q$ :

$$Q = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 F_1} + \frac{\delta}{\lambda} \frac{1}{F_1} + \frac{1}{\alpha_2 F_2}} (t_{f11} - t_{f12}) = k_p (t_{f11} - t_{f12}), \quad (6-15)$$

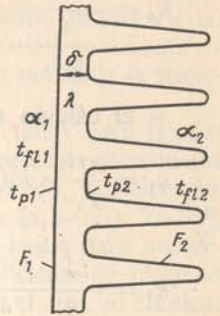


Fig. 6-9. Transmisión de calor a través de una pared nervada.



así como el valor del coeficiente de termotransferencia  $k_p$ :

$$k_p = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 F_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2 F_2}} \quad (6-16)$$

Si el cálculo se realiza por una unidad de superficie lisa, tenemos:

$$q_1 = \frac{Q}{F_1} = k_1(t_{f11} - t_{f12}) \quad (d)$$

y

$$k_1 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{F_1}{F_2}} \quad (e)$$

Si el cálculo se lleva a cabo, por una unidad de superficie con nervios, entonces la ecuación de cálculo toma la forma:

$$q_2 = \frac{Q}{F_2} = k_2(t_{f11} - t_{f12}) \quad (f)$$

y

$$k_2 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} \frac{F_2}{F_1} + \frac{\delta}{\lambda} \frac{F_2}{F_1} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (g)$$

De este modo, si está dada la superficie con nervios y se conocen los valores de los coeficientes de traspaso del calor  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  el cálculo de transmisión de calor a través de una pared de este tipo no presenta dificultades. En este caso es necesario sólo tener presente la superficie por la cual se realiza el cálculo, puesto que dependiendo de esto, los valores numéricos del coeficiente de termotransferencia serán diferentes. La relación entre las áreas de la superficie con nervios  $F_2$  y la lisa  $F_1$  se llama *coeficiente de costillaje*.

El cálculo de la transmisión de calor a través de una superficie con nervios, aducido aquí, se refiere al caso en que está dado el costillaje. Pero a la par con tales cálculos con bastante frecuencia se necesita calcular inicialmente el mismo costillaje, es decir, determinar las dimensiones, la cantidad y el orden de disposición de los nervios. De acuerdo con su destinación pueden plantearse diferentes exigencias: en un caso es necesario usar de modo eficaz el material; en otro, se necesita la transmisión máxima de calor; en un tercer la masa mínima o las dimensiones mínimas, o sea, termopermutadores compactos.

Al realizar el cálculo de la transmisión de calor hemos supuesto que la temperatura  $t_{p2}$  es igual para toda la superficie nervada. En realidad, a consecuencia de la resistencia térmica la temperatura del nervio cerca del

vértice es más baja que cerca de su base. Además, al dotar los nervios a una superficie, cambian también las condiciones generales del intercambio de calor tanto a consecuencia de la alteración del carácter del movimiento del líquido, como debido a la variación de la irradiación mutua de las partes de la superficie de calefacción. El valor correcto del coeficiente de traspaso del calor  $\alpha_2$  y la distribución de la temperatura por toda la superficie nervada se puede establecer experimentalmente.

El costillaje de las superficies de calefacción se usa tanto para igualar las resistencias térmicas, como para intensificar los procesos de transmisión de calor en total. Existen dispositivos de intercambio térmico, por ejemplo, radiadores de calefacción central calentados por agua [ $\alpha_1 = (2 \div 5) \cdot 10^3$ ], y enfriados por aire [ $\alpha_2 = 10 \div 50 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}$ ]. En tales casos para intensificar la transmisión de calor por el lado en que el coeficiente de traspaso del calor es menor, es decir, por el lado en que se halla el aire, al emplear el costillaje se aumenta la superficie de calefacción. A veces el costillaje se realiza por ambos lados; eso se hace en aquellos casos en que se necesita disminuir las dimensiones del intercambiador de calor, siendo al mismo tiempo pequeños los valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ .

Se aplican diferentes métodos para fabricar las superficies nervadas. En unos casos son piezas íntegras de fundición, en otros los nervios se fabrican independientemente y luego se fijan a la superficie correspondiente. El último caso tiene la ventaja de que los nervios pueden fabricarse de otro material que tenga mayor conductibilidad térmica que la misma pared; así es posible lograr que toda la construcción sea más ligera. El contacto estrecho entre la pared y los nervios se logra al poner éstos en estado caliente y soldar después los lugares de unión. Como regla, el plano del nervio debe estar dirigido en el sentido del movimiento del fluido de trabajo y para el movimiento libre, en sentido vertical. A veces, para turbulizar artificialmente el flujo del líquido y destruir la subcapa viscosa, los nervios bajos y muy espaciados se colocan también en sentido transversal al movimiento del flujo.

**2. Capas intermedias de gas o de líquido.** Teniendo en cuenta la baja conductibilidad térmica del aire, frecuentemente, a fin de reducir las pérdidas de calor, en las paredes de viviendas y las albañilerías de las calderas se dejan capas intermedias de aire. Sin embargo las capas intermedias de aire cumplen su misión sólo cuando están correctamente calculadas y construidas. Ante todo dichas capas intermedias deben ser herméticas. En caso contrario, en éstas surge un flujo de aire y se crean condiciones favorables para intensificar el proceso de transferencia de calor.

La transferencia de calor a través de dos paredes duras y la capa intermedia entre éstas puede considerarse como la transferencia de calor a través de un muro complejo de tres capas. Toda la tarea se reduce entonces a la correcta elección del valor del coeficiente efectivo de conductibilidad térmica de la capa intermedia. Por eso, es necesario examinar de modo más detallado las condiciones de transferencia del calor a través de las capas intermedias.

Supongamos que entre dos paredes planas cuyas temperaturas son  $t_{p1}$  y  $t_{p2}$ , existe una capa intermedia de gas. El espesor de esta capa inter-



media es  $\delta$  y el coeficiente de conductibilidad térmica del medio que la llena, es  $\lambda$  (fig. 6-10). Puesto que a través de la capa intermedia el calor se transmite no solamente mediante conductibilidad térmica, sino también por convección y radiación, la cantidad de calor transmitida por unidad de tiempo desde la superficie caliente hacia la fría, a través de la capa intermedia es igual a:

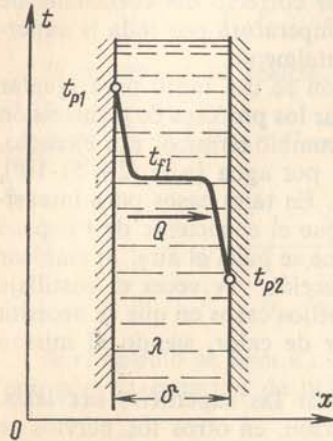


Fig. 6-10. Transferencia de calor a través de una capa intermedia líquida.

$$Q = k_{\text{cap}}(t_{p1} - t_{p2})F + cF \left( \frac{T_{p1}}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{p2}}{100} \right)^4$$

ó

$$Q = (k_{\text{cap}} + \alpha_{\text{rad}})F(t_{p1} - t_{p2}), \quad (6-17)$$

donde  $F$  es el área de la superficie de cambio de calor;

$\alpha_{\text{rad}}$  es el coeficiente de trapasso del calor por radiación [véase (6-1)];

$k_{\text{cap}}$  es el coeficiente de termotransferencia por contacto a través de la capa intermedia.

En ausencia de convección,  $k_{\text{cap}} = \lambda/\delta$ ; pero si hay convección,  $k_{\text{cap}} > \lambda/\delta$ .

Para facilitar el cálculo y simplificar la elaboración de los datos experimentales se acepta considerar el complejo proceso de transmisión de calor por contacto a través de una capa intermedia de gas o de líquido como un proceso elemental de transmisión de calor mediante conductibilidad térmica introduciendo cierto coeficiente equivalente de conductibilidad térmica  $\lambda_{\text{eq}}$ . En este caso la cantidad de calor transmitida por el contacto  $Q_c$  debe ser determinada con ayuda de la expresión siguiente:

$$Q_c = k_{\text{cap}}F(t_{p1} - t_{p2}) = \frac{\lambda_{\text{eq}}}{\delta} F(t_{p1} - t_{p2}). \quad (6-18)$$

de donde  $\lambda_{\text{eq}} = k_{\text{cap}}\delta$ .

Por lo tanto,  $\lambda_{\text{eq}}$  es precisamente el valor del coeficiente de conductibilidad térmica del medio, para el cual a través de la capa intermedia se transmite mediante la conductibilidad térmica una cantidad igual de calor a la que se transmite en el caso de un proceso complejo de transmisión de calor. El valor de  $\lambda_{\text{eq}}$  se determina directamente mediante los datos aducidos en el cap. 3.

Al designar la relación  $\lambda_{\text{eq}}/\lambda$  por  $\varepsilon_c$  se puede llegar a las siguientes fórmulas de cálculo:

a) para las capas intermedias planas

$$\frac{Q}{F} = q = \left( \varepsilon_c \frac{\lambda}{\delta} + \alpha_{\text{rad}} \right) (t_{p1} - t_{p2}) = \varepsilon_c \frac{\lambda}{\delta} (t_{p1} + t_{p2}) + c_{\text{cap}} \left[ \left( \frac{T_{p1}}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{p2}}{100} \right)^4 \right]; \quad (6-19)$$

b) para las capas intermedias cilíndricas

$$\frac{Q}{l} = q_1 = \frac{2\pi\varepsilon_c\lambda}{\ln \frac{d_2}{d_1}} (t_{p1} - t_{p2}) + c_{\text{cap}}\pi d_1 \left[ \left( \frac{T_{p1}}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{p2}}{100} \right)^4 \right]. \quad (6-20)$$

El valor de  $\varepsilon_c$  se toma de la gráfica de la fig. 3-31 o se calcula según las fórmulas (3-44) y (3-45).

Si es necesario determinar la transferencia de calor sólo a través de la capa intermedia, entonces el cálculo efectuado mediante las fórmulas (6-19) y (6-20) da el resultado final. Pero si la capa intermedia representa solamente una parte de la pared compleja, entonces, para tener la posibilidad de realizar el cálculo conforme a las fórmulas para una pared de capas múltiples, es necesario determinar el coeficiente efectivo de conductibilidad térmica  $\lambda_{\text{ef}}$  de la capa intermedia teniendo en cuenta la transmisión de calor mediante radiación. Para las capas intermedias planas este coeficiente se determina por la fórmula:

$$\lambda_{\text{ef}} = \frac{Q\delta}{F(t_{p1} - t_{p2})} = \left( \varepsilon_c \frac{\lambda}{\delta} + \alpha_{\text{rad}} \right) \delta = \varepsilon_c\lambda + \alpha_{\text{rad}}\delta \quad (6-21)$$

y para las cilíndricas,

$$\lambda_{\text{ef}} = \varepsilon_c\lambda + \frac{\alpha_{\text{rad}}d_1}{2} \ln \frac{d_2}{d_1}. \quad (6-22)$$

Si las capas intermedias están llenas con un líquido de goteo, los segundos términos en las fórmulas (6-21) y (6-22) que consideran la influencia de la radiación térmica se eliminan; en este caso  $\lambda_{\text{ef}} = \varepsilon_c\lambda$ . Pero en las capas intermedias de aire la influencia relativa de la radiación térmica puede ser importante. Por lo tanto si éstas se destinan a disminuir las pérdidas térmicas, es necesario que la radiación térmica sea mínima. Esto se puede lograr reduciendo la radiación de las paredes. Sin embargo el medio más eficaz en este caso son las pantallas de cualquier material fino (hojalata u hoja metálica). Entonces, puesto que las pantallas reducen la intensidad del movimiento de convección del gas, por lo común, disminuye también la transferencia de calor por convección. Tal método encontró amplia aplicación en el aislamiento de vagones frigoríficos, aviones, naves, etc. Como pantalla se toma, normalmente, una hoja de



aluminio que se coloca en capas regulares o en forma arrugada (fig. 6-11). Las ventajas de dicho aislamiento térmico son su alta eficacia y su pequeña masa.

**Ejemplo 6-3.** Determinar la densidad del flujo calorífico a través de una pared cuya parte fría lleva nervios, siendo el coeficiente de costillaje  $F_2/F_1 = 13$ . El espesor de la pared  $\delta = 10$  mm y el coeficiente de conductibilidad térmica del material  $\lambda = 40$  W/(m·°C). Los coeficientes de traspaso del calor son  $\alpha_1 = 200$  y  $\alpha_2 = 10$  W/(m²·°C) y las temperaturas,  $t_{f11} = 75^\circ\text{C}$  y  $t_{f12} = 15^\circ\text{C}$ , respectivamente.

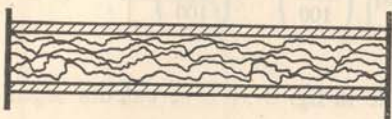
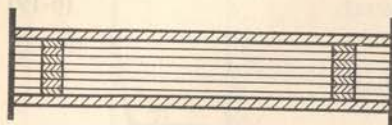


Fig. 6-11. Métodos para colocar hojas de aluminio en los espacios aéreos con el fin de reducir la transmisión de calor.

Determinemos inicialmente el coeficiente de termotransferencia según la fórmula (e)

$$k_1 = \frac{1}{\frac{1}{200} + \frac{0,01}{40} + \frac{1}{10 \cdot 13}} = \frac{1}{0,002 + 0,00025 + 0,0077} = \frac{1}{0,013} = 77 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)};$$

y la densidad del flujo calorífico, según la fórmula (f):

$$q_1 = k_1(t_{f11} - t_{f12}) = 77(75 - 15) = 4620 \text{ W/m}^2.$$

Si no hubiese nervios, tendríamos

$$k = \frac{1}{1/200 + 0,01/40 + 1/10} = \frac{1}{0,005 + 0,00025 + 0,1} = \frac{1}{0,10525} = 9,5 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}.$$

Así, pues el costillaje de la superficie permite aumentar la termotransferencia en más de 8 veces.

#### 6-4. Intensificación de los procesos de termotransferencia

Al resolver los problemas prácticos de termotransferencia en unos casos es necesario intensificar el proceso y en otros, por el contrario, frenarlo con todos los medios. Las posibilidades de llevar a cabo estos requerimientos emanan de las regularidades con que transcurren los principales métodos de transmisión de calor examinados en los capítulos anteriores.

La resistencia térmica de una pared se puede reducir disminuyendo el espesor de la pared y aumentando el coeficiente de conductibilidad térmica del material; la emisión calorífica por contacto se puede intensificar mezclando el líquido y aumentando la velocidad del movimiento; durante la radiación térmica la emisión de calor se intensifica mediante el aumen-

to del grado de radiación integral y de la temperatura de la superficie emisora.

El problema de los métodos mediante los cuales se intensifica el proceso de termotransferencia es mucho más complicado y su solución correcta sólo puede obtenerse sobre la base de un cuidadoso análisis de las condiciones particulares de la termotransferencia.

En calidad de ejemplo examinemos la fórmula del coeficiente de termotransferencia para una pared plana. Si se desprecia la resistencia térmica de la pared, es decir, se supone que  $\delta/\lambda = 0$ , entonces la fórmula (6-5) toma la forma:

$$k_0 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad (a)$$

de donde se deduce que el coeficiente de termotransferencia siempre es menor que el coeficiente de traspaso del calor por pequeño que éste sea.

En realidad, supongamos que  $\alpha_1 = 40$  y  $\alpha_2 = 5000$  W/(m²·°C), entonces  $k_0 = 39,7$  W/(m²·°C). El aumento de  $\alpha_2$  en la práctica no se reflejará de ningún modo en la magnitud  $k_0$ : cuando  $\alpha_1 = 40$  y  $\alpha_2 = 10\,000$  W/(m²·°C),  $k_0 = 39,8$  W/(m²·°C). Un cambio considerable de  $k_0$  se puede obtener solamente al alterar el menor valor de  $\alpha$ , en el caso dado  $\alpha_1$ . Si, por ejemplo,  $\alpha_2 = 5000$  y  $\alpha_1 = 80$  W/(m²·°C), entonces  $k_0 = 78,8$  W/(m²·°C); si se pone  $\alpha_1 = 200$  W/(m²·°C), entonces  $k_0 = 192$  W/(m²·°C).

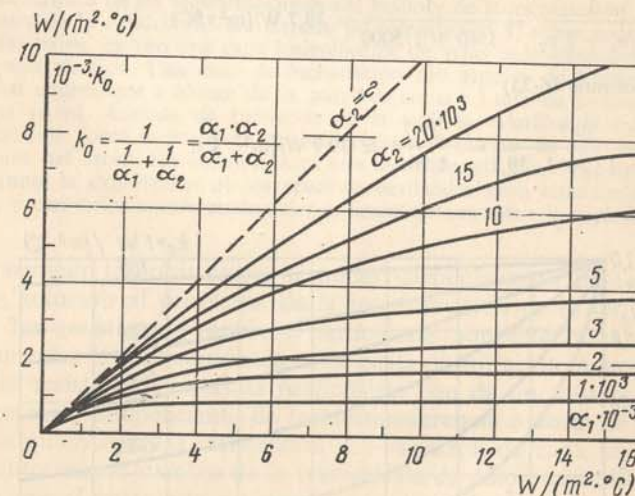


Fig. 6-12. Dependencia  $k_0 = f(\alpha_1, \alpha_2)$ .

La igualdad  $k_0 = f(\alpha_1, \alpha_2)$  se expone en la fig. 6-12; ésta muestra que con el aumento de  $\alpha_1$  el crecimiento relativamente rápido de  $k_0$  tiene lugar sólo hasta aquel momento en que  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  se igualen entre sí. Con el aumento ulterior de  $\alpha_1$  el crecimiento de  $k_0$  se decelera y luego prácticamente se termina por completo. Por consiguiente, si  $\alpha_1 \approx \alpha_2$ , entonces la transmisión de calor se puede intensificar, aumentando cada uno de  $\alpha$ . Pero, si  $\alpha_1 \ll \alpha_2$ , entonces se puede lograr la intensificación del proceso sólo aumentando el menor de éstos, en el caso dado,  $\alpha_1$ .



En el análisis que acabamos de realizar, para simplificar los cálculos, hemos aceptado la resistencia térmica de la pared igual a cero. En una serie de casos esto se permite hacer también en los cálculos técnicos, sin embargo siempre es necesario conocer el error cometido durante este cálculo. Supongamos que para cualquier caso concreto  $k_0 = \frac{1}{1/\alpha_1 + 1/\alpha_2}$ . Si se toma en consideración la resistencia térmica del muro  $\delta/\lambda$ , entonces cambiará el valor del coeficiente de termotransferencia:

$$k = \frac{1}{1/\alpha_1 + 1/\alpha_2 + \delta/\lambda} = \frac{1}{1/k_0 + \delta/\lambda} \quad (b)$$

Al dividir ambos miembros de esta igualdad por  $k_0$ , obtenemos:

$$\frac{k}{k_0} = \frac{1}{1 + \frac{\delta}{\lambda} k_0} \quad (6-23)$$

Esta última ecuación está representada en la fig. 6-13 en forma de curvas, en la que sobre el eje de las abscisas está trazado el valor de  $\delta/\lambda$ ; sobre el eje de las ordenadas,  $k/k_0$ , y el valor de  $k_0$  se ha elegido como parámetro. En la figura se ve que al aumentar la resistencia térmica de la pared el valor de  $k$  disminuye tanto más fuertemente, cuanto mayor es el valor inicial de  $k_0$ . Con el fin de ilustrar esta deducción examinaremos varios ejemplos numéricos. Sea dado un intercambiador de calor en que se calienta el agua; en el lado en que se halla el agua  $\alpha_2 = 5000 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}$ . El espesor de la pared de acero del aparato es  $\delta = 3 \text{ mm}$  y  $\lambda = 30 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$ ; por consiguiente,  $\delta/\lambda = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot ^\circ\text{C/W}$ .

a) Si el calentamiento se hace con gas y  $\alpha_1 = 40 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}$ , entonces

$$k_0 = \frac{1}{1/\alpha_1 + 1/\alpha_2} = \frac{1}{1/40 + 1/5000} = 39,7 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}$$

y según la fórmula (6-23)

$$k = \frac{39,7}{1 + 1 \cdot 10^{-4} \cdot 39,7} = \frac{39,7}{1,004} \approx 39,7 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)},$$

es decir,  $k \approx k_0$ .

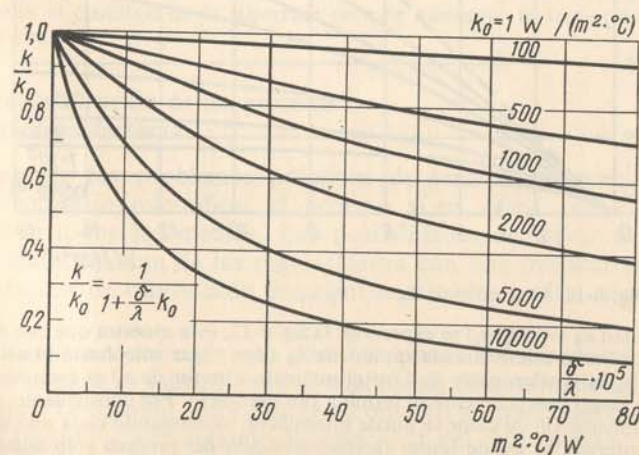


Fig. 6-13. Dependencia  $k = f(k_0, \delta/\lambda)$ .

b) Si el calentamiento se realiza con vapor que se condensa, y  $\alpha_1 = 10\,000 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}$ , entonces

$$k_0 = \frac{1}{1/10\,000 + 1/5000} = 3300 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}$$

y

$$k = \frac{3300}{1 + 0,333} = 2500 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)},$$

es decir,  $k = 0,75 k_0$ .

c) Si el calentamiento se efectúa con vapor que se condensa, pero la pared de acero está sustituida por una de cobre [ $\lambda = 300 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$ ] del mismo espesor, entonces

$$\delta/\lambda = 0,003/300 = 1 \cdot 10^{-5} \text{ (m}^2 \cdot ^\circ\text{C)/W}; \quad k_0 = 3300 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}$$

y

$$k = \frac{3\,300}{1 + 1 \cdot 10^{-5} \cdot 3300} = 3240 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)},$$

es decir,  $k = 0,97 k_0$ .

Estos resultados los obtendremos también según las curvas de la fig. 6-13.

De los ejemplos citados se deduce que, si existen grandes valores de  $k_0$ , no se puede despreciar de la resistencia térmica de la pared. Por eso en los cálculos técnicos es necesario analizar de modo correspondiente su influencia. Estas deducciones son aplicables para apreciar la influencia tanto de la resistencia térmica del mismo muro, como la de la resistencia térmica de las sedimentaciones del hollín y de la incrustación. Puesto que los coeficientes de la conductibilidad térmica de incrustación y, sobre todo, del hollín tienen valores bajos, incluso una capa insignificante de estas sedimentaciones ocasiona gran resistencia térmica. Una capa de incrustación con espesor de 1 mm tiene resistencia térmica equivalente a 40 mm de la pared de acero y 1 mm de hollín, a 400 mm de la misma pared. Además de reducción de la emisión calorífica la sedimentación de la incrustación sobre la pared es también perniciosa porque en este caso aumenta la temperatura del muro. En algunos casos esta circunstancia puede causar una avería. Por eso durante la explotación de los aparatos destinados para intercambio térmico, es necesario preservarlos contra cualesquier sedimentaciones sobre la superficie de calefacción.

Al determinar las resistencias térmicas particulares es fácil encontrar también la solución al problema de la intensificación de la termotransferencia. Si las resistencias térmicas particulares son diferentes, entonces, a fin de aumentar la transmisión de calor basta disminuir la mayor de éstas. Si todas las resistencias térmicas particulares son de un mismo orden, es posible aumentar el coeficiente de termotransferencia a costa de la reducción de cualquiera de las resistencias. La variación de cada una de ellas provoca tanto mayor cambio de la transmisión de calor, cuanto mayor es la relación inicial entre esta resistencia térmica y las demás resistencias. En la resolución del problema planteado tiene gran importancia una composición correcta de la superficie de calefacción. La última debe ser tal, que las condiciones reales de la transmisión de calor correspondan a la tarea y no empeoren en transcurso de la explotación.

De lo antes expuesto se evidencia que es posible detectar el mayor obstáculo en la transmisión de calor y planear los métodos de su eliminación sólo a base del conocimiento y del análisis de las resistencias térmicas



particulares. Pero el conocimiento solamente del coeficiente de termotransferencia o de la resistencia térmica total no da nada en este sentido. Por eso, al exponer el curso no nos hemos limitado exclusivamente al análisis de los procesos de transmisión de calor y la recomendación de los valores de  $k$ , sino que hemos examinado de modo detallado las condiciones particulares del intercambio de calor.

En realidad, supongamos que hay dos intercambiadores de calor completamente iguales. Después de ensayarlos resultó que para uno de ellos el valor del coeficiente de termotransferencia es  $k_1$  y para el otro,  $k_2$  y que  $k_1 > k_2$ . Si disponemos solamente de estos datos es imposible determinar la causa del mal trabajo de uno de estos dispositivos. Por eso todos los ensayos de los intercambiadores de calor deben realizarse de tal modo que, además del coeficiente de termotransferencia  $k$ , podrían obtenerse los valores para todas las componentes de sus magnitudes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_p$ ,  $\delta_p$ , etc. El conocimiento de estas magnitudes permite aclarar la causa de mal funcionamiento de un intercambiador de calor, planear las medidas de su reconstrucción, generalizar los resultados del experimento y aplicarlos a otros dispositivos análogos al ensayado.

Pero, para determinar los valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , aparte de las temperaturas de los líquidos caliente y fría, es necesario conocer la temperatura de la pared, o sea, la de la superficie de cambio de calor. Al probar las instalaciones que se encuentran en funcionamiento no siempre es posible o es muy difícil medir la temperatura de la pared en condiciones de producción. En tales casos experimentalmente se determina sólo el coeficiente de termotransferencia  $k_1$ , pero los valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  se establecen, a partir de las regularidades ya conocidas para los fenómenos elementales del intercambio de calor.

## 6-5. Aislamiento térmico

Si es necesario reducir la transmisión de calor se debe aumentar la resistencia térmica. Para esto es suficiente aumentar cualquiera de las resistencias térmicas particulares, lo que se puede hacer de diferente modo. En la mayoría de los casos esto se logra, colocando una capa del aislamiento térmico sobre la pared.

1. *Tipos de aislamiento.* Se llama aislamiento térmico a cualquier recubrimiento auxiliar que contribuye a reducir las pérdidas de calor hacia el medio ambiente. La destinación especial del aislamiento puede ser diferente: economía de combustible, creación de la posibilidad de realizar procesos tecnológicos, o aseguramiento de las condiciones sanitarias de trabajo. El modo de elegir y calcular el aislamiento debe ser diferente en cada caso concreto. En el primer caso prevalecen las consideraciones del carácter económico y en el segundo y el tercero, los requisitos de tecnología e higiene pública.

Para el aislamiento térmico se puede usar cualesquier materiales de conductibilidad térmica baja. Sin embargo, aislantes se llaman precisamente a los materiales cuyo coeficiente de conductibilidad térmica a una temperatura de 50 a 100°C es menor que 0,2 W/(m·°C). Muchos mate-

riales aislantes se toman en su estado natural, por ejemplo, asbesto, mica, madera, corcho, serrín, turba, tierra, etc., pero la mayoría de éstos se obtiene como resultado de una elaboración especial de materiales naturales y en realidad son diferentes mezclas. Dependiendo de la tecnología de elaboración o del porcentaje de contenido de sus componentes individuales, las propiedades aislantes de dichos materiales varían. A los materiales de aislamiento friables casi siempre se les agregan ligadores que empeoran sus propiedades aislantes.

El surtido de los materiales aislantes es muy variado. Muchos de éstos llevan nombres especiales, por ejemplo, algodón mineral, zonolita, asbuzurita, mica amiantada, newvel, sovelita, etc. El algodón mineral se obtiene fundiendo escoria y luego dispersándola mediante un chorro de vapor. La zonolita se obtiene de la vermiculita (especie de mica), calcinándola a una temperatura de 700 a 800°C. La mica amiantada es una mezcla de asbesto con partículas de mica. La sovelita es un producto de industria química. Una gran aplicación obtuvo el así llamado aislamiento de aluminio en hojas. En éste como aislador se usa el aire y toda la tarea se reduce al hecho de bajar el coeficiente de convección y disminuir la emisión de calor por radiación que se logra, colocando una pantalla formada por una hoja de aluminio (fig. 6-11). El coeficiente de conductibilidad térmica de los materiales depende en alto grado de su porosidad. Cuanto mayor es su porosidad, tanto menor es el valor del coeficiente efectivo de conductibilidad térmica. La magnitud de la densidad del material permite juzgar de su porosidad, con el aumento de la porosidad disminuye la densidad del material.

Cuando se elige una sustancia para aislamiento es necesario tener en cuenta las propiedades mecánicas de los materiales, así como su capacidad de absorber la humedad y de soportar altas temperaturas. Si el objeto que se aísla, tiene alta temperatura, por lo común, se usa un aislamiento de capas múltiples: inicialmente se coloca el material que soporta altas temperaturas, por ejemplo, el asbesto, y luego el material más eficaz desde el punto de vista de sus propiedades aislantes, por ejemplo, el corcho. En este caso el espesor de la capa de asbesto se elige partiendo de la condición de que la temperatura en el corcho no sea más de 80°C. El aislamiento de objetos situados en locales húmedos y de bajas temperaturas constituye un problema serio. Si el material se satura de agua sus propiedades aislantes se reducen bruscamente. Para contrarrestar el desarrollo de este fenómeno se toman normalmente medidas especiales.

Hasta ahora hemos hablado de las propiedades aislantes de los materiales tomados por separado. Pero cuando un material se coloca sobre el objeto, debido a las impurezas que contiene y al método de aplicación, las propiedades aislantes del material cambian. En este caso la correcta noción del aislamiento nos la da no el coeficiente de conductibilidad térmica del material, sino el coeficiente de conductibilidad térmica de toda la construcción. Este último coeficiente tiene gran importancia práctica y se determina de modo aproximado mediante un cálculo. Sin embargo, sólo experimentalmente es posible determinar su valor preciso. El experimento puede realizarse tanto en un laboratorio, como en las condiciones



de producción. Para calcular el aislamiento térmico se usan, generalmente, las fórmulas de termotransferencia que hemos examinado en detalle anteriormente; todo lo dicho allí acerca de las simplificaciones conserva por completo su valor para este caso. Al realizar el cálculo del aislamiento debe llevarse el orden siguiente. Primero se determinan las pérdidas de calor admisibles para el objeto que tiene el aislamiento. Luego se elige el tipo de aislamiento y, al suponer la temperatura en la superficie del aislamiento, se determina la temperatura media de éste  $t_{ais}$ , a partir de la cual se determina el valor que le corresponde al coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda_{ais}$ . En el cálculo del aislamiento se puede prescindir de la resistencia térmica de la emisión calorífica desde el líquido caliente hacia el muro y la de la misma pared. Se puede considerar que la temperatura de la superficie a aislar en este caso es igual a la temperatura del líquido caliente. Conociendo las temperaturas de las superficies interior y exterior del aislamiento y el coeficiente de conductibilidad térmica, se determina el espesor necesario del aislamiento  $\delta_{ais}$ . Después se lleva a cabo un cálculo de comprobación y se determinan los valores de la temperatura media de la capa aislante y los de temperatura de la superficie. Si estas últimas se diferencian mucho del valor aceptado previamente, todo el cálculo se repite de nuevo, planteando un nuevo valor para la temperatura de la superficie de aislamiento. Este método se aplica hasta que la diferencia entre las temperaturas esté dentro de los límites admisibles.

Cuando la emisión calorífica ocurre en las condiciones de convección libre y el medio ambiente tiene una temperatura  $t_{f12} = 20^\circ\text{C}$  se puede determinar el espesor del aislamiento de las tuberías, con precisión de hasta el 3–5%, según la fórmula [67]

$$\delta_{ais} = 2,75 \frac{d_1^{1,2} \lambda_{ais}^{1,35} t_{p1}^{1,73}}{q_1^{1,5}}, \quad (6-24)$$

donde  $\delta_{ais}$  es el espesor del aislamiento, en mm;

$d_1$  es el diámetro de la tubería, en mm;

$t_{p1}$  es su temperatura;

$\lambda_{ais}$  es el coeficiente de conductibilidad térmica del aislamiento;

$q_1$  es la densidad lineal del flujo calorífico.

En la fig. 6-14 viene dada la gráfica con ayuda de la cual es posible encontrar, sin necesidad de recurrir a cálculos, los valores de  $d_1^{1,2}$ ,  $\lambda_{ais}^{1,35}$ ,  $t_{p1}^{1,73}$  y  $q_1^{1,5}$ . Si la temperatura del medio ambiente es mayor que  $20^\circ\text{C}$ , las pérdidas de calor disminuyen aproximadamente el 1,5% para cada  $5^\circ\text{C}$  de aumento de la temperatura.

2. *Condiciones que deben cumplirse para elegir racionalmente el material destinado al aislamiento térmico de tuberías.* Al cubrir una tubería con aislamiento térmico, las pérdidas de calor no se reducen proporcionalmente al aumento del espesor de aislamiento, es más si la elección del material aislante es incorrecta las pérdidas de calor crecerán. Esto se debe a que en la tubería cubierta con aislamiento aumenta su superficie exterior lo que

mejora las condiciones de evacuación de calor. El análisis muestra que el material aislante está elegido correctamente, si  $\lambda_{ais}$  satisface la desigualdad

$$\lambda_{ais} < \alpha_2 d_2 / 2, \quad (6-25)$$

donde  $d_2$  es el diámetro exterior de la tubería y

$\alpha_2$  es el coeficiente de traspaso del calor desde la superficie exterior hacia el medio ambiente.

La condición mencionada puede comprenderse si examinamos la resistencia térmica total de termotransferencia de la tubería que lleva una capa aislante (fig. 6-15):

$$R_l = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_p} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{2\lambda_{ais}} \ln \frac{d_{ais}}{d_2} + \frac{1}{\alpha_2 d_{ais}}$$

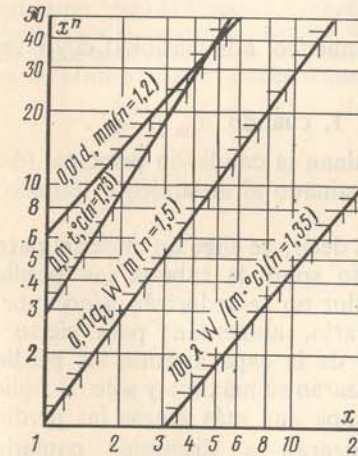


Fig. 6-14. Gráfico auxiliar para determinar  $d_1^{1,2}$ ,  $t_1^{1,73}$ ,  $q_1^{1,5}$  y  $\lambda_1^{1,35}$ .

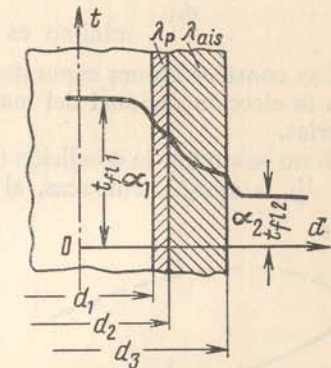


Fig. 6-15. Tubería con aislamiento de una capa.

La resistencia térmica total de la transmisión de calor de la tubería antes de cubrirla con una capa de aislamiento era:

$$R_{l0} = \frac{1}{\alpha_1 d_1} + \frac{1}{2\lambda_p} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\alpha_2 d_2}$$

La comparación de las magnitudes  $R_l$  y  $R_{l0}$  muestra que al aplicar el aislamiento la resistencia térmica cambia en la magnitud

$$\Delta R_l = R_l - R_{l0} = \frac{1}{2\lambda_{ais}} \ln \frac{d_{ais}}{d_2} - \frac{1}{\alpha_2} \left( \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_{ais}} \right). \quad (a)$$

Esta correlación muestra que al colocar el aislamiento la resistencia térmica de la capa aislante  $\frac{1}{2\lambda_{ais}} \ln \frac{d_{ais}}{d_2}$  crece y contribuye a la reducción



de las pérdidas de calor, pero simultáneamente disminuye en la magnitud  $\frac{1}{\alpha_2} \left( \frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_{ais}} \right)$  la resistencia térmica de la emisión calorífica hacia el medio ambiente debido al aumento de la superficie exterior ( $d_{ais} > d_2$ ).

Para disminuir las pérdidas de calor es necesario que la resistencia térmica de la tubería aislada  $R_I$  sea mayor que la de no aislada  $R_{I0}$  es decir,

$$\Delta R_I > 0. \quad (b)$$

Al introducir en la correlación (b) el valor  $\Delta R_I$ , de la igualdad (a), y al resolver la última desigualdad respecto a la magnitud  $\lambda_{ais}$ , obtenemos:

$$\lambda_{ais} < \frac{1}{2} \alpha_2 d_2 k,$$

donde  $k = \frac{\ln \frac{d_{ais}}{d_2}}{1 - \frac{d_2}{d_{ais}}}$  es un coeficiente numérico adimensional cuyo valor mínimo es igual a 1, cuando  $d_{ais} \rightarrow d_2^{1)}$ .

Las consideraciones expuestas determinan la condición principal (6-25) para la elección racional del material destinado al aislamiento térmico de tuberías.

Si no se cumple la condición (6-25), es decir, se elige un material para el cual  $\lambda'_{ais} > \alpha_2 d_2 / 2$ , entonces, al colocarlo sobre la tubería las pérdidas

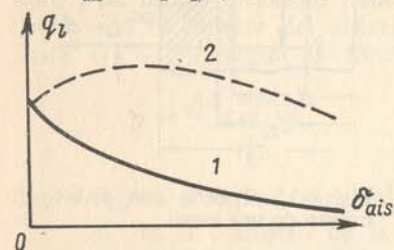


Fig. 6-16. Dependencia entre las pérdidas térmicas de la tubería  $q_l$  y el espesor de la capa de aislamiento  $\delta_{ais} = 0,5 \cdot (d_{ais} - d_2)$  para una elección racional (1) y para una incorrecta (2), del material de aislamiento.

de calor no se reducirán, sino, por el contrario, aumentan; para cierto espesor de la capa aislante las pérdidas alcanzarán su máximo y sólo al aplicar una capa aun más gruesa las pérdidas comenzarán a disminuir paulatinamente. En la fig. 6-16 se muestra cómo se cambian las pérdidas de calor en la tubería  $q_l$ , dependiendo del espesor de la capa  $\delta_{ais} = 0,5 (d_{ais} - d_2)$  para los casos en que se ha realizado una elección racional y una errónea del material de aislamiento.

Las pérdidas máximas de calor cuando hay una elección incorrecta del material aislante tienen lugar, si el diámetro toma el valor de

$$d'_{ais} = 2 \frac{\lambda'_{ais}}{\alpha_2}. \quad (c)$$

<sup>1)</sup> Cuando  $d_{ais} \rightarrow d_2$ , la magnitud  $\ln \frac{d_{ais}}{d_2} = \frac{d_{ais} - d_2}{d_2}$ , por consiguiente,  $k = \frac{d_{ais}}{d_2} \rightarrow 1$ .

Esta correlación se obtiene después de diferenciar la expresión (a) con respecto a  $d_{ais}$  e igualar la derivada a cero. El valor  $d'_{ais}$  que se determina de la igualdad (c) se llama a menudo “diámetro crítico de aislamiento térmico” (este nombre no es muy adecuado, puesto que en dicho caso el aislamiento está elegido incorrectamente).

**Ejemplo 6-4.** Es necesario cubrir con aislamiento térmico una tubería cuyo diámetro exterior  $d_2 = 15$  mm. ¿Será conveniente o no usar como material aislante el asbesto, si su coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda_{ais} = 0,1$  W/(m·°C)? El coeficiente de traspaso del calor de la superficie exterior al medio ambiente  $\alpha_2 = 8$  W/(m²·°C).

A base de la condición (6-25) tenemos:

$$\frac{\alpha_2 d_2}{2} = \frac{8 \cdot 0,015}{2} = 0,06 \text{ W/(m·°C)}.$$

Puesto que, a partir de las condiciones del problema  $\lambda_{ais} = 0,1$  W/(m·°C) y, por consiguiente, para el asbesto  $\lambda_{ais} > \alpha_2 d_2 / 2$ . En el caso dado no es conveniente usar este material para el aislamiento térmico de la tubería. De la condición principal (6-25) se deduce que aquí es necesario usar materiales para los cuales  $\lambda_{ais} < 0,06$  W/(m·°C) [por ejemplo, el filtro basto de lana en el que  $\lambda = 0,05$  W/(m·°C)].



## CONDUCTIBILIDAD TERMICA NO ESTACIONARIA

### 7-1. Descripción del proceso

Anteriormente se han examinado las condiciones de propagación del calor cuando el régimen era estacionario y cuando el campo de temperatura no variaba con el tiempo, sino que permanecía constante. Pero si el campo de temperatura varía con el tiempo, o sea, es una función del tiempo, entonces los procesos térmicos que transcurren en dichas condiciones, se llaman no estacionarios.

El carácter no estacionario de los procesos térmicos está condicionado por el cambio de entalpia del cuerpo, y siempre está ligado a los fenómenos de su calentamiento o enfriamiento. A título de ejemplo examinemos el caso siguiente. Un cuerpo se introduce en un medio cuya temperatura es más alta; inmediatamente entre el medio y el cuerpo surge un proceso de intercambio térmico y el cuerpo comienza a calentarse. Al principio se calientan las capas superficiales, pero paulatinamente el proceso de calentamiento se propaga también al interior del cuerpo. Las curvas en la fig. 7-1, *a*, muestran cómo varía la temperatura del cuerpo durante el calentamiento, en dichas curvas  $t_p$  es la temperatura de la superficie y  $t_0$  es la temperatura en el centro del cuerpo. Al pasar cierto tiempo (desde el punto de vista teórico ilimitadamente grande) la temperatura de todas las partes del cuerpo se iguala y comienza a ser idéntica a la del medio ambiente, es decir, se establece un equilibrio térmico.

En el régimen no estacionario la intensidad del suministro del calor tampoco es constante en transcurso del tiempo. La curva de la fig. 7-1, *b* nos da la noción de cómo varía esta magnitud. A medida que se calienta el cuerpo la intensidad de la transmisión de calor disminuye paulatinamente y en el límite tiende a cero. El área comprendida entre los ejes y la curva representa la cantidad total de calor transmitida en un tiempo  $\tau$ . Este calor lo acumula el cuerpo que lo consume para elevar su entalpia. De modo análogo transcurre también el proceso de enfriamiento del cuerpo; en este caso su entalpia disminuye y el calor liberado es transmitido al medio ambiente.

Como el segundo ejemplo examinemos el proceso de transmisión de calor a través de una pared. Supongamos que inicialmente el proceso fue estacionario; la temperatura del medio caliente,  $t'_{f1}$ ; la del frío,  $t'_{f2}$  y

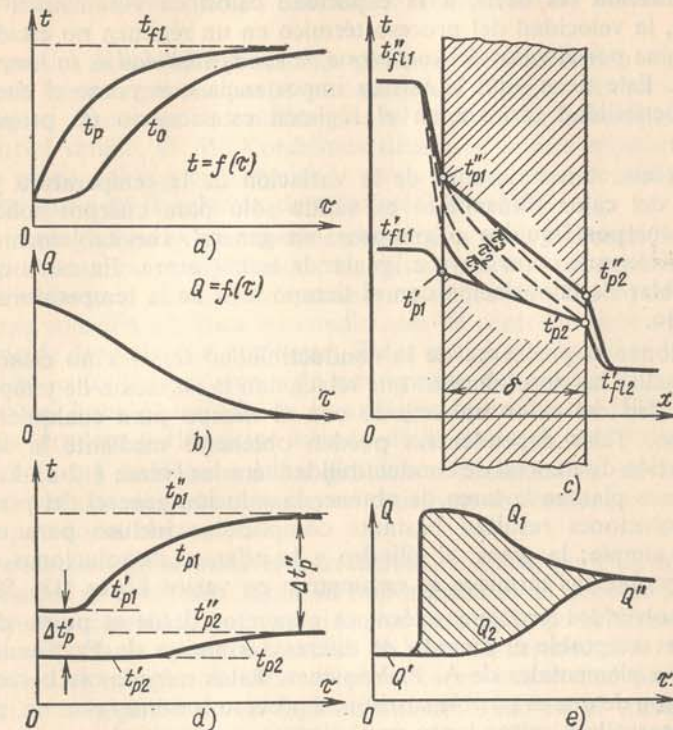


Fig. 7-1. Conductibilidad térmica en el régimen no estacionario: carácter de la variación de las temperaturas y de la cantidad de calor transmitido en el tiempo.

la de la pared,  $t'_{p1}$  y  $t'_{p2}$  (fig. 7-1, *c*). Si cambiamos ahora el régimen de transmisión de calor, por ejemplo, aumentamos bruscamente la temperatura del medio caliente hasta  $t'_{f1}$ , entonces pasado cierto tiempo el proceso dejará de ser estacionario. La curva de temperatura  $t'_{f1} - t'_{p1} - t'_{p2} - t'_{f2}$  cambiará hasta que se establezca de nuevo un régimen estacionario  $t''_{f1} - t''_{p1} - t''_{p2} - t''_{f2}$ . La variación de  $t_{p1}$  y  $t_{p2}$  con el tiempo se representa por separado en la fig. 7-1, *d*. Las curvas de la fig. 7-1, *e* dan la noción de cómo varía con el tiempo la cantidad de calor transmitido para el caso examinado. Aquí  $Q'$  y  $Q''$  son los flujos caloríficos en los regímenes estacionarios,  $Q_1$  y  $Q_2$  son los flujos caloríficos a través de las superficies caliente y fría en el régimen no estacionario. El elemento superficial sombreado representa la cantidad de calor que se gasta para cambiar la entalpia de la pared (calor acumulado).

De este modo el proceso térmico no estacionario siempre está ligado al cambio de la entalpia del cuerpo y además está condicionado por éste.



Puesto que la velocidad de variación de la entalpia es directamente proporcional a la capacidad del material de transmitir el calor (es decir, al coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda$ ) e inversamente proporcional a su poder de acumulación (es decir, a la capacidad calorífica volumétrica  $cp$ ), en definitiva, la velocidad del proceso térmico en un régimen no estacionario se determina por el valor del *coeficiente de conductibilidad de la temperatura*  $\alpha = \lambda/cp$ . Este tiene aquí la misma importancia que posee el coeficiente de conductibilidad térmica en el régimen estacionario de propagación del calor.

El carácter antes descrito de la variación de la temperatura y de la cantidad del calor transmitido es válido sólo para cuerpos sólidos. Al calentar cuerpos líquidos o gaseosos, en general, inevitablemente surge la convección que contribuye a igualar la temperatura. En estos casos se puede hablar de la variación con el tiempo sólo de la temperatura media del líquido.

Solucionar el problema de la conductibilidad térmica no estacionaria significa hallar las dependencias que relacionan la variación de temperatura y la cantidad del calor transmitido con el tiempo para cualquier punto del cuerpo. Tales dependencias pueden obtenerse mediante la solución de la ecuación diferencial de conductibilidad térmica (véase § 2-2). La teoría analítica nos plantea la tarea de obtener la solución general del problema. Dichas soluciones resultan bastante complicadas incluso para cuerpos de forma simple: la placa, el cilindro y la esfera. Las soluciones de una serie de problemas térmicos se encuentran en varios libros [18, 59, etc.].

Al resolver los problemas técnicos concretos desde el punto de vista práctico es aceptable el método de diferencias finitas de E. Shmidt o el de balances elementales de A. P. Vánichev. Estos métodos se basan sobre la suposición de que es posible sustituir el proceso continuo por un proceso que se desarrolla a saltos tanto en el tiempo, como en el espacio.

Cualquier proceso de calentamiento o enfriamiento de un cuerpo se puede dividir convencionalmente en tres regímenes. El primero de éstos abarca el comienzo del proceso, en el que como particularidad característica interviene la propagación de las perturbaciones térmicas en el espacio y la inclusión en este proceso de capas cada vez nuevas del cuerpo. La velocidad de variación de la temperatura en los puntos aislados es en este caso diferente y el campo de temperatura se encuentra en una dependencia fuerte del estado inicial que puede ser, hablando en general, diferente. Por eso el primer régimen caracteriza la etapa inicial en el desarrollo del proceso. Al pasar el tiempo, la influencia de las irregularidades iniciales se nivela y la velocidad relativa de variación de la temperatura en todos los puntos del cuerpo comienza a ser constante. Esto es el régimen del proceso ordenado. Después de transcurrir un tiempo prolongado (desde el punto de vista analítico, ilimitadamente grande) llega un tercer régimen estacionario, cuya particularidad característica es la distribución constante de temperaturas en el tiempo. Si además en todos los puntos del cuerpo la temperatura es la misma e igual a la temperatura del medio ambiente, entonces habrá estado de equilibrio térmico.

La solución analítica resulta complicada puesto que plantea el problema de obtener la dependencia común que relacione simultáneamente todos los tres regímenes. Si se evita hacer esto, la tarea se simplifica considerablemente. Precisamente este camino lo emprendieron muchos investigadores.

Al resolver numerosos problemas prácticos del enfriamiento y calentamiento de los cuerpos se puede prescindir del régimen primero o inicial del proceso. Entonces se analiza sólo el segundo que cumple una ley exponencial simple. G. M. Kondrátiev denominó a este régimen *regular*; creó su teoría del régimen regular y propuso una serie de métodos para usar esta teoría en la solución de tareas prácticas [40].

Al mismo tiempo existen considerables éxitos en la elaboración de métodos experimentales para solucionarlas. Estos pueden aplicarse a cuerpos de diversa forma y cualquier planteamiento de las condiciones de contorno (para una solución analítica las condiciones de contorno deben plantearse en forma de dependencias analíticas). Estos métodos se basan en la analogía que existe: entre los fenómenos de propagación del calor y el movimiento laminar del líquido, método de la analogía hidrotérmica [58]), entre los procesos térmicos y eléctricos, método de la analogía electrotérmica [21].

Actualmente también muchos problemas complicados de la conductibilidad térmica no estacionaria se resuelven exitosamente con ayuda de computadoras electrónicas.

La necesidad de calcular el intercambio de calor, para un régimen no estacionario, se determina según su importancia en el proceso de trabajo del conjunto calculado. Así, por ejemplo, en trabajo de calderas de vapor y en la mayoría de aparatos térmicos de las centrales eléctricas, el régimen no estacionario surge solamente al ponerlos en marcha, al pararlos y al cambiarles el régimen de su funcionamiento. Pero en el trabajo de los hornos de recalentar el régimen no estacionario es el fundamental: durante el cálculo resulta necesario determinar el tiempo que es imprescindible para calentar el metal a una temperatura dada o la temperatura que el metal obtendrá durante un intervalo determinado de tiempo.

## 7-2. Solución analítica

La ecuación diferencial de la conductibilidad térmica para los cuerpos sólidos tiene la forma:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right). \quad (7-1)$$

Para la solución analítica de esta ecuación es necesario plantear las dos siguientes condiciones de contorno: 1) la distribución inicial de la temperatura en el cuerpo; 2) la acción del medio ambiente sobre la superficie del cuerpo. La última condición se puede plantear mediante tres procedimientos.



a) En el primer procedimiento se da la temperatura de la superficie  $t_p$ ; en forma gráfica esta condición se expresa planteando el punto  $A$  (fig. 7-2, a). La cantidad de calor  $dQ$  que pasa a través de un elemento de la superficie

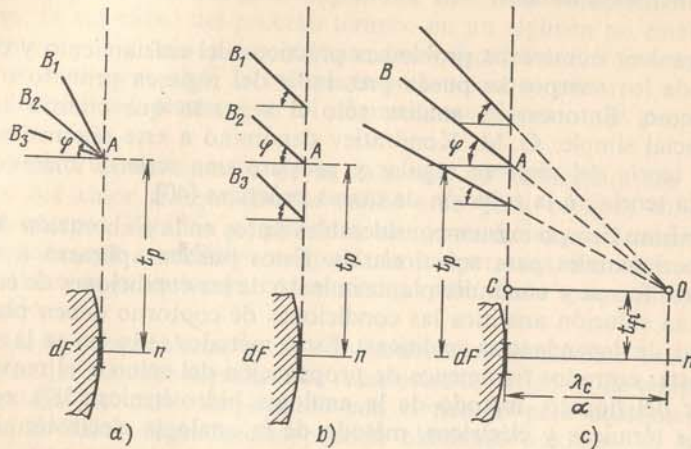


Fig. 7-2. Interpretación gráfica de los tres procedimientos usados para plantear las condiciones de frontera.

$dF$  en este caso no se conoce; en forma gráfica lo dicho se expresa por el hecho de que no se conoce la inclinación de la curva de la temperatura en el cuerpo, cerca de la superficie, es decir, el ángulo  $\varphi$  ( $\operatorname{tg} \varphi = -dt/dn$ ), puesto que, según la ley de Fourier, para cualquier momento de tiempo la cantidad de calor que fluye desde el interior del cuerpo hacia la superficie es igual a:

$$dQ = -\lambda_p \frac{\partial t}{\partial n} dF. \quad (a)$$

b) En el segundo procedimiento, por el contrario, se da la cantidad de calor que pasa a través de la superficie (es decir, a fin de cuentas, el ángulo  $\varphi$ ), pero no se conoce su temperatura  $t_p$  (fig. 7-2, b), es decir la posición del punto  $A$ .

c) Finalmente, en el tercer procedimiento se dan la temperatura del medio ambiente  $t_{f1}$  y el coeficiente de traspaso del calor entre el medio ambiente y la superficie  $\alpha$ . Puesto que para la cantidad de calor  $dQ$  que fluye desde el interior y que la superficie entrega al medio ambiente, aparte de la expresión (a), se puede escribir también la expresión basada sobre la ecuación de Newton—Richman [véase la ecuación (2-1)],

$$dQ = \alpha(t_p - t_{f1}) dF, \quad (b)$$

entonces, después de comparar las ecuaciones (a) y (b), tenemos:

$$-\frac{\partial t}{\partial n} = \frac{\alpha}{\lambda_p} (t_p - t_{f1}). \quad (7-2)$$

La ecuación (7-2) es la enunciación matemática de la condición de frontera de tercera especie. De la fig. 7-2, c tenemos:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{AC}{CO} = -\frac{\partial t}{\partial n} = \frac{t_p - t_{f1}}{\frac{\lambda_p}{\alpha}} = \frac{t_p - t_{f1}}{s}.$$

Por consiguiente, la condición de frontera de tercera especie determina el punto  $O$  por el cual tienen que pasar todas las tangentes a la curva de temperatura. Este punto se encuentra en la superficie del cuerpo. El punto  $O$  se llama director y se sitúa a la distancia  $s = \lambda_p/\alpha$  de la superficie. De este modo,  $s$  es la subtangente a la curva de temperatura y no depende de la forma de la superficie.

Como resultado de la solución de la ecuación (7-1) se debe hallar una función tal que simultáneamente satisfaga esta ecuación y las condiciones de contorno. La solución de la ecuación se realiza con ayuda de las series de Fourier. Para diferentes condiciones de contorno se obtienen resultados distintos, pero la metodología admitida para la solución es, en lo fundamental, igual. Para fines técnicos, en la mayoría de los casos, puede limitarse a estudiar el transcurso del proceso solamente en una dirección cualquiera  $x$ . En este caso la solución general toma la forma:

para la pared plana

$$t = bx + c + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\cos m_n x + p_n \operatorname{sen} m_n x) e^{-am_n^2 \tau}; \quad (7-3)$$

para la pared cilíndrica

$$t = b \ln r + c + \sum_{n=0}^{\infty} A_n[J_0(m_n r) + p_n Y_0(m_n r)] e^{-am_n^2 \tau}, \quad (7-4)$$

donde  $J_0$  e  $Y_0$  son las funciones de Bessel de primera y de segunda especies de orden cero.

Las constantes  $b$  y  $c$  se determinan de las condiciones de que el régimen es estacionario (cuando  $\tau = \infty$ ) y de que  $p_n$  y  $m_n$  son condiciones de frontera y  $A_n$ , condiciones iniciales (cuando  $\tau = 0$ ).

Aquí no se exponen detalladamente las soluciones; las descripciones matemáticas suficientemente completas de las soluciones se puede encontrar en [18 y 59]. Pero, a título de ejemplo, limitemos a analizar sólo los resultados finales de las soluciones para una placa, un cilindro y una esfera, cuando se da un cambio brusco de la temperatura del medio. De las ecuaciones (7-3) y (7-4) se deduce que la función buscada depende de un gran número de parámetros. Sin embargo, durante un análisis más detallado de las soluciones, resulta que es posible agrupar estas magnitudes en dos magnitudes adimensionales:  $\alpha/\lambda_p$  y  $\alpha\tau/l^2$ . Estas magnitudes son los números de semejanza y se obtienen de las ecuaciones (7-1) y (7-2):

$$\frac{\alpha_1}{\lambda_p} = \text{Bi es el número de Biot};$$

$$\frac{\alpha\tau}{l^2} = \text{Fo es el número de Fourier}.$$



De acuerdo con el segundo teorema de la teoría de semejanza (véase § 2-3) la función buscada en forma de la temperatura adimensional  $v/v'$  para los diferentes puntos homólogos  $x/l = L$  se puede representar en forma de una dependencia tal que:

$$\frac{v}{v'} = \Phi(\text{Bi}, \text{Fo}, L). \quad (7-5)$$

1. **Pared plana.** Supongamos que el espesor de una pared plana ilimitada es  $2\delta (l = \delta)$ . Si como origen de lectura de la temperatura se toma la temperatura del medio ambiente  $t_{f1}$  y la temperatura excesiva de la pared se designa con  $v = t_{f1} - t$ , entonces la ecuación (7-1) toma la forma:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (c)$$

Las condiciones de frontera son: cuando  $x = \pm \delta$ ,

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\alpha}{\lambda_p} v. \quad (d)$$

La condición inicial es: cuando  $\tau = 0$ ,

$$v = v'. \quad (e)$$

Durante la solución de problemas técnicos, en la mayoría de los casos, es suficiente conocer la temperatura en la superficie  $v_p$  y en el plano medio de la pared  $v_0$ . En este caso la ecuación (7-5) se simplifica, puesto que el argumento  $L$  se transforma en un número constante (cuando  $x = 0$ ,  $L = 0$  y, cuando  $x = \delta$ ,  $L = 1$ ). Por consiguiente,

$$\frac{v_p}{v'} = \Phi_p(\text{Bi}, \text{Fo}) \quad (f)$$

y

$$\frac{v_0}{v'} = \Phi_0(\text{Bi}, \text{Fo}). \quad (g)$$

Además de la distribución de las temperaturas con frecuencia es necesario conocer la cantidad de calor  $Q_\tau$  transmitida durante el tiempo  $\tau$ .

La relación entre  $Q_\tau$  y el calor  $Q'$  que puede ser desprendido (o absorbido) por el cuerpo durante el tiempo de su enfriamiento (o calentamiento) total, es también función de sólo dos números de semejanza  $\text{Bi}$  y  $\text{Fo}$ :

$$\frac{Q_\tau}{Q'} = \Phi_Q(\text{Bi}, \text{Fo}). \quad (h)$$

Las dependencias de (f) a (h) se exponen gráficamente en las figs. de 7-3 a las 7-5. Para determinar las magnitudes buscadas es necesario en primer lugar calcular los valores de los números de semejanza  $\text{Bi} = \alpha\delta/\lambda_p$  y  $\text{Fo} = \alpha\tau/\delta^2$ , según los cuales se determinan de las gráficas  $v/v'$  y  $Q_\tau/Q'$ .

Puesto que  $v'$  y  $Q'$  son conocidas pueden calcularse fácilmente también los valores de  $v_p$ ,  $v_0$  y  $Q$ . La magnitud  $Q' = c\rho\theta' 2\delta F$ , donde  $F$  es el área de la superficie lateral de la placa.

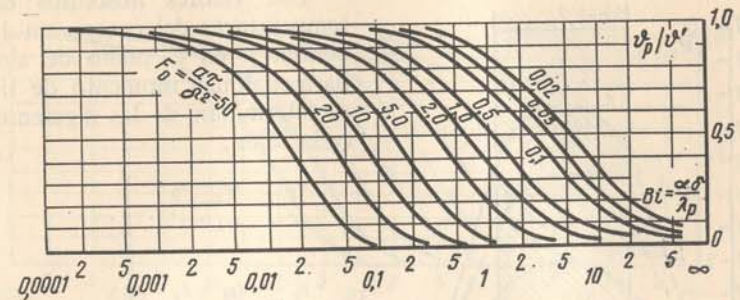


Fig. 7-3. Dependencia  $v_p/v' = \Phi_p(\text{Bi}, \text{Fo})$  para una pared plana ilimitada.

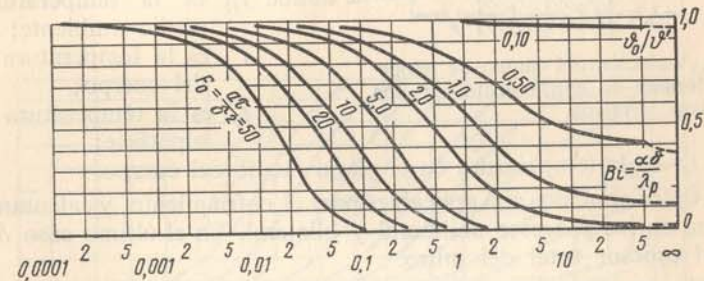


Fig. 7-4. Dependencia  $v_0/v' = \Phi_0(\text{Bi}, \text{Fo})$  para una pared plana ilimitada.

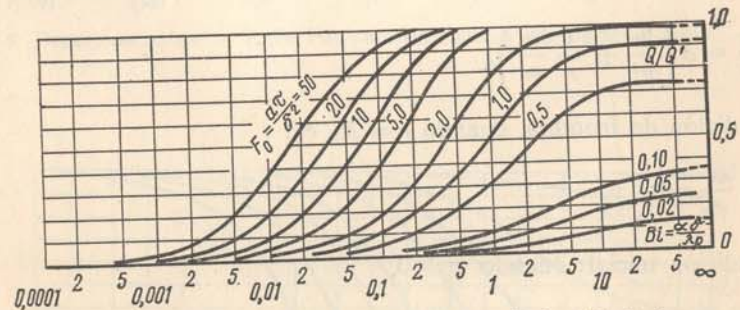


Fig. 7-5. Dependencia  $Q/Q' = \Phi_Q(\text{Bi}, \text{Fo})$  para una pared plana ilimitada.

Valiéndose de estos datos se puede trazar, de modo aproximado, toda la curva de distribución de la temperatura en el cuerpo, aprovechando el hecho de que se conoce la dirección de las tangentes a esta curva en tres puntos (fig. 7-6). En efecto, desde los puntos  $x = \pm \delta$  las tangentes pasan a través de los puntos directores  $O$  y  $O_1$ , los cuales están situados a una distancia  $\pm \lambda_p/\alpha$  de la pared. Pero en el punto  $x = 0$  la tangente



es horizontal debido a la simetría de la curva de temperatura ( $\partial v / \partial x = 0$ ). De dicho modo se puede trazar la curva de distribución de temperatura para el cuerpo en cualquier momento de tiempo  $\tau$ .

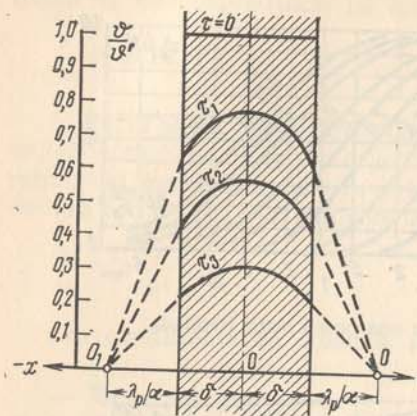


Fig. 7-6. Variación del campo de temperatura durante el enfriamiento de una pared plana ilimitada.

Los valores absolutos de las temperaturas del cuerpo en la superficie y en el plano de simetría para cualquier momento de tiempo se determinan de las siguientes correlaciones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_p}{v'} &= \frac{t_{f1} - t_p}{t_{f1} - t'} \\ \frac{v_0}{v'} &= \frac{t_{f1} - t_0}{t_{f1} - t'} \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

donde  $t_{f1}$  es la temperatura del medio ambiente;

$t'$  es la temperatura inicial del cuerpo;

$t_p$  es la temperatura de la superficie;

$t_0$  es la temperatura en el plano medio del cuerpo.

Los datos aducidos son aplicables para el enfriamiento y calentamiento, así como en los procesos unilateral y bilateral. En el último caso  $\delta$  significará el espesor total del muro.

2. **Cilindro.** Para un cilindro ilimitadamente largo (barra), cuyo radio es  $R$ , la ecuación diferencial de la conductibilidad térmica tiene la forma:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (k)$$

la condición de frontera, cuando  $r = R$ , es:

$$-\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\alpha}{\lambda_p} v; \quad (l)$$

la condición inicial: cuando  $\tau = 0$ ,

$$v = v'. \quad (m)$$

La solución con respecto a  $v_p/v'$ ,  $v_0/v'$  y  $Q/Q'$  también es función de sólo dos números de semejanza:  $Bi = \alpha R / \lambda_p$  y  $Fo = \alpha \tau / R^2$ . Estas dependencias se representan gráficamente en las figs. 7-7, 7-8 y 7-9.

La magnitud  $Q'$  para un tramo del cilindro cuya longitud sea  $l$ , será igual a:

$$Q' = \pi R^2 c_p l v'. \quad (n)$$

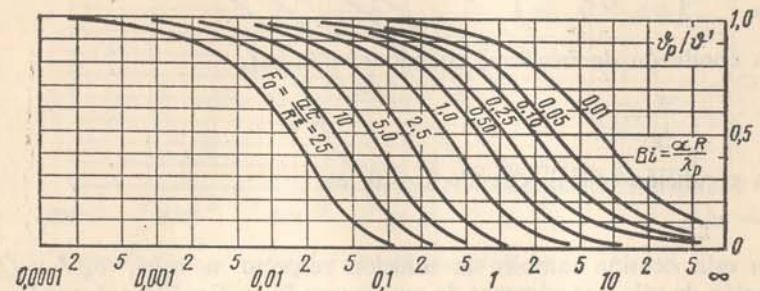


Fig. 7-7. Dependencia  $v_p/v' = \Phi_p(Bi, Fo)$  para un cilindro infinitamente largo.

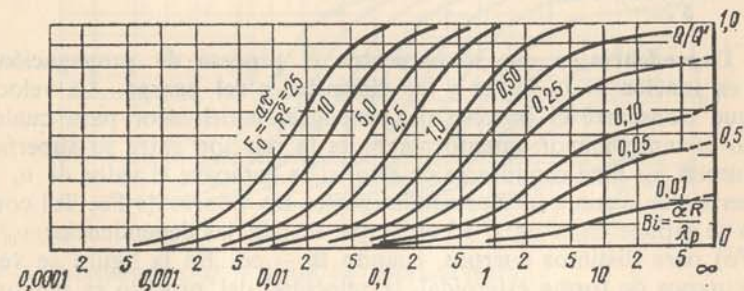


Fig. 7-8. Dependencia  $v_0/v' = \Phi_0(Bi, Fo)$  para un cilindro infinitamente largo.

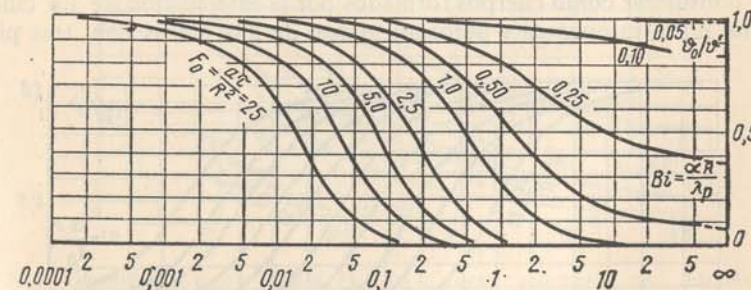


Fig. 7-9. Dependencia  $Q/Q' = \Phi_Q(Bi, Fo)$  para el cilindro infinitamente largo.



3. **Esfera.** Para una esfera de radio  $R$  la ecuación diferencial tiene la forma:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right). \quad (o)$$

La condición de frontera, cuando  $r = R$ , es:

$$-\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\alpha}{\lambda_p} v. \quad (p)$$

La condición inicial, cuando  $\tau = 0$ , es:

$$v = v'. \quad (r)$$

En esta ocasión también la solución respecto a  $v_p/v'$ ,  $v_0/v'$  y  $Q/Q'$  es función de sólo dos números de semejanza:  $Bi$  y  $Fo$ . Estas dependencias se representan gráficamente en las figs. 7-10, 7-11 y 7-12. La magnitud  $Q'$  para la esfera es igual a:

$$Q' = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho c v'. \quad (s)$$

4. **Dependencia en que se encuentra el proceso de propagación del calor en función de la forma y las dimensiones del cuerpo.** La velocidad con que transcurre el proceso de propagación del calor para cualquier cuerpo es tanto mayor, cuanto mayor es la relación entre su superficie y el volumen. Es fácil cerciorarse de esto, si se compara el valor de  $v_0$  para los cuerpos de distinta forma, siendo iguales los valores de  $Fo$ . Tal comparación se expone en la fig. 7-13 en la que se dan las dependencias  $v_0/v' = f(Fo)$  para distintos cuerpos, cuando  $Bi \rightarrow \infty$ . En la figura se ve que para cuerpos de forma esferoidal, la velocidad del proceso es mayor que para cualesquiera otros. Para los cuerpos cilíndricos y prismáticos la velocidad del proceso depende en gran medida de su longitud. Cuanto menor es su longitud, tanto mayor será su velocidad.

A los cilindros cortos, prismas y paralelepípedos rectangulares se les puede considerar como cuerpos formados por la intersección de un cilindro con una placa mutuamente perpendiculares, de dos placas con tres placas

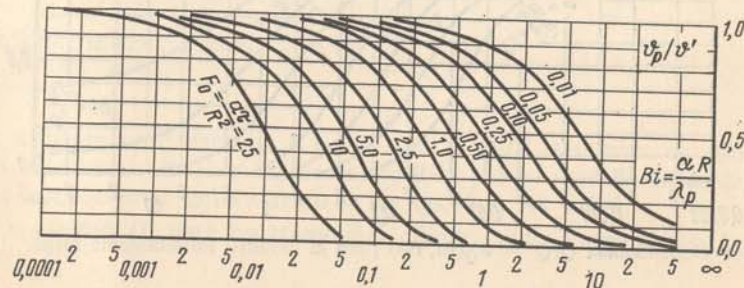


Fig. 7-10. Dependencia  $v_p/v' = \Phi_p(Bi, Fo)$  para una esfera.

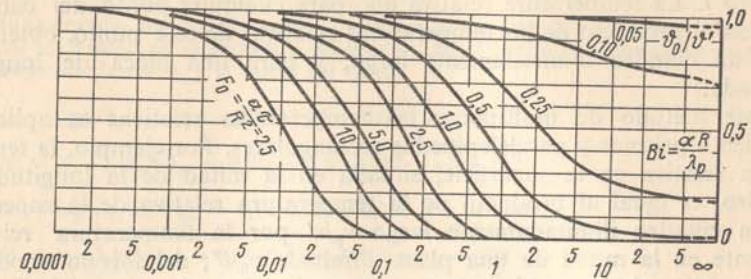


Fig. 7-11. Dependencia  $v_0/v' = \Phi_0(Bi, Fo)$  para una esfera.

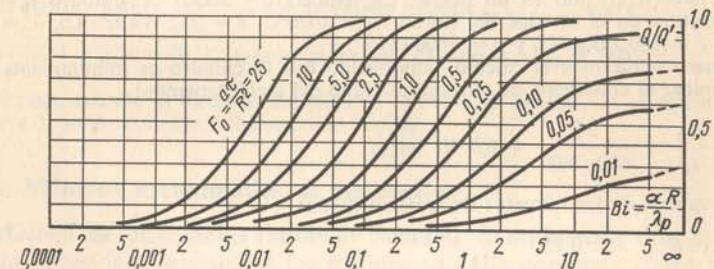


Fig. 7-12. Dependencia  $Q/Q' = \Phi_Q(Bi, Fo)$  para una esfera.

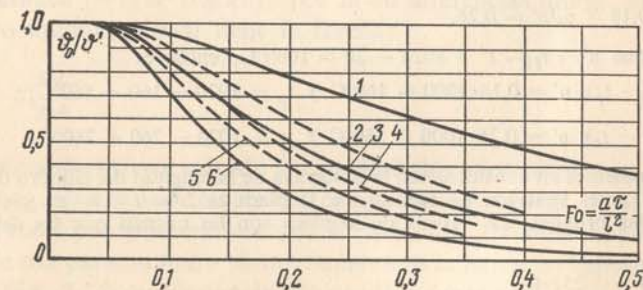


Fig. 7-13. Dependencia  $v_0/v' = \Phi_0(Bi, Fo)$  para unos cuerpos de formas diferentes cuando  $Bi \rightarrow \infty$ .

1 — placa; 2 — viga cuadrada de longitud ilimitada; 3 — cilindro de longitud ilimitada; 4 — cubo; 5 — cilindro, su longitud es igual a su diámetro; 6 — esfera.



de dimensiones ilimitadas, pero de espesor finito. Para una cilindro de longitud finita el espesor de la placa  $2\delta$  se toma igual a la longitud del cilindro  $l$ . La temperatura relativa  $v/v'$  para cualquier punto del cilindro es igual al producto de las temperaturas relativas de este punto, obtenidas para un cilindro ilimitadamente largo, y para una placa de longitud ilimitada.

Este método de multiplicar las temperaturas relativas es aplicable también a prismas y paralelepípedos rectangulares. Por ejemplo, la temperatura relativa en la superficie, situada en la mitad de la longitud del cilindro, es igual al producto de la temperatura relativa de la superficie de un cilindro ilimitadamente largo  $v_p/v'$  por la temperatura relativa existente en la mitad de una placa ilimitada  $v_0/v'$ ; del mismo modo la temperatura relativa en el eje, en un punto situado en la mitad del cilindro, es igual al producto de la temperatura relativa del eje  $v_0/v'$  de un cilindro ilimitado por la temperatura relativa del eje  $v_0/v'$  de una placa ilimitada.

**Ejemplo 7-1.** Determinar la temperatura en el centro y sobre la superficie de un cilindro de acero con diámetro  $d = 0,3$  m y longitud  $l = 0,6$  m después de pasar una hora de haberlo metido en un horno. La temperatura inicial del cilindro  $t_p = 20^\circ\text{C}$ ; la temperatura en el interior del horno  $t_{f1} = 1020^\circ\text{C}$ ,  $\alpha = 232 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ ,  $\lambda_p = 35 \text{ W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ ,  $c = 680 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$  y  $\rho = 7800 \text{ kg}/\text{m}^3$ .

Primero realicemos el cálculo, suponiendo que el cilindro es infinitamente largo. Al determinar el coeficiente de termodifusividad del metal tenemos:

$$a = \frac{\lambda_p}{c\rho} = \frac{35}{680 \cdot 7800} = 6,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Los valores de los números de semejanza son:

$$\text{Bi} = \frac{\alpha R}{\lambda_p} = \frac{232 \cdot 0,150}{35} = 1;$$

$$\text{Fo} = \frac{a\tau}{R^2} = \frac{6,6 \cdot 10^{-6} \cdot 3600}{0,15^2} = 1,02.$$

Usando estos datos según las figs. 7-7 y 7-8 hallamos los valores

$$v_p/v' = 0,16 \text{ y } v_0/v' = 0,26.$$

Puesto que  $v' = t_{f1} - t' = 1020 - 20 = 1000^\circ\text{C}$ , entonces

$$v'_p = (t_{f1} - t_p), v' = 0,16 \cdot 1000 = 160^\circ\text{C} \text{ y } t_p = 1020 - 160 = 860^\circ\text{C};$$

$$v_0 = (t_{f1} - t_0), v' = 0,26 \cdot 1000 = 260^\circ\text{C} \text{ y } t_0 = 1020 - 260 = 760^\circ\text{C}.$$

Ahora tomemos en consideración la influencia de la longitud del cilindro de acuerdo con la regla antes descrita. El espesor de la placa es  $2\delta = l = 0,6$  m y  $\delta = 0,3$  m. Puesto que las propiedades físicas de la placa son las mismas que las del cilindro, resulta que:

$$\text{Bi} = \frac{\alpha\delta}{\lambda_p} = \frac{232 \cdot 0,3}{35} = 2,01$$

y

$$\text{Fo} = \frac{a\tau}{\delta^2} = \frac{6,6 \cdot 10^{-6} \cdot 3600}{0,09} = 0,26.$$

Al usar estos datos y según las figs. 7-3 y 7-4 hallamos los valores

$$v_p/v' = 0,43 \text{ y } v_0/v' = 0,88.$$

Multiplicando los valores correspondientes de las temperaturas adimensionales hallamos sus valores en el perímetro del tope  $\vartheta_1$ , en el centro del tope  $v_2$ , en la mitad de la superficie lateral  $v_3$  y la mitad del eje  $v_4$ :

$$v_1/v' = (v_p/v')_c(v_0/v')_{p1} = 0,16 \cdot 0,43 = 0,069 \text{ y } v_1 = 69^\circ\text{C};$$

$$v_2/v' = (v_0/v')_c(v_p/v')_{p1} = 0,26 \cdot 0,43 = 0,112 \text{ y } v_2 = 112^\circ\text{C};$$

$$v_3/v' = (v_p/v')_c(v_0/v')_{p1} = 0,16 \cdot 0,88 = 0,140 \text{ y } v_3 = 140^\circ\text{C};$$

$$v_4/v' = v_0/v'_c(v_0/v')_{p1} = 0,26 \cdot 0,88 = 0,228 \text{ y } v_4 = 228^\circ\text{C}.$$

Puesto que  $v_i = t_{f1} - t_i$ , resulta  $t_i = t_{f1} - v_i$ ; por consiguiente:

$$t_1 = 1020 - 69 = 951^\circ\text{C} \text{ (según el primer cálculo } t_1 = t_p = 860^\circ\text{C)};$$

$$t_2 = 1020 - 112 = 908^\circ\text{C} \text{ (según el primer cálculo } t_2 = t_0 = 760^\circ\text{C)};$$

$$t_3 = 1020 - 140 = 880^\circ\text{C} \text{ (según el primer cálculo } t_3 = t_p = 860^\circ\text{C)};$$

$$t_4 = 1020 - 228 = 792^\circ\text{C} \text{ (según el primer cálculo } t_4 = t_0 = 760^\circ\text{C)}.$$

Así pues, cuando la longitud del cilindro es finita, el proceso de su calentamiento transcurre de modo considerablemente más rápido.

### 7-3. Métodos aproximados de resolución

**1. Método de diferencias finitas de Schmidt.** Si en los cálculos prácticos surge la necesidad de resolver los problemas de la conductibilidad térmica no estacionaria, con frecuencia se usa el método de diferencias finitas. Este método se basa sobre la suposición de que existe la posibilidad de sustituir el proceso continuo por el que se realiza a saltos tanto en el espacio, como en el tiempo. En este método la ecuación diferencial de la conductibilidad térmica (7-1) se sustituye por la en diferencias finitas, la que para un campo unidimensional tiene la forma:

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = a \frac{\Delta^2 t}{\Delta x^2}. \quad (7-6)$$

La aplicación de este método al cálculo de los cuerpos planos, cilíndricos y esféricos, así como al cálculo del campo bidimensional de temperatura fue elaborada por primera vez por E. Schmidt. Examinemos cómo este método se usa para un muro plano. Separemos la pared en capas de espesor igual  $\Delta x$  (fig. 7-14) que designaremos con los números  $(n-1)$ ,  $n$ ,  $(n+1)$ . . . Dividamos también el tiempo en intervalos  $\Delta \tau$  que designaremos con los números  $k$ ,  $(k+1)$ . . . En este caso  $t_{n,k}$  define la temperatura en la mitad de la capa  $n$  durante todo el intervalo de tiempo  $k$ ; la curva de temperatura se representa como una línea quebrada.



De la fig. 7-14 se deduce que dentro de los límites de la capa  $n$  la curva de temperatura tiene dos pendientes. Por consiguiente, la derivada de la temperatura a lo largo de la coordenada debe tener dos valores, y precisamente:

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)_+ = \frac{t_{n+1,k} - t_{n,k}}{\Delta x}$$

y

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)_- = \frac{t_{n,k} - t_{n-1,k}}{\Delta x}$$

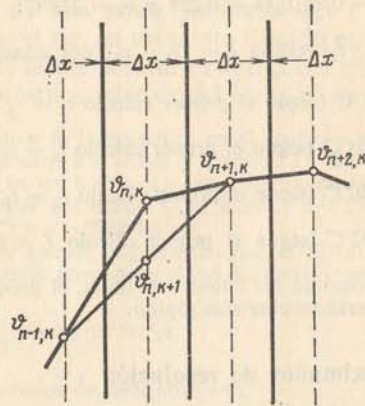


Fig. 7-14. Método de diferencias finitas: designaciones convencionales e interpretación gráfica.

Para la segunda derivada respectivamente obtendremos:

$$\frac{\Delta^2 t}{\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta x} \left[ \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)_+ - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)_- \right] = \frac{1}{\Delta x^2} (t_{n+1,k} + t_{n-1,k} - 2t_{n,k}). \quad (a)$$

La derivada de la temperatura con respecto al tiempo para la capa  $n$  tiene la forma:

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{t_{n,k+1} - t_{n,k}}{\Delta \tau}. \quad (b)$$

Al sustituir las ecuaciones (a) y (b) en la ecuación (7-6) tenemos:

$$\frac{t_{n,k+1} - t_{n,k}}{\Delta \tau} = a \frac{t_{n+1,k} + t_{n-1,k} - 2t_{n,k}}{\Delta x^2}$$

ó

$$t_{n,k+1} = 2a \frac{\Delta \tau}{\Delta x^2} \frac{t_{n+1,k} + t_{n-1,k}}{2} - \left(2a \frac{\Delta \tau}{\Delta x^2} - 1\right) t_{n,k}. \quad (c)$$

Así, pues, si se conoce la distribución de las temperaturas en el cuerpo para un intervalo de tiempo  $k$ , mediante la ecuación (c), se puede hallar la distribución de temperaturas para el intervalo ulterior de tiempo  $(k+1)$ , etc.

Si los intervalos de tiempo  $\Delta \tau$  y la dimensión de las capas  $\Delta x$  se eligen de modo tal que  $2a \frac{\Delta \tau}{\Delta x^2} = 1$ , entonces la ecuación (c) puede expresarse así:

$$t_{n,k+1} = \frac{1}{2} (t_{n+1,k} + t_{n-1,k}). \quad (d)$$

De la ecuación (d) se deduce que  $t_{n,k+1}$  es la media aritmética de los valores  $t_{n+1,k}$  y  $t_{n-1,k}$ . Por eso la técnica de cálculo es muy simple. De un modo igualmente simple se resuelve gráficamente la ecuación (d). El valor del intervalo de tiempo  $\Delta \tau$  se determina de la correlación

$$\Delta \tau = \Delta x^2 / 2a. \quad (e)$$

Si, por ejemplo se examina un muro de hormigón ( $a = 0,765 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ) y el espesor de la capa de hormigón se toma igual a 50 mm, entonces el intervalo de tiempo  $\Delta \tau$  obtiene el valor de

$$\Delta \tau = \frac{\Delta x^2}{2a} = \frac{0,05^2}{2 \cdot 0,765 \cdot 10^{-6}} = 2700 \text{ s}.$$

De este modo, para solucionar un problema concreto es necesario elegir inicialmente el valor de  $\Delta x$  que sea cómodo para la construcción gráfica, luego trazar la gráfica de la distribución inicial de temperaturas en forma, por ejemplo, de una línea quebrada  $O123\dots$  (fig. 7-15). Al unir ahora el punto 1 con el punto 3, se obtiene el punto 2'; al unir el punto 2 con el punto 4 se obtiene el punto 3' y así sucesivamente.

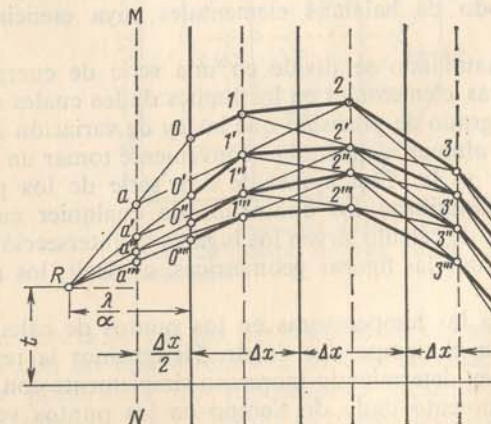


Fig. 7-15. Método gráfico para resolver los problemas de conductibilidad térmica no estacionaria.



Para obtener los puntos  $O'$  y  $I$  es necesario tomar en consideración la influencia del medio exterior. En correspondencia con lo que hemos dicho antes (§ 7-12) el extremo de la curva de temperatura (en nuestro caso  $I'O'$ ) lo da el punto director correspondiente  $R$  cuya ordenada determina la temperatura del medio ambiente  $t_{fi}$ , mientras que la abscisa, la define la subtangente  $s = \lambda_p/\alpha$ . Por eso se coloca adicionalmente el punto director  $R$  y se traza paralelamente a la superficie una línea auxiliar  $MN^1$  que se sitúa del punto  $R$  a una distancia  $\Delta x/2$ . Si ahora el punto  $O$  se une a la directriz  $R$ , entonces la recta que une estos puntos determinará en la línea  $MN$  el punto  $a$ . La línea que une el punto  $a$  y el punto 2 da el punto  $I'$ , el cual pertenece a la nueva curva de temperatura. Es necesario hallar también el último segmento  $I'O'$  de la curva de temperatura según el punto director  $R$ .

Al tomar por inicial la distribución de temperaturas  $O'I'2'3'$ , es necesario repetir la construcción descrita. De este modo se encontrarán las curvas  $O''I''2''3'' \dots O'''I'''2'''3''' \dots$ , etc. Si, además, en el transcurso del proceso cambia el valor  $\alpha$ , esto puede considerarse cambiando correspondientemente la posición del punto director  $R$ .

Durante el cálculo de una pared de capas múltiples la curva de temperatura debe trazarse en la escala de las resistencias térmicas, es decir, por el eje de abscisas en vez de  $\Delta x$  es necesario trazar  $\Delta x/\lambda_p$ . Así, pues, valiéndose del método descrito y con la ayuda de medios simples pueden resolverse muchos problemas técnicos de conductibilidad térmica no estacionaria, para un planteamiento cualquiera de las condiciones de frontera. El punto débil de este método consiste en el hecho de que las propiedades físicas del cuerpo se suponen constantes.

**2. Método de balances elementales.** Al plantear el problema de hallar un método para calcular la conductibilidad térmica no estacionaria, que considere la dependencia del coeficiente de conductibilidad térmica y el del calor específico en función de la temperatura, A. P. Vánichev [10] elaboró el método de balances elementales cuya esencia explicaremos a continuación.

El cuerpo examinado se divide en una serie de cuerpos que tienen formas geométricas elementales en los límites de los cuales se puede considerar con cierto grado de precisión que la ley de variación de temperatura es lineal. Como volumen elemental es conveniente tomar un paralelepípedo de lados  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta z$ . Con ayuda de una serie de los paralelepípedos citados pueden describirse los contornos de cualquier cuerpo. En este caso como puntos de cálculo sirven los lugares de intersección de los planos trazados para definir las figuras geométricas, es decir, los ángulos de los paralelepípedos.

Atribuyamos a las temperaturas en los puntos de cálculo los índices que caracterizarán el tiempo y el lugar. Designemos la temperatura del punto de cálculo en determinado momento simplemente con  $t$ . Las temperaturas en un momento dado de tiempo en los puntos vecinos los que se hallan a la distancia  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ , se designan mediante  $t_{x+\Delta x}$ ,  $t_{y+\Delta y}$ ,

<sup>1)</sup> La línea  $MN$  es necesaria para hallar los puntos  $I$ ,  $I'$ ,  $I'' \dots$

$t_{z+\Delta z}$ , respectivamente. La temperatura del punto de cálculo en el momento ulterior de tiempo, es decir, al pasar el intervalo de tiempo  $\Delta \tau$ , se designa con  $t_{\tau+\Delta \tau}$ .

Sean dadas las variaciones de los parámetros  $c$  y  $\lambda$  en función de la temperatura y las condiciones de contorno. Es necesario determinar la temperatura en todos los puntos de cálculo para todos los momentos ulteriores de tiempo. Al aplicar las leyes de Fourier y Newton—Richman para componer los balances térmicos del grupo de paralelepípedos elementales en que está dividido el cuerpo, obtendremos las fórmulas de cálculo. En este caso pueden encontrarse diferentes variantes en que se disponen los puntos de cálculo. Estos pueden encontrarse dentro de los límites del medio homogéneo, yacer en la frontera de dos o más cuerpos sólidos, pueden hallarse también en la frontera con el líquido o gas. Para cualquier problema concreto existe un número limitado y, por lo común, no muy grande de variantes en que se disponen dichos puntos. Cada citado variante que une uno o varios puntos necesita su propia fórmula de cálculo.

Examinemos el caso en que el punto de cálculo está completamente rodeado por un medio homogéneo duro. El proceso de propagación del calor lo determinan los valores numéricos de tres parámetros: el coeficiente de conductibilidad térmica, el calor específico y la densidad. La densidad varía de modo insignificante y en todas las consideraciones ulteriores se considerará constante. El coeficiente de conductibilidad térmica y el calor específico se expresarán como funciones lineales de la temperatura:  $\lambda = A + Bt$  y  $c = C + Dt$ . El esquema de la situación del punto de cálculo está representado en la fig. 7-16.

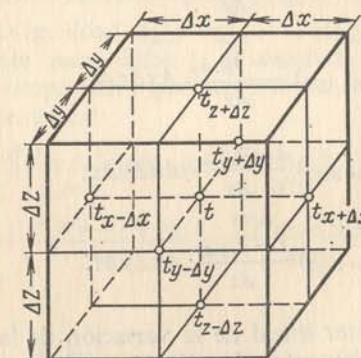


Fig. 7-16. Esquema usado para dividir un cuerpo en sus partes elementales.

La circunstancia de que los paralelepípedos examinados son pequeños, comparados con las dimensiones de todo el sistema, permite usar en las deducciones posteriores las suposiciones siguientes: a) las superficies isotérmicas dentro de los límites del elemento dado representan los planos paralelos que se sitúan a igual distancia uno de otro; b) el flujo calorífico medio  $\Delta Q$  durante el tiempo  $\Delta \tau$  a través de cualquier superficie, es propor-



cional al valor inicial del gradiente de temperatura dentro de los límites del elemento de tiempo  $\Delta\tau$ ; c) el aumento de la entalpía es proporcional al incremento de la temperatura en el punto medio del volumen de dicho elemento.

Para obtener la fórmula de cálculo elaboremos el balance térmico del elemento con lados  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta z$ , cuya temperatura en el punto central sea calculada mediante  $t$  y  $t_{\tau+\Delta\tau}$ . El elemento está situado en el centro del grupo formado por ocho elementos semejantes. La cantidad de calor que entró en el elemento durante el tiempo  $\Delta\tau$  a través de la cara izquierda, paralela al plano  $YOZ$ , es decir, la cara que se encuentra en el plano expresado por la ecuación  $x = -\Delta x/2$ , según la ley de Fourier, es igual a:

$$\Delta Q_1 = -\lambda(t) \frac{t - t_{x-\Delta x}}{\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta\tau = -(A + B t_{x-\Delta x/2}) \frac{t - t_{x-\Delta x}}{\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta\tau.$$

Al mismo tiempo a través de la cara opuesta del elemento llega:

$$\Delta Q_2 = -(A + B t_{x+\Delta x/2}) \frac{t - t_{x+\Delta x}}{\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta\tau.$$

La cantidad de calor que entra en el elemento a través de las otras cuatro caras paralelas a los planos  $XOY$  y  $XOZ$ , se determina de modo análogo:

$$\Delta Q_3 = -(A + B t_{y-\Delta y/2}) \frac{t - t_{y-\Delta y}}{\Delta y} \Delta x \Delta z \Delta\tau;$$

$$\Delta Q_4 = -(A + B t_{y+\Delta y/2}) \frac{t - t_{y+\Delta y}}{\Delta y} \Delta x \Delta z \Delta\tau;$$

$$\Delta Q_5 = -(A + B t_{z-\Delta z/2}) \frac{t - t_{z-\Delta z}}{\Delta z} \Delta x \Delta y \Delta\tau;$$

$$\Delta Q_6 = -(A + B t_{z+\Delta z/2}) \frac{t - t_{z+\Delta z}}{\Delta z} \Delta x \Delta y \Delta\tau.$$

En virtud del carácter lineal de la variación de la temperatura dentro de los límites de los elementos de cálculo resultan válidas las igualdades

$$t_{x-\Delta x/2} = \frac{t + t_{x-\Delta x}}{2};$$

$$t_{x+\Delta x/2} = \frac{t + t_{x+\Delta x}}{2};$$

$$t_{y-\Delta y/2} = \frac{t + t_{y-\Delta y}}{2}, \text{ etc.}$$

Teniendo en cuenta estas igualdades pueden reescribirse las expresiones para  $\Delta Q_1, \Delta Q_2, \dots, \Delta Q_6$  en la forma:

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q_1 &= -\left(A + B \frac{t + t_{x-\Delta x}}{2}\right) \frac{t - t_{x-\Delta x}}{\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta\tau; \\ \Delta Q_2 &= -\left(A + B \frac{t + t_{x+\Delta x}}{2}\right) \frac{t - t_{x+\Delta x}}{\Delta x} \Delta y \Delta z \Delta\tau; \\ \Delta Q_3 &= -\left(A + B \frac{t + t_{y-\Delta y}}{2}\right) \frac{t - t_{y-\Delta y}}{\Delta y} \Delta x \Delta z \Delta\tau; \\ \Delta Q_4 &= -\left(A + B \frac{t + t_{y+\Delta y}}{2}\right) \frac{t - t_{y+\Delta y}}{\Delta y} \Delta x \Delta z \Delta\tau; \\ \Delta Q_5 &= -\left(A + B \frac{t + t_{z-\Delta z}}{2}\right) \frac{t - t_{z-\Delta z}}{\Delta z} \Delta x \Delta y \Delta\tau; \\ \Delta Q_6 &= -\left(A + B \frac{t + t_{z+\Delta z}}{2}\right) \frac{t - t_{z+\Delta z}}{\Delta z} \Delta x \Delta y \Delta\tau. \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

La suma algebraica de la cantidad de calor que ha entrado en el elemento a través de todas sus caras durante el tiempo  $\Delta\tau$ , es igual al aumento de su entalpía. Esto se puede expresar mediante la igualdad

$$\Sigma \Delta Q_i = \Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \Delta Q_3 + \Delta Q_4 + \Delta Q_5 + \Delta Q_6 = \\ = c(t) \rho \Delta V \Delta t = (C + Dt) \rho \Delta x \Delta y \Delta z (t_{\tau+\Delta\tau} - t).$$

Al sustituir en esta igualdad  $\Delta Q_1, \Delta Q_2, \dots, \Delta Q_6$  por las expresiones (f) halladas anteriormente para éstos y al resolver la ecuación obtenida respecto al valor de temperatura que nos interesa, en el momento ulterior de tiempo  $t_{\tau+\Delta\tau}$ , obtenemos:

$$t_{\tau+\Delta\tau} = R(t) t + \frac{W_x(t_{x-\Delta x}) t_{x-\Delta x}}{N(t)} + \frac{W_x(t_{x+\Delta x}) t_{x+\Delta x}}{N(t)} + \\ + \frac{W_y(t_{y-\Delta y}) t_{y-\Delta y}}{N(t)} + \frac{W_y(t_{y+\Delta y}) t_{y+\Delta y}}{N(t)} + \frac{W_z(t_{z-\Delta z}) t_{z-\Delta z}}{N(t)} + \frac{W_z(t_{z+\Delta z}) t_{z+\Delta z}}{N(t)}, \quad (7-7)$$

donde

$$W_x(t) = \frac{\Delta\tau}{\rho \Delta x^2} \left(A + \frac{1}{2} B t\right);$$

$$W_y(t) = \frac{\Delta\tau}{\rho \Delta y^2} \left(A + \frac{1}{2} B t\right);$$

$$W_z(t) = \frac{\Delta\tau}{\rho \Delta z^2} \left(A + \frac{1}{2} B t\right);$$

$$N(t) = C + Dt;$$

$$R(t) = 1 - 2 \left[ \frac{W_x(t) + W_y(t) + W_z(t)}{N(t)} \right].$$



Al usar la fórmula hallada pueden encontrarse sucesivamente, según la conocida distribución inicial de las temperaturas, los valores de temperaturas en todos los puntos de cálculo en los momentos de tiempo  $\tau + \Delta\tau$ ,  $\tau + 2\Delta\tau$ ,  $\tau + 3\Delta\tau$ , etc., hasta alcanzar el momento que nos interesa.

La fórmula hallada es válida sólo si el medio es homogéneo, es decir, si todo el cuerpo considerado está formado por una misma sustancia y las condiciones de frontera están dadas por la temperatura de superficie. Pero, si los sectores aislados del sistema están formados por sustancias distintas, así como, si las condiciones de frontera están dadas por la temperatura del medio ambiente y la ley del intercambio de calor, es necesario usar otras dependencias las cuales se exponen de manera detallada en obra [10].

Para poder aplicar este método en la práctica hay que examinar también el problema de la magnitud del intervalo de tiempo  $\Delta\tau$  que hasta ahora hemos considerado arbitrario.

La fórmula de cálculo (7-7) puede ser representada en la forma

$$t_{\tau+\Delta\tau} = A_1 t + A_2 t_{x-\Delta x} + A_3 t_{x+\Delta x} + A_4 t_{y-\Delta y} + A_5 t_{y+\Delta y} + A_6 t_{z-\Delta z} + A_7 t_{z+\Delta z}, \quad (g)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 1 - \frac{\Delta\tau(2A + Bt)}{\rho(C + Dt)} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right); \\ A_2 &= \frac{\Delta\tau \left( A + \frac{1}{2} B t_{x-\Delta x} \right)}{\rho \Delta x^2 (C + Dt)}; \\ &\dots \dots \dots \\ A_7 &= \frac{\Delta\tau \left( A + \frac{1}{2} B t_{z+\Delta z} \right)}{\rho \Delta z^2 (C + Dt)}. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

La fórmula (g) representa el polinomio de primer grado con coeficientes  $A_i$  que dependen de las propiedades físicas, de los segmentos de coordenadas y de  $\Delta\tau$ ; estos coeficientes dependen de la temperatura solamente en virtud del cambio de las propiedades físicas. Las fórmulas de cálculo tienen estructura semejante también en los casos más complicados.

Hasta ahora la elección de  $\Delta\tau$  no está limitada de ningún modo. El aumento de su valor puede reducir considerablemente el volumen de los trabajos de cálculo, lo que presenta grandes ventajas. Sin embargo si a  $\Delta\tau$  se le da un valor exageradamente grande, el error provocado por la segunda suposición, es decir, por el hecho de que el flujo calorífico medio por el tiempo  $\Delta\tau$  se considera proporcional al incinal con respecto al tiempo gradiente de temperatura, puede pasar a ser muy considerable.

En otras palabras, para grandes valores de  $\Delta\tau$  el error de extrapolación crece bruscamente, lo que se refleja inmediatamente en la precisión de cálculo de los campos de temperatura posteriores.

Para determinar la máxima magnitud admisible de  $\Delta\tau$  refirámonos a la fórmula (g). Si efectuamos una determinada división del sistema en los elementos de cálculo, cuando está dada la ley de variación de las propiedades físicas, los valores de los coeficientes  $A_i$  dependen solamente de  $\Delta\tau$  y de las temperaturas. Entre las temperaturas que se refieren al momento dado de tiempo y que entran en la composición de la fórmula hay una temperatura mínima y otra máxima. Para que el paso al campo ulterior de temperatura no sea una extrapolación dudosa, es necesario que la temperatura buscada no resulte inferior a la primera (mínima) o superior a la segunda (máxima). En otras palabras es preciso que las variaciones de temperatura que tienen lugar durante el tiempo  $\Delta\tau$ , se determinen por las diferencias de temperatura existentes en el tramo examinado y se encuentren dentro de los mismos límites. Si el campo de temperatura es arbitrario, esta condición se observa sólo en aquella ocasión en que todos los coeficientes  $A_i$  son positivos. Los coeficientes  $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  por su propia estructura pueden tener sólo valores positivos. Pero el coeficiente  $A_1$  [ecuación (h)] dependiendo de la magnitud de  $\Delta\tau$  puede tomar cualquier valor dentro de los límites desde  $+1$  hasta  $-\infty$ . La magnitud máxima admisible de  $\Delta\tau$ , que designaremos en lo sucesivo por  $\Delta\tau_{\max}$ , es aquella en presencia de la cual  $A_1$  se reduce a cero.

Dados  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \rho, A, B, C$  y  $D$ , la magnitud  $A_1$  depende no sólo de  $\Delta\tau$ , sino también de la temperatura, cuya influencia puede ser diferente, dependiendo de las magnitudes y signos de  $B$  y  $D$ .

Entre las temperaturas que se encuentran durante el planteamiento de las condiciones iniciales y de frontera, hay una máxima y otra mínima; designémoslas respectivamente con  $t_{\min}$  y  $t_{\max}$ . La temperatura de cualquier punto en un momento cualquiera de tiempo no tiene que salir fuera de los límites de este intervalo. Examinemos la variación de  $A_1(t)$  con la temperatura. Hallemos la derivada

$$\frac{dA_1(t)}{dt} = \frac{BC - 2AD}{(C + Dt)^2} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) \frac{\Delta\tau}{\rho} = \frac{K}{(C + Dt)^2},$$

donde la magnitud  $K$  no depende de la temperatura. Vemos que  $A_1$  varía de manera monótona, puesto que en su derivada nunca varía su signo. Esto significa que el valor máximo de  $A_1$  puede corresponder solamente a uno de los extremos del intervalo de temperaturas examinado. Por eso en la práctica el modo más simple de operar es el siguiente: hallar la magnitud  $\Delta\tau_{\max}$  de la condición  $A_1 = 0$ , cuando  $t = t_{\max}$  y  $t = t_{\min}$ , y de los dos valores encontrados

$$\left. \begin{aligned} \Delta\tau'_{\max} &= \frac{\rho(C + Dt_{\max})}{(2A + Bt_{\max})(1/\Delta x^2 + 1/\Delta y^2 + 1/\Delta z^2)}; \\ \Delta\tau''_{\max} &= \frac{\rho(C + Dt_{\min})}{(2A + Bt_{\min})(1/\Delta x^2 + 1/\Delta y^2 + 1/\Delta z^2)} \end{aligned} \right\} \quad (i)$$



introducir en el cálculo el mínimo, puesto que en este caso la condición de  $A \geq 0$  se cumplirá para todas las temperaturas posibles en el sistema. Pero si esta magnitud aumenta incluso de modo insignificante, las variaciones de las temperaturas comienzan a adquirir carácter desordenado, en forma de saltos y el cálculo deja de ser correcto. Si el sistema consta de varias sustancias o está rodeado por un medio líquido, la magnitud  $\Delta\tau_{\text{máx}}$  debe ser hallada para todos los casos que se encuentran en el sistema y de los valores hallados es necesario tomar en consideración el mínimo.

#### 7-4. Régimen térmico regular

Examinemos el proceso de enfriamiento (o el de calentamiento) de un cuerpo sólido, cuando las condiciones de enfriamiento, la temperatura del medio ambiente  $t_{f1}$  y el coeficiente de traspaso del calor  $\alpha$  permanecen constantes en el tiempo y no existen fuentes internas de calor en el cuerpo. No hagamos algunas restricciones para la distribución inicial de temperaturas a excepción de que aceptemos la siguiente condición: la diferencia entre la temperatura en cualquier punto y la temperatura del medio ambiente en el momento inicial tiene un mismo signo. En estas condiciones el proceso no estacionario de enfriamiento (o de calentamiento) de un sólido se puede separar en dos etapas: *la etapa inicial* y *la etapa del régimen regular*.

La primera etapa se caracteriza por el hecho de que la variación del campo de temperatura en el tiempo depende esencialmente de las particularidades del estado térmico inicial del cuerpo y por eso el carácter del proceso no se determina unívocamente por las condiciones de enfriamiento y las propiedades del cuerpo. Sin embargo, la influencia de las condiciones iniciales se pierde poco a poco cada vez en mayor grado; y viceversa, la influencia de las condiciones de enfriamiento y de las propiedades físicas del cuerpo comienza a ser determinante. En este momento se establece el régimen térmico regular y la ley de variación del campo de temperatura en el tiempo adquiere la siguiente forma universal y simple: el logaritmo de la temperatura excesiva <sup>1)</sup> del cuerpo en cualquiera de sus puntos varía en tiempo según la ley lineal

$$\ln v = -m\tau + C, \quad (a)$$

es decir, dicha temperatura decrece en el tiempo según la ley exponencial

$$v = Ce^{-m\tau}. \quad (b)$$

La magnitud  $m$ , 1/s es un número positivo que no depende de las coordenadas ni del tiempo. Esta magnitud caracteriza la intensidad con que se enfría (o calienta) el cuerpo y se llama *ritmo de enfriamiento* (o de calentamiento).

<sup>1)</sup> Se llama temperatura excesiva  $v$  el módulo resultante de la diferencia entre la temperatura del cuerpo  $t$  y la temperatura del medio ambiente  $t_{f1}$ :  $v = |t - t_{f1}|$ .

La interpretación gráfica del proceso examinado se muestra en la fig. 7-17; en ella se exponen las curvas de variación de las magnitudes  $\ln v_1$  y  $\ln v_2$  en el tiempo durante todo el proceso de enfriamiento del cuerpo para dos puntos fijos del cuerpo 1 y 2. La llegada del régimen regular se caracteriza por el hecho de que las curvas correspondientes se transformen en líneas rectas que tienen en la gráfica el coeficiente angular igual, es decir, resultan paralelas entre sí.

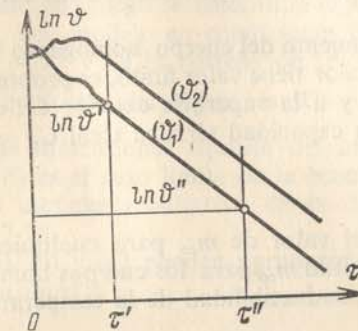


Fig. 7-17. Variación de la temperatura en el tiempo durante el enfriamiento de un cuerpo.

Aplicamos la ecuación (a) a dos momentos arbitrarios de tiempo  $\tau'$  y  $\tau''$  (fig. 7-17) y, eliminando la constante  $C$ , obtenemos:

$$m = \frac{\ln v' - \ln v''}{\tau'' - \tau'}. \quad (7-8)$$

La fórmula (7-8) da el método para determinar la magnitud del ritmo de enfriamiento  $m$  del ensayo; para esto es necesario representar las temperaturas  $v = f(\tau)$ , medidas en cualquier punto del cuerpo, en coordenadas semilogarítmicas y además en el tramo rectilíneo de la dependencia obtenida se requiere elegir dos puntos e introducir sus magnitudes correspondientes  $\ln v$  y  $\tau$  en la fórmula (7-8).

Las principales regularidades del régimen térmico regular las investigó detalladamente G. M. Kondrátiev [40] quien determinó las principales relaciones existentes entre el ritmo de enfriamiento  $m$ , por una parte, y las propiedades físicas del cuerpo, su forma, dimensiones y condiciones de enfriamiento, por otra. Este permitió elaborar los métodos para el cálculo aproximado de los campos de temperatura no estacionarios, los métodos de simulación de los procesos no estacionarios en las instalaciones complicadas, evaluar las irregularidades de los campos de temperatura en diferentes condiciones, etc. Partiendo de la teoría del régimen regular se propusieron y obtuvieron gran propagación, en la práctica, los nuevos métodos destinados a determinar las propiedades termofísicas de las sustancias:  $a$ ,  $\lambda$ ,  $c$ , las resistencias térmicas  $R$ , el grado de radiación integral de los cuerpos  $\varepsilon$  y los coeficientes de traspaso del calor  $\alpha$ . La ventaja de tales métodos radica en su simple técnica de experimentación, la alta



precisión de los resultados obtenidos y el pequeño gasto de tiempo para llevar a cabo el ensayo.

El régimen térmico regular tiene siguientes postulados básicos característicos:

1. La correlación básica (a) que determina la llegada del régimen regular, se cumple no solamente para los cuerpos simples homogéneos, sino también para cualesquier complicados sistemas de cuerpos heterogéneos, es decir, el fenómeno de regularización del campo de temperatura tiene carácter general.

2. El ritmo de enfriamiento del cuerpo homogéneo  $m$ , cuando el coeficiente de traspaso del calor tiene valor finito, es proporcional al coeficiente de traspaso del calor  $\alpha$  y a la superficie exterior del cuerpo  $F$  e inversamente proporcional a la capacidad térmica total  $C_V = c\rho V$ :

$$m = \Psi \frac{\alpha F}{C_V}. \quad (c)$$

3. Cuando  $\alpha \rightarrow \infty$ , el valor de  $m_\infty$  para cualquier sistema complejo es finito, además la magnitud  $m_\infty$  para los cuerpos homogéneos es proporcional al coeficiente de conductibilidad de la temperatura  $a$  del material:

$$a = Km_\infty. \quad (d)$$

La correlación (c) expresa el principio de conservación de la energía para las condiciones del régimen regular de enfriamiento (o de calentamiento) de los cuerpos. La magnitud  $\Psi$  en esta ecuación representa el cociente entre la temperatura excesiva media por la superficie  $v_F$  y la magnitud  $v_V$  media por el volumen, es decir,  $\Psi = v_F/v_V$ . Durante todo el período del régimen regular esta relación permanece constante y se llama coeficiente de irregularidad de la distribución de la temperatura en el cuerpo; la magnitud  $\Psi$  puede variar de 0 a 1 (el último caso corresponde a un campo uniforme de temperaturas en el cuerpo).

El coeficiente  $K$  en la correlación (d) depende sólo de las propiedades geométricas del cuerpo, es decir de su forma y dimensiones y se llama *factor de forma*. Para los cuerpos de forma simple las magnitudes de  $K$  fueron determinadas por métodos analíticos:

para la esfera

$$K = \left(\frac{R}{\pi}\right)^2; \quad (e)$$

para un cilindro de longitud  $l$

$$K = \frac{1}{\left(\frac{2,405}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}; \quad (f)$$

para un paralelepípedo de lados  $l_1, l_2, l_3$

$$K = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l_3}\right)^2}. \quad (g)$$

Cuando se conoce el valor del factor de forma  $K$  la correlación (d) sirve de base para determinar experimentalmente el coeficiente de conductibilidad de la temperatura  $a$  de los materiales. Para cuerpos de forma complicada se puede determinar el factor de forma  $K$  por vía del experimento y a partir de la correlación (d). Para hacer esto, valiéndose de un material con coeficiente de conductibilidad de la temperatura conocido, se fabrica un modelo cuya forma geométrica sea semejante a la del objeto real de forma complicada; luego se determina experimentalmente el ritmo de enfriamiento  $m_\infty$  del modelo en condiciones de alta intensidad de la emisión calorífica  $\alpha \rightarrow \infty$  y de la correlación (d) se determina  $K_{\text{mod}}$ . En este caso el factor de forma del objeto es  $K = \frac{1}{n^2} K_{\text{mod}}$ , en donde  $n$  es

la relación entre las dimensiones lineales del modelo y las del objeto.

La correlación (d) es el caso límite de la ecuación general (c) cuando  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $\Psi \rightarrow 0$ . El carácter cualitativo de la dependencia  $m = f(\alpha)$  se muestra en la fig. 7-18.

Las correlaciones (c) y (d) pueden agruparse después de presentarlas en la forma adimensional:

$$M = \Psi B, \quad (i)$$

donde  $M = \frac{m}{m_\infty} = \frac{m}{a} K$  es el ritmo relativo de enfriamiento;

$B = \frac{\alpha}{\lambda} \frac{KF}{V}$  es una forma modificada en que se escribe el número de Biot.

La magnitud  $\Psi$  para el cuerpo de forma dada es unívoca y representa la función del número  $B$ . Las investigaciones [40] mostraron que para cuerpos de diferente configuración las curvas  $\Psi = \Psi(B)$  se sitúan tan cerca una de otra, que en la práctica toda su familia es posible substituir con una sola curva, cuya expresión analítica aproximada tiene la forma:

$$\Psi = (1 + 1,44 B + B^2)^{-1/2}. \quad (k)$$

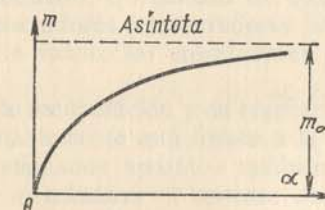


Fig. 7-18. Dependencia  $m = f(\alpha)$ .

Las correlaciones (i) y (k) pueden usarse para valorar la irregularidad del campo de temperatura  $\Psi$  de diferentes objetos; tomando como base estas ecuaciones se elaboraron los métodos experimentales que sirven para determinar el coeficiente de conductibilidad térmica, el coeficiente de traspaso del calor, etc.



4. Para un sistema formado por una serie de los cuerpos, rígidamente unidos entre sí y que tengan propiedades diferentes, el ritmo de enfriamiento  $m$  se determina unívocamente por el conjunto de las propiedades termofísicas de estos cuerpos, sus dimensiones y su forma, así como también por las condiciones de enfriamiento. En estos sistemas complicados pueden obtenerse ecuaciones análogas a las correlaciones (c) y (d) que se aplican a cuerpos simples. Un interés especial representa el sistema formado por un núcleo de configuración arbitraria con una envoltura fina de material distinto. Para tales condiciones la ecuación del balance energético del sistema, en el período del régimen regular, tiene una forma relativamente simple [40]. Sobre esta base fueron propuestos y obtuvieron amplia difusión métodos altamente eficaces empleados para determinar los parámetros termofísicos de diferentes sustancias.

5. El concepto del régimen regular es aplicable también a cuerpos que tienen fuentes o escurrimientos internos de calor cuya intensidad es permanente. Todas las correlaciones y dependencias antes aducidas son válidas también en estos casos. La diferencia consiste sólo en el hecho de que durante el enfriamiento simple la ley se formula para la temperatura excesiva  $v = |t - t_{fl}|$  y cuando hay fuentes de calor, para la diferencia de temperaturas  $v = |t - t_0|$ . Lo anteriormente dicho es aplicable al régimen estacionario ( $t_0$ ) y no estacionario ( $t$ ) del sistema en un mismo punto.



## CAPITULO 8

### DISPOSITIVOS CAMBIADORES DE CALOR

#### 8-1. Nociones generales

Un dispositivo cambiador de calor se llama a una estructura en que se realiza el proceso de transmisión de calor desde un agente portador de calor (caloportador) hacia otro. Tales aparatos son numerosos y muy variados tanto por su destinación tecnológica, como por su forma constructiva. Según el principio que se emplee en su funcionamiento los dispositivos cambiadores de calor pueden ser subdivididos en los de recuperación, de regeneración y mezcladores.

Llámanse *aparatos de recuperación* aquellos en que el calor se transmite desde el caloportador caliente hacia el frío a través de un muro que los separa. Como ejemplo de estos aparatos pueden servir los generadores de vapor, los precalentadores, los condensadores, etc.

Llámanse *aparatos de regeneración* aquellos en que una misma superficie de calefacción se baña alternativamente por un caloportador caliente y después por un frío. Al fluir el líquido caliente el calor es absorbido por las paredes del aparato y se acumula en éstas, al circular el líquido frío, éste absorbe el calor acumulado. En calidad de ejemplo de dichos aparatos pueden servir los regeneradores (recuperadores de inversión) de los hornos Martin y de fusión de vidrio, los calentadores de aire de altos hornos, etc.

En los aparatos de recuperación y de regeneración el proceso de transmisión de calor inevitablemente está ligado a la superficie de un cuerpo sólido. Por eso mencionados aparatos también se llaman **superficiales**.

En los aparatos *mezcladores* el proceso de transmisión de calor se realiza mediante el contacto directo y el mezclado de los caloportadores caliente y frío. En este caso la transmisión de calor transcurre simultáneamente con el intercambio de materiales. Como ejemplo de citados intercambiadores de calor pueden servir las torres de enfriamiento (refrigeradores de gradas), los lavadoras de gases y otros.

Los nombres especiales de los dispositivos cambiadores de calor corrientemente los determina su destinación, por ejemplo, generadores de vapor,



hornos, calentadores de agua, evaporadores, sobrecalentadores, condensadores, desaireadores, etc. Sin embargo, a pesar de la gran variedad de dispositivos cambiadores de calor en lo que se refiere a su forma, estructura, principio de funcionamiento y los agentes de transformación a fin de cuentas, su destinación es la misma y consiste en la transmisión del calor desde un líquido caliente hacia otro frío. Por lo tanto los postulados principales del cálculo térmico son comunes para todos ellos.

## 8-2. Aparatos de recuperación

1. **Principios del cálculo térmico.** El cálculo térmico de un dispositivo cambiador de calor puede llevarse a cabo a base de *un diseño*, lo que permite determinar el área de la superficie de cambio de calor, y a base de *una comprobación* en la que se establece el régimen de trabajo del aparato y se determinan las temperaturas finales de los agentes portadores de calor. En ambos casos las ecuaciones fundamentales de cálculo son: ecuación de transmisión de calor

$$Q = kF(t_1 - t_2) \quad (8-1)$$

y la ecuación de balance térmico

$$Q_1 = Q_2 + \Delta Q, \quad (8-2)$$

donde

$$Q_1 = G_1 \delta i_1 = G_1 c_{p1} \delta t_1 = G_1 c_{p1} (t'_1 - t''_1)$$

es la cantidad de calor entregada por el caloportador caliente;

$$Q_2 = G_2 \delta i_2 = G_2 c_{p2} \delta t_2 = G_2 c_{p2} (t'_2 - t''_2)$$

es la cantidad de calor absorbida por el caloportador frío;  $\Delta Q$  son las pérdidas de calor hacia el medio ambiente;  $G_1$  y  $G_2$  son los gastos en masa de los caloportadores caliente y frío;  $\delta i_1$ ,  $\delta i_2$  son los cambios de entalpia de los agentes portadores de calor;  $c_{p1}$ ,  $c_{p2}$  con los calores específicos de los agentes portadores de calor a la presión constante;  $t'_1$ ,  $t''_1$  son las temperaturas del caloportador caliente en la entrada y en la salida del aparato;  $t'_2$ ,  $t''_2$  son las temperaturas del caloportador frío en la entrada y en la salida del aparato, respectivamente.

Al deducir las fórmulas para calcular la transmisión de calor (véase cap. 5) hemos aceptado que en un punto o sección dados, del dispositivo cambiador de calor, la temperatura del fluido operante es constante. Sin embargo, este postulado es justo sólo de modo aproximado para toda la superficie cuando hay ebullición del fluido y condensación de los vapores. En caso general la temperatura de los fluidos operantes varía en los intercambiadores de calor: el caliente se enfría y el frío, se calienta. A la par con esto varía también la diferencia de temperaturas entre ellos  $\Delta t_i = (t_1 - t_2)_i$ . En tales condiciones la ecuación de transmisión de calor (8-1) es aplicable sólo en forma diferencial al elemento de superficie  $dF$ , a saber:

$$dQ = k_i \Delta t_i dF_i.$$

La cantidad total de calor transmitida a través de toda la superficie se determina mediante la integral de esta expresión

$$Q = \int_0^F k_i \Delta t_i dF_i = k \Delta t F. \quad (8-3)$$

Precisamente esta es la ecuación para calcular la transmisión de calor. Aquí  $\Delta t$  es el valor medio de la diferencia de temperaturas entre dos medios a lo largo de toda la superficie de calentamiento.

En los cálculos térmicos tiene gran importancia la magnitud denominada equivalente de agua:  $W$ , J/(s·°C), W/°C:

$$W = Gc_p, \quad (8-4)$$

donde  $G = \rho w f$  es el gasto en masa del agente portador de calor;

$w$  es la velocidad del agente portador de calor;

$\rho$  es la densidad del agente portador de calor;

$f$  es el área de sección del canal.

Si la magnitud  $W$  se introduce en la ecuación del balance térmico (8-2), ésta adquiere el siguiente aspecto:

$$W_1(t'_1 - t''_1) = W_2(t'_2 - t''_2),$$

de donde

$$\frac{t'_1 - t''_1}{t'_2 - t''_2} = \frac{\delta t_1}{\delta t_2} = \frac{W_2}{W_1}. \quad (8-5)$$

Lo último significa que la relación entre los cambios de temperaturas de los fluidos operantes es inversamente proporcional a la relación de sus equivalentes de agua. Tal correlación tiene validez tanto para toda la superficie de calefacción  $F$ , como para cada uno de sus elementos  $dF$ , es decir,

$$\frac{dt_1}{dt_2} = \frac{W_2}{W_1}, \quad (8-6)$$

donde  $dt_1$  y  $dt_2$  son los cambios de temperatura de los fluidos operantes en un elemento de superficie.

El carácter de variación de la temperatura de los fluidos operantes a lo largo de la superficie de calefacción depende del circuito de su movimiento y de la correlación entre las magnitudes  $W_1$  y  $W_2$ . Si en el dispositivo cambiador de calor, los líquidos caliente y frío circulan de modo paralelo y en una misma dirección, este circuito de movimiento se llama *corriente unidireccional* (fig. 8-1, a). Si los líquidos circulan de modo paralelo, pero en las direcciones opuestas, se llama *contracorriente* (fig. 8-1, b). Finalmente, si los líquidos circulan de modo que se cruzan entre sí, se llama *corriente cruzada* (fig. 8-1, c). Además de estos simples circuitos de movimiento, en la práctica se realizan también circuitos complicados: se combinan simultáneamente la corriente unidireccional y la contracorriente (fig. 8-1, d) o se repite la corriente cruzada muchas veces (fig. 8-1, e-g), etc.

Dependiendo de que se realice corriente directa o contracorriente y de que  $W_1$  sea mayor o menor que  $W_2$ , se obtienen cuatro pares carac-



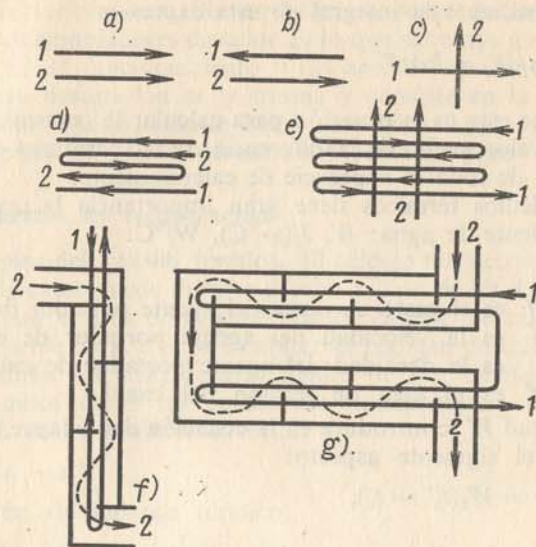


Fig. 8-1. Esquemas del movimiento de los fluidos operantes en los intercambiadores de calor.

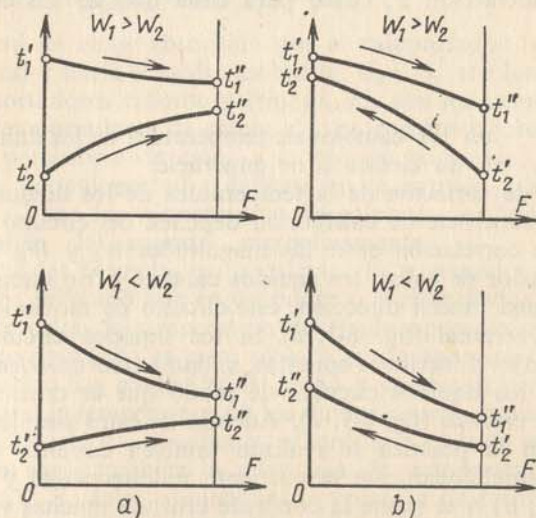


Fig. 8-2. Carácter de la variación de las temperaturas de los fluidos operantes para la corriente unidireccional (a) y para la contracorriente (b).

terísticas de curvas de variación de temperatura a lo largo de la superficie de calefacción representadas en la fig. 8-2. En dicha figura sobre los ejes de abscisas está trazada el área de la superficie de caldeo  $F$  y en los ejes de ordenadas, la temperatura de los fluidos operantes.

De acuerdo con la ecuación (8-5) en los gráficos se obtiene una mayor variación de la temperatura  $t' - t'' = \delta t$  para aquel líquido que tiene menor valor de la magnitud  $W$ .

De las gráficas examinadas se deduce que durante la corriente unidireccional la temperatura final del líquido frío  $t_2''$  siempre es inferior a la temperatura final del líquido caliente  $t_1''$ . Cuando tiene lugar la contracorriente, la temperatura final del líquido frío  $t_2''$  puede ser superior a la temperatura final del líquido caliente  $t_1''$ . Por consiguiente, siendo una misma la temperatura inicial del líquido frío en caso de la contracorriente se puede calentarlo hasta una temperatura más alta que durante la corriente unidireccional.

La diferencia de temperaturas entre dos medios a lo largo de la superficie durante la corriente unidireccional varía de manera más acentuada que durante la contracorriente. Al mismo tiempo el valor medio de la diferencia de temperaturas entre los dos medios durante la contracorriente es mayor que durante la corriente unidireccional. Solamente debido a este factor durante la contracorriente el intercambiador de calor resulta más compacto [véase la ecuación (8-3)]. Sin embargo, si la temperatura por lo menos de uno de los fluidos operantes es constante, en este caso el valor medio de la diferencia de temperaturas entre los dos medios, independientemente del circuito de movimiento, resulta igual. Precisamente así ocurre durante la ebullición de los líquidos y la condensación de los vapores o cuando el gasto de un fluido operante es tan grande que su temperatura varía poco.

Después de examinar las ecuaciones generales del cálculo térmico de los aparatos y aclarar las condiciones de temperatura en que funcionan los intercambiadores de calor, pasemos al estudio más detallado de las magnitudes que forman parte de la ecuación (8-3).

**2. Diferencia media de temperaturas entre los dos medios.** Al deducir la fórmula destinada a obtener valores medios de la diferencia de temperaturas entre los dos medios, examinemos el más simple dispositivo cambiador de calor que funcione según el circuito de la corriente unidireccional. La cantidad de calor transmitida por unidad de tiempo desde el líquido caliente hacia el frío a través de un elemento de superficie  $dF$  (fig. 8-3) se determina mediante la ecuación

$$dQ = k(t_1 - t_2)dF. \quad (a)$$

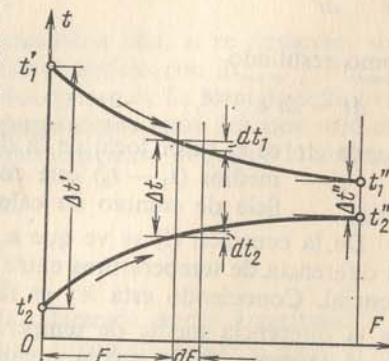


Fig. 8-3. Gráfico para deducir la fórmula que permite obtener los valores medios de la diferencia de temperaturas entre dos medios.



Como resultado la temperatura del líquido caliente bajará en  $dt_1$  y la del frío se elevará en  $dt_2$ . Por consiguiente,

$$dQ = -G_1 c_{p1} dt_1 = G_2 c_{p2} dt_2, \quad (b)$$

de donde

$$dt_1 = -dQ/G_1 c_{p1} = -dQ/W_1; \quad (c)$$

$$dt_2 = dQ/G_2 c_{p2} = dQ/W_2. \quad (d)$$

Entonces la diferencia de temperaturas entre los dos medios será

$$dt_1 - dt_2 = d(t_1 - t_2) = -(1/W_1 + 1/W_2)dQ = -mdQ, \quad (e)$$

donde  $m = 1/W_1 + 1/W_2$ .

Al sustituir en la ecuación (e) el valor de  $dQ$  de la ecuación (a), obtenemos

$$d(t_1 - t_2) = -mk(t_1 - t_2)dF. \quad (f)$$

Designemos a  $(t_1 - t_2)$  a través de  $\Delta t$  y efectuemos la separación de las variables:

$$d(\Delta t)/\Delta t = -mkdF. \quad (g)$$

Si los valores de  $m$  y  $k$  son constantes, entonces, al integrar la ecuación (g), obtenemos:

$$\int_{\Delta t'}^{\Delta t} \frac{d(\Delta t)}{\Delta t} = -mk \int_0^F dF$$

ó

$$\ln \frac{\Delta t}{\Delta t'} = -mkF, \quad (h)$$

como resultado

$$\Delta t = \Delta t' e^{-mkF}, \quad (i)$$

donde  $\Delta t$  es el valor local de la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $(t_1 - t_2)$  que corresponde a un elemento de la superficie de cambio de calor.

De la ecuación (i) se ve que a lo largo de la superficie de calefacción la diferencia de temperaturas entre los dos medios varía según la ley exponencial. Conociendo esta ley es fácil determinar también el valor medio de la diferencia media de temperaturas entre los medios  $\bar{\Delta t}$ . Basándose en el teorema de la media (cuando  $k = \text{const}$ ), tenemos:

$$\bar{\Delta t} = \frac{1}{F} \int_0^F \Delta t dF = \frac{\Delta t'}{F} \int_0^F e^{-mkF} dF = \frac{\Delta t'}{-mkF} (e^{-mkF} - 1) \quad (k)$$

Al introducir en la ecuación (k) los valores de  $mkF$  y  $e^{-mkF}$  de las ecuaciones (h) e (i) y al tomar en consideración que según la fig. 8-3 al final de la superficie de calefacción  $\Delta t = \Delta t''$ , en definitiva conseguimos:

$$\bar{\Delta t} = \frac{\Delta t'' - \Delta t'}{\ln \frac{\Delta t''}{\Delta t'}} = \frac{\Delta t' - \Delta t''}{\ln \frac{\Delta t'}{\Delta t''}} \quad (8-7)$$

ó

$$\bar{\Delta t} = \frac{(t'_1 - t'_2) - (t''_1 - t''_2)}{\ln \frac{t'_1 - t'_2}{t''_1 - t''_2}}. \quad (8-7a)$$

El valor semejante de la diferencia de temperaturas entre los dos medios se llama *valor medio logarítmico* y se designa frecuentemente en los libros técnicos con  $\Delta t_{\log}$ .

Del mismo modo se deduce la fórmula que da los valores medios de la diferencia de temperaturas entre los dos medios también para la contracorriente. La diferencia sólo en el hecho de que en el segundo miembro de la ecuación (d) es necesario poner el signo menos, por lo que aquí  $m = 1/W_1 - 1/W_2$ . La fórmula definitiva para la diferencia media logarítmica de temperaturas entre los dos medios cuando existe contracorriente es:

$$\bar{\Delta t} = \frac{(t'_1 - t'_2) - (t''_1 - t''_2)}{\ln \frac{t'_1 - t'_2}{t''_1 - t''_2}}. \quad (8-8)$$

Si las magnitudes  $W_1$  y  $W_2$  son iguales, si tiene lugar una contracorriente ( $m = 0$ ), de la ecuación (i) tenemos:  $\Delta t = \Delta t'$ . En este caso la diferencia de temperaturas entre los dos medios en toda la superficie es constante:

$$\Delta t = \Delta t' = t'_1 - t'_2 = \Delta t'' = t''_1 - t''_2. \quad (l)$$

Las fórmulas (8-7) y (8-8) pueden reducirse a una, si se designan, sin tomar en cuenta el comienzo y el fin de la superficie, con  $\Delta t_{\text{mayor}}$  y  $\Delta t_{\text{menor}}$  diferencias de temperaturas entre los fluidos operantes. La fórmula definitiva de la diferencia media logarítmica de temperaturas entre los dos medios para la corriente unidireccional y la contracorriente adquiere la forma:

$$\bar{\Delta t} = \frac{\Delta t_{\text{mayor}} - \Delta t_{\text{menor}}}{\ln \frac{\Delta t_{\text{mayor}}}{\Delta t_{\text{menor}}}} = \frac{\Delta t_{\text{mayor}} - \Delta t_{\text{menor}}}{2,3 \log \frac{\Delta t_{\text{mayor}}}{\Delta t_{\text{menor}}}}. \quad (8-9)$$

La deducción de las fórmulas para la diferencia media logarítmica de temperaturas entre los dos medios se hizo suponiendo que el gasto y el calor específico de los fluidos operantes, así como el coeficiente de transformación de calor a lo largo de la superficie de calefacción permanecían constantes. Puesto que en realidad estas condiciones se cumplen solamente



de modo aproximado, resulta que también el valor de  $\Delta t$  calculado con ayuda de las fórmulas (8-7), (8-8) ó (8-9), es aproximado.

En los casos en que la temperatura de los fluidos operantes a lo largo de la superficie de calefacción varía de modo insignificante, se puede calcular la diferencia media de temperaturas entre los dos medios como la media aritmética de las diferencias extremas de temperaturas entre dichos medios  $\Delta t'$  y  $\Delta t''$ :

$$\bar{\Delta t} = \frac{1}{2} (\Delta t' + \Delta t'') = \frac{\Delta t'}{2} \left( 1 + \frac{\Delta t''}{\Delta t'} \right). \quad (8-10)$$

La media aritmética de la diferencia de temperaturas entre los dos medios siempre es mayor que el valor medio logarítmico. Pero cuando  $\Delta t''/\Delta t' > 0,6$  éstos se diferencian entre sí en menos de un 3%. Un error tal en los cálculos técnicos es perfectamente admisible.

Para los aparatos en los que las corrientes de los fluidos operantes se cruzan y se mezclan, el problema de obtener los valores medios de la diferencia de temperaturas entre los dos medios se caracteriza por cálculos matemáticos complicados. Por eso, para los casos que se encuentran con mayor frecuencia, los resultados de la solución se presentan por lo común en forma gráfica. Para una serie de esquemas dichas gráficas se muestran en el apéndice. Valiéndose de éstas, el cálculo de la diferencia media de temperaturas entre los dos medios se realiza del modo siguiente. Inicialmente, según la fórmula (8-8), se determina la diferencia media logarítmica de temperaturas entre los dos medios como en los aparatos en que se realiza sólo contracorriente. Luego se calculan las magnitudes auxiliares  $P$  y  $R$ :

$$P = \frac{t_2'' - t_2'}{t_1' - t_2'} = \frac{\delta t_2}{\Delta t'}; \quad (8-11)$$

$$R = \frac{t_1' - t_1''}{t_2'' - t_2'} = \frac{\delta t_1}{\delta t_2}. \quad (8-12)$$

Según estos datos tomados de la gráfica auxiliar correspondiente (véanse las figs. A-5 — A-15), se encuentra la corrección  $\varepsilon_{\Delta t}$ . Así pues, en el caso general la diferencia media de temperaturas entre los dos medios se determina por la fórmula

$$\bar{\Delta t} = \varepsilon_{\Delta t} \frac{(t_1' - t_2'') - (t_1'' - t_2')}{\ln \frac{t_1' - t_2''}{t_1'' - t_2'}}. \quad (8-13)$$

**Ejemplo 8-1.** En una instalación frigorífica es necesario enfriar un líquido cuyo gasto es  $G_1 = 275$  kg/h, desde  $t_1' = 120^\circ\text{C}$  hasta  $t_1'' = 50^\circ\text{C}$ . El calor específico del líquido es  $c_{p1} = 3,05$  kJ/(kg $\cdot^\circ\text{C}$ ). Como refrigerante se usa agua con  $t_2' = 10^\circ\text{C}$ . El gasto del agua de enfriamiento es  $G_2 = 1100$  kg/h. El calor específico del agua  $c_{p2} = 4,19$  kJ/(kg $\cdot^\circ\text{C}$ ). Determinar el área de la superficie de calefacción para los casos de corriente unidireccional y contracorriente, si el coeficiente de transmisión de calor es  $k = 1000$  W/(m $^2\cdot^\circ\text{C}$ ).

Calculemos las magnitudes  $W_1$  y  $W_2$ :

$$W_1 = \frac{275}{3600} \cdot 3,05 = 0,23 \text{ kW/}^\circ\text{C};$$

$$W_2 = \frac{1100}{3600} \cdot 4,19 = 1,28 \text{ kW/}^\circ\text{C}.$$

Al sustituirlas en la ecuación (8-5) obtenemos la temperatura final del agua

$$\frac{120 - 50}{t_2' - 10} = \frac{1,28}{0,23}; \quad t_2'' = 10 + \frac{70}{5,56} = 22,6^\circ\text{C}.$$

Con ayuda de la fórmula (8-7 a) determinemos la diferencia media entre las temperaturas cuando hay corriente directa

$$\bar{\Delta t}_{\rightarrow} = \frac{(120 - 10) - (50 - 22,6)}{2,3 \log \frac{120 - 10}{50 - 22,6}} = 59^\circ\text{C}.$$

Para la contracorriente según la fórmula (8-8) obtenemos:

$$\bar{\Delta t}_{\leftarrow} = \frac{(120 - 22,6) - (50 - 10)}{2,3 \log \frac{120 - 22,6}{50 - 10}} = 64,7^\circ\text{C}.$$

La cantidad de calor transmitido se define con ayuda de la ecuación (8-2):

$$Q = G_1 c_{p1} (t_1' - t_1'') = W_1 (t_1' - t_1'') = 0,23 \cdot 70 = 16,1 \text{ kW}.$$

Teniendo los valores de  $Q$  y  $\bar{\Delta t}$ , según la fórmula (8-1) pueden determinarse las áreas de las superficies de calefacción:

$$F_{\rightarrow} = \frac{Q}{k \bar{\Delta t}_{\rightarrow}} = \frac{16,1 \cdot 10^3}{1000 \cdot 59} = 0,273 \text{ m}^2;$$

$$F_{\leftarrow} = \frac{Q}{k \bar{\Delta t}_{\leftarrow}} = \frac{16,1 \cdot 10^3}{1000 \cdot 64,7} = 0,249 \text{ m}^2.$$

**3. Coeficiente de transmisión de calor.** Durante el cálculo de los dispositivos cambiadores de calor surgen dificultades en la determinación del coeficiente de transmisión de calor  $k$ . Estas dificultades son producto fundamentalmente de la variación de la temperatura en los fluidos operantes y del carácter complejo de la configuración geométrica de la superficie de cambio de calor. Es muy difícil considerar la influencia de estos factores, por lo que en la práctica el valor del coeficiente de transmisión de calor se determina a base de las fórmulas aducidas en el cap. 6. Pero las particularidades específicas del proceso de intercambio de calor, en los aparatos que se calculan, se toman en consideración durante la elección de los valores de los coeficientes de traspaso del calor  $\alpha$  que forman parte de la fórmula con que se halla el coeficiente de transmisión de calor.



Al calcular  $k$ , en primer lugar es necesario llevar a cabo el análisis de las resistencias térmicas particulares y, si esto es posible, es necesario simplificar la fórmula de cálculo. Los métodos y reglas de simplificación también están expuestos en el cap. 6.

Después es necesario tomar en consideración la influencia ejercida sobre el coeficiente de termotransferencia por la variación de la temperatura de los fluidos operantes. En gran parte, esta consideración se reduce al hecho de referir los coeficientes de traspaso del calor a las temperaturas medias de los fluidos operantes. Para el líquido con mayor equivalente de agua la temperatura media se toma como la media aritmética de los valores extremos, por ejemplo,  $t_{\text{mayor}} = 0,5 (t'_{\text{mayor}} + t''_{\text{mayor}})$ . Al mismo tiempo para otro líquido con menor equivalente de agua la temperatura media se determina de la correlación  $t_{\text{menor}} = t_{\text{mayor}} \pm \Delta t$ . Aquí  $\Delta t$  es la diferencia media logarítmica de temperaturas entre los dos medios; el signo “—” se usa en los casos en que  $t_{\text{mayor}}$  designa la temperatura del líquido caliente y el signo “+”, en los casos en que  $t_{\text{mayor}}$  designa la temperatura del líquido frío.

A veces el cálculo del coeficiente de termotransferencia se realiza a base de las temperaturas de los fluidos operantes en el comienzo y al final de la superficie de calefacción. Si los valores obtenidos para  $k'$  y  $k''$  no se diferencian considerablemente entre sí; su media aritmética se toma por el valor medio  $k$ , el cual se define así:

$$k = \frac{k' + k''}{2}. \quad (8-14)$$

En la mayoría de los casos prácticos para obtener valores medios este método resulta suficiente. En caso de una divergencia considerable entre los valores de  $k'$  y  $k''$  es necesario dividir la superficie de calefacción en sectores aislados dentro de cuyos límites el coeficiente de termotransferencia varíe de modo insignificante, y para cada uno de estos sectores se debe calcular por separado la transmisión de calor.

El mismo método se aplica también en los casos en que cambian bruscamente las condiciones en que el fluido operante baña la superficie de calefacción, por ejemplo, en la parte inferior de la superficie de calefacción el bañado es transversal; en la media, el bañado es longitudinal y en la superior, de nuevo transversal. Si, además, la temperatura del fluido operante varía de modo insignificante, entonces se obtienen valores medios:

$$k = \frac{k_1 F_1 + k_2 F_2 + k_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3}, \quad (8-15)$$

donde  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  son los sectores aislados del área de la superficie de calefacción;

$k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  son los valores medios del coeficiente de transmisión de calor en estos sectores.

**4. Cálculo de la temperatura final de los fluidos operantes.** Como objetivo definitivo del cálculo térmico teníamos anteriormente la defini-

ción del área de la superficie de calefacción y de las dimensiones principales del intercambiador de calor para su diseño ulterior. Supongamos ahora que el aparato citado ya existe, o por lo menos ya está diseñado. En este caso como objetivo del cálculo térmico tomamos la definición de las temperaturas finales de los fluidos operantes. Esto es así llamado cálculo de comprobación.

Al resolver este problema se conocen las magnitudes siguientes: área de la superficie de calefacción  $F$ , coeficiente de transmisión de calor  $k$ , valores de  $W_1$ ,  $W_2$  y las temperaturas iniciales  $t'_1$  y  $t'_2$ . Las magnitudes buscadas son: temperaturas finales  $t''_1$ ,  $t''_2$  y la cantidad del calor transmitido  $Q$ .

En los cálculos aproximados se puede partir de las siguientes suposiciones. La cantidad de calor entregada por el líquido caliente es igual a:

$$Q = W_1(t'_1 - t''_1), \quad (8-16)$$

de lo que se desprende que su temperatura final  $t''_1$  se halla por la correlación

$$t''_1 = t'_1 - Q/W_1. \quad (a)$$

Respectivamente para el líquido frío tenemos:

$$Q = W_2(t''_2 - t'_2) \quad (8-17)$$

y

$$t''_2 = t'_2 + Q/W_2. \quad (b)$$

Si se acepta que las temperaturas de los fluidos operantes varían de acuerdo con la ley lineal, entonces

$$Q = kF \left( \frac{t'_1 + t''_1}{2} - \frac{t'_2 + t''_2}{2} \right). \quad (c)$$

A cambio de las incógnitas  $t''_1$  y  $t''_2$  coloquemos sus valores correspondientes de las ecuaciones (a) y (b), entonces obtendremos:

$$Q = kF(t'_1 - Q/2W_1 - t'_2 - Q/2W_2). \quad (d)$$

Después de realizar la transformación ulterior hallamos:

$$\frac{Q}{kF} + \frac{Q}{2W_1} + \frac{Q}{2W_2} = Q \left( \frac{1}{kF} + \frac{1}{2W_1} + \frac{1}{2W_2} \right) = t'_1 - t'_2, \quad (e)$$

de donde definitivamente nos queda:

$$Q = \frac{t'_1 - t'_2}{\frac{1}{kF} + \frac{1}{2W_1} + \frac{1}{2W_2}} \quad (8-18)$$

Si se conoce la cantidad de calor transmitido  $Q$  es muy simple determinar, según las fórmulas (a) y (b), las temperaturas finales  $t''_1$  y  $t''_2$  de los fluidos operantes.



Aunque el esquema aducido del cálculo es simple, sin embargo este se puede aplicar sólo en los cálculos de orientación, cuando las variaciones de temperaturas de los líquidos son pequeñas. Pero en el caso general la temperatura final depende del circuito de movimiento de los fluidos operantes. Por eso para la corriente unidireccional y la contracorriente se realiza una deducción de las fórmulas más precisas.

a) *Corriente directa*. Hemos dicho antes que la diferencia de temperaturas entre los dos medios varía de acuerdo con la ley exponencial

$$\Delta t'' = \Delta t' e^{-m k F}. \quad (8-19)$$

Teniendo en cuenta que

$$m = 1/W_1 + 1/W_2; \Delta t' = t'_1 - t'_2$$

y que al fin de la superficie de calefacción  $\Delta t'' = t''_1 - t''_2$ , reemplazamos estos valores en la ecuación (8-19)

$$\frac{t''_1 - t''_2}{t'_1 - t'_2} = e^{-(1/W_1 + 1/W_2) k F} \quad (8-20)$$

Sin embargo esta ecuación sólo muestra las diferencias de las temperaturas. Para obtener de aquí las temperaturas finales por separado, es necesario restar de la unidad ambos miembros de la igualdad:

$$1 - \frac{t''_1 - t''_2}{t'_1 - t'_2} = 1 - e^{-(1/W_1 + 1/W_2) k F} \quad (8-21)$$

ó

$$(t'_1 - t''_1) + (t''_2 - t'_2) = (t'_1 - t'_2) [1 - e^{-(1/W_1 + 1/W_2) k F}]. \quad (8-22)$$

Puesto que [véase la ecuación (8-5)]

$$t''_2 - t'_2 = (t'_1 - t''_1) \frac{W_1}{W_2},$$

entonces, al introducir este valor en el primer miembro de la ecuación (8-22) obtenemos:

$$\delta t_1 = t'_1 - t''_1 = (t'_1 - t'_2) \frac{1 - e^{-(1 + W_1/W_2)(kF/W_1)}}{1 + W_1/W_2} = (t'_1 - t'_2) \Pi. \quad (8-23)$$

La última ecuación muestra que la variación de la temperatura del líquido caliente  $\delta t_1$  es igual a cierta fracción  $\Pi$  de la existente diferencia de temperaturas entre los dos medios  $t'_1 - t'_2$ .  $\Pi$  depende solamente de dos parámetros adimensionales  $W_1/W_2$  y  $kF/W_1$ .

De modo análogo, de la ecuación (8-22) también se puede obtener la expresión para la variación de temperatura del líquido frío

$$\delta t_2 = t''_2 - t'_2 = (t'_1 - t'_2) \frac{W_1}{W_2} \frac{1 - e^{-(1 + W_1/W_2)(kF/W_1)}}{1 + W_1/W_2} = (t'_1 - t'_2) \frac{W_1}{W_2} \Pi. \quad (8-24)$$

Después de determinar la variación de las temperaturas de los fluidos operantes y conociendo sus temperaturas iniciales es fácil hallar las finales:

$$t''_1 = t'_1 - \delta t_1 \quad \text{y} \quad t''_2 = t'_2 + \delta t_2. \quad (8-25)$$

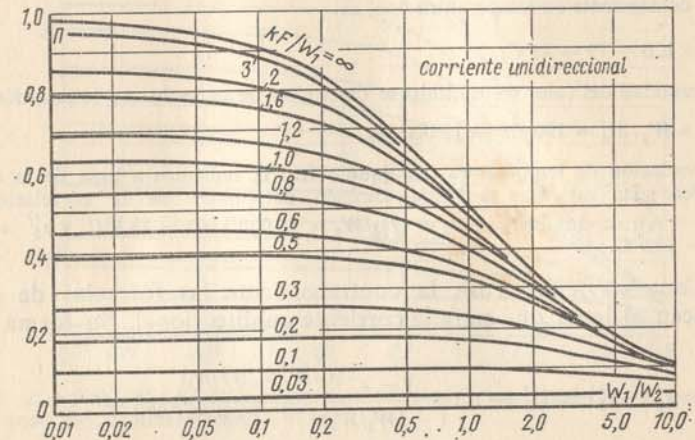


Fig. 8-4.  $\Pi = f(W_1/W_2; kF/W_1)$  como función auxiliar para calcular la temperatura final, cuando hay corriente unidireccional.

La cantidad de calor transmitido a través de la superficie de cambio de calor se determina mediante la expresión:

$$Q_{\Pi} = W_1 \delta t_1 = W_1(t'_1 - t'_2) \Pi. \quad (8-26)$$

El valor de la función  $\Pi = f(W_1/W_2, kF/W_1)$  está dado en la fig. 8-4. Las fórmulas (8-24), (8-25) y (8-26) pueden usarse también para calcular los valores intermedios de la temperatura de los fluidos operantes y la cantidad de calor. En este caso en las fórmulas de cálculo en vez de  $F$  es necesario el valor de  $F_x$ .

**Ejemplo 8-2.** Hay un refrigerador de agua cuya área de la superficie de calefacción es  $F = 8 \text{ m}^2$ . Determinar las temperaturas finales y la cantidad del calor transmitido  $Q$ , si se dan las magnitudes siguientes:  $G_1 = 225 \text{ kg/h}$ ;  $c_{p1} = 3,03 \text{ kJ/(kg} \cdot ^\circ\text{C)}$  y  $t'_1 = 120^\circ\text{C}$ . Para enfriar se usa agua; el gasto de ésta es  $G_2 = 1000 \text{ kg/h}$ , a temperatura  $t'_2 = 10^\circ\text{C}$  y su calor específico es  $c_{p2} = 4,19 \text{ kJ/(kg} \cdot ^\circ\text{C)}$ . El coeficiente de transmisión de calor es  $k = 35 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}$ .

$$W_1 = \frac{225}{3600} \cdot 3,03 = 0,19 \text{ kW/}^\circ\text{C};$$

$$W_2 = \frac{1000}{3600} \cdot 4,19 = 1,16 \text{ kW/}^\circ\text{C};$$

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{0,19}{1,16} = 0,16; \quad \frac{kF}{W_1} = \frac{35 \cdot 8}{0,19 \cdot 10^3} = 1,5.$$



El valor correspondiente de la función  $\Pi$  lo hallamos de la fig. 8-4;  $\Pi(0,16; 1,5)=0,72$ .

La variación (descenso) de la temperatura del líquido caliente según la ecuación (8-23) es igual a:

$$\delta t_1 = t'_1 - t''_1 = (t'_1 - t'_2) \Pi = (120 - 10) \cdot 0,72 = 79^\circ\text{C}.$$

Por consiguiente su temperatura final es:

$$t''_1 = 120 - 79 = 41^\circ\text{C}.$$

La cantidad del calor transmitido se determina de acuerdo con la ecuación (8-26):

$$Q_{\Pi} = W_1 \cdot \delta t_1 = 190 \cdot 79 = 15\,000 \text{ W}.$$

La variación de temperatura del líquido frío la hallamos a base de la ecuación (8-24). Pero esta variación se puede también determinar de la correlación  $Q = W_2(t'_2 - t''_2)$ , de donde  $t'_2 - t''_2 = Q_{\Pi}/W_2 = 15\,000/1160 = 13,9^\circ\text{C}$  y  $t''_2 = 10 + 13,9 = 23,9^\circ\text{C}$ .

b) *Contracorriente*. Para la contracorriente las fórmulas de cálculo se deducen al igual que para la corriente unidireccional. Su forma definitiva es:

$$\delta t_1 = t'_1 - t''_1 = (t'_1 - t'_2) \frac{1 - e^{-(1-W_1/W_2)(kF/W_1)}}{1 - (W_1/W_2)e^{-(1-W_1/W_2)(kF/W_1)}} = (t'_1 - t'_2) Z; \quad (8-27)$$

$$\delta t_2 = t''_2 - t'_2 = (t'_1 - t'_2) \frac{W_1}{W_2} \frac{1 - e^{-(1-W_1/W_2)(kF/W_1)}}{1 - (W_1/W_2)e^{-(1-W_1/W_2)(kF/W_1)}} = (t'_1 - t'_2) \frac{W_1}{W_2} Z; \quad (8-28)$$

$$Q_Z = W_1 \delta t_1 = W_1(t'_1 - t'_2) Z. \quad (8-29)$$

En el caso particular, cuando  $W_1/W_2 = 1$ , es decir  $W_1 = W_2 = W$ , las fórmulas (8-27), (8-28) y (8-29) se transforman en:

$$\delta t_1 = t'_1 - t''_1 = (t'_1 - t'_2) \frac{1}{1 + W/(kF)}; \quad (8-30)$$

$$\delta t_2 = t''_2 - t'_2 = (t'_1 - t'_2) \frac{1}{1 + W/(kF)}; \quad (8-31)$$

$$Q_Z = (t'_1 - t'_2) \frac{W}{1 + W/(kF)} \quad (8-32)$$

El valor de la función  $Z = f(W_1/W_2, kF/W_1)$  se da en la fig. 8-5. Para calcular los valores intermedios de la temperatura de los fluidos operantes y la cantidad de calor transmitido, en las fórmulas (8-30), (8-31) y (8-32) el valor  $F$  se sustituye por  $F_x$ ; pero en las fórmulas (8-27), (8-28) y (8-29) esta sustitución se realiza en el numerador, mientras que en el denominador queda el valor total de la superficie  $F$ .

**Ejemplo 8-3.** Si se toma el mismo intercambiador de calor que hemos examinado en las condiciones de la corriente unidireccional, y se supone que las condiciones de

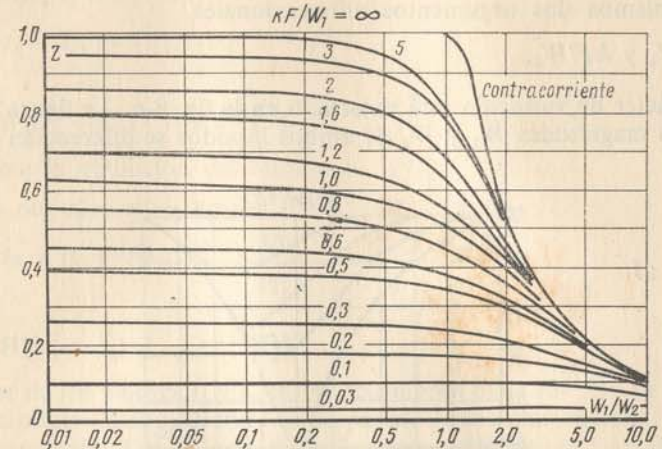


Fig. 8-5.  $Z = f(W_1/W_2; kF/W_1)$  como función auxiliar para calcular la temperatura final, cuando hay contracorriente.

transmisión de calor permanecen sin cambios [ $k = 35 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}$ ], entonces obtendremos las correlaciones:  $W_1 = 190 \text{ W/}^\circ\text{C}$ ;  $W_2 = 1160 \text{ W/}^\circ\text{C}$ ;  $W_1/W_2 = 0,16$ ;  $kF/W_1 = 1,5$ .

De la fig. 8-5 hallamos el valor de la función  $Z$ :

$$Z(0,16, 1,5) = 0,75.$$

La variación de temperatura del líquido caliente según la ecuación (8-27) es igual a:

$$\delta t_1 = (t'_1 - t'_2) Z = (120 - 10) \cdot 0,75 = 82,5^\circ\text{C}.$$

Su temperatura final es

$$t''_1 = 120 - 82,5 = 37,5^\circ\text{C}.$$

La variación de temperatura del líquido frío según la ecuación (8-28) es:

$$\delta t_2 = (t'_1 - t'_2) \frac{W_1}{W_2} Z = 110 \cdot 0,16 \cdot 0,75 = 13,2^\circ\text{C}.$$

Su temperatura final es

$$t''_2 = 10 + 13,2 = 23,2^\circ\text{C}.$$

La cantidad del calor transmitido se determina por la ecuación (8-29):

$$Q_Z = W_1 \delta t_1 = 190 \cdot 82,5 = 15\,680 \text{ W}.$$

De este modo, si hay contracorriente en el intercambiador de calor tiene lugar un mayor enfriamiento del líquido caliente.

c) *Comparación de la corriente unidireccional con la contracorriente*. Para aclarar la ventaja de un circuito con respecto a otro es suficiente comparar la cantidad del calor transmitido durante la corriente unidireccional y la contracorriente, permaneciendo sin cambio las demás condi-



ciones. Para esto es necesario dividir la ecuación (8-26) por la ecuación (8-29). Como resultado de esta operación obtenemos una nueva función de los mismos dos argumentos adimensionales

$$W_1/W_2 \text{ y } kF/W_1,$$

cuyo carácter de variación está mostrado en la fig. 8-6. La figura muestra que si las magnitudes  $W_1$  y  $W_2$  de ambos líquidos se diferencian conside-

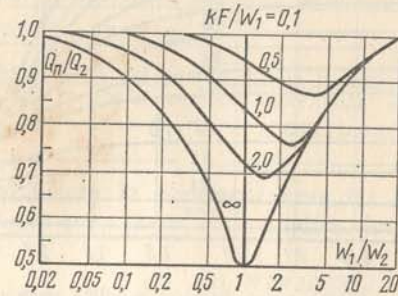


Fig. 8-6.  $Q_n/Q_z = f(W_1/W_2; kF/W_1)$  es la comparación entre la corriente unidireccional y la contracorriente.

rablemente entre sí (cuando  $W_1/W_2 < 0.05$  y cuando  $W_1/W_2 > 10$ ) o si el valor del parámetro  $kF/W_1$  (o bien  $kF/W_2$ ) es pequeño, los circuitos pueden considerarse equivalentes. La primera condición significa que la variación de la temperatura de un líquido es insignificante comparada con la variación de la temperatura del otro. Luego, puesto que  $kF/W_2 = \delta t_2/\Delta t$ , la segunda condición corresponde al caso en que la diferencia media de temperaturas entre los dos medios supera considerablemente la variación de la temperatura del fluido operante. En todos los demás casos, siendo una misma la superficie de calefacción e iguales las temperaturas extremas de los agentes portadores de calor, si existe la corriente unidireccional se transmite menor cantidad de calor que si hay la contracorriente. Por eso, desde el punto de vista de la termodinámica, siempre es necesario dar preferencia a la contracorriente, si otras causas cualesquiera (por ejemplo, constructivas) no obligan a utilizar la corriente unidireccional. Al mismo tiempo es necesario tener en cuenta que durante la contracorriente se originan condiciones térmicas más difíciles para el metal, puesto que unos mismos sectores de las paredes del intercambiador de calor son bañados en ambos lados por los fluidos operantes que tienen temperatura más alta.

Durante la condensación y la ebullición la temperatura del líquido es constante. Esto significa que el equivalente de agua de tal líquido es infinitamente grande. En este caso la corriente unidireccional y la contracorriente son equivalentes y las ecuaciones (8-26) y (8-29) se hacen idénticas. La temperatura final del líquido, cuyo equivalente de agua tiene valor finito, se determina del modo siguiente.

Durante la condensación de vapor

$$W_1 = \infty, t'_1 = t''_1 = t_1;$$

$$t'_2 = t_1 - (t_1 - t'_2)(1 - e^{-kF/W_2}) \quad (8-33)$$

y

$$Q = W_2(t_1 - t'_2)(1 - e^{-kF/W_2}). \quad (8-34)$$

Durante la ebullición del líquido

$$W_2 = \infty; t'_2 = t''_2 = t_2;$$

$$t'_1 = t_2 + (t_1 - t_2)e^{-kF/W_1} \quad (8-35)$$

y

$$Q = W_1(t'_1 - t_2)(1 - e^{-kF/W_1}). \quad (8-36)$$

En vez de los valores  $t_1$  y  $t_2$  en las ecuaciones de la (8-33) a la (8-36) se puede introducir la temperatura de la pared, cuyo valor en este caso también es constante. Los valores de la función  $e^{-kF/W_1} = e^{-x}$  se dan en la tabla A-13.

Si la corriente es cruzada, las temperaturas finales de los fluidos operantes se hallan entre las temperaturas finales que tienen la corriente unidireccional y la contracorriente. Por eso en los cálculos aproximados puede usarse el método de cálculo de uno de los circuitos indicados. Si uno de los líquidos se mueve al encuentro del otro en forma de zigzag (corriente mixta), el cálculo puede realizarse de modo como éste se hace para la contracorriente.

**5. Influencias de las pérdidas de calor y de la penetrabilidad de las paredes.** Todas las fórmulas antes mencionadas son válidas si las pérdidas de calor al medio ambiente son nulas. En realidad éstas siempre existen. Es posible calcular su influencia, pero en este caso las fórmulas de cálculo serán bastante complicadas. Por eso para tomar en consideración la influencia de las pérdidas de calor en la práctica, por lo común, se aplica el método aproximado que describiremos a continuación.

Las pérdidas de calor del líquido caliente provocan una disminución más brusca de su temperatura. Esto equivale al caso en que un líquido — emisor de calor, que se encuentra en un aparato sin pérdidas al medio ambiente, tenga menor valor del equivalente de agua. Por eso se puede contar la influencia de las pérdidas al medio ambiente, variando el equivalente de agua del líquido — emisor de calor en el aparato térmico de tal modo, que en éste tenga lugar la misma reducción de la temperatura, que ocurre en un flujo con el número real de agua, cuando existen pérdidas de calor. Las pérdidas de calor por parte del líquido frío ejercen una influencia inversa; disminuyen el aumento de la temperatura del líquido, lo que conduce a un aparente aumento de su equivalente de agua.

Las succiones de aire frío exterior ejercen la misma influencia que la pérdida de calor al exterior. El aire succionado reduce en la parte caliente la temperatura del líquido (gas) del mismo modo que si el dispositivo



cambiador de calor fuese absolutamente impenetrable para las pérdidas de calor, pero el líquido tuviera un menor valor del equivalente de agua. La succión de aire en la parte fría reduce la temperatura del líquido frío lo que equivale a aumentar el valor del equivalente de agua.

Si la pérdida de calor constituye  $p\%$  respecto a la cantidad total del calor transmitido, entonces en vez del vapor real  $W$  es necesario introducir en las fórmulas de cálculo el valor  $W'$  que es determina del modo siguiente:

$$W' = W(1 \pm p/100). \quad (8-37)$$

El signo “—” se toma para el líquido caliente y el signo “+” para el frío.

Si aplicamos tal método para tomar en consideración las pérdidas de calor al exterior, todas las fórmulas aducidas anteriormente para calcular las temperaturas finales pueden aceptarse sin cambio alguno.

### 8-3. Termopermutadores de regeneración y aparatos mezcladores

1. **Aparatos de regeneración.** Se llaman aparatos de regeneración a tales dispositivos cambiadores de calor en que el proceso de transmisión de calor desde el caloportador caliente hacia el frío se encuentra separado en tiempo en dos períodos. Durante el primer período a través de aparato circula el caloportador caliente, cuyo calor se transmite a las paredes y se acumula en éstas. En ésta operación el agente portador de calor se enfría y las paredes del dispositivo se calientan; esto es así llamado período de calentamiento. Durante el segundo período a través del aparato circula el caloportador frío que absorbe el calor acumulado en las paredes. En esta operación el caloportador se calienta y las paredes se enfrían; esto es período de enfriamiento.

Así pues en los aparatos de regeneración los caloportadores caliente y frío circulan en un mismo canal y alternativamente bañan una misma superficie de calefacción. En los aparatos de regeneración el proceso de transmisión de calor no es estacionario. Cuando se produce el calentamiento y luego el enfriamiento la temperatura de la pared varía. Las curvas de la fig. 8-7 dan una idea del carácter de su variación en el período de enfriamiento. En la fig. 8-8 se exponen las curvas de las variaciones de la temperatura  $t_p$ , para cierto tramo de la superficie, en los períodos de calentamiento y enfriamiento. Junto con la variación de la temperatura de la pared, sin duda, varía también en el tiempo la temperatura del líquido (a excepción de su temperatura en la entrada del aparato). Además de la variación en el tiempo, todas las temperaturas en los regeneradores varían también a lo largo de la superficie de calefacción.

Sea un regenerador para calentar aire; la estructura interna que sirve para acumular calor, está construida de ladrillos y forma canales rectos (fig. 8-9, a). Los gases calientes se dirigen de arriba abajo y el aire frío, de abajo arriba. Las curvas de variación de las temperaturas tanto según el tiempo, como a lo largo de la superficie se exponen en la fig. 8-9, b. La

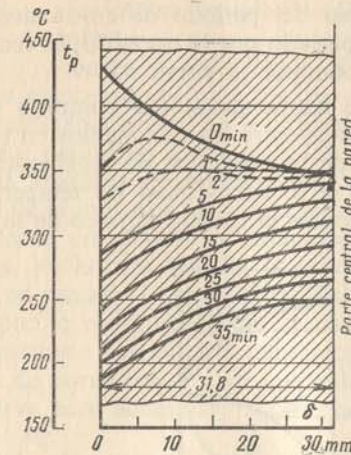


Fig. 8-7. Variación en la distribución de temperatura en la pared de un regenerador durante el período de su enfriamiento.



Fig. 8-8. Carácter de la variación de la temperatura en la superficie de la estructura de un regenerador (anillo de temperatura) durante el período de calentamiento  $t_{p1}$  y el de enfriamiento  $t_{p2}$ .

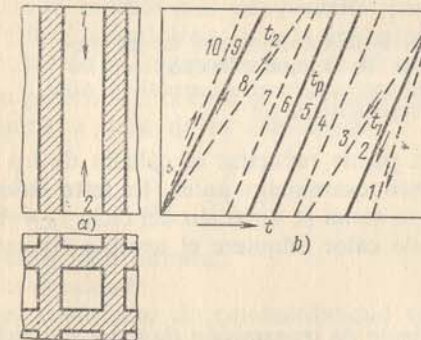


Fig. 8-9. Carácter de la variación de las temperaturas de los fluidos operantes  $t_1$  y  $t_2$  en los regeneradores y de la superficie de calefacción  $t$  en el espacio y el tiempo.

temperatura de los gases  $t_1$  al principio del período de calentamiento se representa por la curva 3; al final del período por la curva 1, y la temperatura media durante el período de calentamiento por la curva 2. La temperatura de la superficie  $t_p$  al final del período de calentamiento y al comienzo del período de enfriamiento se representa por la curva 4; al principio del período de calentamiento y al final del período de enfriamiento por la curva 7; la media durante el período de calentamiento  $t_{p1}$ , por la curva 5; la media durante el período de enfriamiento  $t_{p2}$  por la curva 6.



La temperatura del aire  $t_2$  al principio del período de enfriamiento se representa por la curva 8; al final del período por la curva 10; la temperatura media durante este mismo período por la curva 9.

Cuando existe una distribución de temperaturas tan compleja y una variación de la diferencia de temperaturas entre los dos medios en tiempo y espacio, el cálculo térmico preciso de los aparatos de regeneración es sumamente complicado. Sin embargo, si se aprovechan las temperaturas medias durante el ciclo (fig. 8-10), entonces el cálculo térmico de los apa-

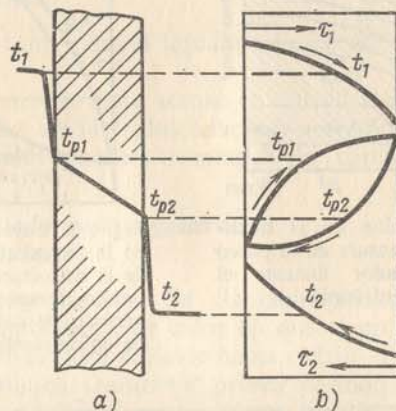


Fig. 8-10. Confrontación de los procesos de termotransferencia en los termopermutadores recuperativos (a) y regenerativos (b).

ratos de regeneración puede reducirse al cálculo de los de recuperación, cuyos principios hemos examinado antes. En este caso como intervalo calculado de tiempo, se toma la duración del ciclo  $\tau_0 = \tau_1 + \tau_2$  y la ecuación de transmisión de calor adquiere el aspecto siguiente:

$$Q_c = k_c(t_1 - t_2), \quad (8-38)$$

donde  $k_c$  es el coeficiente de transmisión de calor del ciclo cuyo valor se determina mediante la expresión

$$k_c = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 \tau_1} + \frac{1}{\alpha_2 \tau_2}} \varepsilon_k, \quad (8-39)$$

donde  $\alpha_1$  es el coeficiente total de traspaso del calor durante el período de calentamiento (teniendo en cuenta la radiación de los gases);  $\alpha_2$  es el coeficiente total de traspaso del calor durante el período de enfriamiento;

$\tau_1$  y  $\tau_2$  es un período de calentamiento y enfriamiento;  $\varepsilon_k$  es el coeficiente de corrección que toma en consideración la circunstancia de que las temperaturas medias de la superficie

durante el período de calentamiento  $t_{p1}$  y el período de enfriamiento  $t_{p2}$  no son iguales entre sí,  $\varepsilon_k = 1 - (t_{p1} - t_{p2})$ ; por lo común el valor de  $\varepsilon_k \approx 0,8$ .

Los regeneradores para los que  $\varepsilon_k = 1$  se llaman ideales.

El cálculo ulterior de los regeneradores se puede realizar según las fórmulas deducidas antes para los aparatos de recuperación.

Los aparatos de regeneración se utilizan en lo fundamental en las ramas de la industria en que la temperatura de los gases calientes es alta y se necesita un elevado calentamiento del aire (por ejemplo, en los altos hornos, los hornos Martin, la producción de coque, la fusión de vidrio y en otras ramas). Como el material del relleno que acumula el calor, se usan por lo común ladrillos de chamota o silicocalcáreos con los cuales se construyen los canales continuos, o son colocados con intervalos en forma de corredores o con intervalos al tresbolillo; además como relleno que sirve para acumular, el calor se usan placas de metal, hojas de aluminio, etc.

El funcionamiento de los generadores depende de muchos factores, en particular, del espesor del relleno, su conductibilidad térmica y la capacidad acumuladora, de la duración de los períodos, la temperatura de los líquidos, el grado de ensuciamiento, etc. La duración de los períodos puede ser diferente, desde algunos minutos hasta varias horas. Con mayor frecuencia  $\tau_1 = \tau_2 = 0,5$  h ( $\tau_0 = 1$  h). Al elegir el espesor del relleno también se presentan muchas posibilidades, pero para cada aparato existe un determinado espesor más conveniente; para los regeneradores corrientes de ladrillo silicocalcáreo, con la inversión de media hora, el espesor más favorable de la mampostería es de 40 a 50 mm.

En los cálculos prácticos el coeficiente de transmisión de calor del ciclo a veces se determina a base de la correlación

$$\frac{1}{k_c} = \frac{1}{\alpha_1 \tau_1} + \frac{1}{\alpha_2 \tau_2} + 0,4 \left( \frac{2}{c \delta \rho} + \frac{\delta}{2 \lambda \tau_0} \right), \quad (8-40)$$

donde  $c$  es la capacidad térmica;

$\rho$  es la densidad;

$\lambda$  es el coeficiente de conductibilidad térmica;

$\delta$  es el espesor del ladrillo.

El coeficiente de traspaso del calor por contacto para los gases de escape y el aire, durante su movimiento en la estructura de los corredores, se puede determinar según la fórmula

$$\alpha = 8,8 \frac{w_0^{0,8}}{d^{0,33}}, \quad (8-41)$$

donde  $w_0$  es la velocidad del gas o del aire en condiciones normales ( $0^\circ\text{C}$  y  $\approx 1,01 \cdot 10^5$  Pa);

$d$  es el diámetro del canal.

Si el relleno se dispone al tresbolillo el coeficiente de traspaso del calor es superior en el 16% al obtenido según la fórmula (8-41). Para hallar el



coeficiente total de traspaso del calor es necesario además determinar el valor del coeficiente de traspaso del calor por radiación.

En las condiciones reales el coeficiente de transmisión de calor puede variar a consecuencia de la postcombustión de los gases en los regeneradores, su obstrucción por la ceniza volátil, etc. La distribución irregular de los gases y el bañado incompleto de la superficie de calefacción también ejerce gran influencia sobre el funcionamiento de los aparatos.

En las centrales eléctricas el principio de regeneración, en la transmisión de calor, encontró su aplicación en el calentador de aire cuya primera mitad se comunica con el conducto de gas, y la segunda, con el conducto de aire. En este aparato el relleno que acumula el calor se fabrica usando chapas perfiladas de hierro con pasos estrechos para los gases y el aire y se monta de tal modo que puede girar. A través de una parte del relleno circulan los gases calientes (período de calentamiento) y a través de la otra, el aire frío (período de enfriamiento). A consecuencia de su movimiento giratorio el relleno se desplaza ininterrumpidamente; la parte que en un determinado momento se calienta por el gas, en el momento siguiente se desplaza de tal modo que a ésta llega el flujo de aire y la enfría. Así, pues, al construir la estructura giratoria en el calentador de aire se resolvió de manera original el problema del movimiento ininterrumpido y simultáneo del aire y de los gases a través de un mismo aparato de regeneración.

**2. Aparatos mezcladores.** Se llaman mezcladores a los dispositivos cambiadores de calor en los que la transmisión de calor del líquido caliente al frío se opera mediante su contacto directo y su mezcla. Estos aparatos tienen una amplia propagación y se emplean fundamentalmente para enfriar y calentar gases con ayuda del agua, o para enfriar agua con ayuda del aire. En particular, se usan en la producción de gas, durante el acondicionamiento de aire, para enfriar el agua en las torres de enfriamiento, condensar el vapor, etc. (fig. 8-11).

Uno de los factores determinantes en el trabajo de los termopermutadores mezcladores es la superficie de contacto. Con esta finalidad los líquidos normalmente se dispersan en forma de gotitas pequeñas. Sin embargo es necesario elegir el grado de división en cada caso de acuerdo con las condiciones concretas de trabajo. Cuanto más pequeñas son las gotitas, tanto mayor es la superficie de contacto, pero al mismo tiempo es también menor la velocidad de caída de la gota. En este caso la velocidad del gas debe ser pequeña; pues en caso contrario las gotas comenzarán a volar o las arrastrará el aire. Por eso el grado de pulverización del agua ha de estar en correspondencia con la velocidad del aire y el rendimiento del aparato.

En los termopermutadores mezcladores, a la par con el proceso del intercambio de calor tienen lugar también los procesos de intercambio másico. Por ejemplo, al entrar en contacto un gas seco con el agua tiene lugar una evaporación del agua y sus vapores los lleva el gas, es decir, ocurre la humectación de éste. Al mezclarse el gas, que tiene gran porcen-

taje de vapores de agua, con el agua se realiza la condensación del vapor o el secado del gas.

Durante el cálculo de los aparatos mezcladores por lo común se usan las normas de la carga admisible por una unidad de volumen, determinadas

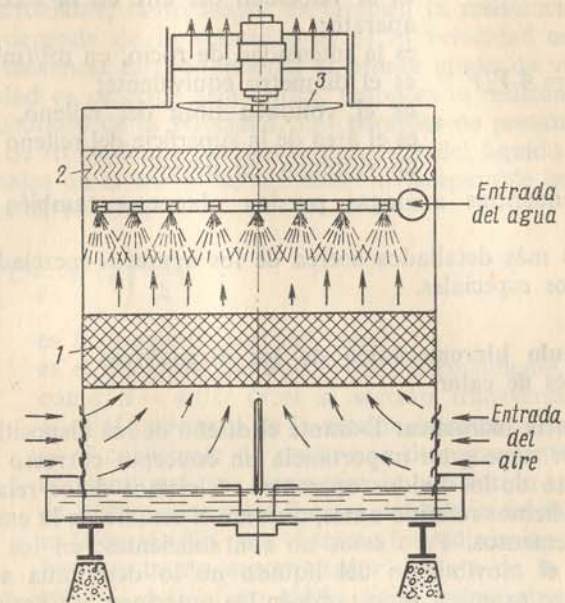


Fig. 8-11. Esquema de un termopermutador mezclador.  
1 — estructura; 2 — separador de humedad; 3 — ventilador.

a base de la práctica. Pero la experiencia muestra que el funcionamiento y el rendimiento de estos aparatos dependen en gran medida del grado en que se aprovecha su volumen. Mediante la distribución uniforme del gas según la sección del aparato se puede aumentar considerablemente su rendimiento o reducir sus dimensiones.

Para asegurar mayor superficie de contacto de los fluidos operantes los aparatos con frecuencia se llenan con un material en pedazos, por ejemplo, el coque, los anillos de Rashig o las rejillas de madera. La superficie de cambio de calor es la película de líquido que se forma sobre la superficie del relleno en pedazos. Los aparatos de este tipo se llaman lavadores de gases; son ampliamente usados en la industria química. Para el enfriamiento del aire mediante agua en el lavador de gases, N. M. Zhávoronkov [25] obtuvo la dependencia generalizada

$$Ki = 0,01 Re_g^{0,7} Re_{fl}^{0,7} Pr_g^{0,3} \quad (8-42)$$

donde  $Ki = kd_{equiv}/\lambda_g$  es el número de Kirpichev;

$Re_g = 4w_0V/v_gF$  es el número de Reynolds para los gases;

$Re_{fl} = Gd_{equiv}/v_{fl}$  es el número de Reynolds para el líquido;



|                     |  |
|---------------------|--|
| $Pr_g = \nu_g/a_g$  | es el número de Prandtl para los gases;  |
| $k$                 | es el coeficiente de transmisión de calor cuyo valor numérico determina por sí las condiciones del intercambio de calor entre el gas y el líquido; |
| $w_0$               | es la velocidad del aire en la sección libre del aparato;  |
| $G$                 | es la intensidad de rocío, en $m^3/(m^2 \cdot s)$ ;  |
| $d_{equiv} = 4 V/F$ | es el diámetro equivalente;  |
| $V$                 | es el volumen libre del relleno, en $m^3/m^3$ y  |
| $F$                 | es el área de la superficie del relleno en la unidad de volumen, en $m^2/m^3$ .  |

Las dependencias análogas pueden obtenerse también para otros aparatos.

Los datos más detallados acerca de los aparatos mezcladores pueden verse en libros especiales.

#### 8-4. Cálculo hidromecánico de los dispositivos cambiadores de calor

1. **Resistencia hidráulica.** Durante el diseño de los dispositivos cambiadores de calor tiene gran importancia un concepto correcto del carácter del movimiento de los fluidos operantes. A ciertos datos relativos a este problema nos hemos referido antes, durante el estudio de la emisión calorífica en los elementos. Pero estos no son suficientes; en los dispositivos complicados, el movimiento del líquido no lo determina solamente el elemento que se examina, sino también los anteriores y ulteriores. Puesto que la combinación de elementos en los aparatos puede ser muy variada, es muy difícil considerar de antemano su influencia mutua.

Basándose sobre la experiencia ya existente se puede afirmar que el funcionamiento de los dispositivos cambiadores de calor se determina, en lo fundamental, por el carácter del movimiento de los fluidos operantes. El conocimiento de las condiciones del movimiento da la posibilidad de elegir correctamente las fórmulas de cálculo de la emisión calorífica, y permite determinar con bastante precisión la resistencia hidráulica. Esta es necesaria tanto para calcular la potencia de los ventiladores y las bombas, como para evaluar hasta qué grado es racional la construcción del aparato y establecer el régimen óptimo de su funcionamiento.

La tarea fundamental del cálculo hidromecánico de los dispositivos cambiadores de calor consiste en determinar las pérdidas de presión del agente portador de calor durante su paso a través del aparato. Cuando un líquido fluye, siempre surgen resistencias que se oponen al movimiento. Para superar estas resistencias se gasta una energía mecánica que es proporcional a la diferencia de presiones  $\Delta p$ . Las resistencias, dependiendo de la naturaleza de su surgimiento, se subdividen en las de rozamiento y las locales.

La resistencia hidráulica de rozamiento se debe a la viscosidad del líquido y se presenta sólo en los lugares de escurrimiento inseparable

del líquido a lo largo de una pared dura. En este caso la fuerza de presión es igual a la fuerza de fricción, es decir,  $\Delta p f = s F$ , de donde  $\Delta p = s \frac{F}{f}$ .

Puesto que  $s = \mu \frac{dw}{dn}$ , lo que significa que cuanto mayor viscosidad tiene el líquido circulante, tanto mayor es también la resistencia. Además, la resistencia depende de la velocidad  $w$ . Si la velocidad es inferior a la crítica, la resistencia es proporcional al primer grado de velocidad; pero si la velocidad es superior a la crítica, entonces la resistencia es proporcional al cuadrado de la velocidad. Las pérdidas de presión para superar las fuerzas de frotamiento durante la corriente del líquido incompresible por los canales en el tramo de movimiento inseparable generalmente se calculan por la fórmula

$$\Delta p_{fr} = \left( \xi \frac{1}{d} + \zeta_0 \right) \frac{\rho w^2}{2}, \quad (8-43)$$

donde  $l$  es la longitud total del canal;  
 $d$  es el diámetro hidráulico que, normalmente, se encontrará como  $d = 4 f/U$  ( $f$  es la sección transversal del canal y  $U$  es el perímetro de la sección transversal);  
 $\xi$  es el coeficiente de resistencia de rozamiento, la magnitud adimensional que caracteriza la correlación entre las fuerzas de frotamiento y las fuerzas de inercia del flujo;  
 $\zeta_0$  es la corrección para el tramo hidrodinámico inicial: cuando hay un tramo amortiguador delante de la entrada en el tubo  $\zeta_0 = 0$ , si no existe dicho tramo amortiguador y se realiza una distribución uniforme de las velocidades en la entrada  $\zeta_0 = 1,16$ , para un tubo redondo y  $\zeta_0 = 0,63$  para un canal plano;  
 $\rho$  y  $w$  son la densidad media y la velocidad media del líquido o gas en el canal.

En los cálculos prácticos la corrección  $\zeta_0$ , por lo común, no tiene un carácter esencial y la resistencia de rozamiento en los tubos y canales se determina según la fórmula

$$\Delta p_{fr} = \xi \frac{l}{d} \frac{\rho w^2}{2}. \quad (8-44)$$

Las resistencias locales están condicionadas por la formación de torbellinos en los lugares en que varía la sección del canal, y en los que se superan los obstáculos aislados, por ejemplo, a la entrada, salida, estrechamiento, ensanchamiento, viraje, etc. Las resistencias locales se hallan mediante la fórmula

$$\Delta p_1 = \zeta \frac{\rho w^2}{2}, \quad (8-45)$$

donde  $\zeta$  es el coeficiente de la resistencia local.



Hasta no hace mucho tiempo la resistencia en el caso de movimiento no isotérmico de un líquido se calculó tal como si fuese isotérmico, o sea, según las mismas fórmulas. Mientras tanto, la influencia de la variación de la temperatura en este caso se tomaba en consideración sólo por el hecho de que todas las magnitudes de cálculo: velocidad, densidad y viscosidad, se referían a la temperatura media del líquido. Sin embargo, experimentalmente fue establecido que si la resistencia de los dispositivos cambiadores de calor se calcula según las magnitudes referidas a la temperatura media del líquido (lo que es completamente razonable), entonces resulta que el coeficiente de resistencia de rozamiento no es aquí únicamente la función del número Re, sino también de los números Gr y Pr (véase más adelante).

Además, en el movimiento no isotérmico de los gases el movimiento comienza a ser irregular a consecuencia del cambio de su densidad y, a la par con esto, también de la velocidad. Esto provoca una pérdida adicional de presión para acelerar el gas  $\Delta p_{p,d}$  la que, durante el movimiento en un canal de sección constante, es igual a la diferencia duplicada de las presiones dinámicas, o sea:

$$\Delta p_{p,d} = 2(\rho_2 w_2^2/2 - \rho_1 w_1^2/2) = \rho_2 w_2^2 - \rho_1 w_1^2. \quad (8-46)$$

Aquí el índice 1 lo poseen las magnitudes referidas a la temperatura en la sección inicial y el índice 2, las de la sección final. Cuando el gas se calienta,  $\Delta p_{p,d}$  es positivo, y cuando se enfria,  $\Delta p_{p,d}$  es negativo.

Durante el movimiento no isotérmico hay que tomar en consideración también la resistencia del autotiro, el cual surge a consecuencia de que al movimiento forzado del líquido calentado, en los tramos descendentes del canal, se opone la fuerza de sustentación dirigida hacia arriba.

La fuerza de sustentación y la resistencia del autotiro, que tiene valor igual a la primera, se determinan con ayuda de la correlación

$$\Delta p_p = \pm g(\rho - \rho_0) h_0, \quad (8-7)$$

donde  $\rho_0$  es la densidad media del fluido frío, por ejemplo, del aire circundante;

$\rho$  es la densidad media del fluido calentado, por ejemplo, la de los gases con hollín;

$h_0$  es la altura del canal vertical, del conducto de gas.

Cuando el movimiento del fluido calentado es descendiente, el valor  $\Delta p_p$  representa la resistencia adicional del canal, pero en caso del movimiento ascendente del fluido calentado la resistencia del canal disminuye en la magnitud  $\Delta p_p$ . La resistencia total del autotiro se determina como la diferencia entre los valores de la fuerza de sustentación en todos los canales descendientes y ascendentes.

Al determinar la resistencia total de cualquier dispositivo es la regla común en los cálculos técnicos sumar las resistencias aisladas. Tal método de cálculo está basado en la siguiente suposición: la resistencia total de los elementos conectados en serie es igual a la suma de las resistencias separadas. En realidad esto no es así, puesto que la resistencia de cada elemento depende del carácter del movimiento del fluido en los tramos ante-

cedentes. En particular, por ejemplo, la resistencia del tramo recto, situado después de un codo, es considerablemente superior a la resistencia de un tramo recto idéntico ubicado delante del codo. La influencia de estos factores se puede establecer con exactitud sólo experimentalmente.

De este modo la resistencia hidráulica total de los aparatos de intercambio térmico es igual a:

$$\Delta p_n = \Sigma \Delta p_{fr} + \Sigma \Delta p_1 + \Sigma \Delta p_{p,d} + \Sigma \Delta p_p. \quad (8-48)$$

En conclusión es necesario decir que todos los datos aducidos en los manuales concernientes a la resistencia hidráulica, como regla, han sido obtenidos para el movimiento isotérmico del fluido. Su aplicación al cálculo de la resistencia en el movimiento no isotérmico debe realizarse, tomando en consideración los cambios posibles tanto de algunas magnitudes por separado, como de toda la resistencia en conjunto. Como ya hemos indicado el cálculo preciso de la resistencia es un problema prácticamente imposible. Por eso en los casos de suma importancia es necesario determinar la resistencia experimentalmente.

## 2. Resistencia hidráulica de los elementos

a) *Tubos y canales lisos.* Durante el movimiento de un fluido en los tubos rectos el coeficiente de resistencia de rozamiento  $\xi$  es función del número Re (fig. 8-12).

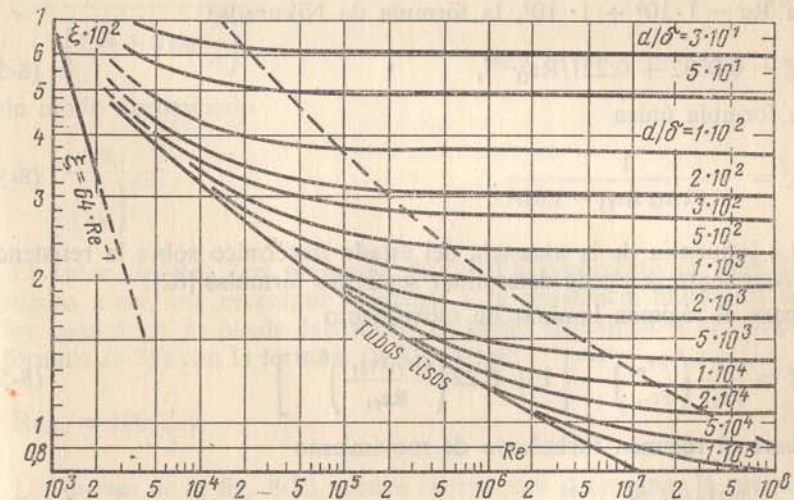


Fig. 8-12. Coeficiente de resistencia de rozamiento para tubos lisos y rugosos.

Para el régimen laminar de movimiento

$$\xi = A/Re. \quad (8-49)$$

Es la ley de Poiseuille. La constante  $A$  en esta expresión depende de la forma de la sección; los valores numéricos de  $A$  se dan en la tabla 8-1.



Tabla 8-1

Valores del diámetro equivalente y del coeficiente  $A$  usados en la fórmula (8-49) para diferentes secciones de un canal

| Forma de la sección   | $d_{\text{equiv}}$ | $A$ |
|---|--------------------|-----|
| Círculo de diámetro $d$   | $d$                | 64  |
| Cuadrado de lado $a$  | $a$                | 57  |
| Triángulo equilátero de lado $a$                                      | $0,58 a$           | 53  |
| Anillo de anchura $a$   | $2a$               | 96  |
| Rectángulo de lados $a$ y $b$ , cuando:                               |                    |     |
| $a/b = 0$   | $2a$               | 96  |
| $a/b = 0,25$  | $1,6 a$            | 73  |
| $a/b = 0,5$   | $1,3 a$            | 62  |
| Elipse, siendo $a$ el semieje menor y $b$ , el semieje mayor, cuando: |                    |     |
| $a/b = 0,3$   | $1,4 a$            | 73  |
| $a/b = 0,5$   | $1,3 a$            | 68  |
| $a/b = 0,7$   | $1,17 a$           | 65  |

En el régimen turbulento de movimiento para  $Re = 3 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^5$ , el coeficiente de resistencia de rozamiento lo determina la fórmula de Blasius

$$\xi = 0,3164/Re_{fl}^{0,25}; \quad (8-50)$$

para  $Re = 1 \cdot 10^5 \div 1 \cdot 10^8$ , la fórmula de Nikuradse

$$\xi = 0,0032 + 0,221/Re_{fl}^{0,237}, \quad (8-51)$$

o la fórmula única

$$\xi = \frac{1}{(1,82 \log Re_{fl} - 1,64)^2}. \quad (8-52)$$

La influencia de la ausencia del estado isotérmico sobre la resistencia de rozamiento se puede determinar según las fórmulas [62]:

para el régimen laminar de movimiento

$$\xi = \frac{A}{Re_{fl}} \left( \frac{Pr_p}{Pr_{fl}} \right)^{0,33} \left[ 1 + 0,22 \left( \frac{Gr_{fl} Pr_{fl}}{Re_{fl}} \right)^{0,15} \right] \quad (8-53)$$

para el régimen turbulento de movimiento

$$\xi = \frac{0,3164}{Re_{fl}^{0,25}} \left( \frac{Pr_p}{Pr_{fl}} \right)^{0,33} \quad (8-53 a)$$

En las fórmulas (8-52) y (8-53) todas las propiedades físicas están referidas a la temperatura media del líquido, a excepción de  $Pr_p$  que se refiere a la temperatura de la pared.

Como dimensión lineal determinante se ha elegido el diámetro equivalente  $d_{\text{equiv}}$  del canal.

En la fórmula (8-53) entran tres conjuntos: con el primero de éstos se determina el coeficiente de resistencia de rozamiento durante el movimiento isotérmico; con el segundo, la influencia de la variación de la viscosidad en la capa límite y con el tercero, la influencia del movimiento libre (turbulencia del flujo).

b) *Tubos rugosos*. La rugosidad de las paredes del canal es la causa de formación de torbellinos y de una pérdida adicional de energía. Por eso el coeficiente de resistencia de rozamiento de los tubos rugosos es función del número  $Re$  y de la rugosidad relativa  $\delta/r$ , donde  $\delta$  es la altura media de los resaltos separados en la superficie y  $r$ , el radio del tubo. En el movimiento laminar la rugosidad no influye por completo y la resistencia de rozamiento resulta igual a la del tubo liso. Si el movimiento es turbulento la rugosidad empieza a manifestarse inmediatamente cuando el espesor de la subcapa viscosa comienza a ser comparable con la altura de los resaltos aislados  $\delta$ . A medida que aumenta la velocidad el número de los resaltos aislados que salen fuera de los límites de la capa límite aumenta, y la resistencia hidráulica crece (fig. 8-12). En presencia de números grandes de  $Re$  y rugosidad finita, la resistencia hidráulica se determina solamente por la rugosidad y no depende de  $Re$ . En esta zona, según los datos del trabajo [112] el coeficiente de resistencia se determina con ayuda de la siguiente correlación:

$$\xi = \frac{1}{\left( 1,74 + 2 \log \frac{r}{\delta} \right)^2} \quad (8-54)$$

o de modo aproximado

$$\xi = \frac{0,1}{\left( \frac{r}{\delta} \right)^{0,25}}. \quad (8-55)$$

El valor de  $Re_{\text{var}}$  en presencia del cual el coeficiente de resistencia comienza a ser una magnitud constante y la resistencia hidráulica sigue la ley cuadrática, se puede determinar de modo aproximado, al comparar la fórmula (8-55) con la fórmula (8-50), o sea:

$$Re_{\text{var}} \approx 100 \frac{r}{\delta}. \quad (8-56)$$

Las curvas de la fig. 8-12 pueden usarse para determinar la rugosidad "hidráulica" de los tubos reales. Para esto es necesario solamente trazar para el tubo ensayado la curva del coeficiente de resistencia y compararla con las curvas de la fig. 8-12. Este método usado para determinar la rugosidad es más seguro y se usa de modo suficientemente amplio.

c) *Tubos acodados*. En los tubos acodados el movimiento del fluido tiene un carácter muy complicado. Bajo la acción de las fuerzas centrífugas todo el flujo se aparta hacia la pared exterior y corre con una elevada velocidad, mientras que en dirección transversal se forma una circulación



secundaria. A pesar de esto el valor crítico de  $Re$  resulta más alto que para los tubos rectos y, además, tanto más alto, cuanto más pronunciado es el codo (cuando  $d/D = 1/15$ ,  $Re_{cr} = 8000$ ). La resistencia hidráulica de los tubos acodados es mayor que la de los rectos.

d) *Curvas y codos*. Las curvas, derivaciones y codos pueden ser muy diferentes y los datos para calcular sus resistencias se encuentran en cualquier manual. Estos se dan en forma del coeficiente de resistencia  $\xi$  o de la longitud equivalente del tramo recto. Antes de usar estos datos es necesario aclarar, en primer lugar, según qué sección se realizó el cálculo. El hecho de que las secciones de entrada y de salida no son iguales tiene gran importancia. Al usar los valores de  $\xi$  aducidos en los manuales es posible tomar en consideración o bien la resistencia solamente de la misma derivación, o bien junto con ésta el aumento de resistencia de los tramos ulteriores lo que es consecuencia de la curva.

Cuanto mayor es el radio de curvatura, tanto menor es la resistencia. Si es imposible efectuar una curva suave es conveniente hacer un codo recto con álabes directores. Con ayuda de los álabes directores no sólo disminuye la resistencia hidráulica, sino que se asegura también el bañado uniforme de la superficie del canal después de la curva.

e) *Haces de tubos*. Durante el bañado a lo largo del eje longitudinal de los haces de tubos, la resistencia se calcula mediante las fórmulas empleadas para los canales directos, además en las fórmulas se introduce el diámetro hidráulico equivalente  $d_{equiv} = 4f/U$ . Durante el bañado transversal de los haces, la resistencia puede considerarse en lo fundamental como la suma de las resistencias locales de estrechamiento y ensanchamiento. Al mismo tiempo la resistencia de rozamiento constituye una parte insignificante. Sin embargo en los cálculos técnicos no se hace una separación de este tipo, sino que se determina inmediatamente la resistencia total según la fórmula (8-45). En este caso el valor del coeficiente de resistencia se determina de modo suficientemente preciso mediante las correlaciones siguientes:

para los haces al tresbolillo, cuando  $x_1/d < x_2/d$

$$\xi = (4 + 6,6 m) Re_{\Pi}^{-0,28}; \quad (8-57)$$

para los haces al tresbolillo, cuando  $x_1/d \geq x_2/d$

$$\xi = (5,4 + 3,4 m) Re_{\Pi}^{-0,28}; \quad (8-58)$$

para los haces en forma de corredores

$$\xi = (6 + 9 m) (x_1/d)^{-0,23} Re_{\Pi}^{-0,26}. \quad (8-59)$$

En estas fórmulas la velocidad está referida a la sección estrecha del haz, y las propiedades físicas a la temperatura media del flujo;  $m$  es el número de hileras en el haz en dirección de movimiento.

Las fórmulas (8-57), (8-58) y (8-59) dan los coeficientes de resistencia, siendo el ángulo de incidencia  $\Psi = 90^\circ$ . Al disminuir el ángulo de incidencia, el coeficiente de resistencia se reduce. Los valores del coeficiente de corrección  $\varepsilon_{Ap} = \Delta p_{\Psi} / \Delta p_{90}$  son los siguientes:

|                 |    |    |      |      |      |      |      |      |
|-----------------|----|----|------|------|------|------|------|------|
| $\Psi$          | 90 | 80 | 70   | 60   | 50   | 40   | 30   | 10   |
| $\varepsilon_p$ | 1  | 1  | 0,95 | 0,83 | 0,69 | 0,53 | 0,38 | 0,15 |

3. **Potencia necesaria para desplazar el fluido.** Después de determinar la resistencia hidráulica total y conociendo el gasto del fluido es fácil determinar también la potencia necesaria para desplazar el fluido operante a través del aparato. La potencia en el árbol de la bomba o del ventilador se determina a base de la fórmula

$$N = V \Delta p / \eta = G \Delta p / \rho \eta, \quad (8-60)$$

donde  $V$  es el gasto volumétrico del fluido;

$G$  es el gasto en masa del fluido;

$\Delta p$  es la resistencia total;

$\rho$  es la densidad del líquido o gas y

$\eta$  es el rendimiento de la bomba o del ventilador.

Para elegir las formas y dimensiones óptimas de la superficie de calefacción de un intercambiador de calor, se toma la correlación más provechosa entre la superficie de cambio de calor y el gasto de energía para el movimiento de los agentes portadores de calor. Es necesario lograr que la correlación indicada sea óptima, es decir, la más provechosa desde el punto de vista económico. Esta correlación se establece sobre la base de los cálculos técnico-económicos [37, 71, 79].



## SIMULACIÓN DE APARATOS TÉRMICOS

## 9-1. Planteamiento del problema

Para calcular y diseñar los dispositivos cambiadores de calor se necesitan los valores numéricos de los coeficientes de traspaso del calor y de la resistencia hidráulica. Pero las fórmulas más seguras usadas para determinar estos coeficientes, están lejos de abarcar la gran variedad de casos que se encuentran en la práctica. La aplicación de tales fórmulas, o las combinaciones arbitrarias de éstas, en los cálculos técnicos conduce con frecuencia a grandes divergencias de la realidad. La causa principal de estas divergencias consiste en que las condiciones de movimiento del fluido y del intercambio de calor, en los aparatos térmicos reales, se diferencian de las condiciones observadas en los experimentos a base de los cuales se han obtenido estas fórmulas.

Por lo común los aparatos de ensayo se construyen de modo tal que el movimiento del fluido operante se realice a través de la sección total con una distribución uniforme de velocidades, para evitar la formación de remolinos artificiales en el flujo, etc. En los aparatos térmicos reales las condiciones de movimiento y de intercambio térmico dependen en gran medida de la disposición de la superficie de calefacción, de la presencia de curvas y de las singularidades propias de la configuración de los canales. El estudio detallado de diferentes dispositivos cambiadores de calor mostró que la distribución de las velocidades en las secciones de los canales, como regla, no es uniforme y después de las curvas siempre se forman sectores de estancamiento. Por consiguiente, los diferentes elementos de la superficie de calefacción trabajan en las condiciones desiguales.

Si las condiciones de movimiento del fluido operante en los aparatos se comparan con las condiciones de movimiento del fluido en las condiciones de laboratorio, resulta que no son semejantes entre sí. Por eso las leyes del intercambio térmico obtenidas a base de los experimentos, en unas condiciones idealizadas, no pueden referirse directamente a los aparatos térmicos industriales. Su aplicación mecánica conduce a una incorrecta evaluación de los valores de los coeficientes de traspaso del calor y de

resistencia hidráulica. El estudio de las leyes del intercambio térmico, de la resistencia hidráulica y las búsquedas de las dependencias empíricas necesarias para calcular los grupos térmicos, debe realizarse en aparatos experimentales tales que tengan las condiciones térmicas y geométricas semejantes a las de los dispositivos cambiadores de calor reales.

De este modo, para crear una construcción racional de cualquier aparato térmico, en primer lugar es necesario tener un correcto concepto del carácter del movimiento del fluido operante en este aparato, y para calcular la resistencia y el intercambio de calor se deben usar unas dependencias que reflejen ya todas las singularidades del movimiento. El conocimiento del carácter y de la ley de movimiento permite al diseñador crear una construcción más perfecta, y al operario explotar el dispositivo con mayor eficacia. Por eso deben usarse todos los métodos que puedan dar una noción del movimiento del líquido y de los gases en los aparatos.

Para aclarar la influencia de los factores aislados sobre el funcionamiento del aparato, se puede realizar una serie de investigaciones detalladas en las condiciones de su explotación. Tales estudios son minuciosos, requieren grandes gastos de trabajo y de recursos y están lejos de dar resultados seguros en todos los casos. Además, a consecuencia de una serie de dificultades técnicas que surgen durante el ensayo, y de la imposibilidad de realizar mediciones directas, muchas particularidades del fenómeno quedan por completo fuera del estudio. El método de simulación descrito más abajo permite estudiar el carácter del movimiento del fluido operante, la resistencia hidráulica de los conductos de gas y el intercambio térmico en éstos, valiéndose de modelos reducidos. Al mismo tiempo en vez de estudiar en los aparatos el movimiento de los gases calientes, en el modelo puede examinarse el movimiento del aire frío o del agua. El modelo puede tener paredes transparentes; en este caso el carácter de movimiento del fluido operante se puede observar a simple vista y fotografiarlo. Cumpliendo determinadas condiciones de simulación el movimiento del fluido en el modelo resulta semejante al movimiento de los gases calientes en la instalación ejemplar. Las condiciones de simulación emanan de la teoría de semejanza (véase § 2-3).

M. V. Kirpichiov ya en el año 1923 aplicó por primera vez la teoría de la similitud al estudio de los aparatos térmicos en los modelos. Durante los últimos decenios su escuela realizó un gran trabajo en la elaboración de la teoría de la simulación [24, 37], su comprobación experimental y a aplicación práctica. En la actualidad el método de simulación es un seguro y potente método, valiéndose del cual se puede estudiar el trabajo tanto de los aparatos térmicos existentes, como de los que todavía se diseñan. En la Unión Soviética el método de simulación ha logrado gran difusión y se aplica con alto éxito en muchos centros de investigación científica, en oficinas de proyectos y en empresas industriales.



## 9-2. Condiciones de simulación

En la historia se conocen muchas tentativas de observar el movimiento del fluido operante en los aparatos industriales usando sus modelos reducidos, pero durante su construcción nunca se observaron las condiciones necesarias para que el cuadro de movimiento en el modelo sea semejante al cuadro de movimiento en la instalación simulada. Por eso, basándose sobre el estudio de los modelos con frecuencia se llegaban a deducciones erróneas. Durante los ensayos en los modelos por lo común se tomba la velocidad de movimiento del fluido excesivamente baja, pues ésta se reducía en correspondencia con la disminución de las dimensiones geométricas.

Para que los cuadros de movimiento de los fluidos en el modelo y en la instalación simulada correspondan exactamente el uno al otro, se debe cumplir la condición básica de simulación, o sea, la igualdad entre los números de Reynolds propios para la instalación simulada y el modelo, es decir,  $Re_{ins} = Re_{mod}$  o, lo que es lo mismo,

$$w_{ins} l_{ins} / v_{ins} = w_{mod} l_{mod} / v_{mod} = \text{idem.} \quad (9-1)$$

De esta misma correlación se puede determinar la velocidad con que debe circular el fluido en el modelo

$$w_{mod} = w_{ins} \frac{l_{ins} v_{mod}}{l_{mod} v_{ins}} \quad (a)$$

Supongamos que tanto en el modelo, como en la instalación simulada circula un mismo fluido (entonces  $v_{mod}/v_{ins} = 1$ ) y que el modelo está construido en la escala 1/10 (entonces  $l_{ins}/l_{mod} = 10$ ). Al introducir este valor en la ecuación (a) obtenemos que  $w_{mod} = 10 w_{ins}$ . Esto significa que para satisfacer las condiciones (9-1) en el caso considerado, es necesario no disminuir la velocidad del fluido en el modelo, sino aumentar tantas veces, cuantas veces están reducidas las dimensiones geométricas del modelo. Si no se cumple la condición (9-1) el cuadro de movimiento puede resultar muy diferente del real.

Un cuadro correcto de movimiento del fluido y las regularidades correspondientes de la resistencia hidráulica y del intercambio térmico, pueden obtenerse solamente en los modelos calculados a base de las reglas de simulación que aseguran la similitud entre los fenómenos que ocurren en la instalación simulada y en el modelo. En este caso las condiciones necesarias y suficientes para que haya similitud térmica son las siguientes: 1) similitud geométrica; 2) semejanza de las condiciones de movimiento del fluido en la entrada; 3) semejanza de las propiedades físicas en los puntos homólogos del modelo y de la instalación simulada (la constancia de las relaciones de densidades, de los coeficientes de viscosidad, etc.); 4) similitud de los campos de temperatura en las fronteras; 5) identidad de los valores de los números determinantes de similitud (criterios de similitud)  $Re$  y  $Pr$  en caso de movimiento forzado y  $Gr$  y  $Pr$ , en caso de movimiento libre del fluido. A la par con esto es suficiente determinar la identidad de los números de semejanza en una sección homóloga cualquiera.

El cumplimiento preciso de todas las condiciones de simulación es bastante complicado y puede ser realizado sólo en muy raros casos. Por eso se elaboró la metodología de la simulación aproximada de movimiento de gases y líquidos y de fenómenos del intercambio de calor en los aparatos. La simulación aproximada resultó posible debido a las propiedades particulares del movimiento del fluido viscoso: estabilidad y autoestabilización.

Se llama fenómeno de estabilidad a la propiedad de un fluido viscoso de aceptar, durante su movimiento, una distribución completamente determinada de velocidades. Esta distribución se determina por el valor del número  $Re$ , la forma del canal y la longitud relativa del tramo ya pasado del camino. Si estos factores son idénticos la distribución de las velocidades resulta semejante.

Al principio con el aumento de  $Re$  la distribución de las velocidades varía de modo muy acentuado, pero luego disminuye y, finalmente, se torna constante. La independencia del carácter del movimiento en función de  $Re$  se llama fenómeno de autoestabilización. En la zona del movimiento de autoestabilización del fluido se puede no cumplir la condición de semejanza  $Re = \text{idem}$ , lo que facilita la realización del experimento. En los canales de configuración compleja el fenómeno de autoestabilización se manifiesta muy rápido, al mismo tiempo el valor del coeficiente de resistencia hidráulica comienza a ser constante lo que puede servir como índice de que ha llegado el fenómeno de autoestabilización.

Mostremos ahora cómo las condiciones de simulación antes enumeradas se realizan en la práctica.

**Primera condición.** La similitud geométrica siempre se puede cumplir al construir el modelo, si su configuración copia con precisión la instalación simulada. Sin duda aquí no se tiene en cuenta la forma exterior del grupo estudiado, sino la configuración interior de los canales en los que se mueven gases y líquidos.

**Segunda condición.** También siempre se puede cumplir la semejanza de las condiciones de entrada del líquido al construir el sector de entrada geoméricamente semejante al sector de entrada de la instalación simulada. Sobre la base de la propiedad de estabilidad, esto es completamente suficiente para que las condiciones de movimiento del fluido a la entrada del modelo y a la de la instalación simulada sean semejantes entre sí.

**Tercera condición.** La similitud de las propiedades físicas  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$  y  $c_p$  durante la simulación de los aparatos térmicos es la condición más difícil de cumplir. Según esta condición, es necesario que en todos los puntos homólogos de la instalación simulada y del modelo, la relación de las propiedades físicas correspondientes sea constante. Si en la instalación simulada el movimiento del líquido o gas se realiza de modo isotérmico, es decir, dentro de los límites del aparato estudiado la temperatura de estos no varía, entonces para cualquier fluido operante en el modelo esta condición se satisface siempre, cuando el movimiento en el modelo se realice también de modo isotérmico. Al variar la temperatura los valores de las propiedades físicas cambian. En tales casos para satisfacer las condiciones de semejanza es necesario que tanto en el modelo, como en la instalación simulada las propiedades físicas



varíen de modo semejante. Sin embargo es imposible realizar esta similitud en forma completa. Por eso en el caso de movimiento forzado del fluido la tercera condición de similitud se cumple sólo de modo aproximado, realizando en el modelo el proceso isotérmico de movimiento (que corresponde a cierta temperatura media del fluido operante en la instalación simulada).

**Cuarta condición.** La similitud de los campos de temperatura en los límites también es muy difícil de realizar en forma completa. Por eso se usa normalmente el método aproximado de la simulación térmica local. La singularidad de este método consiste en el hecho de que la similitud de los campos de temperatura se realiza solamente en el lugar en que se lleva a cabo la investigación de la transmisión de calor, y el experimento se efectúa sólo en caso de que se cumplan las condiciones de similitud mecánica en este lugar. Al aplicarlo a los generadores de vapor tubulares, esto significa que la transmisión de calor se estudia sucesivamente para cada tubo por separado. De este modo, al examinar uno tras otro todos los tubos del modelo de generador de vapor, por lo visto, pueden obtenerse como resultado total los índices del intercambio de calor para todo el grupo en conjunto.

**Quinta condición.** La condición de la identidad de los números determinantes de similitud tanto en la instalación simulada, como en el modelo, igual que la tercera condición, se cumple con precisión únicamente en el caso del movimiento isotérmico y para los aparatos térmicos puede cumplirse sólo de modo aproximado.

Al estudiar el carácter del movimiento forzado del fluido debe cumplirse solamente la condición de  $Re = \text{ídem}$ ; cuando existe el fenómeno de autoestabilización esta condición se elimina. Durante el estudio del intercambio térmico en el movimiento forzado tienen que cumplirse las condiciones:  $Re = \text{ídem}$  y  $Pr = \text{ídem}$ . Durante el estudio del intercambio térmico, en el movimiento libre del fluido, es necesario cumplir las condiciones:  $Gr = \text{ídem}$  y  $Pr = \text{ídem}$ .

### 9.3. Ejemplos de simulación

A título de ilustrar cómo el método de modelos se aplica al estudio del funcionamiento de los aparatos térmicos industriales se dan a continuación dos ejemplos.

1. Uno de los primeros calentadores de aire construidos en la URSS fue el calentador en forma de  $\Pi$ . Después de su fabricación resultó que tiene gran resistencia hidráulica en su parte aérea, 2,5 veces mayor de la calculada. Para revelar las causas de este fenómeno se emprendió una investigación especial en la fábrica. Esta consistió en determinar el campo de velocidades y el campo de presiones estáticas en los canales del calentador de aire. Los resultados de uno de tales ensayos se exponen en la fig. 9-1 en la cual están trazadas las curvas de distribución de las velocidades en las secciones separadas del calentador. El valor y la dirección de la velocidad están indicados con flechas. Estos experimentos dan una completa idea del carácter del movimiento del aire en el elemento. La

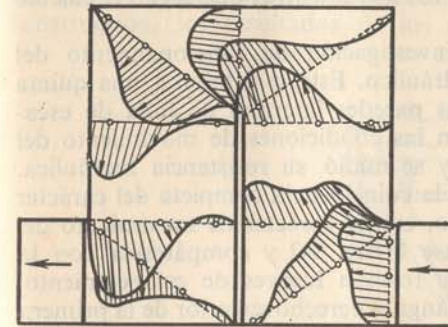


Fig. 9-1. Espectros de las velocidades del aire en el calentador de aire en forma de  $\Pi$ , medidas en una instalación simulada, cuando  $w = 11,4$  m/s.

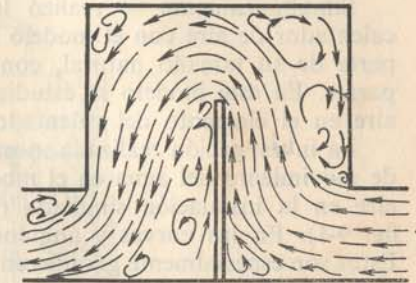


Fig. 9-2. Carácter del movimiento del aire en un calentador de aire en forma de  $\Pi$  según los ensayos realizados en un modelo de agua.

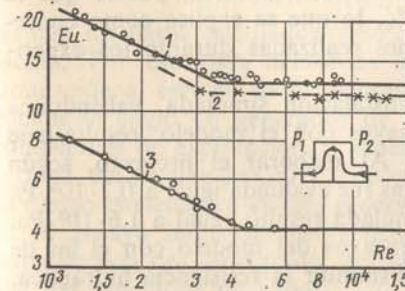


Fig. 9-3. Resistencia de un calentador de aire.

1 — según los experimentos en un modelo hidrodinámico; 2 — según los experimentos en una instalación aerodinámica; 3 — según los experimentos en un modelo hidrodinámico con álabes directores.

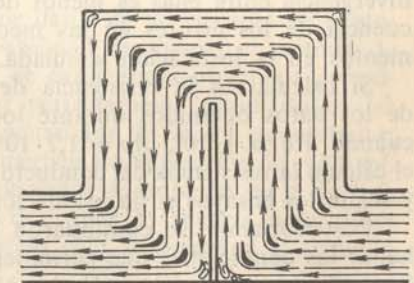


Fig. 9-4. Carácter del movimiento del aire cuando en las curvas hay álabes directores — según datos experimentales obtenidos en un modelo hidrodinámico.



figura muestra que el aire no se mueve en toda la sección del canal, en los lugares de viraje existen lugares de estancamiento, bolsas muertas, que reducen considerablemente la sección viva del canal. Por eso también la resistencia hidráulica del grupo tiene que ser considerablemente más alta que la calculada. Con la velocidad media  $w_0 = 11,2$  m/s la resistencia resultó aproximadamente igual a  $1,6 \cdot 10^3$  Pa, mientras que según el cálculo debería ser igual a  $0,7 \cdot 10^3$  Pa.

Simultáneamente se realizó la investigación de funcionamiento del calentador de aire con el modelo hidráulico. Este se fabricó a una quinta parte de su tamaño natural, con las paredes laterales de luna de escarapate. En este modelo se estudiaron las condiciones de movimiento del aire en el elemento del calentador y se midió su resistencia hidráulica.

La investigación realizada mostró la coincidencia completa del carácter de movimiento del agua en el modelo, con el carácter de movimiento del aire en la instalación simulada (véase la fig. 9-2 y compáresela con la fig. 9-1). En las curvas y ángulos se forman lugares de estancamiento. Estos son especialmente grandes en el ángulo derecho superior de la primera mitad del calentador y en el ángulo derecho inferior de la segunda mitad que se halla detrás de la pared divisoria. Debido a la presencia de curvas el movimiento del líquido no se realiza a través de la sección completa, y a consecuencia de esto en el canal aumenta considerablemente la resistencia hidráulica.

La resistencia hidráulica del elemento se investigó en el modelo hidráulico para diferentes valores del número Re. Los resultados de los experimentos están trazados en la fig. 9-3 en coordenadas logarítmicas, donde sobre el eje de las abscisas están trazados los valores del número Re y en el eje de las ordenadas, los del número Eu. Según la teoría las líneas 1 y 2 tienen que coincidir y en la práctica éstas coinciden, puesto que la divergencia entre ellas es menos del 10%, lo que se explica como consecuencia de los errores en las mediciones realizadas durante los experimentos en la instalación simulada.

Si calculamos la resistencia de la instalación simulada, valiéndonos de los datos obtenidos durante los ensayos con el modelo, resulta que cuando  $Re \geq 4 \cdot 10^3$ ,  $\Delta p = 1,7 \cdot 10^3$  Pa. Al elaborar el proyecto, según el cálculo la resistencia del conducto de gas fue evaluada igual a  $0,7 \cdot 10^3$  Pa y según los ensayos en la instalación simulada resultó igual a  $1,6 \cdot 10^3$  Pa.

Posteriormente se continuaron los ensayos del modelo con el fin de hallar las condiciones que permitieran disminuir la resistencia hidráulica. Según la propuesta del académico M. V. Kirpichiov en las curvas se instalaron álabes directores. En presencia de estos últimos cambian bruscamente las condiciones de movimiento. En vez de un movimiento desordenado con formación de zonas de estancamiento, el fluido se mueve en chorros paralelos (fig. 9-4). Tal movimiento ordenado se reflejó en la resistencia del calentador la que se redujo bruscamente (véase la línea 3 en la fig. 9-3). Al realizar el cálculo en referencia a la instalación simulada, resulta que la resistencia del elemento con álabes directores es igual sólo a  $0,6 \cdot 10^3$  Pa. De este modo la colocación de álabes directores en las curvas permitió rebajar casi 3 veces la resistencia del calentador y, al mismo tiempo,

mejorar considerablemente su funcionamiento como dispositivo cambiador de calor.

2. Como segundo ejemplo exponemos los resultados de los experimentos dedicados a estudiar la transmisión de calor. Puesto que el método de modelos debe caracterizar las condiciones reales de funcionamiento del grupo, tomando en consideración todas las particularidades de su construcción, los resultados de los experimentos hay que compararlos

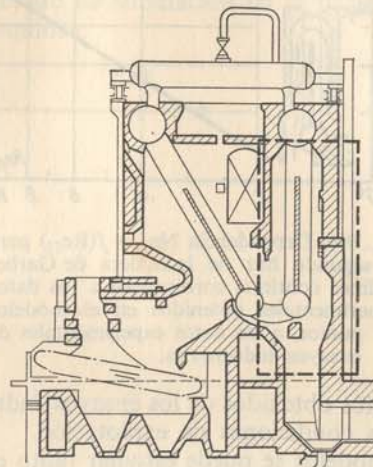


Fig. 9-5. Caldera de Garbe; la línea de trazos y puntos separa el conducto de gas que se estudió en el modelo.

no con los datos calculados, sino con los datos de las pruebas de explotación. Por eso para demostrar la posibilidad de aplicar el método de simulación al estudio de la transmisión de calor como objeto de investigación se eligió un generador de vapor perfectamente estudiado en las condiciones de explotación, a saber, el generador de vapor, acuotubular, vertical, del sistema de Garbe, con una superficie de calefacción de  $1200 \text{ m}^2$ . El dibujo esquemático de este generador de vapor se presenta en la fig. 9-5.

El ensayo industrial del generador de vapor lo realizó el Instituto termotécnico de Leningrado. En el modelo sólo se investigó el segundo haz del generador de vapor.

El modelo neumático de la parte estudiada del generador de vapor se construyó a una escala de 1:8. Para determinar el coeficiente de traspaso del calor de los tubos aislados se utilizó el método de calorimetría eléctrica.

Cada tubo se sometió al estudio por separado, a las diferentes velocidades del aire. La elaboración de los resultados de los ensayos se realizó usando los números de similitud.

Los datos tomados como valores medios para todo el haz, obtenidos de los ensayos con el modelo, se compararon con los resultados de la prueba industrial de la caldera elaborados también en los números de similitud. Los resultados de la confrontación se exponen en la fig. 9-6; aquí la línea



continua representa los resultados de investigación en el modelo y los puntos, los resultados de la prueba industrial. Como se ve en la figura la coincidencia de los resultados es muy buena. Esto muestra que, al aplicar el método de la simulación térmica local al estudio de la transmisión de calor en un generador de vapor, obtenemos los resultados que caracterizan la parte térmica del funcionamiento de la caldera de un modo tan bueno,

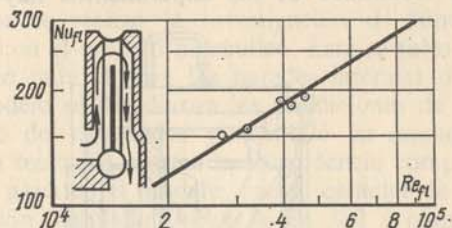


Fig. 9-6. Dependencia  $Nu_{fi} = f(Re_{fi})$  para el segundo haz de la caldera de Garbe; la línea continua corresponde a los datos experimentales obtenidos en el modelo; los puntos, a los datos experimentales de los ensayos industriales.

como la definen los datos obtenidos de los ensayos industriales más detallados, efectuados en las condiciones de explotación.

Así, pues, en los modelos se puede estudiar tanto el carácter del movimiento de los fluidos y la resistencia hidráulica, como la transmisión de calor de cualquier aparato térmico. Al diseñar nuevos aparatos esto da la posibilidad de comprobar de antemano la regularidad de la construcción, y corregir todos los defectos revelados antes de realizar la construcción. Al reconstruir los aparatos térmicos existentes para racionalizar su funcionamiento el método de simulación permite de antemano determinar qué reconstrucciones son racionales y qué efecto se obtendrá precisamente en éstas.

Los ejemplos aducidos antes muestran de modo convincente que la simulación es un medio muy eficaz en la investigación científica.

La esfera de la aplicación práctica del método de simulación no se limita, sin duda, a la hidromecánica y el intercambio de calor. Actualmente este campo se ha ampliado considerablemente. Se han elaborado las condiciones de simulación del proceso de movimiento y de la resistencia hidráulica, de los procesos de conductibilidad térmica y del intercambio de calor por convección, de los procesos del intercambio de calor al variar el estado de agregación, de los procesos de arrastre de la humedad y de su separación, de los procesos del intercambio de materiales y del secamiento, de los procesos de movimiento de los flujos con polvo y de la separación del polvo, de los procesos de ventilación de los locales, de la parte de circulación de las turbinas de vapor, máquinas de vapor, cajas de fuero, de la circulación de la masa de vidrio fundida en los hornos, de los procesos que transcurren en las máquinas y sistemas eléctricos, de los procesos de transformación fisicoquímica, etc.

Hoy día la simulación es uno de los principales métodos de la investigación científica y se usa ampliamente en muchas esferas de la ciencia y de la técnica. La simulación como método de investigación científica, como método que sirve para evaluar la eficacia de un dispositivo técnico y realizarlo en tamaño natural puede satisfacer en mayor grado las exigencias de la práctica. Sus posibilidades para aplicarlo en este sentido están todavía lejos de ser agotadas. Especialmente tiene anchas perspectivas la aplicación del método de simulación en la tecnología química y en la construcción de máquinas.



## ALGUNOS PROBLEMAS DEL INTERCAMBIO TÉRMICO

### 10-1. Teoría hidrodinámica del intercambio térmico

La teoría hidrodinámica del intercambio térmico está basada sobre la idea, elaborada por Reynolds, de la *unidad de los procesos de transferencia calorífica y la cantidad de movimiento* en los flujos turbulentos. Tal noción permite establecer la relación entre la *emisión calorífica y la resistencia hidráulica*. A pesar del carácter convencional de una serie de suposiciones, el valor de la teoría hidrodinámica consiste en que ésta descubre la esencia física del proceso y explica el mecanismo de transferencia de calor en el régimen turbulento de corriente del fluido.

Durante el movimiento del líquido siempre surge una fuerza de resistencia condicionada por la transferencia ininterrumpida y el intercambio de las cantidades de movimiento entre las capas del fluido que tienen velocidades diferentes. Esta transferencia se realiza a consecuencia del mezclado turbulento del fluido. Para determinar la relación entre la emisión calorífica y la resistencia, Reynolds partió de las consideraciones siguientes.

Las partículas del fluido que se encuentran en el núcleo del flujo y tienen una velocidad  $w$ , al caer en la capa adyacente a la pared se frenan y adquieren allí la velocidad  $w'$ . Luego estas partículas son desplazadas por otras y de nuevo regresan al núcleo turbulento. Tal desplazamiento de unas masas del líquido desde el núcleo hacia la capa adyacente a la pared y viceversa, se repite ininterrumpidamente.

Si la cantidad del fluido que llega por unidad de tiempo a la capa adyacente a la pared, se designa con  $G'$ , entonces, a base de la ley de impulsos la fuerza de resistencia al movimiento se determinará mediante la expresión:

$$S = G'(w - w'). \quad (a)$$

Cuando hay intercambio térmico, las temperaturas de las partículas de fluido en el núcleo y en la capa adyacente a la pared son diferentes. Por eso en el intercambio turbulento, simultáneamente con la transferencia

de la cantidad de movimiento ocurre también la transferencia de calor. Sea la temperatura en el núcleo del flujo  $t_{f1}$  y en la capa adyacente a la pared  $t'_{f1}$ ; entonces la cantidad de calor transmitida desde el núcleo hacia la capa adyacente a la pared en el intercambio turbulento será igual a:

$$Q = G'c_p(t_{f1} - t'_{f1}). \quad (b)$$

Si la ecuación (b) se divide por (a), entonces la magnitud incógnita  $G'$  se reduce:

$$\frac{Q}{S} = c_p \frac{t_{f1} - t'_{f1}}{w - w'}, \quad (c)$$

o, puesto que  $S = sF$  y  $Q = qF$ , tenemos:

$$q = c_p s \frac{t_{f1} - t'_{f1}}{w - w'}. \quad (10-1)$$

La ecuación (10-1) representa la proporción fundamental obtenida por Reynolds en 1874 [118]. En lo ulterior ésta se denominó analogía de Reynolds.

Si se acepta que la capa de fluido adyacente a la pared está inmóvil ( $w' = 0$ ) y su temperatura es igual a la de la pared ( $t'_{f1} = t_p$ ), en este caso de la ecuación (10-1) obtenemos:

$$q = \frac{c_p s}{w} (t_{f1} - t_p). \quad (10-2)$$

Precisamente esta expresión para el flujo calorífico la obtuvo Reynolds quien supuso que la capa de fluido adyacente a la pared sería inmóvil.

Pero en realidad la velocidad del fluido en la capa adyacente a la pared no es igual a cero y la temperatura  $t'_{f1}$  no es igual a la temperatura de la pared  $t_p$  (véase el cap. 3). Esta circunstancia hay que tomarla en consideración del modo correspondiente. En el año 1910 L. Prandtl [117] por primera vez le efectuó esta precisión al método de Reynolds. Más tarde este problema lo examinaron también en sus trabajos otros investigadores.

Cerca de la pared, en un flujo turbulento, existe una subcapa viscosa fina en la que predominan las fuerzas de viscosidad molecular y en la cual el esfuerzo tangencial  $s$  es constante. Por eso, basándose sobre la ley de Newton, la expresión para  $s$  se puede escribir en la forma siguiente

$$s = \mu \frac{w'}{\delta'}. \quad (d)$$

El espesor de la subcapa viscosa  $\delta'$  es, en cierta medida, una magnitud convencional. En realidad a medida que se aleja de la pared, crece ininterrumpidamente la intensidad del mezclado turbulento y paulatinamente una parte del esfuerzo tangencial  $s$  empieza a ser determinado no sólo



por la viscosidad molecular, sino también por el mecanismo turbulento de transferencia de la cantidad de movimiento. A una distancia igual aproximadamente a

$$\delta' \approx 12 \frac{v}{\sqrt{s/\rho}}, \quad (e)$$

estas componentes resultan ser de un mismo orden; a distancias aún mayores de la pared el mecanismo turbulento de transferencia de la cantidad de movimiento resulta ser lo más importante. La correlación (e) se puede considerar como la determinación del espesor de la subcapa viscosa. En este caso de las ecuaciones (d) y (e) se puede hallar el valor de la velocidad del fluido  $w'$  a la distancia  $\delta'$ :

$$w' = 12 \sqrt{s/\rho}. \quad (f)$$

Puesto que el valor del esfuerzo tangencial  $s$  se puede expresar también a través del coeficiente de resistencia de rozamiento  $\xi$  (véase el cap. 3) de acuerdo a la correlación

$$s = \frac{\xi}{8} \rho w^2, \quad (g)$$

entonces el valor de la velocidad  $w'$  en la ecuación (d) es igual a:

$$w'/w = 12 \sqrt{\xi/8}. \quad (h)$$

Si se toma en consideración esta expresión, la fórmula fundamental (10-1) de la analogía de Reynolds se puede escribir ahora en la siguiente forma:

$$q = c_p \frac{s}{w} \frac{t_{f1} - t'_{f1}}{1 - 12 \sqrt{\xi/8}}. \quad (i)$$

Luego es necesario tomar en consideración la diferencia de temperaturas entre los dos medios en la capa de fluido adyacente a la pared. Cerca de la misma pared la transferencia de calor se realiza mediante la conductibilidad térmica molecular. La densidad del flujo calorífico  $q$  es una cantidad constante. Por eso, a base de la ley de Fourier, la expresión para  $q$  se puede escribir como

$$q = \lambda \frac{t'_{f1} - t_p}{\delta'_t} \quad (k)$$

La magnitud  $\delta'_t$  representa el espesor de la subcapa [térmica, o sea, aquella distancia de la pared en que resultan ser conmensurables la transferencia de calor, mediante la conductibilidad térmica, y mediante el mezclado turbulento de las partículas; cuando la distancia es aún mayor, el mecanismo turbulento de transferencia de calor comienza a tener la importancia decisiva. En caso general, cuando  $Pr \neq 1$ , la magnitud  $\delta'_t$

no coincide con  $\delta'$ ; la relación entre éstas se determina con ayuda de la correlación

$$\delta'_t = \delta' Pr^{-1/3}, \quad (l)$$

que es justa cuando  $Pr > 0,6$ .

Resolvamos ahora las ecuaciones (i) y (k) respecto a las diferencias de temperaturas:

$$t_{f1} - t'_{f1} = \frac{qw}{c_p s} \left( 1 - 12 \sqrt{\frac{\xi}{8}} \right);$$

$$t'_{f1} - t_p = q \frac{\delta'_t}{\lambda}$$

y sumemos estas correlaciones término a término. Entonces la temperatura  $t'_{f1}$  se simplifica y, como resultado, obtendremos:

$$t_{f1} - t_p = \frac{qw}{c_p s} \left( 1 - 12 \sqrt{\frac{\xi}{8}} + \frac{c_p s \delta'_t}{\lambda w} \right). \quad (m)$$

El último sumando entre paréntesis, del segundo miembro de la ecuación (m) se puede transformar con ayuda de las ecuaciones (e), (g) y (l), reduciéndolo a la forma:  $12 \sqrt{\xi/8} Pr^{2/3}$ . Teniendo esto en cuenta y resolviendo la ecuación (m) respecto a  $q$ , obtenemos definitivamente:

$$q = c_p \frac{s}{w} (t_{f1} - t_p) \frac{1}{1 + 12 \sqrt{\xi/8} (Pr^{2/3} - 1)}. \quad (10-3)$$

Esta ecuación, a diferencia de la ecuación (10-2) ahora toma en consideración la influencia de la capa del fluido adyacente a la pared.

Al comparar las ecuaciones (10-3) y (10-2) notamos que se diferencian entre sí solamente en el multiplicador

$$E = \frac{1}{1 + 12 \sqrt{\xi/8} (Pr^{2/3} - 1)}, \quad (10-4)$$

el que es la corrección buscada que considera el movimiento del fluido y la transferencia de calor en la capa adyacente a la pared. Cuando  $Pr = 1$ , la corrección  $E = 1$  y la ecuación (10-3) se transforma en la ecuación (10-2). Esta exigencia la satisfacen de modo aproximado los gases. La última circunstancia explica el hecho de que la ecuación (10-2) coincide de manera suficientemente buena con los datos experimentales para los gases e insatisfactoriamente, con los datos para los líquidos de goteo ( $Pr > 1$ ). La correlación (10-3), que toma en consideración la influencia de la capa del fluido adyacente a la pared, coincide ya mucho mejor con los datos experimentales de los diferentes fluidos que tienen  $Pr \geq 1$ <sup>1)</sup>. La ecuación (10-3) se puede escribir también en la forma

$$\alpha = \frac{\xi}{8} c_p \rho w E. \quad (10-5)$$

<sup>1)</sup> Prácticamente una ecuación idéntica a la ecuación (10-3) la obtuvieron los autores [75], pero por diferente método.



Si ahora ambos miembros de esta igualdad se multiplican por el diámetro del tubo y se dividen entre el coeficiente de conductibilidad térmica del fluido  $\lambda$ , adquirirá el aspecto siguiente:

$$Nu = \frac{\xi}{8} PeE. \quad (10-6)$$

Así, de acuerdo con la teoría hidrodinámica del intercambio de calor, para determinar el coeficiente de traspaso del calor es suficiente tener el valor del coeficiente de la resistencia hidráulica  $\xi$ , los valores de las propiedades físicas del fluido  $c_p$ ,  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$  y el valor de la velocidad  $w$ .

Sin embargo hay que recordar que esta teoría es aplicable sólo cuando se cumplen las condiciones siguientes: 1) existe corriente turbulenta desarrollada del fluido; 2) no varía la presión en gran medida; 3) hay un movimiento inseparable del fluido. La teoría hidrodinámica no considera la dependencia de las propiedades físicas del fluido en función de la temperatura.

El autor [96] mostró que la ecuación (10-4) puede ser generalizada para calcular la emisión calorífica a las altas velocidades de movimiento del gas (véase § 10-2).

## 10-2. Intercambio de calor cuando las velocidades son altas

Durante el movimiento de un líquido o un gas con alta velocidad en el flujo, cerca de la superficie, a causa de las fuerzas de rozamiento interno, se observa el desprendimiento del calor. Esto introduce ciertas particularidades en el desarrollo del proceso de intercambio térmico. El calentamiento interno del flujo es un proceso irreversible de disipación de una parte de la energía mecánica del movimiento, a consecuencia del rozamiento viscoso y de la transformación de esta energía en calor. Este proceso se llama *disipación de energía de movimiento*.

Sin duda, la disipación de energía tiene lugar también, cuando las velocidades de escurrimiento del flujo son moderadas, no obstante, la cantidad de calor que se desprende en este caso resulta insignificante y despreciarla en los cálculos de emisión de calor es una cosa completamente justificada. Una situación diferente se origina en caso de altas velocidades, puesto que en este caso ya no se puede no tomar en consideración el calentamiento interno del flujo.

La cantidad fundamental de calor se desprende en la capa adyacente a la pared, donde las fuerzas de rozamiento interno tienen mayor importancia. Como resultado, la temperatura del medio aumenta en esta capa. Si la superficie del cuerpo se cubre con aislamiento térmico, entonces ésta también adquiere una temperatura más alta. Tal temperatura se llama *temperatura adiabática de la superficie*  $t_{ad}$ ; corresponde a las condiciones en que no tiene lugar transferencia de calor a través de la superficie.

En la fig. 10-1 se muestra la distribución de las temperaturas en la capa límite cuando el flujo se mueve a grandes velocidades. La curva 1 refleja

el perfil de las temperaturas en cuando no hay intercambio térmico exterior. En este caso la temperatura de la superficie  $t_p = t_{ad}$  y el gradiente de temperatura en la superficie es igual a cero. El calor que se desprende en la capa adyacente a la pared se evacua hacia dentro del flujo mediante convección y conductibilidad térmica.

El proceso de intercambio térmico se realizará cuando la temperatura de la pared  $t_p$  no es igual a la temperatura adiabática  $t_{ad}$ . Si  $t_p > t_{ad}$  el

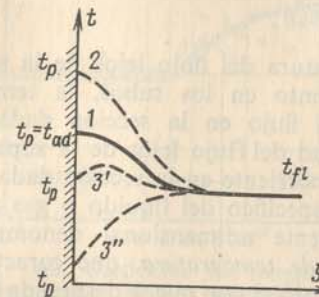


Fig. 10-1. Distribución de las temperaturas en la capa límite para altas velocidades de movimiento del flujo.

1 — sin intercambio de calor; 2 — durante el calentamiento del flujo; 3' y 3'' — durante el enfriamiento del flujo.

calor se transmite de la pared al flujo (curva 2). El flujo térmico tiene dirección inversa, cuando  $t_p < t_{ad}$  (curvas 3' y 3''). Se debe prestar atención al hecho de que la evacuación del calor a través de la superficie es posible no sólo cuando la temperatura de la superficie  $t_p$  es inferior a la temperatura del flujo que corre al encuentro  $t_{fl}$  (curva 3''), sino también cuando  $t_p$  es superior a  $t_{fl}$  (línea 3'). En el último caso a través de la superficie se evacua, en lo fundamental, el calor que se desprende en la capa límite a consecuencia de la disipación de energía.

Las regularidades expuestas muestran que para el intercambio térmico, en presencia de altas velocidades, la diferencia de temperaturas  $t_p - t_{ad}$  adquiere un valor determinante, mientras que la magnitud  $t_p - t_{fl}$  ya no caracteriza la dirección de la transmisión de calor y las magnitudes del flujo calorífico. Precisamente en esto consiste la *principal singularidad* del intercambio térmico en los flujos que se mueven a altas velocidades. Luego los experimentos muestran que si en estas condiciones se introduce la definición del coeficiente de traspaso del calor como la relación entre la densidad del flujo calorífico y la diferencia de temperaturas  $t_p - t_{ad}$ :

$$\alpha = \frac{q}{t_p - t_{ad}}, \quad (10-7)$$

entonces todas las fórmulas de cálculo para la emisión calorífica a bajas velocidades resultan justas también para los flujos a altas velocidades.



Teóricamente este postulado se demuestra en forma más general para las condiciones en que las propiedades termofísicas del agente portador de calor se toman como constantes.

De este modo el problema se reduce a la determinación de la temperatura adiabática de superficie  $t_{ad}$ . La correlación para calcular esta temperatura tiene la forma:

$$t_{ad} = t_{f1} + r \frac{w^2}{2c_p}, \quad (10-8)$$

donde  $t_{f1}$  es la temperatura del flujo lejos de la superficie o, en caso de escurrimiento en los tubos, la temperatura media de mezclado del flujo en la sección dada;

$w$  es la velocidad del flujo lejos de la superficie o la velocidad media de la corriente en la sección dada del tubo;

$c_p$  es el calor específico del líquido o gas a presión constante;

$r$  es el coeficiente adimensional denominado *coeficiente de recuperación de temperatura*, que caracteriza la correlación entre la intensidad con que se desprende el calor a consecuencia del rozamiento viscoso y la intensidad con que se evacua este calor desde la capa adyacente a la pared hacia el núcleo del flujo.

La correlación (10-8) muestra que la diferencia entre la temperatura adiabática  $t_{ad}$  y la temperatura del flujo  $t_{f1}$  aumenta en forma proporcional al cuadrado de la velocidad de la corriente. Los cálculos muestran que la diferencia  $t_{ad} - t_{f1}$  por lo común alcanza varios grados solamente a velocidades de 50 a 100 m/s. A velocidades inferiores la diferencia entre  $t_{ad}$  y  $t_{f1}$  resulta insignificante. En este caso la diferencia de temperaturas  $t_p - t_{ad}$  en la ecuación (10-7) se transforma en la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $t_p - t_{f1}$  y el coeficiente de traspaso del calor  $\alpha$  adquiere su definición habitual. Sin embargo, cuando  $w > 100$  m/s la diferencia entre la temperatura adiabática  $t_{ad}$  y la temperatura del fluido  $t_{f1}$  aumenta en forma muy rápida a medida que crece la velocidad y puede alcanzar decenas, centenas y, a las velocidades muy altas, incluso miles de grados. En este caso para determinar los flujos caloríficos es necesario usar la expresión (10-7).

En la práctica el intercambio de calor a altas velocidades tiene lugar durante el escurrimiento de los flujos de gas en turbina, toberas, así como durante el vuelo de aviones y cohetes en la atmósfera. En cuanto a los líquidos de goteo, como uno de los ejemplos en que se manifiesta de modo considerable el efecto de disipación de energía puede servir el proceso de calentamiento de la capa de un lubricante líquido en los cojinetes a altas velocidades de rotación.

Cuando el aire fluye longitudinalmente alrededor de placas, cilindros y conos, según lo demuestran los experimentos, el coeficiente de recuperación  $r$  tiene los valores siguientes: cuando la capa límite es laminar  $r = 0,84 \pm 0,02$  [97] y cuando la capa límite es turbulenta  $r = 0,89 \pm 0,03$ . En la fig. 10-2 se exponen los datos experimentales [105] que corresponden

al flujo currentilíneo longitudinal del chorro de aire alrededor de una placa. Cuando el flujo currentilíneo alrededor de los alambres en la esfera de los números  $Re = 10^4 \div 10^5$  se realiza en sentido transversal, el valor del coeficiente de recuperación es  $r = 0,92$ . En las corrientes turbulentas de aire subsónica y supersónica dentro de un tubo el coeficiente de recuperación se halla dentro de los límites de  $r = 0,83 \div 0,89$ . Para los cuerpos de forma más complicada los valores de  $r$  se determinan experimentalmente.

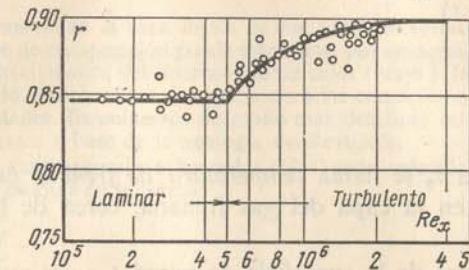


Fig. 10-2. Coeficiente de recuperación de temperatura en el flujo currentilíneo longitudinal alrededor de una placa.

A las corrientes de altas velocidades las caracteriza una particularidad más. Esta se revela cuando la presión y la velocidad sufren variaciones bruscas como, por ejemplo, cuando el flujo se frena al chocar contra un obstáculo inmóvil. Resulta además que el carácter de variación de la temperatura en el flujo será diferente para los líquidos de goteo y los gases.

Los líquidos de goteo son prácticamente medios *incompresibles*; su densidad casi no depende de la presión. Por eso, si este medio se frena, su energía cinética  $w^2/2$  se transforma por completo en energía de presión  $p/\rho$ , mientras que la energía interna del líquido  $c_v t$  y su temperatura  $t$  permanecen invariables. Durante el frenado del flujo de un líquido de goteo que choca contra un obstáculo inmóvil, el incremento de la energía de presión constituye:

$$\frac{p_0 - p}{\rho} = \frac{w^2}{2}. \quad (10-9)$$

La temperatura del líquido frenado  $t_0$  permanece entonces prácticamente invariable:

$$t_0 = t. \quad (10-10)$$

Un cuadro diferente y mucho más complicado se observa en los flujos de gases. A diferencia de los líquidos de goteo los gases son *compresibles*; su densidad depende de la presión y de la temperatura. Por eso durante el frenado del flujo de gas su energía cinética  $w^2/2$  se gasta en parte para aumentar la energía de presión  $p_0/\rho_0 - p/\rho$ , mientras que la parte restante de esta energía provoca un aumento de la energía interna del gas  $c_v(t_0 - t)$ :

$$\frac{w^2}{2} = \left( \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} \right) + c_v(t_0 - t). \quad (10-11)$$



El cálculo del aumento de la temperatura durante el frenado del flujo del gas se realiza fácilmente, si se tiene en cuenta que, según las igualdades termodinámicas, la magnitud  $p/\rho + c_p t = i$  es la entalpia del gas para la que es válida la correlación  $i = c_p t$ , donde  $c_p$  es el calor específico del gas a presión constante. Por eso la ecuación de equilibrio de energía (10-11), durante el frenado del flujo del gas, toma el aspecto:

$$w^2/2 = c_p(t_0 - t)$$

ó

$$t_0 = t + \frac{w^2}{2c_p} \quad (10-12)$$

La temperatura  $t_0$  se llama *temperatura de frenado* del flujo del gas. Esta se establece en la capa del gas frenada, cerca de la superficie del obstáculo.

Si la temperatura de la superficie de pared  $t_p$  es superior a la temperatura de frenado  $t_0$ , el calor se transmitirá de la pared al gas. Cuando  $t_p < t_0$ , el sentido del flujo calorífico será inverso. De tal modo, el sentido y la intensidad de transmisión de calor se determinan según el signo y la magnitud absoluta de la diferencia de temperaturas  $t_p - t_0$ .

El aumento de la energía de presión en un gas compresible, cuando éste se frena, constituye:

$$\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{p}{\rho} = \frac{k-1}{k} \frac{w^2}{2}, \quad (10-13)$$

donde  $k = c_p/c_v$ .

Al comparar esta expresión con la correlación (10-9) para el líquido incompresible se puede ver que en un flujo de gas, solamente una parte igual  $1/(k-1)/k$  de toda la energía cinética, se transforma en energía de presión. Para el aire, por ejemplo,  $k = 1,4$  y esta parte constituye solamente 0,285. La parte restante de la energía cinética, cuya cantidad es  $0,715 (w^2/2)$ , se gasta para aumentar la energía interna del gas y su temperatura.

Esta singularidad de los flujos de gas relacionada con los efectos de compresibilidad, conduce a una serie de particularidades cuando el gas fluye a altas velocidades en los tubos y toberas, al medir las temperaturas y las presiones en los flujos de gas a altas velocidades. Los problemas de esta índole se examinan en los cursos de dinámica de los gases.

Para los cuerpos de forma simple se puede llevar a cabo un cálculo teórico a fin de encontrar el valor del coeficiente de recuperación  $r$ .

Así, E. Pohlhausen [116] realizó el cálculo teórico de la dependencia  $r = f(\text{Pr})$  para el flujo currentilíneo alrededor de una placa en la capa límite laminar. Los resultados de estos cálculos se exponen a continuación:

|         |      |       |       |      |       |       |      |      |
|---------|------|-------|-------|------|-------|-------|------|------|
| Pr..... | 0,6  | 0,7   | 0,8   | 1,0  | 7     | 15    | 100  | 1000 |
| r.....  | 0,77 | 0,835 | 0,895 | 1,00 | 2,515 | 3,535 | 6,70 | 12,9 |

Los datos que se hallan en el intervalo de los números  $\text{Pr} = 0,6 \div 7$  característico para los gases diferentes y el agua, se interpolan correctamente a base de la fórmula simple

$$r = \sqrt{\text{Pr}}. \quad (a)$$

Cuando el régimen de la corriente de un líquido en un tubo redondo es laminar, el cálculo teórico da la expresión

$$r = 2 \text{ Pr}. \quad (b)$$

Cuando la corriente en la capa límite de los tubos es turbulenta el valor aproximado del coeficiente de recuperación puede calcularse, por ejemplo, a base de los conceptos de la teoría hidrodinámica del intercambio de calor (véase § 10-1). Dicho cálculo se realiza generalizando mencionados conceptos para las condiciones de escurrimiento del flujo a altas velocidades. Examinemos de modo más detallado este método de calcular el intercambio de calor a base de la analogía de Reynolds.

La correlación fundamental de Reynolds (10-1) para velocidades moderadas de la corriente, se puede escribir en la forma:

$$q = s \frac{c_p t - c_p t'}{w - w'}. \quad (c)$$

Las magnitudes  $c_p t$  y  $c_p t'$  del numerador representan los valores de la entalpia, que tienen las partículas del líquido (o gas) en el núcleo y la capa adyacente a la pared, respectivamente. A consecuencia del intercambio de estas partículas, a la capa superficial se le suministra el flujo calorífico de densidad  $q$ .

Cuando la corriente se realiza a altas velocidades cada partícula del medio que participa en el intercambio posee también, además de la entalpia  $c_p t$ , la energía cinética del movimiento de traslación  $w^2/2$ . Por eso en el proceso de mezclado turbulento de las partículas, hacia la capa del líquido adyacente a la pared se le suministra ahora el flujo de energía  $e$  igual a

$$e = s \frac{(c_p t + w^2/2) - (c_p t' + w'^2/2)}{w - w'}. \quad (d)$$

Esta correlación es la generalización de la ecuación principal del método de Reynolds para las condiciones del flujo con altas velocidades [95]. Las magnitudes  $(c_p t + w^2/2)$  y  $(c_p t' + w'^2/2)$ , en el numerador de la ecuación (d), representan los valores de la energía total de las partículas en el núcleo y en la capa adyacente a la pared, respectivamente. El flujo de energía  $e$  incluye la transferencia tanto de la entalpia, como de la energía cinética de las partículas.

Ahora es necesario examinar las condiciones en la subcapa viscosa. El esfuerzo tangencial de fricción  $s$  permanece constante en la dirección transversal a esta subcapa. Por consiguiente, al igual que en el caso de las velocidades moderadas, la distribución de las velocidades en la subcapa viscosa tiene carácter lineal. Por eso, al igual que en el § 10-1, la magnitud  $w - w' = (1-12/\xi/8)$  y la ecuación (d) se puede reescribir en la forma siguiente

$$e = \frac{s}{w} \frac{(c_p t + w^2/2) - (c_p t' + w'^2/2)}{1 - 12/\xi/8}. \quad (e)$$

Examinemos luego el proceso de la transferencia de la energía en la capa adyacente a la pared. Aquí es necesario tomar en consideración el desprendimiento del calor a consecuencia de la disipación de la energía. En una unidad de volumen del medio dentro de los límites de esta subcapa por unidad de tiempo se desprende una cantidad de calor

$$\mu \left( \frac{dw}{dy} \right)^2 = \mu \left( \frac{w'}{\delta'} \right)^2. \quad (f)$$



Por eso la ecuación de balance térmico para un volumen del medio tiene la forma:

$$\lambda \frac{d^2 t}{dy^2} + \mu \left( \frac{w'}{\delta'} \right)^2 = 0. \quad (g)$$

Esta ecuación muestra que el calor que se desprende, se evacua por medio de la conductibilidad térmica. Al integrar la ecuación (g) tenemos:

$$\lambda \frac{dt}{dy} + \mu \left( \frac{w'}{\delta'} \right)^2 y = \text{const} = e. \quad (h)$$

La constante de integración muestra precisamente aquel flujo de energía  $e$  que se suministra hacia la capa adyacente a la pared desde el núcleo del flujo. A medida que nos acercamos a la pared, vemos que una parte cada vez mayor de este flujo se transfiere en forma de calor mediante la conductibilidad térmica. En la misma superficie ( $y = 0$ ) ya todo el flujo de energía  $e$  adquiere la forma del flujo de calor  $q_p$ , el cual se transmite a la pared:

cuando  $y = 0$ ,

$$e = \lambda \left. \frac{dt}{dy} \right|_{y=0} = q_p. \quad (i)$$

De este modo el flujo de la energía  $e$ , en las ecuaciones (d), (e) y (h), es numéricamente igual a la densidad del flujo térmico  $q_p$  transmitido a la pared.

Al integrar la ecuación (h) hallamos la distribución de temperaturas en la zona adyacente a la pared

$$t(y) = t_p + \frac{e}{\lambda} y - \frac{\mu}{\lambda} \frac{w'^2}{2} \left( \frac{y}{\delta'} \right)^2. \quad (k)$$

De la correlación (k) se deduce que la distribución de temperaturas no tiene ahora carácter lineal, sino parabólico. Si en el límite  $y = \delta_t$  la temperatura es  $t'$  y la entalpía  $c_p t'$  se puede escribir:

$$c_p t' = c_p t_p + \frac{c_p}{\lambda} e \delta_t' - \text{Pr} \frac{w'^2}{2} \left( \frac{\delta_t'}{\delta'} \right)^2. \quad (l)$$

Puesto que la magnitud  $w'(\delta_t'/\delta')$  es el valor de la velocidad a una distancia  $\delta_t'$  de la pared, entonces, si se suma a ambos miembros de igualdad (l) la magnitud  $(w'^2/2)(\delta_t'/\delta')^2$ , en el primer miembro obtenemos el valor de la energía total ( $c_p t' + w'^2/2$ ) a la distancia  $\delta_t'$ :

$$\left( c_p t' + \frac{w'^2}{2} \right)' = c_p t_p + \frac{c_p}{\lambda} e \delta_t' - (\text{Pr} - 1) \frac{w'^2}{2} \left( \frac{\delta_t'}{\delta'} \right)^2. \quad (m)$$

Al sustituir esta magnitud en la ecuación de la analogía generalizada de Reynolds y al resolverla respecto al flujo de energía, que es el calor  $e = q_p$ , se puede después de una serie de transformaciones<sup>1)</sup> obtener la expresión definitiva

$$q_p = \frac{c_p S}{w'} (t_{ad} - t_p) \frac{1}{1 + 12 \sqrt{\xi/8} (\text{Pr}^{2/3} - 1)}. \quad (10-14)$$

Por su aspecto la ecuación (10-14) coincide por completo con la ecuación (10-3) para las velocidades moderadas. La única diferencia consiste en el hecho de que en la ecuación (10-14), en lugar de la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $t_{f1} - t_p$ , se encuentra la diferencia  $t_{ad} - t_p$ . El valor de la temperatura adiabática de la pared

<sup>1)</sup> Teniendo en cuenta las correlaciones (h) y (l) del § 10-1.

$t_{ad}$  se determina mediante la ecuación general (10-8); el coeficiente de recuperación: de temperatura  $r$  determinado como resultado de los cálculos realizados, es igual a:

$$r = 1 + \left( \frac{w'}{w} \right)^2 \frac{\text{Pr} - 1}{\text{Pr}^{2/3}}. \quad (10-15)$$

De este modo, el cálculo según la analogía generalizada de Reynolds conduce a la ecuación de la emisión calorífica (10-14) y permite hallar la expresión aproximada (10-15) para el coeficiente de recuperación de temperatura en los flujos turbulentos.

La relación  $w'/w$  por lo común es aproximadamente igual a 0,5 ó 0,6; por eso  $(w'/w)^2$  se puede aceptar más o menos igual a 0,3. Al sustituir este valor en la ecuación (10-15), hallamos para el aire ( $\text{Pr} = 0,7$ ) el valor del coeficiente de recuperación de temperatura  $r = 0,885$ , lo que se ajusta bien a los datos experimentales. La expresión (10-15) muestra también que cuando  $\text{Pr} = 1$ , el coeficiente de recuperación de temperatura en los flujos turbulentos es igual a la unidad.

La variación de la temperatura del gas en la capa límite, mostrada en la fig. 10-1, crece a medida que aumenta la velocidad del flujo. Para caracterizar el régimen de corriente en la dinámica de los gases se introduce el concepto del número de Mach, que es igual a la proporción entre la velocidad local del flujo  $w$  y la velocidad del sonido  $c$  en el mismo punto del flujo:

$$M = w/c.$$

Cuando  $M < 1$  la corriente se llama subsónica y cuando  $M > 1$ , supersónica.

En los flujos supersónicos las diferencias de temperaturas en la capa límite comienzan a adquirir tal grado de importancia, que la densidad del gas y otras de sus propiedades termofísicas (viscosidad, conductibilidad térmica) resultan variables según el espesor de la capa. Ya no es correcto considerarlas como constantes. A consecuencia de esto durante el cálculo de la emisión calorífica en los flujos supersónicos se debe introducir una corrección para la variabilidad de las propiedades termofísicas:

$$\alpha_w = \alpha \psi.$$

Aquí  $\alpha_w$  es el coeficiente de traspaso del calor que tiene en cuenta la variabilidad de las propiedades;

$\alpha$  es el coeficiente de traspaso del calor determinado según la correlación (10-7);

$\psi$  es la corrección para la variabilidad de las propiedades termofísicas del gas.

La corrección  $\psi$  depende en primer lugar de la correlación de las temperaturas absolutas  $T_{ad}/T_{f1}$  y  $T_p/T_{f1}$ . Las recomendaciones para calcular  $\psi$  se exponen en [48].

### 10-3. Intercambio térmico en las superficies con rugosidad artificial

Los problemas que consideran la intensificación del intercambio térmico, tienen gran importancia para muchas ramas de la técnica. Por eso las investigaciones de este fenómeno tienen gran interés práctico. La aplicación de la superficie de calefacción con rugosidad creada artificialmente es uno



de los medios posibles para intensificar la emisión calorífica cuando existe corriente turbulenta del agente portador de calor. Los tipos de rugosidad artificial pueden ser diferentes. Algunos perfiles de tales superficies se muestran en la fig. 10-3. Las rugosidades de los tipos *a* y *b* se producen mediante el roscado de la superficie del tubo. Los perfiles *c* y *d* se obtienen formando resaltos anulares sobre el tubo liso. Generalmente la

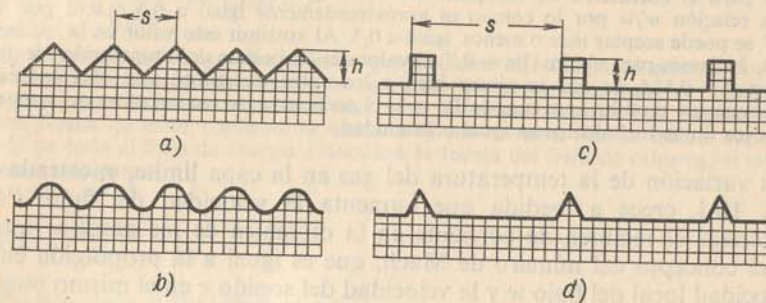


Fig. 10-3. Perfiles de las superficies con rugosidad artificial.  
a — rosca triangular; b — rosca ondulada; c — resaltos rectangulares; d — resaltos triangulares.

altura de los resultados *h* no es grande en comparación con el diámetro *d* del tubo. La intensificación de la emisión calorífica tiene lugar fundamentalmente debido a la acción de la rugosidad, sobre la dinámica hidráulica del flujo turbulento. Por lo común el resultado del efecto de costillaje (a consecuencia del aumento del área real de la superficie de intercambio térmico) es relativamente pequeño.

Se han dedicado una serie de trabajos a la investigación experimental de la emisión calorífica en las superficies con rugosidad artificial, algunos resultados de estos estudios se exponen más adelante.

En la investigación realizada en el Instituto de energética de Moscú [29] se estudiaron detalladamente diferentes tipos de rugosidad en forma de "rosca", la cual situaba en la superficie interior de un tubo redondo de diámetro  $d = 16,7$  mm y  $l/d = 100$ . Los ensayos se realizaron utilizando el agua. En la fig. 10-4 se exponen los datos experimentales que caracterizan la rosca de perfil triangular (fig. 10-3, *a*). El coeficiente de traspaso del calor está referido a la superficie del tubo liso (sin contar el efecto de costillaje). Los datos aducidos muestran que este tipo de rugosidad artificial permite aumentar considerablemente la emisión calorífica. En esta investigación se mostró también que la rugosidad redondeada (fig. 10-3, *b*) es considerablemente menos eficaz; en una serie de casos no produce en absoluto un aumento de la emisión calorífica en comparación con la de la superficie lisa. Esto muestra que los bordes agudos de los resaltos tienen suma importancia para la intensificación de la emisión calorífica.

Otro tipo de rugosidad artificial (fig. 10-3, *c*, *d*) está investigado detalladamente en [16, 17, 33, 92, 101, 113]. En este caso los resaltos anulares con el paso diferente relativo  $s/h$ , se fabricaban tanto en la superficie exterior del tubo al existir la corriente del flujo de agua, aire y aceite para

transformadores en el conducto anular, como también en la superficie interior del tubo redondo. Este tipo de rugosidad artificial se estudió también en un canal plano en forma de ranura. Los resultados de estas investigaciones se generalizaron en [16, 17]. El análisis mostró que para este tipo de rugosidad, como parámetro que tiene importancia decisiva para el proceso de intensificación de la emisión calorífica, interviene la razón

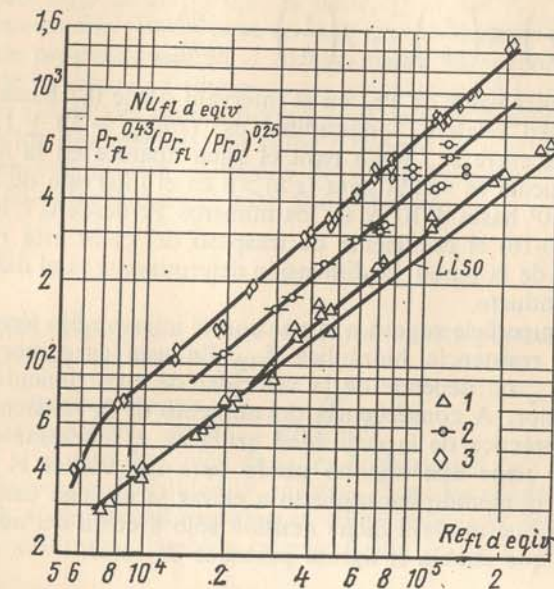


Fig. 10-4. Emisión calorífica en un tubo redondo con rugosidad artificial en forma de la rosca triangular.

1 —  $h/d = 0,0064$ ;  $s/h = 1,9$ ; 2 —  $h/d = 0,011$ ;  $s/h = 2,6$ ; 3 —  $h/d = 0,038$ ;  $s/h = 1,6$ .

entre la distancia a que se sitúan los resaltos *s* y su altura *h*, o sea,  $s/h$ . Las demás características, tales como la forma del resalto (rectangular o triangular), la razón  $h/d$ , tienen importancia secundaria. Al mismo tiempo la altura de los resaltos *h* debe superar el espesor de la subcapa viscosa. En los trabajos [16, 17] está mostrado que la causa que provoca la intensificación del intercambio térmico está relacionada con la separación y destrucción de la subcapa viscosa, por medio de los resaltos de rugosidad, y con el surgimiento de las zonas turbulentas. Resulta que para el parámetro  $s/h$  existe un valor óptimo para el que la intensificación de la emisión calorífica es máxima. A consecuencia de la generalización de los numerosos datos experimentales el autor [16, 17] obtuvo la ecuación de la emisión calorífica

$$\overline{Nu}_{fl, d, eqv} = 0,021 Re_{fl, d, eqv}^{0,8} Pr_{fl}^{0,43} (Pr_{fl}/Pr_p)^{0,25} \epsilon_{rug}, \quad (10,16)$$



donde el multiplicador  $\varepsilon_{\text{rug}}$  toma en consideración el aumento de la emisión calorífica a consecuencia de la rugosidad artificial:

$$\varepsilon_{\text{rug}} = 1,04 \text{Pr}_f^{0,04} \exp [0,85f(s/h)], \quad (10-17)$$

$$\text{cuando } \left(\frac{s}{h}\right) \geq \left(\frac{s}{h}\right)_{\text{opt}}, \quad f\left(\frac{s}{h}\right) = \frac{(s/h)_{\text{opt}}}{s/h};$$

$$\text{cuando } \left(\frac{s}{h}\right) \leq \left(\frac{s}{h}\right)_{\text{opt}}, \quad f\left(\frac{s}{h}\right) = \frac{s/h}{(s/h)_{\text{opt}}}.$$

Para cualquier valor de  $\text{Pr}_f$  en el intervalo desde 0,7 hasta 80 el valor óptimo del paso relativo longitudinal es:  $(s/h)_{\text{opt}} = 13 \pm 1$ . El gráfico de dependencia entre  $\varepsilon_{\text{rug}}$  y  $s/h$  para el agua aparece en la fig. 10-5. La correlación aducida es válida para  $(s/h) \geq 6$  en el intervalo de los números  $\text{Re}_f$  desde  $6 \cdot 10^3$  hasta  $4 \cdot 10^5$  y de los números  $\text{Pr}$  desde 0,7 hasta 80. En la ecuación (10-16) el coeficiente de traspaso del calor está referido a la superficie total de la pared; la dimensión determinante es el diámetro equivalente del conducto.

Al usar la superficie rugosa a la par con el intercambio térmico crece el coeficiente de resistencia hidráulica  $\xi_{\text{rug}}$ . En este caso, por lo común, la magnitud  $\xi_{\text{rug}}$  no depende de la velocidad de escurrimiento del agente portador de calor. A consecuencia del aumento de la resistencia, durante la aplicación práctica de la rugosidad artificial, es interesante comparar la eficacia que tiene este método usado para intensificar el intercambio calorífico, con el método encaminado a elevar la emisión calorífica en un tubo liso en el que se eleva dicha emisión sólo a costa del aumento de la velocidad con que circula el agente portador de calor.

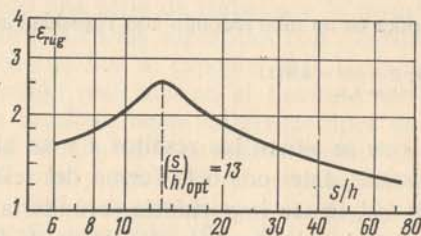


Fig. 10-5. Intensificación de la emisión calorífica para el agua usando rugosidad artificial en forma de resaltes anulares en la superficie del tubo.

Tiene sentido emplear la rugosidad artificial, siendo igual la cantidad de calor transmitido por la superficie rugosa a la velocidad  $w$  a la de calor transmitido por la superficie lisa a la velocidad más alta  $w'$ , es decir, bajo la condición de que

$$Q_{\text{rug}}(w) = Q(w'), \quad (a)$$

si el gasto de la potencia para bombear el agente portador de calor  $N$  será menor para la superficie rugosa:

$$N_{\text{rug}}(w) < N(w'). \quad (b)$$

Se puede resolver este problema con ayuda de los cálculos siguientes.

La cantidad de calor transmitida en el tubo liso es proporcional a la velocidad del flujo al grado 0,8, es decir,  $Q = Aw'^{0,8}$ .

Según la ecuación (10-16) para un tubo rugoso tenemos  $Q_{\text{rug}} = Aw'^{0,8}\varepsilon_{\text{rug}}$ . El factor de proporcionalidad  $A$  incluye todas las magnitudes que no se dependen de la velocidad (dimensiones geométricas del tubo o conducto, propiedades físicas del agente portador de calor y diferencia de temperaturas entre los dos medios). Su valor numérico es igual en ambos casos. Teniendo en cuenta esto, hallamos de la condición (a) que el aumento relativo de la velocidad en el tubo liso debe ser:

$$\frac{w'}{w} = \varepsilon_{\text{rug}}^{1,25}. \quad (c)$$

Los gastos de potencia para bombear el agente portador de calor pueden escribirse en la forma siguiente:

$$\text{para la superficie rugosa: } N_{\text{rug}} = B\xi_{\text{rug}}w^3;$$

$$\text{y para la superficie lisa: } N = B\xi(w')w'^3,$$

además, en el campo de acción de la ley de Blasius  $\xi(w') = \xi(w)(w/w')^{0,25}$ . El factor de proporcionalidad  $B$  en estas fórmulas también es numéricamente igual. Considerando esto no es difícil reducir la desigualdad fundamental (b), utilizando también la correlación (c), a la forma definitiva:

$$\left(\frac{\xi_{\text{rug}}}{\xi}\right)_w < (\varepsilon_{\text{rug}})^{3,44}, \quad (10-18)$$

donde el índice  $w$  indica que la comparación de los coeficientes de resistencia se realiza para una velocidad del flujo  $w$  en un tubo rugoso.

La desigualdad (10-18) determina la conveniencia de usar o no la superficie rugosa desde el punto de vista de que se economizan o no los gastos de potencia para el bombeo. Cuando el signo de desigualdad en la ecuación (10-18) está orientado en sentido inverso, el uso de la rugosidad artificial no es conveniente.

Cuando existe la rugosidad artificial bidimensional examinada de los tipos  $c$  y  $d$  presentada en la fig. 10-3 el valor óptimo del aumento de la emisión calorífica es:  $(\varepsilon_{\text{rug}})_{\text{opt}} \geq 2,5$ , por consiguiente,  $(\varepsilon_{\text{rug}})_{\text{opt}}^{3,44} \geq 32$ . En los experimentos [17] para este caso el aumento del coeficiente de resistencia fue  $(\varepsilon_{\text{rug}}/\varepsilon)_w \approx 4 \div 15$ . De aquí se deduce que, según los gastos de potencia, dicho método empleado para intensificar la emisión calorífica es, sin duda, ventajoso. El aumento necesario de la velocidad del agente portador de calor en el tubo liso para transmitir la misma cantidad de calor aquí constituye, según la correlación (c),  $w'/w \approx 3,2$ .

Este método de comparación no toma en consideración la circunstancia de que, al aumentar la velocidad que se atribuye al agente portador de



calor, crece la resistencia hidráulica en todo el sistema en que circula el agente portador de calor, mientras que la creación de la rugosidad artificial condiciona el crecimiento de la resistencia hidráulica sólo en la zona de la superficie de cambio de calor.

#### 10-4. Emisión calorífica de metales fundidos

En aquellos casos en que es necesario realizar una intensa evacuación del calor desde la superficie de calefacción, o cuando a una presión baja es necesario tener alta temperatura del fluido motor (de trabajo), como agente portador de calor se usan metales fundidos.

Según sus propiedades físicas la mayoría de los metales fundidos se diferencian de los agentes portadores de calor corrientes, tales como el agua, los aceites, etc. La particularidad fundamental de los caloportadores metálicos consiste en su alta conductibilidad térmica y, correspondientemente, en sus bajos valores del número de Prandtl:  $Pr = 0,005 \div 0,05$ . En los últimos años tanto en la Unión Soviética, como en el extranjero, se realizó gran número de mediciones de la emisión calorífica de los metales fundidos en diferentes condiciones. En los experimentos fueron usados agentes portadores de calor tales como sodio, potasio, litio, cesio, mercurio, bismuto, aleaciones del bismuto con el plomo, etc. Las primeras investigaciones de la emisión calorífica y la resistencia hidráulica se realizaron en forma sistemática y amplia en el Instituto de energética G. M. Krzhizhanovski [72, 89].

Las investigaciones mostraron que las regularidades propias de la emisión calorífica de los metales fundidos se caracterizan por una serie de particularidades.

Cuando el movimiento de tales agentes portadores de calor es libre, para calcular la emisión calorífica se usa la dependencia siguiente [62, 91]:

$$\overline{Nu}_{med} = c Gr_{med}^n Pr_{med}^{0,4}, \quad (10-19),$$

cuando  $Gr_{med} = 10^2 \div 10^9$ ,  $c = 0,52$ ,  $n = 0,25$ ;

cuando  $Gr_{med} = 10^9 \div 10^{13}$ ,  $c = 0,106$ ,  $n = 0,33$ .

Aquí en calidad de la determinante se acepta la temperatura media de la capa límite  $t_{med} = 0,5(t_p + t_{fl})$ . La dimensión determinante es el diámetro para los tubos horizontales y la altura, para las placas verticales.

Durante el movimiento forzado de los metales fundidos en los tubos, estando limpia la superficie de calefacción, el cálculo de la emisión calorífica se puede realizar según la fórmula [87]

$$\overline{Nu}_{fld} = 4,36 + 0,025 Pe_{fld}^{0,8}. \quad (10-20)$$

Como la temperatura determinante se toma la temperatura del metal fundido  $t_{fl}$ , la dimensión determinante es el diámetro del tubo. La ecuación (10-20) es aplicable cuando los números de Peclet tienen los valores de:  $Pe_{fld} = 20 \div 10\,000$ . Esta ecuación abarca tanto el régimen laminar, como el turbulento de corriente del caloportador metálico. A causa de la alta conductibilidad térmica de los metales fundidos, el paso al régimen

turbulento no está acompañado con un brusco cambio de la intensidad de la emisión calorífica; la dependencia entre  $Nu$  y  $Pe$  tiene un carácter suave. La correlación (10-20) es aplicable para una longitud relativa del tubo  $l/d > 30$ . Si  $l/d$  es menor, entonces el valor del coeficiente de traspaso del calor será mayor. En este caso el valor del coeficiente de traspaso del calor  $\alpha$ , calculado según esta fórmula, es necesario multiplicarlo por el coeficiente de corrección  $\varepsilon_l = 1,7 (d/l)^{0,16}$ .

Al entrar en contacto con el aire los metales fundidos se oxidan energicamente. Por eso sus conductos de circulación deben ser herméticos y estar llenos con un gas neutro. En caso contrario en la superficie de calefacción se deposita una capa de óxidos y la emisión calorífica se hace peor. Con el objeto de calcular los coeficientes medios de traspaso del calor para el movimiento forzado turbulento en los tubos oxidados fue obtenida la fórmula siguiente [72]:

$$\overline{Nu}_{fld} = 3,3 + 0,014 Pe_{fld}^{0,8}. \quad (10-21)$$

En lo que concierne a la resistencia hidráulica los experimentos muestran que para los metales fundidos ésta obedece a las regularidades comunes [41].

Durante el flujo currentilíneo transversal de los haces al tresbolillo y en forma de corredores, por la corriente del metal fundido para calcular la emisión calorífica se puede usar la dependencia [82, 88]

$$\overline{Nu}_{fld} = Pe_{fld}^{0,5}, \quad (10-22)$$

en la que como dimensión determinante sirve el diámetro del tubo y la velocidad se calcula en la sección estrecha del haz. Esta fórmula es válida para el intervalo de los números  $Pe_{fld}$  que va desde 100 hasta 4000.

Las relaciones aducidas muestran que en las condiciones en que existe la corriente forzada del caloportador metálico el número de Peclet ( $Pe = wd/a$ ) es determinante para el proceso del intercambio térmico y de viscosidad no ejerce su influencia sobre la emisión calorífica. La emisión calorífica de los metales fundidos prácticamente no depende de la distribución de temperaturas ni de la dirección del flujo calorífico.

El proceso de ebullición de los metales alcalinos, según muestran los datos experimentales, también se caracteriza por ciertas particularidades. A bajas presiones de los vapores saturados (inferior a  $0,3 \cdot 10^5$  Pa) por lo común se observa un inestable régimen de ebullición: los vapores no se producen regularmente, sino en forma de saltos aislados entre los cuales el fluido se sobrecalienta. Cuando los flujos caloríficos son altos el sobrecalentamiento del fluido cerca de la superficie de calefacción puede ser considerable y alcanza decenas y centenas de grados. Durante la ebullición el recalentamiento disminuye rápidamente: esto provoca intensas oscilaciones de la temperatura en todo el sistema. La ebullición inestable del metal está acompañada frecuentemente con efectos acústicos: golpes, chasquidos, crujido, etc. En total la intensidad del intercambio térmico durante la ebullición inestable resulta algo mayor que en la convección libre sin ebullición [57].

A presiones próximas a la presión atmosférica el proceso de ebullición del metal adquiere carácter estable; la intensidad del intercambio térmico



crece. La dependencia entre  $\alpha$  y  $q$ , para la ebullición desarrollada de los metales con formación de burbujas en gran volumen, tiene el mismo carácter que durante la ebullición de líquidos corrientes:

$$\alpha = cq^{2/3}. \quad (10-23)$$

Además durante los experimentos se descubrió que si el metal hirviente se encuentra bajo la presión de un gas inerte, la emisión calorífica, por lo común, resulta más alta (aproximadamente 1,5 veces que si el metal se encuentra bajo la presión de su vapor saturado. Por lo visto esto se explica por el hecho de que, al disolverse una parte del gas en el fluido, esto facilita la ebullición y aumenta el número de los centros activos de formación de valor. El gas inerte contribuye también al paso más rápido del régimen de ebullición inestable al desarrollado. La emisión calorífica durante la ebullición de los metales depende también de las propiedades fisicoquímicas, el material de la superficie de calefacción y de su homogeneidad. Todo esto explica el hecho de que los datos experimentales, obtenidos por diferentes investigadores, se diferencian considerablemente.

Los valores de orientación del coeficiente  $c$  en la ecuación (10-23) para el sodio, el potasio y el cesio, así como para la amalgama de mercurio a presiones similares a la atmosférica, son próximos entre sí y constituyen:  $c \approx (4 \div 6)W^{1/3}/(m^{2/3} \cdot ^\circ C)$ . La primera densidad crítica del flujo calorífico  $q_{cr1}$  en estas condiciones se caracteriza por las magnitudes siguientes: para el sodio  $(2 \div 3) \cdot 10^6$ , para el potasio  $(1 \div 2) \cdot 10^6$ , para el cesio  $(0,7 \div 1,5) \times 10^6$  W/m<sup>2</sup>. Al aumentar la presión la emisión calorífica y las cargas térmicas críticas durante la ebullición de los metales alcalinos aumentan algo [85].

La condensación de los vapores de los metales alcalinos tiene por lo común carácter pelicular. A causa de la alta conductibilidad térmica de la película de metal líquido su resistencia térmica (que se determina según la teoría de la condensación pelicular de Nusselt, véase § 4-2) resulta extremadamente baja. Por eso la intensidad con que se realiza la condensación de los vapores de metales, corrientemente se determina no tanto por la resistencia térmica de la película de condensación, cuanto por la velocidad con que las moléculas de vapor llegan hacia la superficie de la película y la eficacia de su precipitación (condensación) sobre esta superficie. El último proceso se determina por las regularidades cinéticas moleculares. En esto consiste la singularidad fundamental de la condensación de los vapores de los caloportadores metálicos.

Según la teoría cinética molecular [55, 70] la velocidad de condensación del vapor saturado, en presencia de las rareficciones no muy grandes, se determina por la correlación

$$j = \frac{\beta}{1 - 0,4\beta} \frac{p - p'}{\sqrt{2\pi RT}}, \quad (10-24)$$

donde  $j$  es la cantidad de vapor que se condensa sobre una unidad de superficie de la película por unidad de tiempo, en kg/(m<sup>2</sup>·s);

$p$  y  $T$  son la presión y la temperatura del vapor saturado en el volumen;  
 $p'$  es la presión sobre la línea de saturación, a la temperatura de la superficie de película  $T'$ ;

$R$  es la constante individual de los gases, en J/(kg·K).

El coeficiente adimensional  $\beta$ , que forma parte de esta ecuación, determina la eficacia del proceso de la captura de las moléculas de vapor calientes, por la superficie del fluido; éste se llama *coeficiente de condensación*. Cuando todas las moléculas de vapor que alcancen la superficie de la película, son captadas por ésta (se condensan),  $\beta = 1$ . Si la superficie capta solamente una parte de las moléculas que caen,  $\beta < 1$ ; las demás moléculas, en una cantidad  $1 - \beta$ , se reflejan de la superficie y se alejan de nuevo hacia el volumen de vapor.

La densidad del flujo calorífico evacuada desde la superficie de la película hacia la pared es

$$q = rj. \quad (10-25)$$

De este modo, las correlaciones (10-24) y (10-25), cuando se conoce la temperatura de la superficie de la película de condensación  $T'$ , determinan el flujo calorífico en el proceso de condensación del vapor. Para los agentes portadores de calor en forma de metales fundidos, la resistencia térmica de la película de condensación en muchos casos resulta tan pequeña que, de modo aproximado, se puede considerar que la diferencia de temperaturas en la película no existe y la temperatura de la superficie libre de la película  $T'$  es igual a la temperatura de la pared  $T_p$ .<sup>1)</sup> Entonces las correlaciones aducidas permiten calcular el intercambio de calor.

Las investigaciones [86] muestran que en caso de bajas presiones de los vapores de los metales alcalinos ( $p_s < 0,01$  bar) el coeficiente de condensación es  $\beta \approx 1$ . Al aumentar la presión los valores de  $\beta$  disminuyen. Según los datos que contienen los trabajos [100, 111] en este intervalo de presiones para el potasio y el sodio la dependencia de  $\beta$  en función de la presión  $p_s$  se describe mediante la fórmula empírica siguiente:

$$\beta = (0,004/p_s)^{1/2},$$

la que se comprueba con los datos experimentales a presiones de hasta  $p_s = 1$  bar.

Cuando en el vapor hay adiciones de un gas inerte, así como cuando está sucia la superficie de la película de condensado, la intensidad con que se condensan los vapores de los metales, disminuye bruscamente [86].

### 10-5. Transmisión de calor a través de una varilla

Examinemos la transmisión de calor a través de una varilla prismática en la cual el área de sección es  $f$  y el perímetro de la misma,  $U$ . La varilla se encuentra en un medio cuya temperatura consideraremos convencional-

<sup>1)</sup> Para los caloportadores corrientes la situación es inversa: la diferencia de temperaturas en la película, por lo común, es considerablemente mayor que la diferencia de temperatura  $T - T'$ , por lo que se puede aproximadamente considerar, que la temperatura en la superficie libre de la película es igual a la temperatura del vapor.



mente igual a cero. La temperatura de la varilla varía solamente a lo largo de ésta y es función exclusivamente de la longitud, es decir,  $\vartheta = f(x)$ . En la base de la varilla la temperatura es igual a  $\vartheta_0$ . Los valores de los coeficientes de conductibilidad térmica y de traspaso del calor se conocen y son iguales a  $\lambda$  y  $\alpha_1$ , respectivamente. Hay que determinar la ley de la variación de la temperatura en la varilla y la cantidad de calor transmitido a través de la varilla durante un régimen térmico estacionario.

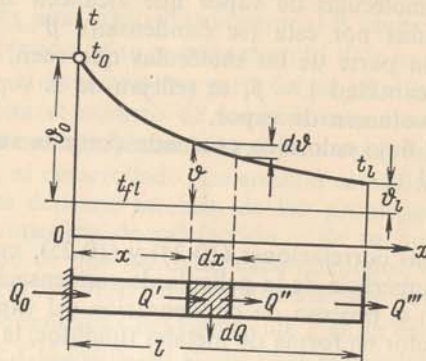


Fig. 10-6. Transmisión de calor a través de una varilla infinitamente larga.

A la distancia  $x$  de la base de varilla, separemos un elemento de longitud  $dx$  y hallemos para éste la ecuación de balance térmico (fig. 10-6).

Es evidente que

$$Q' - Q'' = dQ. \quad (a)$$

Según la ley de Fourier

$$Q' = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx} f$$

y

$$Q'' = -\lambda \frac{d}{dx} \left( \vartheta + \frac{d\vartheta}{dx} dx \right) f.$$

Por consiguiente

$$Q' - Q'' = dQ = \lambda \frac{d^2\vartheta}{dx^2} f dx. \quad (b)$$

De otro lado,

$$dQ = \alpha_1 \vartheta U dx. \quad (c)$$

Al igualar entre sí las ecuaciones (b) y (c) y al realizar las reducciones correspondientes, obtenemos:

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = \frac{\alpha_1 U}{\lambda f} \vartheta = m^2 \vartheta, \quad (10-26)$$

donde

$$m = \sqrt{\frac{\alpha_1 U}{\lambda f}}. \quad (d)$$

Si  $\alpha_1$  no depende de  $x$ , entonces  $m = \text{const}$ . En este caso la integral común de la ecuación diferencial lineal de segundo orden (10-26) es de la forma siguiente:

$$\vartheta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}. \quad (10-27)$$

Los valores de las constantes de integración  $C_1$  y  $C_2$  se determinan de las condiciones de frontera. Dependiendo de la longitud de la varilla estas condiciones son diferentes, debido a lo cual las examinaremos por separado.

a) *Varilla de longitud infinita.* Cuando  $x = 0$ ,  $\vartheta = \vartheta_0$  y  $\vartheta_0 = C_1 + C_2$ ; cuando  $x = \infty$ ,  $\vartheta = 0$  y  $C_1 e^{\infty} + C_2 e^{-\infty} = 0$  ó  $C_1 e^{\infty} = 0$ . Lo último es válido sólo bajo la condición de que  $C_1 = 0$ . De este modo,

$$C_1 = 0 \text{ y } C_2 = \vartheta_0. \quad (e)$$

Al introducir estos valores en la ecuación (10-27) obtenemos

$$\vartheta = \vartheta_0 e^{-mx}. \quad (10-28)$$

Por consiguiente,  $\vartheta = F(\vartheta_0, x, \alpha_1, \lambda, f, U)$ . Teniendo en cuenta que el exponente  $mx$  es una magnitud adimensional, la ecuación (10-28) se puede representar en otra forma adimensional, o sea:

$$\vartheta/\vartheta_0 = e^{-K_1} = F(K_1), \quad (10-29)$$

$$\text{donde } K_1 = xm = x \sqrt{\frac{\alpha_1 U}{\lambda f}} = \sqrt{\frac{\alpha_1 x^2}{\lambda} \frac{f}{f}}.$$

Para una varilla redonda  $U/f = 4/d$ , por eso

$$K_1 = 2x \sqrt{\frac{\alpha_1}{\lambda d}} = 2 \sqrt{\frac{\alpha_1 d}{\lambda} \frac{x}{d}}.$$

El parámetro  $K_1$  determina el carácter de variación de la temperatura a lo largo de la varilla. El carácter de la variación de temperatura resulta diferente (fig. 10-7) dependiendo de valor, más exactamente, de la correlación de las magnitudes que lo determinan.

La cantidad de calor emitida por la varilla hacia el medio ambiente es igual a la cantidad de calor que pasó a través de su base. Por consiguiente,

$$Q = -\lambda f (d\vartheta/dx)_{x=0}. \quad (f)$$

De la ecuación (10-28) tenemos:

$$(d\vartheta/dx)_{x=0} = (-\vartheta_0 m e^{-mx})_{x=0} = -\vartheta_0 m. \quad (g)$$



Al introducir este valor en la ecuación (f) encontramos definitivamente que:

$$Q = \lambda f m \vartheta_0 = \vartheta_0 \sqrt{\alpha_1 \lambda f U}. \quad (10-30)$$

b) *Varilla de longitud finita.* Para una varilla de longitud finita (fig. 10-8) la ecuación diferencial (10-26) conserva su vigor, pero las condiciones de frontera varían; cuando  $x = 0$ ,  $\vartheta = \vartheta_0$  y

$$\vartheta_0 = C_1 + C_2. \quad (h)$$

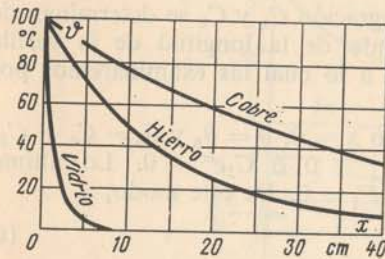


Fig. 10-7. Variación de la temperatura a lo largo de las varillas de diferentes materiales.

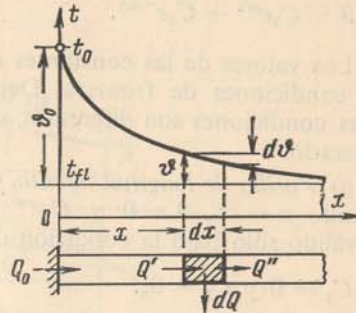


Fig. 10-8. Emisión calorífica a través de una varilla de longitud finita.

Cuando  $x = l$ , la cantidad de calor  $Q'''$  suministrada por la varilla hacia su tope mediante la conductibilidad térmica, se transmite al medio ambiente mediante la emisión calorífica, es decir,

$$-\lambda f (d\vartheta/dx)_{x=l} = \alpha_2 f \vartheta_l, \quad (i)$$

donde  $\alpha_2$  es el valor del coeficiente de traspaso del calor en el tope de la varilla.

De la ecuación (10-27) tenemos:

$$\vartheta_l = C_1 e^{ml} + C_2 e^{-ml} \quad (k)$$

y

$$(d\vartheta/dx)_{x=l} = C_1 m e^{ml} + C_2 m e^{-ml}. \quad (l)$$

Al sustituir los valores de (k) y (l) en la ecuación (i) obtenemos:

$$C_1 m e^{ml} - C_2 m e^{-ml} = -\frac{\alpha_2}{\lambda} (C_1 e^{ml} + C_2 e^{-ml}). \quad (m)$$

Al resolver en conjunto las ecuaciones (h) y (m) determinamos las incógnitas  $C_1$  y  $C_2$ :

$$C_1 = \vartheta_0 \frac{(1 - \alpha_2/m\lambda)e^{-ml}}{e^{ml} + e^{-ml} + \frac{\alpha_2}{m\lambda}(e^{ml} - e^{-ml})}; \quad (n)$$

$$C_2 = \vartheta_0 \frac{(1 + \alpha_2/m\lambda)e^{ml}}{e^{ml} + e^{-ml} + \frac{\alpha_2}{m\lambda}(e^{ml} - e^{-ml})} \quad (o)$$

Después de introducir los valores de (n) y (o) en la ecuación (10-27) obtenemos en definitiva que:

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{(1 - \alpha_2/m\lambda)e^{mx}e^{-ml} + (1 + \alpha_2/m\lambda)e^{-mx}e^{ml}}{e^{ml} + e^{-ml} + \frac{\alpha_2}{m\lambda}(e^{ml} - e^{-ml})}. \quad (10-31)$$

Si ponemos  $x = l$ <sup>1)</sup>, se puede encontrar de la ecuación (10-31), la temperatura en el extremo de la varilla:

$$\vartheta_l = \vartheta_0 \frac{2}{e^{ml} + e^{-ml} + \frac{\alpha_2}{m\lambda}(e^{ml} - e^{-ml})} = \vartheta_0 = \frac{1}{\text{ch } ml + \frac{\alpha_2}{m\lambda} \text{ sh } ml} \quad (10-32)$$

ó

$$\frac{\vartheta_l}{\vartheta_0} = \frac{1}{\text{ch } K_1 + K_2 \text{ sh } K_1},$$

donde

$$K_1 = ml = l \sqrt{\frac{\alpha_1 U}{\lambda f}} \text{ y } K_2 = \frac{\alpha_2}{m\lambda} = \frac{1}{ml} \frac{\alpha_2 l}{\lambda} = \frac{1}{K_1} \frac{\alpha_2 l}{\lambda}.$$

El primer sumando del denominador de la ecuación (10-32) considera el enfriamiento de la superficie lateral de la varilla y el segundo, el de la superficie del tope.

Cuando  $x = 0$  la cantidad de calor transmitida a través de la varilla hacia el medio ambiente es igual a la cantidad de calor que pasó a través de la base de varilla. De la ecuación (10-27) tenemos:

$$Q = -\lambda \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=0} = -\lambda m (C_1 - C_2) f. \quad (p)$$

Al sustituir aquí los valores de  $C_1$  y  $C_2$  de las ecuaciones (n) y (o) obtenemos:

$$Q = \lambda m f \vartheta_0 \frac{\frac{\alpha_2}{m\lambda} + \text{th } ml}{1 + \frac{\alpha_2}{m\lambda} \text{ th } ml}. \quad (10-33)$$

No es difícil cerciorarse de que las ecuaciones (10-28) y (10-30) son un caso particular de las ecuaciones (10-31) y (10-33).

<sup>1)</sup> Recordemos que

$$\frac{1}{2} (e^{mx} - e^{-mx}) = \text{sh } mx; \quad \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{e^{mx} + e^{-mx}} = \frac{\text{sh } mx}{\text{ch } mx} = \text{th } mx;$$

$$\frac{1}{2} (e^{mx} + e^{-mx}) = \text{ch } mx; \quad e^{mx} e^{-mx} = 1.$$



En aquellos casos en que se puede despreciar de la emisión calorífica desde el tope de la varilla ( $Q''' = 0$ ), las ecuaciones (10-31)–(10-33) se simplifican. Según la condición de las ecuaciones (i) y (l) tenemos:

$$Q_{x=l} = 0 = (d\vartheta/dx)_{x=l} = C_1 e^{ml} - C_2 e^{-ml}. \quad (r)$$

Resolviendo en conjunto las ecuaciones (r) y (h) hallamos:

$$C_1 = \vartheta_0 \frac{e^{-ml}}{e^{ml} + e^{-ml}}; \quad (s)$$

$$C_2 = \vartheta_0 \frac{e^{ml}}{e^{ml} + e^{-ml}}. \quad (t)$$

Después de introducir estos valores la ecuación de la curva de temperatura (10-27) toma la forma:

$$\vartheta = \vartheta_0 \frac{1}{e^{ml} + e^{-ml}} [e^{m(x-l)} + e^{-m(x-l)}] = \vartheta_0 \frac{\operatorname{ch} m(x-l)}{\operatorname{ch} ml}. \quad (10-34)$$

Cuando  $x = l$ ,  $\operatorname{ch} m(x-l) = 1$  y, por consiguiente,

$$\vartheta_l = \frac{\vartheta_0}{\operatorname{ch} ml}. \quad (10-35)$$

La cantidad del calor transmitido en este caso, según la ecuación (p), es igual a:

$$Q = \lambda m f \vartheta_0 \frac{e^{ml} - e^{-ml}}{e^{ml} + e^{-ml}} = \lambda m f \vartheta_0 \operatorname{th} ml = \frac{\alpha_1 U}{m} \vartheta_0 \operatorname{th} ml. \quad (10-36)$$

Es fácil cerciorarse de que las ecuaciones (10-34), (10-35) y (10-36) se obtienen directamente de las ecuaciones (10-31), (10-32) y (10-33), si ponemos en estas últimas  $\alpha_2 = 0$ .

**Ejemplo 10-1.** Como resultado de la fricción en un cojinete se desprende tal cantidad de calor, que la temperatura en el extremo de un árbol con diámetro  $d = 60$  mm supera la del aire circundante en  $60^\circ\text{C}$ . ¿Cómo se distribuye la temperatura a lo largo del árbol y qué cantidad de calor se transmite a través de éste, si el coeficiente de traspaso del calor  $\alpha_1 = 6 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}$  y el coeficiente de conductibilidad térmica del material del árbol es  $\lambda = 50 \text{ W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$ ? El árbol se considera como una varilla de longitud infinita.

Según la ecuación (10-28)  $\vartheta = \vartheta_0 e^{-mx}$ , donde  $m = \sqrt{\alpha_1 U/\lambda f}$ .

Calculemos inicialmente el valor de  $m$ , que para la varilla redonda es igual a  $2\sqrt{\alpha_1/\lambda d}$ , y luego hallemos  $K_1 = xm = 2x\sqrt{6/(50 \cdot 0,06)} = 2\sqrt{2}x = 2,84x$ .

Resulta que, la variación de temperatura excesiva a lo largo del árbol se determina mediante la ecuación siguiente:  $\vartheta = 60 e^{-2,84x}$ . Los resultados de los cálculos según esta fórmula se exponen a continuación:

|                             |      |      |      |     |      |
|-----------------------------|------|------|------|-----|------|
| $x, \text{ m}$              | 0,01 | 0,05 | 0,10 | 0,2 | 0,5  |
| $\vartheta, ^\circ\text{C}$ | 58,5 | 52,2 | 43,5 | 35  | 11,8 |

La cantidad del calor transmitido se determina a base de la ecuación (10-30):

$$Q = \lambda f m \vartheta_0 = 50 \frac{3,14(0,06)^2}{4} \cdot 2,84 \cdot 60 = 24 \text{ W}.$$

**Ejemplo 10-2.** En un grupo compresor la temperatura del aire en el recipiente se mide con un termómetro de mercurio colocado en un tubo (camisa) de hierro lleno de aceite (fig. 10-9). El termómetro indica la temperatura del extremo del forro, la cual es más baja que la temperatura del aire  $t_{f1}$  a consecuencia de la evacuación de calor que se efectúa por el tubo. ¿Cuál es el error de la medición?, si la indicación del termómetro es  $t_l = 100^\circ\text{C}$ , la temperatura cerca de la base de la camisa  $t_b = 50^\circ\text{C}$ , la longitud del tubo es  $l = 140$  mm, el espesor de su pared es  $\delta = 1$  mm, el coeficiente de traspaso del calor desde el aire comprimido hacia el tubo,  $\alpha_1 = 25 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}$ .

Para resolver este problema utilicemos la fórmula (10-35). De acuerdo con el caso que examinamos, esta fórmula toma el aspecto:

$$t_{f1} - t_l = \frac{t_l - t_b}{\operatorname{ch} ml}, \quad (a)$$

donde

$t_{f1}$  es la temperatura real del aire comprimido;  
 $t_l$  es la temperatura del extremo de la camisa indicada por el termómetro, que es igual a  $100^\circ\text{C}$ ;  
 $t_b$  es la temperatura de la camisa cerca de la base, la que es igual a  $50^\circ\text{C}$ .

De la ecuación (a) tenemos:

$$t_{f1} = \frac{t_l \operatorname{ch} ml - t_b}{\operatorname{ch} ml - 1}. \quad (b)$$

Calculemos el valor de  $ml$ : puesto que  $U = \pi d$  y  $f = \pi d \delta$ , resulta que

$$ml = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\lambda \delta}} l = \sqrt{\frac{25}{50 \cdot 0,001}} \cdot 0,14 = 3,14.$$

Según la tabla A-13,  $\operatorname{ch}(3,14) = 11,6$ .

Al introducir estos valores en la ecuación (b) obtenemos:

$$t_{f1} = \frac{100 \cdot 11,6 - 50}{11,6 - 1} = 104,6^\circ\text{C}$$

Por consiguiente, el error de medición  $\Delta t$  es igual a:

$$\Delta t = t_{f1} - t_l = 104,6 - 100 = 4,6^\circ\text{C}.$$

Este es un error grande e inadmisibles. Para reducir dicho error al medir la temperatura con ayuda de los termómetros colocados en camisas metálicas es necesario, según la ecuación (b): a) hacer la camisa de un material que posea el coeficiente de conductibilidad térmica lo menor posible; b) tomar su longitud lo mayor posible y el espesor  $\delta$ , lo menor; c) intensificar el intercambio de calor entre el tubo (camisa) y el medio (por ejemplo, fabricando el costillaje sobre la parte exterior de la camisa); d) disminuir la caída de la temperatura a lo largo del tubo (colocando un aislamiento térmico sobre las partes adyacentes del recipiente).

## 10-6. Transmisión de calor a través de aletas

El costillaje de la superficie de calefacción se realiza con el fin de intensificar la transmisión de calor. Si el costillaje está dado y el valor del coeficiente de traspaso del calor para la superficie con nervios se conoce,

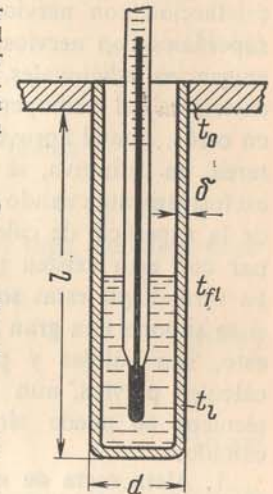


Fig. 10-9. Gráfico para calcular el error en la indicación del termómetro.



entonces el cálculo de la transmisión de calor a través de una pared nervada no presenta ninguna dificultad (véase § 6-5).

El fenómeno es diferente cuando hay que calcular el mismo costillaje, es decir, cuando se requiere determinar la forma más racional y las dimensiones de las aletas. En este caso también es necesario calcular la distribución de la temperatura a lo largo de la aleta, la cantidad de calor sustraído, la resistencia hidráulica, la masa y el costo de la superficie de calefacción con nervios. Además, dependiendo de la destinación de las superficies con nervios, para éstas normalmente se plantea una serie de exigencias adicionales. En unos casos se necesita que las dimensiones exteriores del termopermutador sean mínimas o que sea mínima su masa, en otros, que el aprovechamiento del material sea el más eficaz, etc. Esta tarea, en definitiva, se puede solucionar sólo mediante el experimento, y exclusivamente cuando se dan las condiciones concretas de funcionamiento de la superficie de calefacción y las exigencias requeridas por ésta. A la par con esto existen también las soluciones matemáticas del problema. Es verdad que estas soluciones son muy complicadas y son posibles sólo si se supone una gran serie de premisas simplificadoras. Pero, a pesar de esto, son válidas y pueden usarse con éxito, por lo menos en los cálculos previos, aún más que durante el cálculo de los problemas técnicos se puede simplificar considerablemente la metodología del cálculo.

**1. Aleta recta de espesor constante.** Supongamos que hay una aleta recta cuyo espesor es  $\delta$ , su altura  $h$  y su longitud  $l$  (fig. 10-10). El coeficiente de conductibilidad térmica del material es  $\lambda$ . La temperatura del medio ambiente convengamos considerarla igual a cero. La temperatura de la aleta varía solamente a lo largo de la altura, o sea,  $\vartheta = f(x)$ , en la base y en el extremo de la aleta las temperaturas son  $\vartheta_1$  y  $\vartheta_2$ , respectivamente. Para la superficie lateral de la aleta el coeficiente de traspaso del calor es  $\alpha_1$  y para la del tope,  $\alpha_2$ .

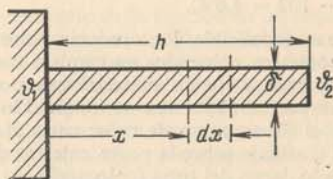


Fig. 10-10. Aleta recta de sección constante.

La solución de este problema es idéntica a la del anterior. La fórmulas deducidas antes para la varilla de longitud finita son válidas también para la aleta recta de espesor constante.

En correspondencia con las designaciones ya aceptadas; aquí las ecuaciones (10-32) y (10-33) toman la forma:

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 \frac{1}{\operatorname{ch} mh + \frac{\alpha_2}{m\lambda} \operatorname{sh} mh}; \quad (10-37)$$

$$Q = \lambda m f \vartheta_1 \frac{\frac{\alpha_2}{m\lambda} + \operatorname{th} mh}{1 + \frac{\alpha_2}{m\lambda} \operatorname{th} mh}. \quad (10-38)$$

Aquí  $m = \sqrt{2\alpha_1/\lambda\delta}$ , puesto que para las aletas planas  $f = \delta l$ ;  $U \approx 2l$  y  $U/f = 2/\delta$ .

Si se desprecia de la emisión calorífica desde el tope, entonces obtenemos:

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 \frac{1}{\operatorname{ch} mh} \quad (10-39)$$

y

$$Q = \lambda m f \vartheta_1 \operatorname{th} mh. \quad (10-40)$$

En los cálculos prácticos en vez de las fórmulas exactas (10-37) y (10-38) se puede usar las fórmulas simplificadas: (10-39) y (10-40). La emisión calorífica desde el tope se considera con bastante precisión mediante el aumento convencional de la altura de las aletas en un valor igual a la mitad de su espesor: la superficie del tope como si se desenrolla en las caras laterales de la aleta.

**2. Aleta recta de espesor variable.** Al resolver el problema en busca de la forma más ventajosa de la aleta, E. Schmidt llegó a la conclusión de que la más ventajosa es la aleta limitada por dos parábolas. Tratando de aproximarse a dicha forma de aleta lo más cerca posible muy a menudo no se fabrican aletas de sección constante, sino aquellas que se adelgazan desde la base hacia el tope y tienen una sección en forma de trapecio o triángulo.

Supongamos que hay una aleta de sección en forma de trapecio. Las condiciones de trabajo son las mismas que en el caso anterior; las dimensiones y las designaciones se dan en la fig. 10-11. Como origen de las coordenadas es conveniente tomar el vértice del triángulo. En este caso el sentido del flujo calorífico es contrario a la orientación del eje de las abscisas.

Siendo el régimen estacionario, la variación de la cantidad de calor, que pasa a través de las secciones  $x$  y  $x + dx$ , se determina por la emisión calorífica desde la superficie lateral del elemento examinado, por lo que:

$$\frac{d}{dx} \left( \lambda f \frac{d\vartheta}{dx} \right) = \alpha U \vartheta \quad (a)$$



Teniendo en cuenta que  $f = \delta l$  y  $\delta = 2x \operatorname{tg} \varphi$  y realizando la diferenciación, obtenemos:

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\vartheta}{dx} - \frac{1}{x} \frac{\alpha}{\lambda \operatorname{tg} \varphi} \vartheta = 0. \quad (b)$$

Si se introduce una nueva variable  $z = \frac{\alpha}{\lambda \operatorname{tg} \varphi} x$ , entonces la ecuación (b) toma la forma:

$$\frac{d^2 \vartheta}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\vartheta}{dz} - \frac{1}{z} \vartheta = 0. \quad (c)$$

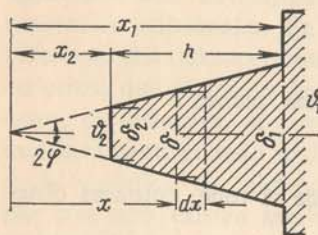


Fig. 10-11. Aleta recta de sección trapezoidal.

La solución general de la ecuación (c) es:

$$\vartheta = C_1 I_0(2\sqrt{z}) + C_2 K_0(2\sqrt{z}), \quad (10-41)$$

donde  $I_0$  y  $K_0$  son las funciones modificadas de Bessel de primer y segundo géneros y de orden cero. Los valores de estas funciones se dan en la tabla A-14.

Las fórmulas definitivas de cálculo que nos interesan para  $\vartheta_2$  y  $Q$ , son muy complicadas. Pero si despreciamos de la emisión calorífica desde el tope, estas fórmulas se simplifican algo. Limitemos aquí sólo a dar la exposición de estas fórmulas simplificadas:

$$\vartheta = \vartheta_1 \frac{I_0(2\sqrt{z})K_1(2\sqrt{z_2}) + I_1(2\sqrt{z_2})K_0(2\sqrt{z})}{I_0(2\sqrt{z_1})K_1(2\sqrt{z_2}) + I_1(2\sqrt{z_2})K_0(\sqrt{z_1})}, \quad (10-42)$$

donde  $I_1$  y  $K_1$  son las funciones modificadas de Bessel de primer y segundo géneros:

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 \frac{I_0(2\sqrt{z_2})K_1(2\sqrt{z_2}) + I_1(2\sqrt{z_2})K_0(2\sqrt{z_2})}{I_0(2\sqrt{z_1})K_1(2\sqrt{z_2}) + I_1(2\sqrt{z_2})K_0(\sqrt{z_1})}; \quad (10-43)$$

$$Q = -\lambda f_1 \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x=x_1} = \psi \frac{\alpha \delta_1 l \vartheta_1}{\sqrt{z_1} \operatorname{tg} \varphi}, \quad (10-44)$$

donde

$$\psi = \frac{I_1(2\sqrt{z_1})K_1(2\sqrt{z_2}) - I_1(2\sqrt{z_2})K_1(2\sqrt{z_1})}{I_0(2\sqrt{z_1})K_1(2\sqrt{z_2}) + I_1(2\sqrt{z_2})K_2(2\sqrt{z_1})}.$$

Al usar estas fórmulas la emisión calorífica desde el tope se toma en consideración aumentando la altura de la aleta en la mitad del espesor de su tope.

Si la aleta no tiene sección en forma de trapecio, sino triangular, entonces las fórmulas de cálculo serán:

$$\vartheta = \vartheta_1 \frac{I_0(2\sqrt{z})}{I_0(2\sqrt{z_1})}; \quad (10-45)$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 \frac{1}{I_0(2\sqrt{z_1})}; \quad (10-46)$$

$$Q = \frac{\alpha \delta_1 \vartheta_1 l}{\sqrt{z_1} \operatorname{tg} \varphi} \left[ \frac{I_1(2\sqrt{z_1})}{I_0(2\sqrt{z_1})} \right]. \quad (10-47)$$

Desde el punto de vista teórico el estrechamiento de la aleta debe acompañarse con un aumento de la cantidad del calor evacuado. Sin

embargo, según muestran los cálculos comparativos, esto es válido sólo para aletas relativamente altas, cuando la resistencia térmica de la misma aleta interviene en calidad de factor determinante. En las aletas relativamente bajas, la resistencia térmica de la aleta no es grande y como factor determinante interviene la resistencia térmica a la emisión calorífica. Entonces la aleta cuya sección se estrecha resulta peor que la de sección rectangular. En este caso como característica de la altura relativa de la aleta se debe tomar la magnitud  $h/\sqrt{\delta}$ , donde  $h$  es la altura y  $\delta$ , el espesor medio de la aleta. Precisamente en tal correlación las dimensiones geométricas entran en las ecuaciones (10-39) y (10-40).

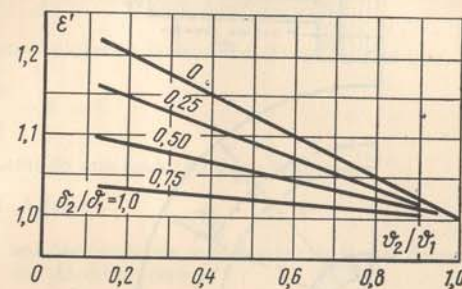


Fig. 10-12.  $\epsilon' = f(\vartheta_2/\vartheta_1; \delta_2/\delta_1)$  como gráfico auxiliar para calcular las aletas de secciones trapezoidal y triangular.

Para los cálculos prácticos las fórmulas de (10-43) a (10-47) son demasiado complicadas. Pero con ayuda de las curvas auxiliares de la fig. 10-12 se puede simplificar considerablemente el cálculo de transmisión de calor a través de las aletas rectas de secciones tanto triangulares como trapezoidales. Además con ayuda de dichas curvas se puede reducir el cálculo a las fórmulas (10-39) y (10-40) para una aleta de sección rectangular de espesor constante.

En este caso

$$Q' = \epsilon' F' q. \quad (10-48)$$

donde  $Q'$  es la cantidad de calor transmitido por unidad de tiempo;  $F'$  es la superficie de enfriamiento de la aleta de sección triangular o trapezoidal;

$q = Q/F$  es la densidad del flujo calorífico para la aleta de sección rectangular, cuya longitud, altura y espesor son iguales a la longitud, altura y espesor medio de la aleta que se estrecha;

$\epsilon'$  es el coeficiente de corrección para el estrechamiento de la aleta;  $\epsilon' = f(\vartheta_2/\vartheta_1, \delta_2/\delta_1)$ , su valor se determina según las curvas de la fig. 10-12.

Aquí en el eje de las abscisas está trazada la relación de las diferencias de temperaturas entre los dos medios  $\vartheta_2/\vartheta_1$ ; en el eje de las ordenadas, el valor de  $\epsilon' = q'/q = Q'/F'$ ;  $Q/F$  y la relación  $\delta_2/\delta_1$  está elegida como parámetro. La curva inferior en la figura corresponde a la aleta de espesor



constante en que  $\delta_2/\delta_1 = 1$ ; la superior, a la aleta triangular en la cual  $\delta_2/\delta_1 = 0$ . La relación  $\vartheta_2/\vartheta_1$  se determina a base de la fórmula (10-39); la emisión calorífica desde el tope se toma en consideración en este caso aumentando la altura de aleta  $h$  en la mitad del espesor del tope.

**3. Aleta redonda de espesor constante.** Las aletas redondas se emplean en el costillaje de los tubos. La ecuación de transmisión de calor a través de esta aleta se deduce del modo siguiente.

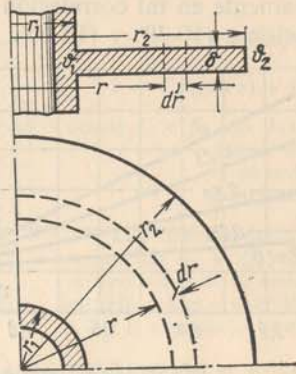


Fig. 10-13. Aleta redonda de sección constante.

Sea dado un tubo con aleta redonda de espesor constante. El radio interior de la aleta es  $r_1$  y el exterior  $r_2$ , el espesor es  $\delta$  y el coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda$  (fig. 10-13). Admitamos que la temperatura del medio ambiente es igual a cero. La temperatura de la aleta varía solamente en dirección del radio  $\vartheta = f(r)$ ; se dan el coeficiente de traspaso del calor  $\alpha$  y las temperaturas  $\vartheta_1$  y  $\vartheta_2$  en la base y el extremo de la aleta, respectivamente.

Para un anillo elemental con radios  $r$  y  $r + dr$  durante el régimen estacionario se puede escribir:

$$Q_r - Q_{r+dr} = dQ; \quad (a)$$

$$Q_r = -2\pi\lambda\delta r \frac{d\vartheta}{dr}; \quad (b)$$

$$\begin{aligned} Q_{r+dr} &= Q_r + \frac{dQ_r}{dr} dr = -2\pi\lambda\delta r \frac{d\vartheta}{dr} - 2\pi\lambda\delta \frac{d}{dr} \left( \frac{d\vartheta}{dr} r \right) = \\ &= -2\pi\lambda\delta \left( \frac{d\vartheta}{dr} r + \frac{d^2\vartheta}{dr^2} r dr + \frac{d\vartheta}{dr} dr \right); \end{aligned} \quad (c)$$

$$Q_r - Q_{r+dr} = dQ = 2\pi\lambda\delta \left( \frac{d^2\vartheta}{dr^2} r dr + \frac{d\vartheta}{dr} dr \right). \quad (d)$$

Pero  $dQ$  se puede expresar también a través del coeficiente de traspaso del calor, o sea:

$$dQ = \alpha \vartheta \lambda \pi r dr. \quad (e)$$

A igualar entre sí los segundos miembros de las ecuaciones (d) y (e) y al realizar la simplificación por  $2\pi\lambda\delta r dr$ , obtenemos:

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{2\alpha}{\lambda\delta} \vartheta = 0. \quad (f)$$

Si se pone  $2\alpha/\lambda\delta = m^2$ ,  $mr = z$  y  $1/r = Q/z$ , entonces

$$\frac{d\vartheta}{dr} = m \frac{d\vartheta}{dz} \text{ y } \frac{d^2\vartheta}{dr^2} = m^2 \frac{d^2\vartheta}{dz^2}.$$

Al introducir estos valores en la ecuación (f) nos resulta que:

$$\frac{d^2\vartheta}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\vartheta}{dz} - \vartheta = 0. \quad (g)$$

La solución general de esta ecuación tiene la forma:

$$\vartheta = C_1 I_0(z) + C_2 K_0(z), \quad (10-49)$$

donde  $I_0(z)$  y  $K_0(z)$  son las funciones modificadas de Bessel de primer y segundo géneros de orden cero;

$C_1$  y  $C_2$  son las constantes de integración que se determinan de las condiciones de frontera.

Si se desprecia la emisión calorífica desde el tope, entonces las fórmulas de cálculo para  $\vartheta$ ,  $\vartheta_2$  y  $Q$  obtendrán la forma siguiente:

$$\vartheta = \vartheta_1 \frac{I_0(mr)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr_1)}; \quad (10-50)$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 \frac{I_0(mr_2)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr_2)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr_1)}; \quad (10-51)$$

$$Q = 2\pi r_1 \lambda \delta m \vartheta_1 \psi, \quad (10-52)$$

donde

$$\psi = \frac{I_1(mr_2)K_1(mr_1) - I_1(mr_1)K_1(mr_2)}{I_0(mr_1)K_1(mr_2) + I_1(mr_2)K_0(mr_1)}.$$

Al usar estas fórmulas es posible tomar en consideración la emisión calorífica desde el tope mediante el aumento convencional de la altura de aleta, es decir,  $r_2$ , en la mitad del espesor del tope. Para aletas relativamente no altas la emisión calorífica del tope tiene un valor de importancia muy considerable.

Para fines técnicos se puede simplificar bastante la metodología de cálculo de las aletas redondas, la que con ayuda de las curvas dadas en la fig. 10-14 se reduce al cálculo de una aleta recta de espesor constante. En este caso

$$Q'' = \varepsilon'' F'' q, \quad (10-53)$$

donde  $Q''$  es la cantidad de calor que se toma;

$F''$  es la superficie de enfriamiento de la aleta redonda;



$q = Q/F$  es la cantidad de calor transmitido en unidad de tiempo por unidad de superficie de la aleta recta, cuyo espesor es igual al espesor de la redonda y cuya longitud es igual a 1 m;  $\varepsilon''$  es el coeficiente de corrección,  $\varepsilon'' = f(\vartheta_2/\vartheta_1, r_2/r_1)$ , y su valor se encuentra a base de las curvas de la fig. 10-14.

En esta figura sobre el eje de las abscisas está trazada la relación de las diferencias de temperaturas entre los dos medios  $\vartheta_2/\vartheta_1$ , para una aleta

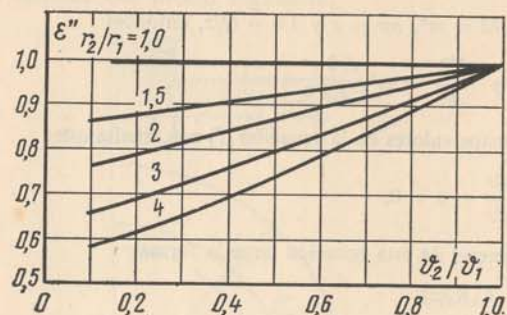


Fig. 10-14.  $\varepsilon'' = f(\vartheta_2/\vartheta_1; r_2/r_1)$  como gráfico auxiliar para calcular aletas redondas de sección constante.

recta de espesor constante, la cual se determina según la ecuación (10-44), y sobre el eje de las ordenadas se traza el valor de  $\varepsilon'' = q''/q = Q''/F''$ :  $= Q/F$ . La relación  $r_2/r_1$  ha sido elegida como parámetro y la curva superior límite corresponde a una aleta recta en que  $r_2/r_1 = 1$ .

La influencia de estrechamiento de la aleta redonda se puede apreciar, de modo aproximado, con ayuda de las curvas de la fig. 10-12.

**Ejemplo 10-3.** ¿Qué cantidad de calor se transmite a través de una aleta de hierro?, si su espesor es  $\delta = 5$  mm, su altura  $h = 50$  mm y su longitud  $l = 1$  m. ¿Cuál es la diferencia de temperaturas entre los dos medios  $\vartheta_2$  en el extremo de la aleta?, si el coeficiente de conductibilidad térmica del hierro es  $\lambda = 50$  W/(m·°C), el coeficiente de traspaso del calor,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 10$  W/(m²·°C) y el exceso de temperatura en la base de la aleta es  $\vartheta_1 = 80^\circ\text{C}$ .

Primero realizamos el cálculo según las fórmulas simplificadas, despreciando la emisión calorífica desde el tope. En este caso

$$m = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda\delta}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{50 \cdot 0,005}} = 8,95 \text{ m}^{-1};$$

$$mh = 8,95 \cdot 0,05 = 0,447.$$

En la tabla A-13 hallamos:

$$\text{sh}(0,447) = 0,46; \quad \text{ch}(0,447) = 1,10 \text{ y } \text{th}(0,447) = 0,42.$$

Luego a base de la fórmula (10-39) tenemos:

$$\vartheta_2 = \frac{80}{1,10} = 72,7^\circ\text{C}$$

y según la fórmula (10-40):

$$Q = 50 \cdot 8,95 \cdot 0,005 \cdot 80 \cdot 0,42 = 75,5 \text{ W}.$$

Si el cálculo se realiza de acuerdo con las fórmulas exactas (10-37) y (10-38), entonces obtendremos:

$$\vartheta_2 = 80 \frac{1}{1,10 + \frac{10}{8,95 \cdot 50} \cdot 0,46} = \frac{80}{1,12} = 71,5^\circ\text{C};$$

$$Q = 50 \cdot 8,95 \cdot 0,005 \cdot 80 \frac{\frac{10}{8,95 \cdot 50} + 0,42}{1 + \frac{10}{8,95 \cdot 50} \cdot 0,42} = 180 \frac{0,442}{1,0095} = 79 \text{ W}.$$

Si el cálculo se realiza según las fórmulas (10-39) y (10-40) y la emisión calorífica desde el tope se toma en consideración mediante el aumento convencional de la altura de aleta en la mitad de su espesor, entonces nos resulta:

$$h = 0,0525 \text{ m}; \quad m = 8,95 \text{ m}^{-1};$$

$$mh = 8,95 \cdot 0,0525 = 0,47;$$

$$\text{ch}(0,47) = 1,12; \quad \text{th}(0,47) = 0,44;$$

$$\vartheta_2 = \frac{80}{1,12} = 71,5^\circ\text{C} \text{ y } Q = 180 \cdot 0,44 = 79 \text{ W}.$$

En el último caso el cálculo da los mismos resultados que el cálculo realizado de acuerdo a las fórmulas precisas (10-37) y (10-38).

**Ejemplo 10-4.** Determinar la cantidad de calor que se toma desde una aleta recta cuya sección tiene forma trapezoidal de longitud  $l = 1$  m, altura  $h = 50$  mm,  $\delta_1 = 0,7$  mm y  $\vartheta_2 = 0,3$  mm, si el coeficiente de traspaso del calor es  $\alpha = 20$  W/(m²·°C), cuando el coeficiente de conductibilidad térmica del material de la aleta es  $\lambda = 40$  W/(m·°C) y  $\vartheta_1 = 80^\circ\text{C}$ .

Al calcular según las fórmulas (10-43) y (10-44) obtenemos:

$$\vartheta_2 = 18,0^\circ\text{C}; \quad Q' = 76,5 \text{ W y } Q'/F' = 763 \text{ W/m}^2 (F' = 0,1003 \text{ m}^2).$$

Durante el cálculo según el método simplificado la aleta correspondiente de sección rectangular debe tener un espesor  $\delta = 0,5$  mm. Al realizar el cálculo para esta aleta según las fórmulas (10-39) y (10-40) obtenemos:

$$\vartheta_2 = 16,73^\circ\text{C}; \quad Q = 70 \text{ W y } q = Q/F = 698 \text{ W/m}^2 (F = 0,1005 \text{ m}^2).$$

Luego se determinan

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} = \frac{16,73}{80} = 0,21; \quad \frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{0,3}{0,7} = 0,43$$

y de la fig. 10-12 el valor del coeficiente de corrección es  $\varepsilon' = 1,10$ .

Al usar la fórmula (10-48) tenemos:

$$Q' = \varepsilon' F' q = 1,10 \cdot 0,1003 \cdot 698 = 76,5 \text{ W},$$

es decir, precisamente la misma cantidad de calor como la obtenida en el cálculo según la fórmula (10-44).



**Ejemplo 10-5.** Calcular la emisión calorífica de una aleta redonda de fundición que tiene espesor constante  $\delta = 3,6$  mm; radio interior  $r_1 = 60$  mm y exterior,  $r_2 = 120$  mm; su coeficiente de traspaso del calor es  $\alpha = 30$  W/(m $\cdot$ °C), el coeficiente de conductibilidad térmica del hierro fundido  $\lambda = 30$  W/(m $\cdot$ °C),  $\vartheta_1 = 80^\circ\text{C}$ .

Al llevar a cabo la solución del problema según las fórmulas (10-51) y (10-52), tomando en consideración la emisión calorífica desde el tope, tenemos:

$$\vartheta_2 = 30,4^\circ\text{C} \text{ y } Q'' = 89,5 \text{ W.}$$

Durante el cálculo según el método simplificado obtenemos: la altura convencional de la aleta recta  $h = (r_2 - r_1) + \delta/2 = 0,0618$  m;  $m = 23,6$ ;  $mh = 1,46$ ,  $\text{ch}(1,46) = 2,269$ ;  $\text{th}(1,46) = 0,8977$ . Luego según las fórmulas (10-39) y (10-40)  $\vartheta_2/\vartheta_1 = 0,44$  y  $Q = 183,4$  W.

La superficie de la aleta recta, cuando  $l = 1$  m, es igual a  $F = 0,1236$  m $^2$ . Por consiguiente,  $q = Q/F = 1480$  W/m $^2$ . De la fig. 10-14, cuando  $\vartheta_2/\vartheta_1 = 0,44$  y  $r_2/r_1 = 2$ , hallamos  $\varepsilon'' = 0,855$  y, puesto que  $F'' = 0,0706$  m $^2$ , entonces, al introducir los valores encontrados en la fórmula (10-53), en definitiva tenemos que:  $Q'' = \varepsilon'' F' q = 0,855 \cdot 0,0706 = 89,5$  W, o sea, el mismo valor que según la fórmula (10-52).

## APENDICÉS

A continuación se dan los siguientes materiales de consulta: tablas de propiedades físicas, valores de algunas funciones y magnitudes calculadas necesarias para contrar el intercambio de calor.

### Conversión de las magnitudes físicas de unas unidades de medición en las de otra especie

|  |   |
|--|---|
| Fuerza   | 1 kgf = 9,80665 N;<br>1 N = $10^5$ dinas  |
| Presión  | 1 kgf/cm $^2$ = 98066,5 N/m $^2$ ;<br>1 kgf/cm $^2$ = 736,5 mm Hg;<br>1 Bar = $10^5$ N/m $^2$ ;<br>1 Bar = 1,02 kgf/cm $^2$ |
| Trabajo  | 1 kgf · m = 9,80665 J   |
| Energía  | 1 kW · h = 860 kcal;<br>1 CV · h = 0,736 kW · h   |
| Cantidad de calor  | 1 kcal = 4,1868 kJ  |
| Flujo calorífico   | 1 kcal/h = 1,163 W  |
| Densidad del flujo calorífico                            | 1 kcal/(m $^2$ · h) = 1,163 W/m $^2$  |
| Entalpía, el calor de transición de fase                 | 1 kcal/kg = 4,1868 kJ/kg  |
| Calor específico   | 1 kcal/(kg · °C) = 4,1868 kJ/(kg · °C)  |
| Coficiente dinámico de viscosidad                        | 1 kgf · s/m $^2$ = 9,81 N · s/m $^2$  |
| Coficiente de conductibilidad térmica                    | 1 kcal/(m · h · °C) = 1,163 W/(m · °C)  |
| Coficiente de traspaso del calor (de termotransferencia) | 1 kcal/(m $^2$ · h · °C) = 1,163 W/(m $^2$ · °C)  |
| Coficiente de radiación                                  | 1 kcal/(m $^2$ · h · K $^4$ ) = 1,163 W/(m $^2$ · K $^4$ )  |



Conversión de algunas magnitudes físicas del sistema de unidades inglés en las de otra especie

|  |  |
|--|--|
| Longitud   | 1 ya (yard) = 3 ft (feet) = 36 in (inches) = 0,9144 m;<br>1 in = 0,3048 m; 1 ft = 2,54 cm = 0,0254 m   |
| Area   | 1 yd <sup>2</sup> = 0,836 m <sup>2</sup> ; 1 ft <sup>2</sup> = 0,0929 m <sup>2</sup> ;<br>1 in <sup>2</sup> = 6,452 cm <sup>2</sup>  |
| Volumen  | 1 ft <sup>3</sup> = 0,02832 m <sup>3</sup> = 28,32 l;<br>1 in <sup>3</sup> = 16,39 cm <sup>3</sup> ;<br>1 gal (gallon) = 3,7852  |
| Masa   | 1 ton (short ton) = 2000 lb (pounds) = 907,184 kg;<br>1 long ton = 1016, 05 kg;<br>1 lb = 16 oz (ounces) = 0,4536 kg;<br>1 oz = 28,35 g  |
| Volumen específico   | 1 ft <sup>3</sup> /lb = 0,06243 m <sup>3</sup> /kg   |
| Densidad   | 1 lb/ft <sup>3</sup> = 16,0185 kg/m <sup>3</sup> ;<br>1 oz/ft <sup>3</sup> = 1,0 kg/m <sup>3</sup>   |
| Presión  | 1 lb/ft <sup>2</sup> = 4,88 kgf/m <sup>2</sup> (mm de columna de agua);<br>1 lb/in <sup>2</sup> = 702,7 kgf/m <sup>2</sup> =<br>= 0,0703 kgf/cm <sup>2</sup> = 51,71 mm de columna de mercurio   |
| Coefficiente de viscosidad   | 1 lb (fts) = 1,488 kgf/(m · s);<br>1 lb/ft <sup>2</sup> = 47,88 kgf/(m · s) = 478, 8 poises  |
| Coefficiente cinemático de viscosidad                              | 1 ft <sup>2</sup> /s = 334,45 m <sup>2</sup> /h = 0,929 m <sup>2</sup> /s = 929,0 st (stokes);<br>1 st = 1 cm <sup>2</sup> /s = 10 <sup>-4</sup> m <sup>2</sup> /s   |
| Temperatura  | $t, ^\circ\text{C} = \frac{5}{9} (t, ^\circ\text{F} + 40) - 40$ ;<br>$t, ^\circ\text{F} = \frac{9}{5} (t, ^\circ\text{C} + 40) - 40$ ;<br>$T, \text{K} = t, ^\circ\text{C} + 273$ ;<br>$t, ^\circ\text{C} = 12,5 t, ^\circ\text{R}$ ;<br>$t, ^\circ\text{R} = 0,8^\circ\text{C}$ |
| Cantidad de calor  | 1 Btu (British thermal unit) =<br>= 0,252 kcal = 1,055 kJ;<br>1 pcu (pound centigrad unit) = 1,8 Btu =<br>= 0,4536 kcal = 1,9 kJ   |
| Densidad del flujo calorífico                                      | 1 Btu/(ft <sup>2</sup> · h) = 2,71 kcal/(m <sup>2</sup> · h) =<br>= 3,153 W/m <sup>2</sup>   |
| Capacidad térmica  | 1 Btu/(lb · °F) = 1,0 kcal/(kg · °C) =<br>= 4,19 kJ/(kg · °C)  |
| Coefficiente de conducti-<br>bilidad térmica                       | 1 Btu/(ft · h · °F) = 1,488 kcal/(m · h · °C) =<br>= 1,73 W (m · °C);<br>1 Btu (in · h · °F) = 17,88 kcal (m · h · °C) =<br>= 20,8 W (m · °C);<br>1 Btu (in · ft <sup>2</sup> · h · °F) =<br>= 0,124 kcal (m · h · °C) = 0,144 W/(m · °C)  |
| Coefficiente de traspaso del<br>calor (de termotrans-<br>ferencia) | 1 Btu/(ft <sup>2</sup> · h · °F) =<br>= 4,822 kcal (m <sup>2</sup> · h · °C) =<br>= 5,68 W/(m <sup>2</sup> · °C);<br>1 pcu/(ft <sup>2</sup> · h · °C) =<br>= 4,878 kcal/(m <sup>2</sup> · h · °C) =<br>= 5,67 W/(m <sup>2</sup> · °C)  |

Tabla A-1

Densidad  $\rho$ , coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda$ , calor específico  $c_p$  y coeficiente de conductibilidad de la temperatura  $a$  en diferentes materiales

| Denominación del material                            | $t, ^\circ\text{C}$ | $\rho, \text{kg/m}^3$ | $\lambda, \text{W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$ | $c_p, \text{kl/(kg} \cdot ^\circ\text{C)}$ | $a \cdot 10^6, \text{m}^2/\text{s}$ |
|--|---------------------|-----------------------|--|--|-------------------------------------|
| 1  | 2                   | 3                     | 4  | 5  | 6                                   |
| <i>Materiales aislantes, de construcción y otros</i> |                     |                       |  |  |                                     |
| Alfol  | 50                  | 20                    | 0,0465                                       | —  | —                                   |
| Algodón mineral                                      | 100                 | 250                   | 0,47   | —  | —                                   |
| Algodón de vidrio                                    | 0                   | 200                   | 0,0372                                       | 0,67                                       | 0,278                               |
| Arcilla refractaria                                  | 450                 | 1845                  | 1,04   | 1,09                                       | 0,516                               |
| Arena húmeda   | 20                  | 1650                  | 1,130  | 2,09                                       | 0,492                               |
| Arena seca   | 20                  | 1500                  | 0,326  | 0,798                                      | 2,73                                |
| Asbesto en chapas                                    | 30                  | 770                   | 0,1163                                       | 0,818                                      | 0,198                               |
| Asfalto  | 20                  | 2110                  | 0,698  | 2,09                                       | 0,159                               |
| Azúcar granulado                                     | 0                   | 1600                  | 0,582  | 1,26                                       | 0,278                               |
| Cartón de bagazo                                     | 20                  | 215                   | 0,0465                                       | —  | —                                   |
| Cartón corrugado                                     | —                   | —                     | 0,064  | —  | —                                   |
| Carbón mineral                                       | 20                  | 1400                  | 0,186  | 1,31                                       | 1,03                                |
| Celuloide  | 30                  | 1400                  | 0,210  | —  | —                                   |
| Cemento portland                                     | 30                  | 1900                  | 0,303  | 1,13                                       | 0,140                               |
| Clinker  | 30                  | 1400                  | 0,163  | 1,42                                       | 0,114                               |
| Corcho granulado                                     | 20                  | 45                    | 0,0384                                       | —  | —                                   |
| Coque fino   | 100                 | 449                   | 0,191  | 1,22                                       | 0,035                               |
| Creta  | 50                  | 2000                  | 0,93   | 0,88                                       | 0,531                               |
| Cristal de cuarzo $\perp$ al eje                     | 0                   | 2500—2800             | 7,21   | 0,836                                      | 3,34                                |
| Cristal de cuarzo $\parallel$ al eje                 | 0                   | 2500—2800             | 13,6   | —  | —                                   |
| Cuero (de suela)                                     | 30                  | 1000                  | 0,160  | —  | —                                   |
| Esquisto   | 100                 | 2800                  | 1,49   | —  | —                                   |
| Estucado   | 20                  | 1680                  | 0,78   | —  | —                                   |
| Fibra de amianto                                     | 50                  | 470                   | 0,1105                                       | 0,818                                      | 0,290                               |
| Fibra (placa)  | 20                  | 240                   | 0,049  | —  | —                                   |
| Filtro basto de lana                                 | 30                  | 330                   | 0,0524                                       | —  | —                                   |
| Goma   | 0                   | 1200                  | 0,163  | 1,38                                       | 0,0985                              |
| Grava  | 20                  | 1840                  | 0,361  | —  | —                                   |
| Hielo  | —95                 | —                     | 3,96   | 1,17                                       | —                                   |
| Hielo  | 0                   | 920                   | 2,25   | 2,26                                       | 1,08                                |
| Hollín de lámpara                                    | 40                  | 190                   | 0,0314                                       | —  | —                                   |
| Hormigón   | 20                  | 2300                  | 1,280  | 1,13                                       | 0,494                               |
| Hormigón de carbonilla en terrones                   | 20                  | 240                   | 0,43   | 0,88                                       | 0,495                               |
| Incrustación de caldera                              | 65                  | —                     | 0,13—3,14                                    | —  | —                                   |
| Ladrillo de aislamiento                              | 100                 | 500                   | 0,1395                                       | —  | —                                   |



Continuación de la tabla A-1

| 1                               | 2    | 3        | 4        | 5     | 6     |
|---------------------------------|------|----------|----------|-------|-------|
| Ladrillo de carborundo          | —    | 1000     | 11,3     | 0,678 | 1,66  |
| Ladrillo de construcción        | 20   | 800—1500 | 0,23—0,3 | 0,8   | —     |
| Lana mineral                    | 50   | 200      | 0,0465   | 0,92  | 0,253 |
| Linóleo                         | 20   | 1180     | 0,186    | —     | —     |
| Madera de balsa                 | 30   | 128      | 0,0524   | —     | —     |
| Madera de pino ⊥ a las fibras   | 20   | 448      | 0,107    | 2,7   | —     |
| Madera de pino    a las fibras  | 20   | 448      | 0,256    | —     | —     |
| Madera de roble ⊥ a las fibras  | 20   | 800      | 0,207    | 1,76  | 0,147 |
| Madera de roble    a las fibras | 20   | 800      | 0,363    | —     | —     |
| Magnesia al 85% en polvo        | 100  | 216      | 0,0675   | —     | —     |
| Mármol                          | 90   | 2700     | 1,31     | 0,419 | 1,15  |
| Mica                            | —    | 290      | 0,582    | 0,88  | 2,280 |
| Nieve                           | —    | 560      | 0,465    | 2,09  | 0,398 |
| Paneles de turba                | 50   | 220      | 0,064    | —     | —     |
| Parafina                        | 20   | 920      | 0,268    | —     | —     |
| Placa de corcho                 | 30   | 190      | 0,0420   | 1,88  | 0,117 |
| Porcelana                       | 95   | 2400     | 1,035    | 1,09  | 0,398 |
| „                               | 1055 | 2400     | 1,97     | —     | —     |
| Serrín de madera                | 20   | 200      | 0,070    | —     | —     |
| Sovelita                        | 100  | 450      | 0,0976   | —     | —     |
| Tierra húmeda                   | —    | 1700     | 0,658    | 2,01  | 0,192 |
| „ seca                          | —    | 1500     | 0,1385   | —     | —     |
| Vidrio                          | 200  | 2500     | 0,745    | 0,67  | 0,445 |
| Yeso                            | —    | 1650     | 0,291    | 0,88  | —     |
| Zonolita                        | 100  | 200      | 0,099    | —     | —     |
| <i>Metales</i>                  |      |          |          |       |       |
| Acero                           | 20   | 7900     | 45,4     | 0,462 | 12,5  |
| Aluminio                        | 0    | 2670     | 204,0    | 0,92  | 91,3  |
| Bronce                          | 20   | 8000     | 64,0     | 0,381 | 20,8  |
| Cinc                            | 20   | 7000     | 116,3    | 0,394 | 42,3  |
| Cobre                           | 0    | 8800     | 384      | 0,381 | 114,5 |
| Estaño                          | 0    | 7230     | 64,0     | 0,921 | 39,2  |
| Fundición                       | 20   | 7220     | 63,0     | 0,504 | 17,4  |
| Latón                           | 0    | 8600     | 85,5     | 0,378 | 26,4  |
| Mercurio                        | 0    | 13600    | 4,9      | 0,138 | 4,25  |
| Niquel                          | 20   | 9000     | 58,2     | 0,462 | 14,01 |
| Plata                           | 0    | 10500    | 458      | 0,234 | 186,5 |
| Plomo                           | 0    | 11400    | 34,9     | 0,129 | 23,6  |

Tabla A-2

Coficiente de conductibilidad térmica  $\lambda$ , W/(m·°C),  
de metales y aleaciones a diferentes temperaturas

| Metal o aleación                           | Temperatura, en °C |      |      |      |      |      |     |      |
|--|--------------------|------|------|------|------|------|-----|------|
|  | 0                  | 20   | 100  | 200  | 300  | 400  | 500 | 600  |
| Acero dulce                                | 63                 | —    | 57   | 52   | 46   | 42   | 36  | 31   |
| Aleaciones de aluminio:                    |                    |      |      |      |      |      |     |      |
| 92% de Al y 8% de Mg                       | 102                | 106  | 123  | 148  | —    | —    | —   | —    |
| 80% de Al y 20% de Si                      | 158                | 160  | 169  | 174  | —    | —    | —   | —    |
| Aluminio                                   | 202                | —    | 206  | 229  | 262  | 319  | 371 | 422  |
| Cobre (99,9%)                              | 293                | —    | 385  | 378  | 371  | 365  | 359 | 354  |
| Duraluminio:                               |                    |      |      |      |      |      |     |      |
| 94—96% de Al, 3—5% de Cu y 0,5% de Mg      | 159                | 165  | 181  | 194  | —    | —    | —   | —    |
| Latón:                                     |                    |      |      |      |      |      |     |      |
| 90% de Cu, 10% de Zn                       | 102                | —    | 117  | 134  | 149  | 166  | 180 | 195  |
| 70% de Cu, 30% de Zn                       | 106                | —    | 109  | 110  | 114  | 116  | 120 | 121  |
| 67% de Cu, 33% de Zn                       | 100                | —    | 107  | 113  | 121  | 128  | 135 | 151  |
| 60% de Cu, 40% de Zn                       | 106                | —    | 120  | 137  | 152  | 169  | 186 | 200  |
| Metal Monel:                               |                    |      |      |      |      |      |     |      |
| 29% de Cu, 67% de Ni y 2% de Fe            | —                  | 22,1 | 24,4 | 27,6 | 30   | 34   | —   | —    |
| Nicromo:                                   |                    |      |      |      |      |      |     |      |
| 90% de Ni, 10% de Cr                       | 17,1               | 17,4 | 19,0 | 20,9 | 22,8 | 24,6 | —   | —    |
| 80% de Ni, 20% de Cr                       | 12,2               | 12,6 | 13,8 | 15,6 | 17,2 | 19,0 | —   | 22,6 |
| Nicromo de hierro:                         |                    |      |      |      |      |      |     |      |
| 61% de Ni, 15% de Cr, 20% de Fe y 4% de Mn | —                  | 11,6 | 11,9 | 12,2 | 12,4 | 12,7 | —   | 13,1 |
| 61% de Ni, 16% de Cr y 23% de Fe           | 11,9               | 12,1 | 13,2 | 14,6 | 16,0 | 17,4 | —   | —    |
| Plata alemana:                             |                    |      |      |      |      |      |     |      |
| 60% de Cu, 15% de Ni 22% de Zn             | —                  | 25,0 | 31   | 40   | 45   | 49   | —   | —    |



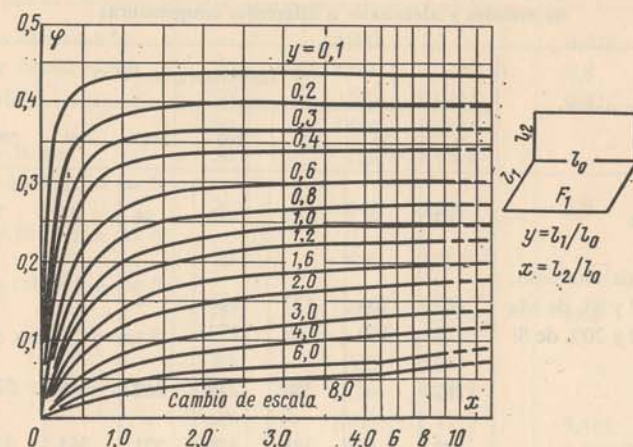
Propiedades físicas del aire seco ( $P_B = 760 \text{ mm Hg} \approx 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ )


Fig. A-1. Valores del coeficiente angular  $\phi$  para el intercambio de calor por radiación entre dos rectángulos mutuamente perpendiculares con el lado común  $l_0$ .  $F_1$  es la superficie del intercambio térmico calculada.

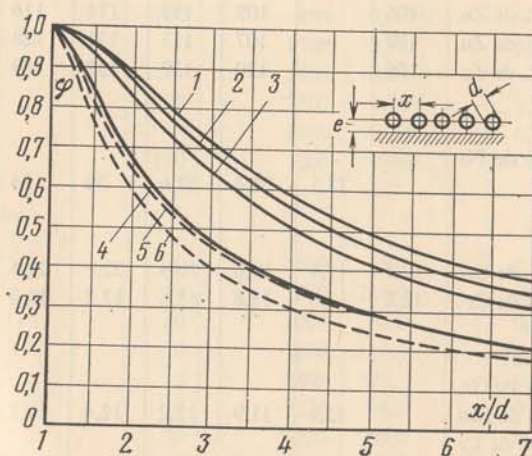


Fig. A-2. Valores del coeficiente angular  $\phi$  para pantalla de una capa.  
1 — radiación general cuando  $e \gg 1,4 d$ ; 2 — radiación general cuando  $e = 0,8 d$ ; 3 — radiación general cuando  $e = 0,5 d$ ; 4 — radiación general cuando  $e = 0$ . 5 — radiación de una llama cuando  $e \gg 0,5 d$ ; 6 — radiación de una llama cuando  $e = 0$ .

| $t, ^\circ\text{C}$ | $\rho, \text{kg/m}^3$ | $c_p, \text{kJ/(kg} \cdot ^\circ\text{C)}$ | $\lambda \cdot 10^2, \text{W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$ | $\alpha \cdot 10^6, \text{m}^2/\text{s}$ | $\mu \cdot 10^6, \text{Pa} \cdot \text{s}$ | $\nu \cdot 10^6, \text{m}^2/\text{s}$ | Pr    |
|---------------------|-----------------------|--|---|--|--|---------------------------------------|-------|
| -50                 | 1,584                 | 1,013                                      | 2,04  | 12,7                                     | 14,6                                       | 9,23                                  | 0,728 |
| -40                 | 1,515                 | 1,013                                      | 2,12  | 13,8                                     | 15,2                                       | 10,04                                 | 0,728 |
| -30                 | 1,453                 | 1,013                                      | 2,20  | 14,9                                     | 15,7                                       | 10,80                                 | 0,723 |
| -20                 | 1,395                 | 1,009                                      | 2,28  | 16,2                                     | 16,2                                       | 11,61                                 | 0,716 |
| -10                 | 1,342                 | 1,009                                      | 2,36  | 17,4                                     | 16,7                                       | 12,43                                 | 0,712 |
| 0                   | 1,293                 | 1,005                                      | 2,44  | 18,8                                     | 17,2                                       | 13,28                                 | 0,707 |
| 10                  | 1,247                 | 1,005                                      | 2,51  | 20,0                                     | 17,6                                       | 14,16                                 | 0,705 |
| 20                  | 1,205                 | 1,005                                      | 2,59  | 21,4                                     | 18,1                                       | 15,06                                 | 0,703 |
| 30                  | 1,165                 | 1,005                                      | 2,67  | 22,9                                     | 18,6                                       | 16,00                                 | 0,701 |
| 40                  | 1,128                 | 1,005                                      | 2,76  | 24,3                                     | 19,1                                       | 16,96                                 | 0,699 |
| 50                  | 1,093                 | 1,005                                      | 2,83  | 25,7                                     | 19,6                                       | 17,95                                 | 0,698 |
| 60                  | 1,060                 | 1,005                                      | 2,90  | 27,2                                     | 20,1                                       | 18,97                                 | 0,696 |
| 70                  | 1,029                 | 1,009                                      | 2,96  | 28,6                                     | 20,6                                       | 20,02                                 | 0,694 |
| 80                  | 1,000                 | 1,009                                      | 3,05  | 30,2                                     | 21,1                                       | 21,09                                 | 0,692 |
| 90                  | 0,972                 | 1,009                                      | 3,13  | 31,9                                     | 21,5                                       | 22,10                                 | 0,690 |
| 100                 | 0,946                 | 1,009                                      | 3,21  | 33,6                                     | 21,9                                       | 23,13                                 | 0,688 |
| 120                 | 0,898                 | 1,009                                      | 3,34  | 36,8                                     | 22,8                                       | 25,45                                 | 0,686 |
| 140                 | 0,854                 | 1,013                                      | 3,49  | 40,3                                     | 23,7                                       | 27,80                                 | 0,684 |
| 160                 | 0,815                 | 1,017                                      | 3,64  | 43,9                                     | 24,5                                       | 30,09                                 | 0,682 |
| 180                 | 0,779                 | 1,022                                      | 3,78  | 47,5                                     | 25,3                                       | 32,49                                 | 0,681 |
| 200                 | 0,746                 | 1,026                                      | 3,93  | 51,4                                     | 26,0                                       | 34,85                                 | 0,680 |
| 250                 | 0,674                 | 1,038                                      | 4,27  | 61,0                                     | 27,4                                       | 40,61                                 | 0,677 |
| 300                 | 0,615                 | 1,047                                      | 4,60  | 71,6                                     | 29,7                                       | 48,33                                 | 0,674 |
| 350                 | 0,566                 | 1,059                                      | 4,91  | 81,9                                     | 31,4                                       | 55,46                                 | 0,676 |
| 400                 | 0,524                 | 1,068                                      | 5,21  | 93,1                                     | 33,0                                       | 63,09                                 | 0,678 |
| 500                 | 0,456                 | 1,093                                      | 5,74  | 115,3                                    | 36,2                                       | 79,38                                 | 0,687 |
| 600                 | 0,404                 | 1,114                                      | 6,22  | 138,3                                    | 39,1                                       | 96,89                                 | 0,699 |
| 700                 | 0,362                 | 1,135                                      | 6,71  | 163,4                                    | 41,8                                       | 115,4                                 | 0,706 |
| 800                 | 0,329                 | 1,156                                      | 7,18  | 188,8                                    | 44,3                                       | 134,8                                 | 0,713 |
| 900                 | 0,301                 | 1,172                                      | 7,63  | 216,2                                    | 46,7                                       | 155,1                                 | 0,717 |
| 1000                | 0,277                 | 1,185                                      | 8,07  | 245,9                                    | 49,0                                       | 177,1                                 | 0,719 |
| 1100                | 0,257                 | 1,197                                      | 8,50  | 276,2                                    | 51,2                                       | 199,3                                 | 0,722 |
| 1200                | 0,239                 | 1,210                                      | 9,15  | 316,5                                    | 53,5                                       | 233,7                                 | 0,724 |



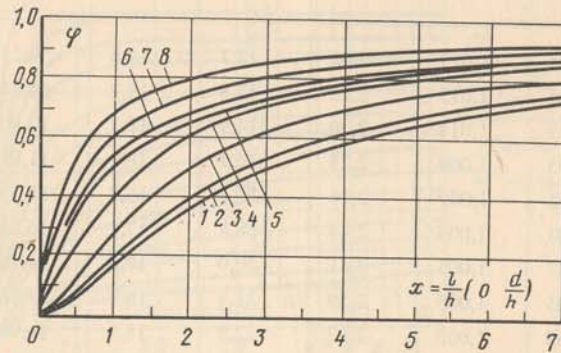


Fig. A-3. Valores del coeficiente angular  $\phi$  para el intercambio de calor por radiación entre figuras paralelas planas.

$l$  y  $d$  — lado y diámetro de la figura;  $h$  — distancia entre los planos; 1 — 4 — para el intercambio directo de calor por radiación entre las superficies; 5 — 8 — para el intercambio de calor por radiación entre las superficies, teniendo en cuenta la reflexión a partir de la envoltura calorífuga que las une; 1, 5 — discos; 2, 6 — cuadrados; 3, 7 — rectángulos con relación entre los lados 2:1; 4, 8 — rectángulos largos y estrechos

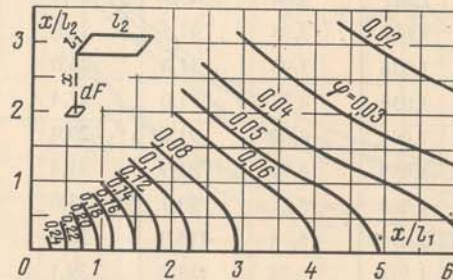


Fig. A-4. Valores del coeficiente angular  $\phi$  para el intercambio de calor por radiación entre un elemento  $dF$  y un rectángulo paralelo a través de uno de cuyos vértices pasa la normal hacia  $dF$ .

Tabla A-4

Propiedades físicas del agua en la línea de saturación

| $t, ^\circ\text{C}$ | $p \cdot 10^{-5}, \text{Pa}$ | $\rho, \text{kg/m}^3$ | $i, \text{kJ/kg}$ | $c_p, \text{kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C}$ | $W/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ | $\lambda, \text{W/}(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ | $a \cdot 10^6, \text{m}^2/\text{s}$ | $\mu \cdot 10^{-6}, \text{Pa} \cdot \text{s}$ | $\nu \cdot 10^6, \text{m}^2/\text{s}$ | $\beta \cdot 10^4, 1/\text{K}$ | $\delta \cdot 10^4, \text{N/m}$ | Pr |
|---------------------|------------------------------|-----------------------|-------------------|--|-------------------------------------|---|-------------------------------------|---|---------------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|----|
| 0                   | 1.013                        | 999.9                 | 0                 | 4.212                                    | 0.560                               | 13.2  | 1788                                | 1.789   | -0.63                                 | 756.4                          | 13.5                            |    |
| 10                  | 1.013                        | 999.7                 | 42.04             | 4.191                                    | 0.580                               | 13.8  | 1306                                | 1.306   | +0.70                                 | 741.6                          | 9.45                            |    |
| 20                  | 1.013                        | 998.2                 | 83.91             | 4.183                                    | 0.597                               | 14.3  | 1004                                | 1.006   | 1.82                                  | 726.9                          | 7.03                            |    |
| 30                  | 1.013                        | 995.7                 | 125.7             | 4.174                                    | 0.612                               | 14.7  | 801.5                               | 0.805   | 3.21                                  | 712.2                          | 5.45                            |    |
| 40                  | 1.013                        | 992.2                 | 167.5             | 4.174                                    | 0.627                               | 15.1  | 653.3                               | 0.659   | 3.87                                  | 696.5                          | 4.36                            |    |
| 50                  | 1.013                        | 988.1                 | 209.3             | 4.174                                    | 0.640                               | 15.5  | 549.4                               | 0.556   | 4.49                                  | 676.9                          | 3.59                            |    |
| 60                  | 1.013                        | 983.1                 | 251.1             | 4.179                                    | 0.650                               | 15.8  | 469.9                               | 0.478   | 5.11                                  | 662.2                          | 3.03                            |    |
| 70                  | 1.013                        | 977.8                 | 293.0             | 4.187                                    | 0.662                               | 16.1  | 406.1                               | 0.415   | 5.70                                  | 643.5                          | 2.58                            |    |
| 80                  | 1.013                        | 971.8                 | 335.0             | 4.195                                    | 0.669                               | 16.3  | 355.1                               | 0.365   | 6.32                                  | 625.9                          | 2.23                            |    |
| 90                  | 1.013                        | 965.3                 | 377.0             | 4.208                                    | 0.676                               | 16.5  | 314.9                               | 0.326   | 6.95                                  | 607.2                          | 1.97                            |    |
| 100                 | 1.013                        | 958.4                 | 419.1             | 4.220                                    | 0.684                               | 16.8  | 282.5                               | 0.295   | 7.52                                  | 588.6                          | 1.75                            |    |
| 110                 | 1.43                         | 951.0                 | 461.4             | 4.233                                    | 0.685                               | 17.0  | 259.0                               | 0.272   | 8.08                                  | 569.0                          | 1.60                            |    |
| 120                 | 1.98                         | 943.1                 | 503.7             | 4.250                                    | 0.686                               | 17.1  | 237.4                               | 0.252   | 8.64                                  | 548.4                          | 1.47                            |    |
| 130                 | 2.70                         | 934.8                 | 546.4             | 4.266                                    | 0.686                               | 17.2  | 217.8                               | 0.233   | 9.19                                  | 528.8                          | 1.35                            |    |
| 140                 | 3.61                         | 926.1                 | 589.1             | 4.287                                    | 0.685                               | 17.2  | 201.1                               | 0.217   | 9.72                                  | 507.2                          | 1.26                            |    |
| 150                 | 4.76                         | 917.0                 | 632.2             | 4.313                                    | 0.684                               | 17.3  | 186.4                               | 0.203   | 10.3                                  | 486.6                          | 1.17                            |    |
| 160                 | 6.18                         | 907.4                 | 675.4             | 4.346                                    | 0.681                               | 17.3  | 173.6                               | 0.191   | 10.7                                  | 466.0                          | 1.10                            |    |
| 170                 | 7.92                         | 897.3                 | 719.3             | 4.380                                    | 0.676                               | 17.2  | 162.8                               | 0.181   | 11.3                                  | 443.4                          | 1.05                            |    |
| 180                 | 10.03                        | 886.9                 | 763.3             | 4.417                                    | 0.672                               | 17.2  | 153.0                               | 0.173   | 11.9                                  | 422.8                          | 1.03                            |    |
| 190                 | 12.55                        | 876.0                 | 807.8             | 4.459                                    | 0.664                               | 17.2  | 144.2                               | 0.163   | 12.6                                  | 400.2                          | 0.965                           |    |
| 200                 | 15.55                        | 863.0                 | 852.5             | 4.505                                    | 0.658                               | 17.0  | 136.4                               | 0.158   | 13.3                                  | 376.7                          | 0.932                           |    |
| 210                 | 19.08                        | 852.8                 | 897.7             | 4.555                                    | 0.649                               | 16.7  | 130.5                               | 0.153   | 14.1                                  | 354.1                          | 0.915                           |    |
| 220                 | 23.20                        | 840.3                 | 943.7             | 4.614                                    | 0.640                               | 16.5  | 124.6                               | 0.148   | 14.8                                  | 331.6                          | 0.898                           |    |
| 230                 | 27.98                        | 827.3                 | 990.2             | 4.681                                    | 0.629                               | 16.3  | 119.7                               | 0.145   | 15.9                                  | 310.0                          | 0.888                           |    |
| 240                 | 33.48                        | 813.6                 | 1037.5            | 4.76                                     | 0.617                               | 16.0  | 114.8                               | 0.141   | 16.8                                  | 285.5                          | 0.883                           |    |
| 250                 | 39.78                        | 799.0                 | 1085.7            | 4.87                                     | 0.605                               | 15.5  | 109.0                               | 0.137   | 18.1                                  | 261.9                          | 0.884                           |    |
| 260                 | 46.94                        | 784.0                 | 1135.7            | 4.98                                     | 0.593                               | 15.2  | 105.9                               | 0.135   | 19.7                                  | 237.4                          | 0.892                           |    |
| 270                 | 55.05                        | 767.9                 | 1185.3            | 5.12                                     | 0.578                               | 14.7  | 102.0                               | 0.133   | 21.6                                  | 214.8                          | 0.905                           |    |
| 280                 | 64.19                        | 750.7                 | 1236.8            | 5.30                                     | 0.565                               | 14.3  | 98.1                                | 0.131   | 23.7                                  | 191.3                          | 0.917                           |    |
| 290                 | 74.45                        | 732.3                 | 1290.0            | 5.50                                     | 0.548                               | 13.7  | 94.2                                | 0.129   | 26.2                                  | 168.7                          | 0.944                           |    |
| 300                 | 85.92                        | 712.5                 | 1344.9            | 5.76                                     | 0.532                               | 13.0  | 91.2                                | 0.128   | 29.2                                  | 144.2                          | 0.986                           |    |
| 310                 | 98.70                        | 691.1                 | 1402.2            | 6.11                                     | 0.514                               | 12.2  | 88.3                                | 0.128   | 32.9                                  | 120.7                          | 1.05                            |    |
| 320                 | 112.90                       | 667.1                 | 1462.1            | 6.57                                     | 0.494                               | 11.3  | 85.3                                | 0.128   | 38.2                                  | 98.10                          | 1.14                            |    |
| 330                 | 128.65                       | 640.2                 | 1526.2            | 7.25                                     | 0.471                               | 10.2  | 81.4                                | 0.127   | 43.3                                  | 76.71                          | 1.25                            |    |
| 340                 | 146.08                       | 610.1                 | 1594.8            | 8.20                                     | 0.446                               | 8.95  | 77.5                                | 0.127   | 53.4                                  | 56.70                          | 1.42                            |    |
| 350                 | 165.37                       | 574.4                 | 1671.4            | 10.10                                    | 0.431                               | 7.90  | 72.6                                | 0.126   | 66.8                                  | 38.16                          | 1.70                            |    |
| 360                 | 186.74                       | 528.0                 | 1761.5            | 14.65                                    | 0.367                               | 4.2   | 66.7                                | 0.126   | 109                                   | 20.21                          | 2.66                            |    |
| 370                 | 210.53                       | 450.5                 | 1892.5            | 40.32                                    | 0.338                               | 1.85  | 56.9                                | 0.126   | 264                                   | 4.709                          | 6.80                            |    |



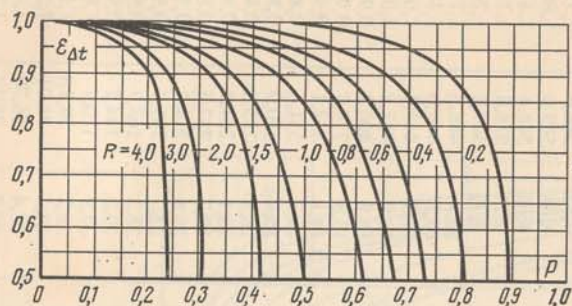


Fig. A-5. Corrección  $\varepsilon_{\Delta t} = f(P, R)$ .

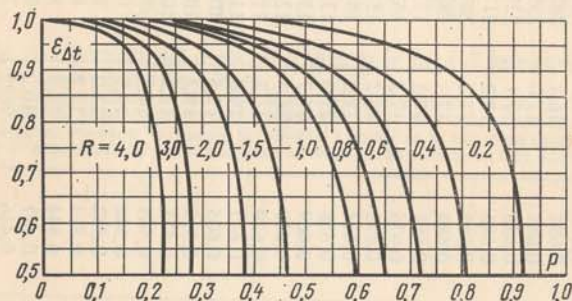
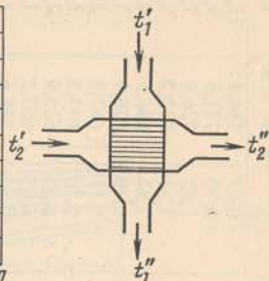


Fig. A-6. Corrección  $\varepsilon_{\Delta t} = f(P, R)$ .

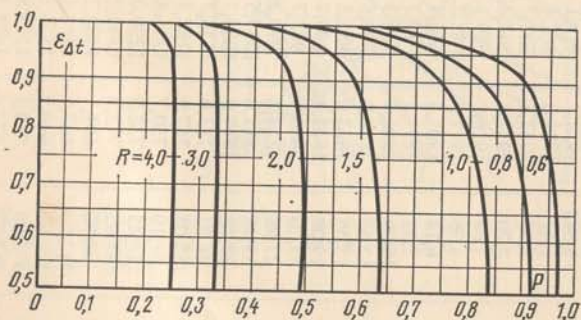
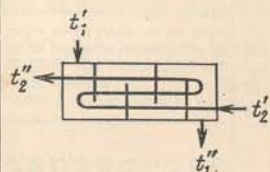


Fig. A-7. Corrección  $\varepsilon_{\Delta t} = f(P, R)$ .

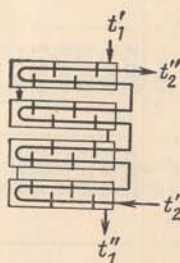


Tabla A-5

Propiedades físicas del vapor de agua en la línea de saturación

| $t, ^\circ\text{C}$ | $p \cdot 10^{-3}, \text{Pa}$ | $\rho', \text{kg/m}^3$ | $i'', \text{kJ/kg}$ | $r, \text{kJ/kg}$ | $c_{p'}$ , $\text{kJ/(kg} \cdot ^\circ\text{C)}$ | $\lambda \cdot 10^3, \text{W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$ | $a \cdot 10^6, \text{m}^2/\text{s}$ | $\mu \cdot 10^6, \text{Pa} \cdot \text{s}$ | $v \cdot 10^6, \text{m}^3/\text{s}$ | $\text{Pr}$ |
|---------------------|------------------------------|------------------------|---------------------|-------------------|--|---|-------------------------------------|--|-------------------------------------|-------------|
| 100                 | 1,013                        | 0,598                  | 2675,9              | 2256,8            | 2,135  | 2,372   | 18,58                               | 11,97                                      | 20,02                               | 1,08        |
| 110                 | 1,43                         | 0,826                  | 2691,4              | 2230,0            | 2,177  | 2,489   | 13,83                               | 12,46                                      | 15,07                               | 1,09        |
| 120                 | 1,98                         | 1,121                  | 2706,5              | 2202,8            | 2,206  | 2,593   | 10,50                               | 12,85                                      | 11,46                               | 1,11        |
| 130                 | 2,70                         | 1,496                  | 2720,7              | 2174,3            | 2,257  | 2,686   | 7,972                               | 13,24                                      | 8,85                                | 1,12        |
| 140                 | 3,61                         | 1,966                  | 2734,1              | 2145,0            | 2,315  | 2,791   | 6,130                               | 13,54                                      | 6,89                                | 1,16        |
| 150                 | 4,76                         | 2,547                  | 2746,7              | 2114,3            | 2,395  | 2,884   | 4,728                               | 13,93                                      | 5,47                                | 1,18        |
| 160                 | 6,18                         | 3,258                  | 2758,0              | 2082,6            | 2,479  | 3,012   | 3,722                               | 14,32                                      | 4,39                                | 1,21        |
| 170                 | 7,92                         | 4,122                  | 2768,9              | 2049,5            | 2,583  | 3,128   | 2,939                               | 14,72                                      | 3,57                                | 1,25        |
| 180                 | 10,03                        | 5,157                  | 2778,5              | 2015,2            | 2,709  | 3,268   | 2,339                               | 15,11                                      | 2,93                                | 1,30        |
| 190                 | 12,55                        | 6,397                  | 2786,4              | 1978,8            | 2,856  | 3,419   | 1,872                               | 15,60                                      | 2,44                                | 1,36        |
| 200                 | 15,55                        | 7,862                  | 2793,1              | 1940,7            | 3,023  | 3,547   | 1,492                               | 15,99                                      | 2,03                                | 1,41        |
| 210                 | 19,08                        | 9,588                  | 2798,2              | 1900,5            | 3,199  | 3,722   | 1,214                               | 16,38                                      | 1,71                                | 1,47        |
| 220                 | 23,20                        | 11,62                  | 2801,5              | 1857,8            | 3,408  | 3,896   | 0,983                               | 16,87                                      | 1,45                                | 1,54        |
| 230                 | 27,98                        | 13,99                  | 2803,2              | 1813,0            | 3,634  | 4,094   | 0,806                               | 17,36                                      | 1,24                                | 1,61        |
| 240                 | 33,48                        | 16,76                  | 2803,0              | 1766              | 3,881  | 4,290   | 0,658                               | 17,75                                      | 1,06                                | 1,68        |
| 250                 | 39,78                        | 19,98                  | 2801                | 1716              | 4,157  | 4,515   | 0,544                               | 18,24                                      | 0,913                               | 1,75        |
| 260                 | 46,94                        | 23,72                  | 2796                | 1661              | 4,467  | 4,800   | 0,453                               | 18,83                                      | 0,794                               | 1,82        |
| 270                 | 55,05                        | 28,09                  | 2797                | 1604              | 4,815  | 5,115   | 0,378                               | 19,32                                      | 0,688                               | 1,90        |
| 280                 | 64,19                        | 33,19                  | 2780                | 1543              | 5,234  | 5,490   | 0,317                               | 19,91                                      | 0,600                               | 2,01        |
| 290                 | 74,45                        | 39,15                  | 2766                | 1476              | 5,694  | 5,830   | 0,261                               | 20,59                                      | 0,526                               | 2,13        |
| 300                 | 85,92                        | 46,21                  | 2749                | 1404              | 6,280  | 6,270   | 0,216                               | 21,28                                      | 0,461                               | 2,29        |
| 310                 | 98,70                        | 54,58                  | 2727                | 1325              | 7,118  | 6,840   | 0,176                               | 21,97                                      | 0,403                               | 2,50        |
| 320                 | 112,90                       | 64,72                  | 2700                | 1238              | 8,206  | 7,510   | 0,141                               | 22,85                                      | 0,353                               | 2,86        |
| 330                 | 128,65                       | 77,10                  | 2666                | 1140              | 9,881  | 8,260   | 0,108                               | 23,93                                      | 0,310                               | 3,35        |
| 340                 | 146,08                       | 92,76                  | 2622                | 1027              | 12,35  | 9,300   | 0,0811                              | 25,20                                      | 0,272                               | 4,03        |
| 350                 | 165,37                       | 113,6                  | 2564                | 893               | 15,24  | 10,70   | 0,0581                              | 26,58                                      | 0,234                               | 5,23        |
| 360                 | 186,74                       | 144,0                  | 2481                | 719,7             | 23,03  | 12,790  | 0,0386                              | 29,13                                      | 0,202                               |             |
| 370                 | 210,53                       | 203,0                  | 2331                | 438,4             | 56,52  | 17,10   | 0,0150                              | 33,73                                      | 0,166                               |             |



Tabla A-6

Propiedades físicas de los gases con hollín ( $P_B = 760$  mm de columna de mercurio  $\approx 1,01 \cdot 10^5$  Pa;  $\bar{P}_{CO_2} = 0,13$ ;  $\bar{P}_{H_2O} = 0,11$ ;  $\bar{P}_{N_2} = 0,76$ )

| $t, ^\circ\text{C}$ | $\rho, \text{kg/m}^3$ | $c_p, \text{kJ/(kg} \cdot ^\circ\text{C)}$ | $\lambda \cdot 10^2, \text{W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$ | $\alpha \cdot 10^6, \text{m}^2/\text{s}$ | $\mu \cdot 10^6, \text{Pa} \cdot \text{s}$ | $\nu \cdot 10^6, \text{m}^2/\text{s}$ | Pr   |
|---------------------|-----------------------|--|---|--|--|---------------------------------------|------|
| 0                   | 1,295                 | 1,042                                      | 2,28  | 16,9                                     | 15,8                                       | 12,20                                 | 0,72 |
| 100                 | 0,950                 | 1,068                                      | 3,13  | 30,8                                     | 20,4                                       | 21,54                                 | 0,69 |
| 200                 | 0,748                 | 1,097                                      | 4,01  | 48,9                                     | 24,5                                       | 32,80                                 | 0,67 |
| 300                 | 0,617                 | 1,122                                      | 4,84  | 69,9                                     | 28,2                                       | 45,81                                 | 0,65 |
| 400                 | 0,525                 | 1,151                                      | 5,70  | 94,3                                     | 31,7                                       | 60,38                                 | 0,64 |
| 500                 | 0,457                 | 1,185                                      | 6,56  | 121,1                                    | 34,8                                       | 76,30                                 | 0,63 |
| 600                 | 0,405                 | 1,214                                      | 7,42  | 150,9                                    | 37,9                                       | 93,61                                 | 0,62 |
| 700                 | 0,363                 | 1,239                                      | 8,27  | 183,8                                    | 40,7                                       | 112,1                                 | 0,61 |
| 800                 | 0,330                 | 1,264                                      | 9,15  | 219,7                                    | 43,4                                       | 131,8                                 | 0,60 |
| 900                 | 0,301                 | 1,290                                      | 10,0  | 258,0                                    | 45,9                                       | 152,5                                 | 0,59 |
| 1000                | 0,275                 | 1,306                                      | 10,90   | 303,4                                    | 48,4                                       | 174,3                                 | 0,58 |
| 1100                | 0,257                 | 1,332                                      | 11,75   | 345,5                                    | 50,7                                       | 197,1                                 | 0,57 |
| 1200                | 0,240                 | 1,340                                      | 12,62   | 392,4                                    | 53,0                                       | 221,0                                 | 0,56 |

Tabla A-7

Propiedades físicas del aceite MK a diferentes temperaturas

| $t, ^\circ\text{C}$ | $\rho, \text{kg/m}^3$ | $c_p, \text{kJ/(kg} \cdot ^\circ\text{C)}$ | $\lambda, \text{W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$ | $\mu \cdot 10^4, \text{Pa} \cdot \text{s}$ | $\nu \cdot 10^6, \text{m}^2/\text{s}$ | $\alpha \cdot 10^6, \text{m}^2/\text{s}$ | $\beta \cdot 10^4, 1/\text{K}$ | Pr     |
|---------------------|-----------------------|--|--|--|---------------------------------------|--|--------------------------------|--------|
| 10                  | 911,0                 | 1,645                                      | 0,1510                                       | 35 414                                     | 3 883                                 | 9,94                                     | 8,56                           | 39 000 |
| 20                  | 903,0                 | 1,712                                      | 0,1485                                       | 18 560                                     | 1 514                                 | 9,58                                     | 8,64                           | 15 800 |
| 30                  | 894,5                 | 1,758                                      | 0,1461                                       | 6 180                                      | 691,2                                 | 9,28                                     | 8,71                           | 7 450  |
| 40                  | 887,5                 | 1,804                                      | 0,1437                                       | 3 031                                      | 342,0                                 | 8,97                                     | 8,79                           | 3 810  |
| 50                  | 879,0                 | 1,851                                      | 0,1413                                       | 1 638                                      | 186,2                                 | 8,69                                     | 8,86                           | 2 140  |
| 60                  | 871,5                 | 1,897                                      | 0,1389                                       | 961,4                                      | 110,6                                 | 8,39                                     | 8,95                           | 1 320  |
| 70                  | 864,0                 | 1,943                                      | 0,1363                                       | 603,3                                      | 69,3                                  | 8,14                                     | 9,03                           | 858    |
| 80                  | 856,0                 | 1,989                                      | 0,1340                                       | 399,3                                      | 46,6                                  | 7,89                                     | 9,12                           | 591    |
| 90                  | 848,2                 | 2,035                                      | 0,1314                                       | 273,7                                      | 32,3                                  | 7,61                                     | 9,20                           | 424    |
| 100                 | 840,7                 | 2,081                                      | 0,1290                                       | 202,1                                      | 24,0                                  | 7,33                                     | 9,28                           | 327    |
| 110                 | 838,0                 | 2,127                                      | 0,1264                                       | 145,2                                      | 17,4                                  | 7,11                                     | 9,37                           | 245    |
| 120                 | 825,0                 | 2,173                                      | 0,1240                                       | 110,4                                      | 13,4                                  | 6,92                                     | 9,46                           | 193,5  |
| 130                 | 817,0                 | 2,219                                      | 0,1214                                       | 87,31                                      | 10,7                                  | 6,69                                     | 9,54                           | 160,0  |
| 140                 | 809,2                 | 2,265                                      | 0,1188                                       | 70,34                                      | 8,70                                  | 6,53                                     | 9,65                           | 133,3  |
| 150                 | 801,6                 | 2,311                                      | 0,1168                                       | 56,90                                      | 7,10                                  | 6,25                                     | 9,73                           | 113,5  |

Tabla A-8

Temperatura de ebullición del agua en función de la presión

| $p \cdot 10^{-5}, \text{Pa}$ | $t_s, ^\circ\text{C}$ | $p \cdot 10^{-5}, \text{Pa}$ | $t_s, ^\circ\text{C}$ | $p \cdot 10^{-5}, \text{Pa}$ | $t_s, ^\circ\text{C}$ |
|------------------------------|-----------------------|------------------------------|-----------------------|------------------------------|-----------------------|
| 1                            | 99,64                 | 56                           | 271,10                | 140                          | 336,63                |
| 2                            | 120,23                | 58                           | 273,36                | 142                          | 337,75                |
| 3                            | 133,54                | 60                           | 275,56                | 144                          | 338,86                |
| 4                            | 143,62                | 62                           | 277,71                | 146                          | 339,96                |
| 5                            | 151,84                | 64                           | 279,80                | 148                          | 341,04                |
| 6                            | 158,84                | 66                           | 281,85                | 150                          | 342,11                |
| 7                            | 164,96                | 68                           | 283,85                | 152                          | 343,18                |
| 8                            | 170,42                | 70                           | 285,80                | 154                          | 344,23                |
| 9                            | 175,35                | 72                           | 287,71                | 156                          | 345,28                |
| 10                           | 179,88                | 74                           | 289,58                | 158                          | 346,30                |
| 11                           | 184,05                | 76                           | 291,41                | 160                          | 347,32                |
| 12                           | 187,95                | 78                           | 293,22                | 162                          | 348,33                |
| 13                           | 191,60                | 80                           | 294,98                | 164                          | 349,32                |
| 14                           | 195,04                | 82                           | 296,71                | 166                          | 350,31                |
| 15                           | 198,28                | 84                           | 298,40                | 168                          | 351,29                |
| 16                           | 201,36                | 86                           | 300,07                | 170                          | 352,26                |
| 17                           | 204,30                | 88                           | 301,71                | 172                          | 353,21                |
| 18                           | 207,10                | 90                           | 303,32                | 174                          | 354,17                |
| 19                           | 209,78                | 92                           | 304,90                | 176                          | 355,11                |
| 20                           | 212,37                | 94                           | 306,45                | 178                          | 356,04                |
| 21                           | 214,84                | 96                           | 307,98                | 180                          | 356,96                |
| 22                           | 217,24                | 98                           | 309,49                | 182                          | 357,87                |
| 23                           | 219,55                | 100                          | 310,96                | 184                          | 358,78                |
| 24                           | 221,77                | 102                          | 312,42                | 186                          | 359,67                |
| 25                           | 223,93                | 104                          | 313,86                | 188                          | 360,56                |
| 26                           | 226,03                | 106                          | 315,28                | 190                          | 361,44                |
| 27                           | 228,06                | 108                          | 316,67                | 192                          | 362,31                |
| 28                           | 230,04                | 110                          | 318,04                | 194                          | 363,17                |
| 29                           | 231,96                | 112                          | 319,39                | 196                          | 364,02                |
| 30                           | 233,83                | 114                          | 320,73                | 198                          | 364,87                |
| 32                           | 237,44                | 116                          | 322,05                | 200                          | 365,71                |
| 34                           | 240,88                | 118                          | 323,35                | 202                          | 366,54                |
| 36                           | 244,16                | 120                          | 324,63                | 204                          | 367,37                |
| 38                           | 247,31                | 122                          | 325,90                | 206                          | 368,18                |
| 40                           | 250,33                | 124                          | 327,15                | 208                          | 368,99                |
| 42                           | 253,24                | 126                          | 328,39                | 210                          | 369,79                |
| 44                           | 256,05                | 128                          | 329,61                | 212                          | 370,58                |
| 46                           | 258,75                | 130                          | 330,81                | 214                          | 371,4                 |
| 48                           | 261,37                | 132                          | 332,00                | 216                          | 372,2                 |
| 50                           | 263,91                | 134                          | 333,18                | 218                          | 372,9                 |
| 52                           | 266,38                | 136                          | 333,34                | 220                          | 373,7                 |
| 54                           | 268,77                | 138                          | 335,49                | Estado crítico               |                       |
|                              |                       |                              |                       | 221,29                       | 374,15                |

Tabla A-9

Temperatura de ebullición  $t_s, ^\circ\text{C}$  del agua en función de la presión barométrica  $P_B$  en mm Hg

| $P_B$ | $t_s, ^\circ\text{C}$ | $P_B$ | $t_s, ^\circ\text{C}$ | $P_B$ | $t_s, ^\circ\text{C}$ |
|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|
| 690   | 97,311                | 730   | 98,874                | 770   | 100,367               |
| 700   | 97,709                | 740   | 99,254                | 780   | 100,729               |
| 710   | 98,102                | 750   | 99,629                | 790   | 101,086               |
| 720   | 98,490                | 760   | 100,000               | 800   | 101,432               |



Tabla A-10

Propiedades físicas de los metales fundidos

| Denominación del metal  | $t, ^\circ\text{C}$ | $\rho, \text{kg/m}^3$ | $\lambda, \text{W/(m} \cdot ^\circ\text{C)}$ | $c_p, \text{J/(kg} \cdot ^\circ\text{C)}$ | $\alpha \cdot 10^6, \text{m}^2/\text{s}$ | $\nu \cdot 10^8, \text{m}^2/\text{s}$ | $\text{Pr} \cdot 10^2$ |
|---|---------------------|-----------------------|--|---|--|---------------------------------------|------------------------|
| 1   | 2                   | 3                     | 4  | 5   | 6  | 7                                     | 8                      |
| Mercurio — Hg<br>$t_{\text{fus}} = 38,9^\circ\text{C}$<br>$t_s = 357^\circ\text{C}$ | 0                   | 13 590                | 7,80   | 140,0                                     | 4,12                                     | 12,4                                  | 3,02                   |
|   | 100                 | 13 350                | 9,08   | 137,0                                     | 4,97                                     | 9,4                                   | 1,89                   |
|   | 200                 | 13 310                | 10,35  | 137,0                                     | 5,68                                     | 8,0                                   | 1,39                   |
|   | 300                 | 12 880                | 11,63  | 137,0                                     | 6,60                                     | 7,1                                   | 1,08                   |
|   | 400                 | 12 700                | 12,62  | 137,5                                     | 7,22                                     | 6,6                                   | 0,91                   |
|   | 500                 | 12 480                | 13,35  | 138,0                                     | 7,75                                     | 6,2                                   | 0,80                   |
| Estaño — Sn<br>$t_{\text{fus}} = 231,9^\circ\text{C}$<br>$t_s = 2270^\circ\text{C}$ | 240                 | 6 585                 | 30,50  | 255,0                                     | 17,10                                    | 27,3                                  | 1,60                   |
|   | 300                 | 6 940                 | 31,60  | 255,0                                     | 17,85                                    | 24,1                                  | 1,35                   |
|   | 400                 | 6 865                 | 33,60  | 255,0                                     | 19,20                                    | 20,1                                  | 1,05                   |
|   | 500                 | 6 790                 | 35,50  | 255,0                                     | 20,5                                     | 17,4                                  | 0,85                   |
|   | 600                 | 6 720                 | 37,40  | 255,0                                     | 21,80                                    | 15,6                                  | 0,72                   |
|   | 700                 | 6 640                 | 39,40  | 255,0                                     | 23,2                                     | 14,3                                  | 0,62                   |
| Bismuto — Bi<br>$t_{\text{fus}} = 271^\circ\text{C}$<br>$t_s = 1477^\circ\text{C}$  | 280                 | 10 050                | 14,55  | 151,0                                     | 9,20                                     | 18,0                                  | 1,88                   |
|   | 300                 | 10 030                | 14,65  | 151,0                                     | 9,66                                     | 17,1                                  | 1,77                   |
|   | 400                 | 9 910                 | 15,60  | 151,0                                     | 10,40                                    | 14,2                                  | 1,36                   |
|   | 500                 | 9 785                 | 16,52  | 151,0                                     | 11,20                                    | 12,2                                  | 1,09                   |
|   | 600                 | 9 660                 | 17,32  | 151,0                                     | 11,90                                    | 10,8                                  | 0,91                   |
|   | 700                 | 9 530                 | 18,28  | 151,0                                     | 12,70                                    | 9,8                                   | 0,77                   |
| Plomo — Pb<br>$t_{\text{fus}} = 327,4^\circ\text{C}$<br>$t_s = 1740^\circ\text{C}$  | 400                 | 10 592                | 15,12  | 148,0                                     | 9,65                                     | 21,0                                  | 2,18                   |
|   | 500                 | 10 476                | 15,45  | 148,0                                     | 10,00                                    | 17,5                                  | 1,75                   |
|   | 600                 | 10 360                | 15,95  | 148,0                                     | 10,40                                    | 15,3                                  | 1,47                   |
|   | 700                 | 10 242                | 17,70  | 148,0                                     | 11,70                                    | 13,7                                  | 1,17                   |
|   | 800                 | 10 125                | 19,80  | 148,0                                     | 13,20                                    | 12,5                                  | 0,95                   |

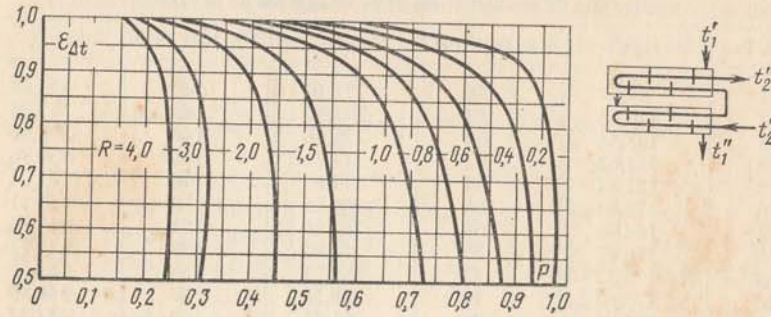


Fig. A-8. Corrección  $\varepsilon_{\Delta t} = f(P, R)$ .

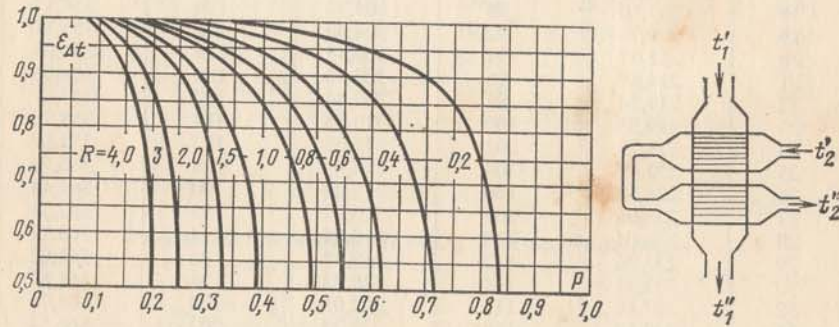


Fig. A-9. Corrección  $\varepsilon_{\Delta t} = f(P, R)$ .

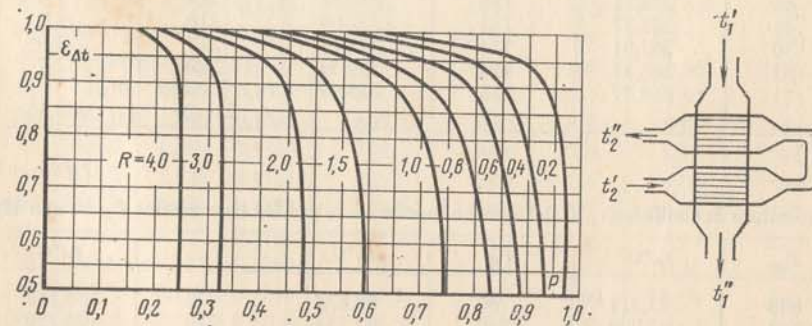


Fig. A-10. Corrección  $\varepsilon_{\Delta t} = f(P, R)$ .



Continuación de la tabla A-10

| 1   | 2   | 3      | 4     | 5     | 6     | 7     | 8    |
|---|-----|--------|-------|-------|-------|-------|------|
| Aleación:<br>55,5% de Bi + 44,5% de Pb<br>$t_{fus} = 123,5^{\circ}\text{C}$<br>$t_s = 1670^{\circ}\text{C}$ | 130 | 10 570 | 10,95 | 147,0 | 7,05  | 31,4  | 4,50 |
|   | 200 | 10 486 | 11,75 | 147,0 | 7,62  | 24,3  | 3,19 |
|   | 300 | 10 364 | 12,70 | 147,0 | 8,34  | 18,7  | 2,24 |
|   | 400 | 10 242 | 13,72 | 147,0 | 9,10  | 15,7  | 1,73 |
|   | 500 | 10 120 | 14,65 | 147,0 | 9,83  | 13,6  | 1,39 |
|   | 600 | 10 000 | 15,82 | 147,0 | 10,80 | 12,4  | 1,15 |
|   | 700 | 9 876  | 16,75 | 147,0 | 11,30 | 11,4  | 1,01 |
| Litio - Li<br>$t_{fus} = 179^{\circ}\text{C}$<br>$t_s = 1317^{\circ}\text{C}$                               | 200 | 515    | 46,10 | 415,0 | 21,6  | 111,0 | 5,14 |
|   | 300 | 505    | 46,70 | 424,0 | 21,8  | 92,7  | 4,25 |
|   | 400 | 495    | 47,20 | 434,0 | 22,0  | 81,7  | 3,72 |
|   | 600 | 474    | 48,00 | 451,0 | 22,4  | 66,8  | 2,98 |
|   | 700 | 465    | 48,60 | 460,0 | 22,7  | 61,7  | 2,72 |
| Sodio - Na<br>$t_{fus} = 97,8^{\circ}\text{C}$<br>$t_s = 883^{\circ}\text{C}$                               | 100 | 928    | 86,1  | 1385  | 67,0  | 77,0  | 1,15 |
|   | 200 | 903    | 81,6  | 1325  | 68,2  | 50,6  | 0,74 |
|   | 300 | 878    | 75,5  | 1280  | 67,2  | 39,4  | 0,59 |
|   | 400 | 854    | 68,8  | 1270  | 63,5  | 33,0  | 0,52 |
|   | 500 | 829    | 63,9  | 1270  | 60,3  | 28,9  | 0,48 |
|   | 600 | 805    | 60,6  | 1275  | 58,5  | 25,7  | 0,44 |
|   | 700 | 780    | 59,1  | 1275  | 59,4  | 23,2  | 0,39 |
| Potasio - K<br>$t_{fus} = 63,7^{\circ}\text{C}$<br>$t_s = 760^{\circ}\text{C}$                              | 100 | 818    | 46,5  | 817   | 69,5  | 56,1  | 0,81 |
|   | 200 | 795    | 46,0  | 792   | 73,0  | 42,8  | 0,59 |
|   | 300 | 773    | 43,11 | 775   | 72,5  | 35,2  | 0,49 |
|   | 400 | 750    | 39,6  | 766   | 69,0  | 29,8  | 0,43 |
|   | 500 | 727    | 34,9  | 766   | 62,5  | 25,7  | 0,41 |
|   | 600 | 704    | 31,0  | 770   | 57,3  | 22,1  | 0,39 |
|   | 700 | 681    | 28,3  | 775   | 53,6  | 20,5  | 0,38 |
| Aleación:<br>25% de Na + 75% de K<br>$t_{fus} = -11^{\circ}\text{C}$<br>$t_s = 784^{\circ}\text{C}$         | 20  | 872    | 22,1  | 1300  | 19,5  | 93,0  | 4,76 |
|   | 100 | 852    | 23,3  | 1145  | 23,8  | 60,7  | 2,55 |
|   | 200 | 828    | 24,6  | 1073  | 27,2  | 45,2  | 1,63 |
|   | 300 | 803    | 25,8  | 1040  | 30,8  | 36,6  | 1,19 |
|   | 400 | 778    | 27,1  | 1007  | 34,6  | 30,8  | 0,89 |
|   | 500 | 753    | 28,4  | 969   | 39,6  | 26,7  | 0,68 |
|   | 600 | 729    | 29,7  | 935   | 43,6  | 23,7  | 0,54 |
|   | 700 | 704    | 31,0  | 900   | 48,9  | 21,4  | 0,44 |

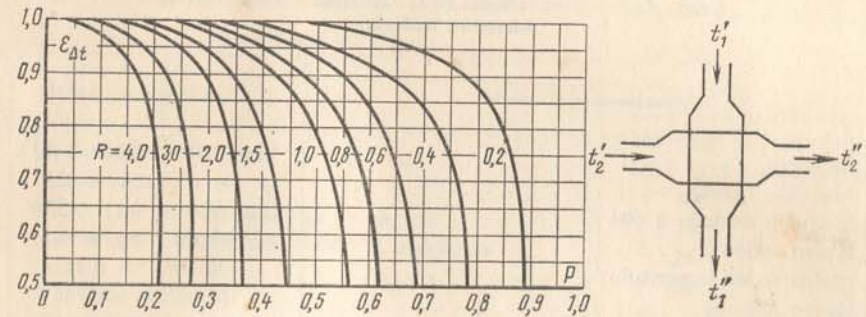


Fig. A-11. Corrección  $\epsilon_{\Delta t} = f(P, R)$ .

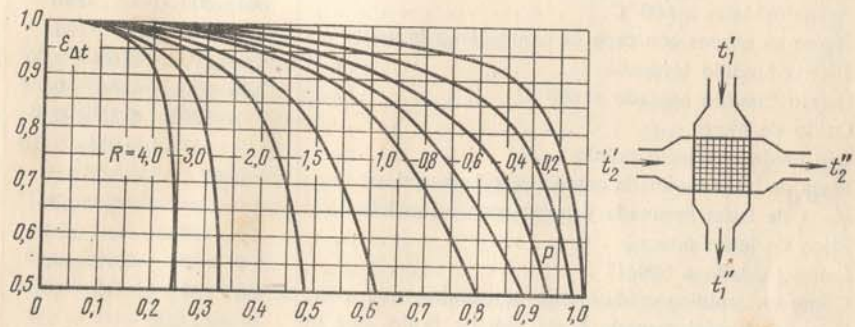


Fig. A-12. Corrección  $\epsilon_{\Delta t} = f(P, R)$ .

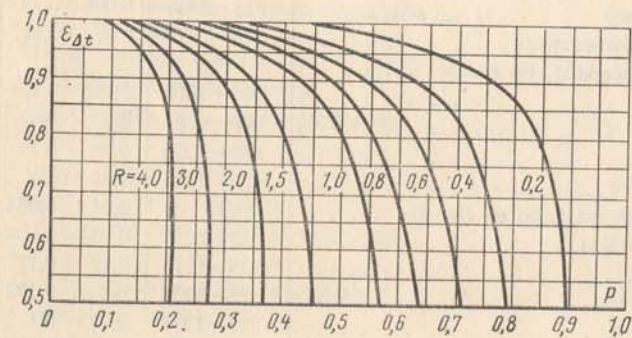


Fig. A-13. Corrección  $\epsilon_{\Delta t} = f(P, R)$ .



Grado de radiación integral en la radiación normal total de diferentes materiales

Tabla A-11

| Denominación del material   | $t, ^\circ\text{C}$ | $\epsilon$  |
|---|---------------------|-------------|
| Aluminio . . . . .  | 225—575             | 0,039—0,057 |
| Aluminio rugoso . . . . .   | 26                  | 0,055       |
| Aluminio oxidado a 600 °C . . . . .   | 200—600             | 0,11 —0,19  |
| Hierro pulido . . . . .   | 425—1020            | 0,144—0,377 |
| Hierro recién esmerilado . . . . .  | 20                  | 0,242       |
| Hierro oxidado . . . . .  | 100                 | 0,736       |
| Hierro oxidado liso . . . . .   | 125—525             | 0,78—0,82   |
| Hierro colado no desbastado . . . . .                                       | 925—1115            | 0,87—0,95   |
| Acero colado pulido . . . . .   | 770—1040            | 0,52—0,56   |
| Acero en chapas rectificadas . . . . .                                      | 940—1100            | 0,55—0,61   |
| Acero oxidado a 600 °C . . . . .  | 200—600             | 0,80        |
| Acero en chapas con capa de óxido densa brillante . . . . .                 | 25                  | 0,82        |
| Hierro fundido torneado . . . . .   | 830—990             | 0,60 —0,70  |
| Hierro fundido oxidado a 600 °C . . . . .                                   | 200—600             | 0,64 —0,78  |
| Oxido de hierro . . . . .   | 500—1200            | 0,85 —0,95  |
| Oro cuidadosamente pulido . . . . .   | 225—635             | 0,018—0,035 |
| Placa de latón laminada con superficie natural . . . . .                    | 22                  | 0,06        |
| Placa de latón laminada y pulida con esmeril basto . . . . .                | 22                  | 0,20        |
| Placa de latón opaca . . . . .  | 50—350              | 0,22        |
| Latón oxidado a 600 °C . . . . .  | 200—600             | 0,61 —0,59  |
| Cobre electrolítico cuidadosamente pulido . . . . .                         | 80—115              | 0,018—0,023 |
| Cobre comercial raspado hasta obtener brillo, que no es especular . . . . . | 22                  | 0,072       |
| Cobre oxidado a 600 °C . . . . .  | 200—600             | 0,57 —0,87  |
| Oxido de cobre . . . . .  | 800—1100            | 0,66 —0,54  |
| Cobre fundido . . . . .   | 1075—1275           | 0,16 —0,13  |
| Filamento de molibdeno . . . . .  | 725—2600            | 0,096—0,292 |
| Níquel puro pulido técnicamente . . . . .                                   | 225—375             | 0,07 —0,087 |
| Hierro niquelado y decapado, no pulido . . . . .                            | 20                  | 0,11        |
| Alambre de níquel . . . . .   | 185—1000            | 0,096—0,186 |
| Níquel oxidado a 600 °C . . . . .   | 200—600             | 0,37 —0,48  |
| Oxido de níquel . . . . .   | 650—1255            | 0,59 —0,86  |
| Cromoníquel . . . . .   | 125—1034            | 0,64—0,76   |
| Estaño brillante, hierro estañado en chapas . . . . .                       | 25                  | 0,043—0,064 |
| Platino puro, placa pulida . . . . .  | 225—625             | 0,054—0,104 |
| Cinta de platino . . . . .  | 925—1115            | 0,12 —0,17  |
| Filamento de platino . . . . .  | 25—1230             | 0,036—0,192 |
| Alambre de platino . . . . .  | 225—1375            | 0,073—0,182 |
| Mercurio muy puro . . . . .   | 0—100               | 0,09 —0,12  |
| Plomo gris, oxidado . . . . .   | 25                  | 0,281       |
| Plomo oxidado a 200 °C . . . . .  | 200                 | 0,63        |

Continuación de la tabla A-11

| Denominación del material  | $t, ^\circ\text{C}$ | $\epsilon$    |
|--|---------------------|---------------|
| Plata pura pulida . . . . .  | 225—625             | 0,0198—0,0324 |
| Cromo . . . . .  | 100—1000            | 0,08 —0,26    |
| Cinc (al 99,1%) pulido . . . . .   | 225—325             | 0,045—0,053   |
| Cinc oxidado a 400 °C . . . . .  | 400                 | 0,11          |
| Hierro galvanizado brillante en chapas . . . . .                             | 28                  | 0,228         |
| Hierro galvanizado, gris, oxidado, en chapas . . . . .                       | 24                  | 0,276         |
| Cartón de asbesto . . . . .  | 24                  | 0,96          |
| Papel de amianto . . . . .   | 40—370              | 0,93 —0,945   |
| Papel fino pegado sobre una lámina de metal . . . . .                        | 19                  | 0,924         |
| Agua . . . . .   | 0—100               | 0,95 —0,963   |
| Yeso . . . . .   | 20                  | 0,903         |
| Roble cepillado . . . . .  | 20                  | 0,895         |
| Cuarzo fundido rugoso . . . . .  | 20                  | 0,932         |
| Ladrillo rojo áspero, pero sin rugosidades grandes . . . . .                 | 20                  | 0,93          |
| Ladrillo Digas rugoso, no vidriado . . . . .                                 | 100                 | 0,80          |
| Ladrillo Dinas rugoso, vidriado . . . . .                                    | 1100                | 0,85          |
| Ladrillo de chamota, vidriado . . . . .                                      | 1100                | 0,75          |
| Ladrillo refractario . . . . .   | —                   | 0,8 —0,9      |
| Laca blanca de esmaltar sobre una lámina rugosa de hierro . . . . .          | 23                  | 0,906         |
| Laca negra brillante pulverizada sobre una placa de hierro . . . . .         | 25                  | 0,875         |
| Laca negra mate . . . . .  | 40—95               | 0,96 —0,98    |
| Laca blanca . . . . .  | 40—95               | 0,80 —0,95    |
| Goma laca negra, brillante sobre hierro estañado . . . . .                   | 21                  | 0,821         |
| Goma laca negra mate . . . . .   | 75—145              | 0,91          |
| Pinturas al aceite de colores diferentes . . . . .                           | 100                 | 0,92 —0,96    |
| Pinturas de aluminio de vejez diferente y contenido variable de Al . . . . . | 100                 | 0,27 —0,67    |
| Laca de aluminio sobre una placa rugosa . . . . .                            | 20                  | 0,39          |
| Pintura de aluminio después de haberla calentado hasta 325 °C . . . . .      | 150—315             | 0,35          |
| Mármol grisáceo, pulido . . . . .  | 22                  | 0,931         |
| Placa dura de goma lustrada . . . . .  | 23                  | 0,945         |
| Goma blanda, gris, rugosa (refinada) . . . . .                               | 24                  | 0,859         |
| Vidrio liso . . . . .  | 22                  | 0,937         |
| Negro, hollín de vela . . . . .  | 95—270              | 0,952         |
| Negro con vidrio líquido . . . . .   | 100—185             | 0,959—0,947   |
| Negro de lámpara de 0,075 mm y más . . . . .                                 | 40—370              | 0,945         |
| Cartón alquitranado . . . . .  | 21                  | 0,910         |
| Carbón depurado (0,9% de ceniza) . . . . .                                   | 125—625             | 0,81 —0,79    |
| Filamento de carbón . . . . .  | 1040—1405           | 0,526         |
| Porcelana vidriada . . . . .   | 22                  | 0,924         |
| Estucado rugoso de mortero de cal . . . . .                                  | 10—88               | 0,91          |
| Esmalte blanco soldado al hierro . . . . .                                   | 19                  | 0,897         |



$$\text{Valores de } \theta = \frac{(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4}{T_1 - T_2}$$

| $t_1, ^\circ\text{C}$ | $t_2, ^\circ\text{C}$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |       |
|-----------------------|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|
|                       | 0                     | 100   | 200   | 300   | 400   | 500   | 600   | 700   | 800   | 900   | 1000  | 1200  | 1400  | 1600 | 1800  |
| 0                     | 0,814                 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |       |
| 100                   | 1,380                 | 2,076 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |       |
| 200                   | 2,225                 | 3,070 | 4,233 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |       |
| 300                   | 3,408                 | 4,422 | 5,77  | 7,53  |       |       |       |       |       |       |       |       |       |      |       |
| 400                   | 4,99                  | 6,19  | 7,75  | 9,73  | 12,19 |       |       |       |       |       |       |       |       |      |       |
| 500                   | 7,03                  | 8,44  | 10,23 | 12,46 | 15,19 | 18,48 |       |       |       |       |       |       |       |      |       |
| 600                   | 6,59                  | 11,30 | 13,27 | 15,77 | 18,79 | 22,38 | 26,61 |       |       |       |       |       |       |      |       |
| 700                   | 12,72                 | 14,62 | 16,92 | 19,71 | 23,04 | 26,96 | 31,55 | 38,84 |       |       |       |       |       |      |       |
| 800                   | 16,50                 | 18,66 | 21,26 | 24,36 | 28,01 | 32,29 | 37,29 | 42,93 | 49,5  |       |       |       |       |      |       |
| 900                   | 20,97                 | 23,42 | 23,33 | 29,76 | 33,76 | 38,41 | 43,75 | 49,85 | 56,8  | 64,6  |       |       |       |      |       |
| 1000                  | 26,21                 | 28,96 | 32,20 | 35,98 | 40,35 | 45,38 | 51,10 | 57,6  | 65,0  | 73,3  | 82,6  |       |       |      |       |
| 1200                  | 39,18                 | 42,60 | 46,58 | 51,2  | 56,3  | 62,2  | 68,8  | 76,3  | 84,6  | 93,9  | 140,1 | 127,8 |       |      |       |
| 1400                  | 56,0                  | 60,9  | 64,9  | 70,3  | 76,3  | 83,1  | 90,7  | 99,1  | 108,5 | 119,0 | 130,2 | 156,3 | 187,2 |      |       |
| 1600                  | 76,9                  | 81,9  | 97,5  | 93,8  | 100,9 | 108,6 | 117,3 | 126,8 | 137,3 | 148,9 | 161,3 | 190,0 | 223,6 | 213  |       |
| 1800                  | 102,5                 | 108,6 | 115,1 | 122,4 | 130,4 | 139,4 | 149,0 | 159,7 | 171,4 | 184,0 | 198,0 | 229,0 | 276,0 | 308  | 356,0 |

### Valores de las funciones exponenciales e hiperbólicas

| $x$ | $e^{+x}$ | $e^{-x}$ | $\operatorname{sh} x$ | $\operatorname{ch} x$ | $\operatorname{th} x$ |
|-----|----------|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 0,0 | 1,00     | 1,00     | 0,000                 | 1,100                 | 0,000                 |
| 0,1 | 1,11     | 0,90     | 0,100                 | 1,005                 | 0,100                 |
| 0,2 | 1,22     | 0,82     | 0,201                 | 1,020                 | 0,197                 |
| 0,3 | 1,34     | 0,74     | 0,305                 | 1,045                 | 0,291                 |
| 0,4 | 1,49     | 0,67     | 0,411                 | 1,081                 | 0,380                 |
| 0,5 | 1,64     | 0,61     | 0,521                 | 1,128                 | 0,462                 |
| 0,6 | 1,82     | 0,55     | 0,637                 | 1,186                 | 0,537                 |
| 0,7 | 2,00     | 0,50     | 0,759                 | 1,255                 | 0,604                 |
| 0,8 | 2,22     | 0,45     | 0,888                 | 1,337                 | 0,664                 |
| 0,9 | 2,46     | 0,41     | 1,027                 | 1,433                 | 0,716                 |
| 1,0 | 2,72     | 0,37     | 1,175                 | 1,543                 | 0,762                 |
| 1,1 | 3,00     | 0,33     | 1,336                 | 1,668                 | 0,801                 |
| 1,2 | 3,32     | 0,30     | 1,510                 | 1,811                 | 0,834                 |
| 1,3 | 3,70     | 0,27     | 1,698                 | 1,971                 | 0,862                 |
| 1,4 | 4,06     | 0,25     | 1,904                 | 2,151                 | 0,885                 |
| 1,5 | 4,50     | 0,22     | 2,129                 | 2,352                 | 0,905                 |
| 1,6 | 4,95     | 0,20     | 2,376                 | 2,577                 | 0,922                 |
| 1,7 | 5,55     | 0,18     | 2,646                 | 2,828                 | 0,935                 |
| 1,8 | 6,05     | 0,17     | 2,942                 | 3,108                 | 0,947                 |
| 1,9 | 6,63     | 0,15     | 3,268                 | 3,418                 | 0,956                 |
| 2,0 | 7,39     | 0,14     | 3,627                 | 3,762                 | 0,964                 |
| 2,1 | 8,12     | 0,12     | 4,022                 | 4,144                 | 0,971                 |
| 2,2 | 9,03     | 0,11     | 4,457                 | 4,568                 | 0,976                 |
| 2,3 | 9,98     | 0,10     | 4,937                 | 5,037                 | 0,980                 |
| 2,4 | 11,0     | 0,091    | 5,466                 | 5,557                 | 0,984                 |
| 2,5 | 12,3     | 0,083    | 6,050                 | 6,132                 | 0,987                 |
| 2,6 | 13,5     | 0,074    | 6,695                 | 6,769                 | 0,989                 |
| 2,7 | 14,8     | 0,067    | 7,406                 | 7,474                 | 0,991                 |
| 2,8 | 16,4     | 0,061    | 8,192                 | 8,253                 | 0,993                 |
| 2,9 | 18,2     | 0,055    | 9,060                 | 9,115                 | 0,994                 |
| 3,0 | 20,1     | 0,050    | 10,018                | 10,068                | 0,995                 |

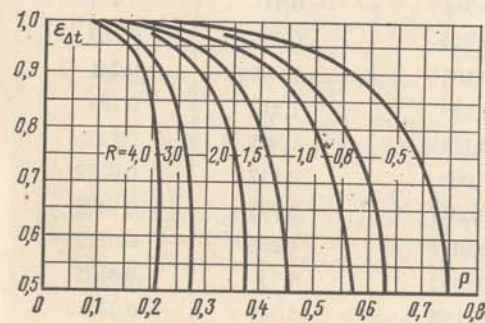


Fig. A-14. Corrección  $\varepsilon_{At} = f(P, R)$ .





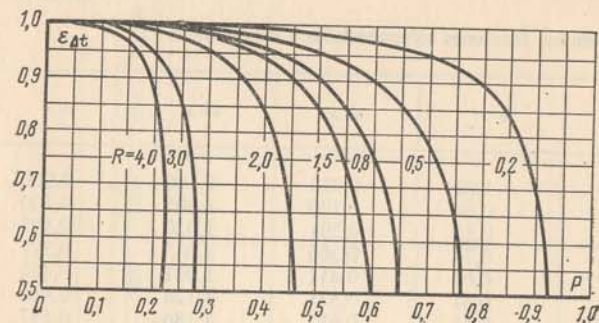


Fig. A-15. Corrección  $\varepsilon_{At} = f(P, R)$ .

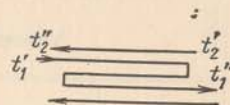


Tabla A-14

Funciones modificadas de Bessel del primer género de órdenes cero y uno [ $I_0(x)$  e  $I_1(x)$ ] y del segundo género de órdenes cero y uno [ $K_0(x)$  y  $K_1(x)$ ]

| $x$ | $I_0(x)$ | $K_0(x)$ | $I_1(x)$ | $K_1(x)$ |
|-----|----------|----------|----------|----------|
| 0,0 | 1,000    | $\infty$ | 0        | $\infty$ |
| 0,1 | 1,003    | 2,447    | 0,050    | 9,854    |
| 0,2 | 1,010    | 1,753    | 0,101    | 4,776    |
| 0,3 | 1,023    | 1,373    | 0,152    | 3,056    |
| 0,4 | 1,040    | 1,115    | 0,204    | 2,184    |
| 0,5 | 1,064    | 1,924    | 0,258    | 1,656    |
| 0,6 | 1,092    | 0,775    | 0,314    | 1,303    |
| 0,7 | 1,126    | 0,661    | 0,372    | 1,050    |
| 0,8 | 1,166    | 0,565    | 0,433    | 0,862    |
| 0,9 | 1,213    | 0,487    | 0,497    | 0,717    |
| 1,0 | 1,266    | 0,421    | 0,565    | 0,602    |
| 1,2 | 1,394    | 0,318    | 0,715    | 0,435    |
| 1,4 | 1,553    | 0,244    | 0,886    | 0,320    |
| 1,6 | 1,750    | 0,188    | 1,085    | 0,241    |
| 1,8 | 1,989    | 0,159    | 1,317    | 0,183    |
| 2,0 | 2,279    | 0,114    | 1,591    | 0,140    |
| 2,5 | 3,289    | 0,062    | 2,517    | 0,0739   |
| 3,0 | 4,881    | 0,0347   | 3,395    | 0,0402   |
| 3,5 | 7,378    | 0,0196   | 6,206    | 0,0222   |
| 4,0 | 11,302   | 0,0112   | 9,759    | 0,0125   |
| 4,5 | 17,481   | 0,0064   | 15,389   | 0,00708  |
| 5,0 | 27,240   | 0,0037   | 24,336   | 0,00404  |

## BIBLIOGRAFÍA

1. Аладьев И. Т. Теплоотдача при пузырьковом кипении. — В кн.: Конвективный и лучистый теплообмен. М., Изд-во АН СССР, 1960, с. 233—255. (Aládiev I. T. Emisión calorífica durante la ebullición con formación de burbujas. — En el libro "Intercambio de calor por convección y por radiación". Moscú, Editorial de la Academia de ciencias de la URSS, 1960, págs. 233—255, en ruso).
2. Аладьев И. Т., Додонов Л. Д., Удалов В. С. Теплоотдача при кипении недогретой воды в трубах. — В кн.: Исследование теплоотдачи к пару и воде, кипящей в трубах при высоких давлениях. М., Госатомиздат, 1958, с. 9—23. (Aládiev I. T., Dodónov L. D., Udalov V. S. Emisión calorífica durante la ebullición del agua calentada de modo incompleto en los tubos. — En el libro "Investigación de la emisión calorífica hacia el vapor y el agua que hierve en los tubos bajo altas presiones". Moscú, Ed. estat. "Gosatomizdat", 1958, págs. 9—23, en ruso.)
3. Аладьев И. Т., Яшнов В. И. Влияние смачиваемости на кризис кипения. — В кн.: Конвективная теплопередача в двухфазном и однофазном потоках. М., «Энергия», 1964, с. 249—278. (Aládiev I. T., Yashnov V. I. Influencia de la humectación sobre la crisis de ebullición. — En el libro "Termotransferencia por convección en los flujos bifásico y monofásico", Moscú, Ed. "Energía", 1964, págs. 249—278, en ruso.)
4. Алексеев Г. В., Зенкевич Б. А., Субботин В. И. Исследование теплоотдачи при пузырьковом кипении воды в трубах. — «Теплоэнергетика», 1962, № 4, с. 74—77. (Alexéev G. V., Zenkevich B. A., Subbotin V. I. Investigación de la emisión calorífica durante la ebullición con formación de burbujas en los tubos. — Revista "Teploenerguetika", 1962, № 4, págs. 74—77, en ruso.)
5. Арефьева Е. И., Аладьев И. Т. О влиянии смачиваемости на теплообмен при кипении. — ИФЖ, 1958, т. 1, № 7, с. 11—17. (Aréfiyeva E. I., Aládiev I. T. Acerca de la influencia de la influencia de humectación sobre el intercambio de calor durante la ebullición. — Revista de ingeniería física, 1958, t. 1, № 7, págs. 11—17, en ruso.)
6. Бойко Л. Д., Кружилин Г. Н. Теплоотдача при конденсации пара в трубе. — «Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт», 1966, № 5, с. 113—128. (Boyko L. D., Kruzhilin G. N. Emisión calorífica durante la condensación del vapor en el tubo. — "Nov. de la AC de la URSS. Energética y transporte", 1966, № 5, págs. 113—128, en ruso.)
7. Боришанский В. М., Фокин Б. С. Теплоотдача при пленочном кипении на вертикальной поверхности в условиях свободной конвекции в большом объеме. — В кн.: Конвективная теплопередача в двухфазном и